

Capítulo 10

Projeto de placas-sanduíche

Numa placa de material composto por lâminas reforçadas por fibras existem parâmetros que devem ser especificados pelo projetista: propriedades ortotrópicas de cada lâmina, a sequência das lâminas, suas orientações, espessuras e a quantidade dessas lâminas. Para uma placa-sanduíche o número de parâmetros pode ser maior: além dos anteriores é necessário ainda especificar as propriedades no núcleo e sua espessura, que determina o afastamento entre as faces e a espessura de cada face. Para facilitar o processo, alguns procedimentos simplificados de cálculo têm sido usados. São procedimentos não tão precisos quanto as teorias desenvolvidas ou referenciadas nos capítulos seguintes. São procedimentos geralmente baseados em fórmulas simples e argumentos como aqueles usados na “resistência dos materiais” tradicional. São portanto métodos recomendados para uma **estimativa inicial de dimensões**, para um **anteprojeto do componente**. Dependendo da responsabilidade do componente, ele pode ser diretamente construído, posto em testes, ou pode ter aquelas dimensões usadas numa modelagem mais sofisticada através de um método como o de elementos finitos, por exemplo.

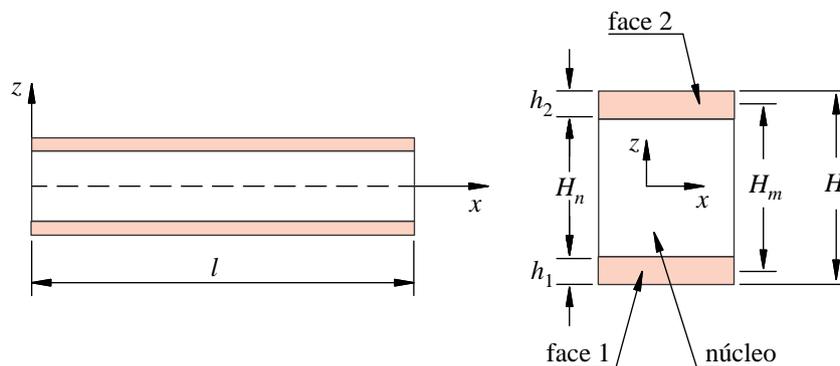


Figura 10.1: Nomenclatura usada numa viga-sanduíche.

Uma vez que existem vários parâmetros, é interessante estabelecer alguns deles, ou uma relação entre eles. De forma simplificada, o projeto tem as seguintes etapas:

- *primeira etapa:* as propriedades das faces e do núcleo são arbitradas;
- *segunda etapa:* as espessuras de cada face, h_1 , h_2 , e do núcleo, H_n , são obtidas.

A determinação das espessuras pode ser feita de duas formas básicas:

- a) Estimando valores e verificando sua adequação do ponto de vista de tensões máximas, deflexões máximas, carga crítica de flambagem, frequência natural ou outro critério aplicável. Caso a configuração se mostre não-satisfatória, alguma das espessuras é alterada e a verificação, repetida. Este processo normalmente é realizado com o uso de fórmulas simplificadas, geralmente algébricas. Uma coletânea destas fórmulas é apresentada nas próximas seções deste capítulo, algumas baseadas em formulações apresentadas em capítulos anteriores, outras em capítulos da Parte II.

A Seção 10.1 apresenta o tratamento de vigas-sanduiche e as Seções 10.2 e 10.3 o tratamento de painéis.

- b) Uma segunda forma para a determinação das espessuras consiste na minimização de algum parâmetro importante para o desempenho do componente, como o peso. As seções 10.4 e 10.5 mostram a determinação das espessuras que minimizam o peso da placa submetida a uma restrição. Essa restrição pode ser um valor dado de rigidez flexural, ou de momento fletor ou de carga compressiva considerando a flambagem, ou outro. Nesta etapa de cálculo as fórmulas são também simplificadas, algébricas, permitindo cálculo manual.

10.1 Flexão de vigas-sanduiche

Consideramos uma viga sanduiche com os parâmetros geométricos mostrados na Figura 10.1. Esta é, de fato, a mesma notação usada no restante do livro, onde l é o comprimento da viga, b e H a largura e a espessura da seção. As faces 1 e 2 são a inferior e superior, respectivamente, de espessuras h_1 e h_2 (ao longo do capítulo, quando necessário, a espessura da face também poderá ser denotada por h_f). H_n e H_m são as espessuras do núcleo e a distância entre as superfícies médias das faces, isto é,

$$H_m = H_n + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}. \quad (10.1)$$

O comportamento de uma viga-sanduiche pode ser analisado, em primeira aproximação, com o uso das teorias clássicas de vigas, desde que dois cuidados sejam tomados:

- deve-se, de forma clara, considerar as diferentes propriedades de material envolvido;
- deve-se considerar o efeito do cisalhamento transversal nas deflexões. Isto significa que se deve usar a teoria de Timoshenko ou uma de ordem superior no trato do cisalhamento transversal.

10.1.1 Rigidez flexural da viga-sanduiche

Consideramos primeiramente a rigidez flexural da viga, D_v , para uma **viga com faces idênticas e núcleo isotrópico**. Tomamos a definição (8.62), que neste caso assume a forma

$$D_v = E_f \frac{bh^3}{6} + E_f \frac{bhH_m^2}{2} + E_n \frac{bH_n}{12}, \quad (10.2)$$

onde E_f é o módulo de elasticidade equivalente da face na direção x e E_n o módulo do núcleo; h é a espessura de uma das faces. O primeiro termo em (10.2) representa a rigidez de uma face em relação a seu próprio centroide, e o terceiro termo é a rigidez de flexão do núcleo.

A princípio, a análise de uma viga ou placa-sanduiche não se distingue em nada da análise de uma viga ou placa laminada qualquer. Porém, as características especiais de um sanduiche geralmente permitem simplificações úteis. Uma análise comparativa dos diversos termos de (10.2) ajuda a visualizar as simplificações que podem ser feitas. Observe primeiramente que o segundo termo é sempre o dominante em sanduiches. Tomemos a relação do primeiro termo com o segundo [27]:

$$\frac{1^\circ}{2^\circ} = \frac{h^2}{3H_m^2}. \quad (10.3)$$

O primeiro termo será menor que 1% do segundo se

$$\boxed{\frac{H_m}{h} > 5,77} \quad (10.4)$$

Isto é, se $H_m > 5,77h$, o erro introduzido em ignorar a flexão de cada face é menor que 1%. De forma semelhante busquemos as condições em (10.2) para que

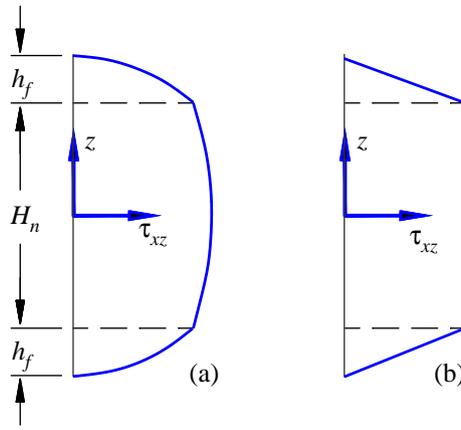


Figura 10.2: Distribuição de tensões cisalhantes numa viga-sanduiche. (a) distribuição quadrática; (b) efeito de núcleo com baixo E_n e da eliminação da rigidez flexural das faces.

tensão cisalhante no núcleo seja no máximo 1% maior que tensão máxima na face. Fazendo o quociente de (10.12), temos que

$$\frac{\tau_n |_{\max}}{\tau_f |_{\max}} = 1 + \left(\frac{E_n}{E_f} \right) \frac{H_n^2}{4h H_m} \lesssim 1,01, \quad (10.13)$$

que pode ser posto na forma aproximada

$$4 \left(\frac{E_f}{E_n} \right) \left(\frac{h}{H_n} \right) \left(\frac{H_m}{H_n} \right) \gtrsim 100 \quad (10.14)$$

Se usamos os limites para h/H_n de (10.6) e H_m/H_n de (10.7), que são equivalentes, chegamos aos limites

$$250 \lesssim \frac{E_f}{E_n} \lesssim 1.033. \quad (10.15)$$

Para núcleos com módulos nesta faixa é então admissível ignorar a variação de tensões cisalhantes, isto é, considerar uma distribuição uniforme como aquela ilustrada no núcleo da Figura 10.2b.

Observe que a faixa (10.15) é relacionada ao cisalhamento do núcleo, e (10.8) às tensões normais. Ambas as faixas são similares e podem se encaixar numa faixa comum como

$$250 \lesssim \frac{E_f}{E_n} \lesssim 569 \quad (10.16)$$

Isto significa que, se um núcleo é fraco o suficiente para prover pouca contribuição à rigidez flexural da viga, esse núcleo desenvolverá uma distribuição quase uniforme de tensões cisalhantes ao longo de sua espessura.

Caso o laminado satisfaça as condições (10.6) e (10.16), é possível simplesmente usar $E_n = 0$ nos cálculos, o que resultará para (10.2)

$$D_v = E_f \frac{bhH_m^2}{2} \quad (10.17)$$

A tensão normal vem de (10.9) e (10.16) como

$$\sigma_f = \frac{2Mz}{bhH_m^2} = \frac{Mz}{I_{yy}^f} \quad (10.18)$$

onde I_{yy}^f é o segundo momento de inércia das faces em relação ao eixo y da viga. Note que, **caso a**

face seja laminada, esse valor de σ_f será apenas um valor médio. A determinação das tensões em cada uma das lâminas que compõem a face deve ser feita pelo método usual em laminados, visto no Capítulo 6.

O uso de $E_n = 0$ em (10.11) resulta para as tensões cisalhantes

$$\tau_{xz}^n(z) = cte. = \frac{Q}{bH_m} \quad (10.19)$$

Note que esta tensão é média, dada pelo esforço cortante na seção dividido pela área, calculada entre as linhas médias das faces. A distribuição de tensões cisalhantes é então aquela ilustrada na Figura 10.2b. Note que a condição $E_n = 0$ resulta também numa distribuição linear de tensões nas faces.

Existe uma nomenclatura para descrever o estado de tensões resultante do fato de que $E_n = 0$: é o chamado **estado de tensões antiplano**, definido como aquele em que

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \quad (10.20)$$

Este corresponde aproximadamente ao estado de tensões no núcleo de um sanduíche sob a condição $E_n = 0$, de forma que se pode referir a um **núcleo antiplano**. No sanduíche, esse estado é associado às equações (10.17) a (10.19).

10.1.4 Correção da área para a deformação cisalhante

Consideremos o desenvolvimento mostrado na Seção 8.8.2 e na Figura 8.21, página 234, que ilustra a decomposição do deslocamento de uma viga em suas parcelas de flexão pura $w_f(x)$ e de cisalhamento $w_c(x)$ conforme (8.158). Para a viga homogênea ilustrada, o ângulo formado pela curva $w_c(x)$ é igual à deformação cisalhante γ_{xz} da seção, conforme (8.163). No caso da viga-sanduíche, aquela relação ainda pode ser usada, uma vez que ela produz uma deformação média sobre toda a seção. Para o sanduíche, porém, é possível refinar um pouco a aproximação, uma vez que o cisalhamento é desenvolvido preponderantemente no núcleo. **Esta correção é mais útil no caso em que as faces não possam ser consideradas finas, mas sim espessas.** Desta forma, consideremos o esquema para as deformações cisalhantes de um sanduíche visto na Figura 10.3.

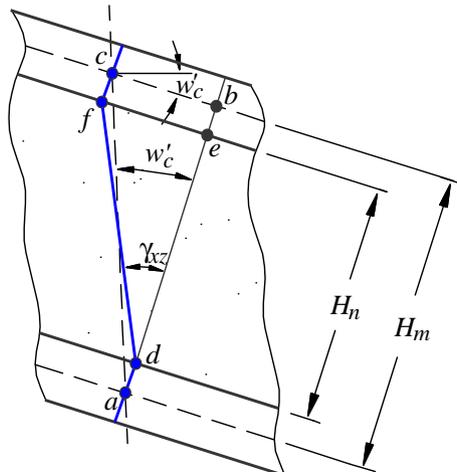


Figura 10.3: Deformação cisalhante de uma viga-sanduíche com faces espessas. dw_c/dx é definido pelo triângulo abc , e γ_{xz} pelo triângulo def .

Graças à baixa rigidez do núcleo, o cisalhamento é mais pronunciado nele que nas faces. Em (10.19) está implícito que γ_{xz} se desenvolveria entre os centroides das faces, o triângulo abc da Figura 10.3. Mas nessa figura observamos que uma melhor aproximação para γ_{xz} quando as faces são espessas é o triângulo def .

Temos que os segmentos \overline{bc} e \overline{ef} são dados por

$$\sigma_f = \frac{M_{\max} H/2}{I} = \frac{6M_{\max}}{6H^2} = \frac{6q_0 l^2}{8H^2} = \frac{6 \times 10^{-5} \times 1.000^2}{8 \times 10^2} = 7,5 \text{ MPa},$$

onde o momento máximo é $M_{\max} = p_0 l^2/8$, obtido do caso 14 da Seção 5.2. Para as vigas-sanduiche a tensão vem de (10.18):

$$\sigma_f = \frac{2M_{\max} H/2}{bh_f H_m^2} = \frac{q_0 l^2 H}{8h_f H_m^2} = \frac{10^{-5} \times 1000^2 H}{8 \times 0,5 H_m^2} = 2,50 \frac{H}{H_m^2}.$$

Os resultados podem ser vistos na tabela do Exemplo 1 do Capítulo 9, página 242.

c) Massa das vigas

A massa das vigas pode ser obtida simplesmente adicionando as massas das faces com a do núcleo. A viga homogênea pode ser considerada aqui de núcleo com espessura nula. Então,

$$m = m_f + m_n = bl [2h_f \rho_f + H_n \rho_n].$$

Substituindo os valores dados no enunciado do Exemplo 1 do Capítulo 9, temos

$$m = 0,250 \times 1,0 [2 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2.710 + H_n \times 48] = 0,6775 + 122H_n,$$

com os valores dados em kg e m. Os resultados e comentários são vistos no Exemplo 9.1.

10.1.7 Flambagem de vigas-sanduiche

A definição das constantes de rigidez D_v e GA_s em (10.2), (10.17) e (10.22) permite também que se usem as fórmulas de flambagem já obtidas para vigas homogêneas de Timoshenko. Para uma viga bi-rotulada, a eq.(16.48), página 418, dá a carga crítica como

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 D_v}{l^2 + \frac{\pi^2 D_v}{GA_s}} \quad (10.29)$$

10.2 Flexão de placas-sanduiche

Em etapa de pré-cálculo, em vez de usarmos o valor de D_{11} da matriz de rigidez flexural, podemos usar uma aproximação obtida pela teoria da resistência dos materiais. Consideremos um segmento de seção de uma placa-sanduiche como mostrado na Figura 10.4.

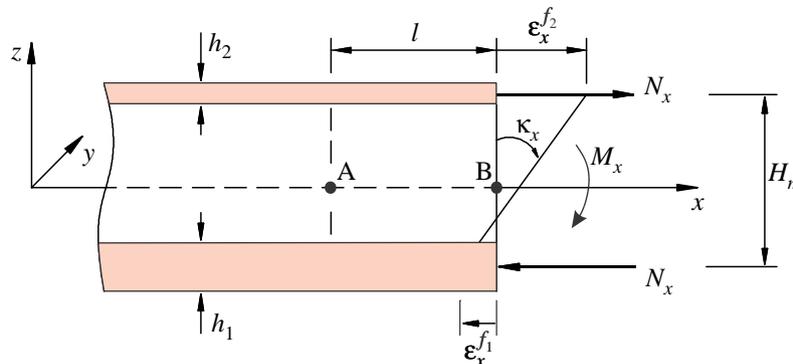


Figura 10.4: Análise de “resistência dos materiais” para flexão de placas-sanduiche.

A seção está localmente submetida a um esforço de flexão M_x que desenvolve, principalmente, uma curvatura κ_x . Considerando que as faces sejam relativamente finas, podemos tomá-las como

$$D_x = \frac{E^f h_1 h_2 H_m^2}{\lambda (h_1 + h_2)}, \quad \lambda = 1 - (\nu^f)^2. \quad (10.38)$$

Finalmente, para **faces isotrópicas de material e espessuras idênticas**,

$$D_x = \frac{E^f h_f H_m^2}{2\lambda}. \quad (10.39)$$

Observação sobre vigas – Observe que todas as deduções desta seção poderiam ser repetidas de forma idêntica para o caso de vigas, bastando definir $A_{11}^{f_i}$ em (10.35) como $E_x^{f_i} h_i$, isto é, usando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Nesse caso, as fórmulas para rigidez flexural D_x de placa (10.36)–(10.39) se tornam **rigidez de viga** D_v , apenas usando $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ onde aplicável.

10.3 Deflexão de placa-sanduiche retangular

Consideramos aqui uma placa-sanduiche retangular, simplesmente apoiada nas quatro bordas, com faces isotrópicas e homogêneas, núcleo ortotrópico, submetida a uma carga distribuída uniforme $q(x) = q_o$. A solução deste problema exige a prévia determinação das equações diferenciais do problema de flexão de placas-sanduiche, que será vista apenas no Capítulo 15. A solução exata de elasticidade 3D para placas ortotrópicas retangulares, sanduiche ou não, é detalhada na seção 15.3. Em geral as soluções de problemas de placas são possíveis apenas em forma de série de funções ou de forma numérica, como pelo Método de Elementos Finitos.

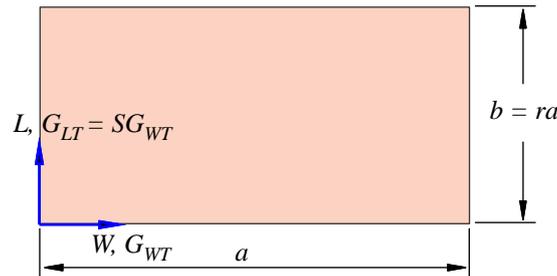


Figura 10.5: Nomenclatura usada na solução do painel-sanduiche retangular. L e W são as direções principais do núcleo. $S = G_{LT}/G_{WT}$.

Numa etapa de pré-dimensionamento, porém, é necessário dispor da solução em forma analítica para algum tipo de problema, permitindo um cálculo manual. O problema da placa retangular pode primeiramente ter sua solução obtida em forma de série infinita. Esta solução pode ser programada numericamente e calculada para uma série de combinações de valores de dimensões e propriedades elásticas, dentro de uma certa faixa de valores mais usuais. São então obtidas tabelas de soluções para os diversos pontos do espaço de dados. Essas soluções discretas podem ser representadas em forma de gráficos, ou ainda podem ser usadas para obter funções algébricas aproximadas que passem próximo destes pontos usando técnicas de ajuste de curvas. Este último procedimento é o que adotamos aqui.

Considere a placa com as dimensões e eixos como na Figura 10.5. O procedimento mostrado aqui permite o cálculo de deslocamentos e tensões em alguns pontos da placa, com ajuda das seguintes funções:

- Deflexão máxima $w_{\max} = K_1 \frac{2q_o b^4 \lambda}{E^f h_f H_m^2}, \quad (10.40)$

- Tensão normal máxima na face, $\sigma_{\max} = K_2 \frac{q_o b^2}{H_m h_f}, \quad (10.41)$

Tabela 10.3: Fator K_3 para a tensão cisalhante no núcleo de um painel-sanduiche retangular simplesmente apoiado sob carga distribuída uniforme. As equações são obtidas por ajuste de curvas. Os valores de K_3 estão multiplicados por 100.

$S = G_{LT}/G_{WT}$	$r = b/a$	K_3
0,4	$0,0 \leq r \leq 0,5$	$37,0 + 10,0V - 3,07V^2$
0,4	$0,5 \leq r \leq 1,0$	$35,9 + 9,32r - 10,4r^2 + 12,0V - 1,93rV - 1,428r^2V - 3,71V^2$
1,0	$0,0 \leq r \leq 0,5$	37,0
1,0	$0,5 \leq r \leq 1,0$	$35,4 + 8,0r - 9,60r^2$
2,5	$0,0 \leq r \leq 0,5$	$37,0 - 5,12V + 0,32V^2$
2,5	$0,5 \leq r \leq 1,0$	$36,4 + 4,88r - 7,4r^2 - 7,25V + 5,93rV - 2,0r^2V + 0,25V^2$

Tabela 10.4: Fator K_4 para a tensão cisalhante no núcleo de um painel-sanduiche retangular simplesmente apoiado sob carga distribuída uniforme. As equações são obtidas por ajuste de curvas. Os valores de K_4 estão multiplicados por 100.

$S = G_{LT}/G_{WT}$	$r = b/a$	K_4
0,4	$0,0 \leq r \leq 0,2$	50,5
0,4	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$50,7 + 1,19r - 18,6r^2 - 2,09V - 8,68rV + 2,02r^2V + 1,37V^2$
1,0	$0,0 \leq r \leq 0,2$	50,5
1,0	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$50,6 + 0,70r - 17,67r^2$
2,5	$0,0 \leq r \leq 0,2$	50,5
2,5	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$50,6 + 0,76r - 17,6r^2 - 0,476V + 0,345rV - 0,51r^2V$

10.4 Minimização de peso para rigidez flexural dada

Numa etapa de pré-projeto de um painel-sanduiche, em lugar de estabelecer todos os parâmetros, propriedades e espessuras de faces e núcleo, e em seguida fazer a análise de segurança, é possível estabelecer inicialmente apenas as propriedades e usar métodos de otimização para obter as espessuras dos constituintes. O desenvolvimento apresentado nesta seção e na próxima é o proposto por Kuenzi [117]. Inicialmente define-se a massa da placa por unidade de área, menos a massa da cola entre faces e núcleo, como:

$$m_c = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_n H_m, \quad (10.45)$$

onde ρ_1 , ρ_2 e ρ_n são as densidades das faces e do núcleo, em kg/m^3 . Supõe-se que a rigidez D_x seja um valor conhecido, aquele que se deseja para a placa, juntamente com E_1 , E_2 e ν_{12} em cada face, além das densidades dos componentes. Resolve-se pois o seguinte problema de minimização:

Obter h_1 , h_2 e H_m tal que a massa da placa seja minimizada, sob a restrição imposta pela eq.(10.36), com o valor de D_x e propriedades elásticas impostas.

A solução desse problema poderia ser obtida eliminando H_n pela substituição de (10.36) em (10.45) e diferenciando a expressão de m_c assim obtida em relação às duas variáveis restantes, h_1 e h_2 . Mais simples, porém, é o uso do método dos multiplicadores de Lagrange. A função objetiva e a restrição tem a seguinte forma:

de falha que a placa pode sofrer. Assim, é necessário que os valores calculados sejam comparados com os valores obtidos por outros procedimentos.

10.5 Minimização de peso com momento fletor dado

Procuramos agora as dimensões da placa de tal forma a minimizar a massa total, dadas as propriedades de cada componente, sob a restrição de que a placa deve suportar um **momento fletor** M_x **dado** [117]. Consideramos o caso de **faces idênticas**, tal que

$$M_x = \sigma_f H_m h_f, \quad (10.65)$$

onde σ_f é a tensão numa face, h_f é a espessura de cada face e H_m , a distância entre os centros das faces. A expressão (10.65) é então a restrição do problema de minimização e a função objetivo é a massa da placa dada por

$$m_c = 2\rho_f h_f + \rho_n H_m. \quad (10.66)$$

Aqui é possível resolver o problema por substituição. Eliminamos a espessura da face h de (10.65) em (10.66), obtendo

$$m_c = \frac{2\rho_f M_x}{\sigma_f H_m} + \rho_n H_m. \quad (10.67)$$

Diferenciando m_c em relação a H_m obtém-se

$$\boxed{H_m = \left(\frac{2\rho_f M_x}{\sigma_f \rho_n} \right)^{1/2}, \quad h_f = \left(\frac{\rho_n M_x}{2\rho_f \sigma_f} \right)^{1/2}} \quad (10.68)$$

A relação entre a massa do núcleo e a massa total é

$$\frac{m_n}{m_c} = \frac{\rho_n}{2\rho_f \frac{h_f}{H_m} + \rho_n}.$$

De (10.68),

$$\frac{h_f}{H_m} = \frac{\rho_n}{2\rho_f}, \quad (10.69)$$

e conseqüentemente,

$$\boxed{\frac{M_n}{M} = \frac{1}{2}} \quad (10.70)$$

O valor da tensão σ_f na face pode ser feito igual a um valor limite de tensão, como por exemplo a tensão relacionada à carga de flambagem local ou uma fração da tensão limite de escoamento.

10.6 Rotina de cálculo para sanduíches

Apresentamos a seguir um roteiro das principais etapas no processo de projeto de vigas e placas-sanduíche retangulares. O leitor não terá dificuldades em fazer as adaptações necessárias ao projeto de painéis não-retangulares ou mesmo cascas. Nesses casos, frequentemente as tensões e deslocamentos usados nas diversas etapas são obtidos pelo método de elementos finitos.

ETAPA 1 – Viga ou placa?

Caso o painel seja apoiado apenas por duas bordas opostas, é necessário decidir se ele poderá ser analisado com as fórmulas de viga, de placa infinita sob flexão cilíndrica ou de placa retangular finita. Uma decisão aproximada pode ser tomada com base nos resultados de placas isotrópicas:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &\lesssim 0,3 \longrightarrow \text{comportamento de viga,} \\ \frac{a}{b} &\gtrsim 0,8 \longrightarrow \text{placa infinita sob flexão cilíndrica.} \end{aligned} \quad (10.71)$$

Sem dúvida, componentes apoiados por mais de duas bordas devem ser analisados como placas.

ETAPA 2 – Carregamentos

Identificar os carregamentos aplicados, se de flexão ou compressão. Buscar uma adaptação dos carregamentos aos tipos disponíveis nas ferramentas simplificadas de cálculo em uso. O uso de carregamentos mais complexos, próximos da situação real, fica para as etapas seguintes de análise, com o uso do método de elementos finitos, por exemplo.

Os carregamentos para os quais apresentamos solução de forma simples são os seguintes:

- q_o – carga distribuída uniforme por unidade de área sobre placa simplesmente apoiada;
- p_o – carga distribuída uniforme por unidade de comprimento de viga;
- F – carga concentrada transversal ou compressiva em viga.

ETAPA 3 – Definir os materiais das faces e do núcleo

Faces iguais ou diferentes? Isotrópicas e homogêneas? Laminadas? Núcleo isotrópico de espuma, laminado, de colméia ou corrugado?

ETAPA 4 – Propriedades elásticas

Identificar E_x^f e ν_{xy}^f nas faces. Em caso de faces laminadas, o módulo equivalente E_x^f na face é obtido usando os procedimentos indicados em (10.25). Observe que se ignora o efeito de acoplamento membrana-flexão. Observe também que, no caso de faces laminadas, esta etapa não pode ser completamente dissociada da Etapa 5, uma vez que o cálculo do módulo equivalente E_x^f da face depende das espessuras das lâminas (exceto no caso de laminado com lâminas idênticas). Neste caso deve-se partir de um valor estimado para E_x^f para o início dos cálculos. Os valores da Tabela 9.8, página 253, podem ser usados como estimativa em caso de se usarem laminados pré-fabricado nas faces.

Se forem disponíveis ferramentas computacionais de cálculo para sanduíches com faces ortotrópicas, será necessário também definir ν_{xy}^f , E_y^f e G_{xy}^f para as faces.

Identificar E_x^n , E_y^n , ν_{xy}^n , G_{xz}^n e G_{yz}^n do núcleo. Caso seja de colméia, pode-se usar a notação G_{WT} e G_{LT} como na Figura 10.5. Pode-se usar dados de fabricante ou estimar as propriedades usando as Tabelas 9.4 e 9.5, página 254. A formulação analítica disponível para o pré-cálculo permite apenas núcleos com as direções principais paralelas aos eixos x e y . Caso o núcleo seja de corrugado, usar dados do fabricante ou estimar as propriedades usando a Seção 6.5. Caso o núcleo seja de **espuma**, usar dados do fabricante ou estimar as propriedades da Tabela 9.7, página 260.

ETAPA 4a – Propriedades de resistência

Identificar para as **faces**: resistências a tração e compressão X_t e X_c na direção x (ou W , conforme a Figura 10.5), e Y_t e Y_c na direção y (ou L). Usar por exemplo os dados da Tabela 9.8, página 253.

Identificar para o **núcleo**: tensões resistentes de cisalhamento transversal S_{WT} e S_{LT} usando por exemplo os dados das Tabelas 9.4 e 9.5, página 254.

Identificar a deflexão máxima admissível Δ_z para o sanduíche.

ETAPA 5 – Espessuras

Definir as espessuras h_1 , h_2 das faces e H_n do núcleo. Em caso de faces isotrópico-homogêneas esta etapa é perfeitamente separável da definição das propriedades na Etapa 4. Essas espessuras podem ser simplesmente arbitradas com base na experiência, ou podem ser inspiradas nos resultados de **processos de otimização** como aqueles ilustrados nas seções 10.4 e 10.5.

ETAPA 5a – Dimensões das células de colméia

Em caso de núcleo de colméia, identificar:

10.6.1 Exemplo 2 – Otimização de placa-sanduíche sob flexão

Temos um vão de $a \times b = 3,0 \text{ m} \times 1,0 \text{ m}$ que desejamos vencer com uma placa-sanduíche simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída uniforme $q_o = 0,01 \text{ N/mm}^2$ (100 kgf/m²). Definimos o uso de um sanduíche com faces e núcleo de colméia de alumínio. Desejamos fazer o projeto e a verificação de segurança. Os cálculos necessários estão programados no programa Sandpro.

Solução:

Faces: Inicialmente especificamos o uso do alumínio 5052 para as faces, idênticas. Da Tabela 9.8, página 261, temos as propriedades da face:

Densidade	$\rho_f = 2.710 \text{ kg/m}^3$,	Coefficiente de Poisson	$\nu^f = 0,33$,
Módulo de elasticidade	$E^f = 70 \text{ GPa}$,	Tensão limite de escoamento	$\sigma_E = 165 \text{ MPa}$.

Núcleo: Da Tabela 9.5, página 255, especificamos inicialmente uma colméia de alumínio 5052 com as seguintes características:

Tamanho da célula	$c = 9,5 \text{ mm}$ (3/8”),		
Espessura da chapa	$h_c = 0,051 \text{ mm}$,		
Densidade nominal	$\rho_n = 50 \text{ kg/m}^3$,		
Resistência ao esmagamento	$Z_{esm} = 0,9 \text{ MPa}$,		
Módulo na direção T	$E_T = 500 \text{ MPa}$,		
Resistência ao cisalhamento	$S_{LT} = 1,0 \text{ MPa}$,	$S_{WT} = 0,6 \text{ MPa}$,	
Módulo cisalhante	$G_{LT} = 300 \text{ MPa}$,	$G_{WT} = 150 \text{ MPa}$.	

Os parâmetros restantes a serem definidos são, portanto, as espessuras h_1 e h_2 das faces e H_n do núcleo. Definimos que as faces são idênticas, isto é, $h_1 = h_2 = h_f$. Especificamos ainda que a colméia é posicionada com as direções W e L paralelas aos lados de comprimentos a e b da placa, respectivamente, como na Figura 10.5.

Podemos conseguir uma estimativa para as espessuras usando o processo de otimização da Seção 10.5. Ali se obtêm as espessuras que minimizam a massa da placa para um momento fletor dado. Sem dúvida não há um procedimento simples de cálculo dos esforços numa placa simplesmente apoiada nos quatro lados. Entretanto, como a placa tem um aspecto

$$r = \frac{b}{a} = \frac{1.000}{3.000} = 0,33,$$

podemos obter uma ordem de grandeza considerando uma “viga” biapoiada com comprimento $b = 1.000 \text{ mm}$ e largura $a = 3.000 \text{ mm}$. Neste caso, da seção 5.2, página 119, o momento fletor máximo por unidade de largura da viga é

$$M_x = \frac{q_o b^2}{8} = \frac{0,001 \cdot 10^6}{8} = 125 \text{ Nmm}.$$

O processo de otimização, com a eq.(10.68), dá

$$H_m = \left(\frac{2\rho_f M_x}{\sigma_E \rho_n} \right)^{1/2} = \left(\frac{2 \times 2.710 \times 125}{165 \times 50} \right)^{1/2} = 9,10 \text{ mm},$$

$$h_f = \left(\frac{\rho_n M_x}{2\rho_f \sigma_E} \right)^{1/2} = \left(\frac{50 \times 125}{2 \times 2.710 \times 165} \right)^{1/2} = 0,080 \text{ mm}.$$

A espessura sugerida para a face parece muito fina, e provavelmente o sanduíche falharia por modos locais de falha. Então definimos as seguintes dimensões para a placa:

- espessura da face $h_f = 0,50 \text{ mm}$
- espessura do núcleo $H_n = 10 \text{ mm}$.

10.6.2 Exemplo 3 – Sanduiche com núcleo de espuma de poliuretano

Consideremos o problema do Exemplo 2, mas desejando agora substituir o núcleo de colméia por um de espuma de poliuretano. O material da face escolhido é o mesmo alumínio do Exemplo 2 e o núcleo tem as propriedades mostradas na Tabela 9.7, página 260. (Observe que se devem buscar propriedades do fabricante que efetivamente fornecerá o produto, ou valores obtidos experimentalmente, ou ainda especificar os valores na aquisição.)

Solução:

Núcleo: espuma de poliuretano com

Densidade	$\rho_n = 70 \text{ kg/m}^3$,	Módulo	$E_T = 19,0 \text{ MPa}$,
Resistência compressiva	$Z_{esm} = 0,5 \text{ MPa}$,	Módulo cisalhante	$G_{WT} = G_{LT} = 5,0 \text{ MPa}$,
Resistência cisalhante	$S_{WT} = S_{LT} = 0,6 \text{ MPa}$.		

O processo de cálculo para a determinação das espessuras das faces h_f e do núcleo H_n é similar ao do Exemplo 2, de forma que o desenvolvimento a seguir é feito de forma abreviada.

O processo de otimização, usando (10.68), resulta em

$$H_m = \left(\frac{2\rho_f M_x}{\sigma_E \rho_n} \right)^{1/2} = \left(\frac{2 \times 2.710 \times 125}{165 \times 70} \right)^{1/2} = 7,7 \text{ mm},$$

$$h_f = \left(\frac{\rho_n M_x}{2\rho_f \sigma_E} \right)^{1/2} = \left(\frac{70 \times 125}{2 \times 2.710 \times 165} \right)^{1/2} = 0,1 \text{ mm}.$$

Observe que estes cálculos não levam em conta as características e o comportamento do núcleo, exceto a densidade. Comparando com o núcleo de colméia do Exemplo 2, vemos que aqui a resistência ao cisalhamento $S_{LT} = 0,6 \text{ MPa}$ é similar ao da colméia (1,0 MPa), mas os módulos de elasticidade são muito inferiores.

Estipulamos então as mesmas espessuras do Exemplo 2:

- espessura da face $h_f = 0,5 \text{ mm}$,
- espessura do núcleo $H_n = 10 \text{ mm}$.

Os valores de espessura média H_m , total H , e de rigidez flexural D_x são os mesmos anteriores, dados por 10,5 mm, 11 mm e $2,165 \times 10^6 \text{ Nmm}$, respectivamente. A deflexão e as tensões no painel vêm da Seção 10.3. Os fatores necessários vêm de (10.44):

$$S = \frac{G_{LT}}{G_{WT}} = 1, \quad V = \frac{\pi^2 D_x}{b^2 H_m G_{WT}} = 1,628 \cdot 10^{-3}.$$

Os fatores $K_1 - K_4$ para as tensões são

$$K_1 = 0,00848, \quad K_2 = 0,0628, \quad K_3 = 0,1898, \quad K_4 = 0,2573.$$

Estes fatores podem ser calculados pelas fórmulas da Seção 10.3, ou obtidos diretamente do programa Sandpro.

As tensões aplicadas e os limites são os seguintes, conforme as eqs.(10.40)–(10.43):

- Deflexão $w_{\max} = 3,9 \text{ mm} < \frac{b}{300} = \frac{1.000}{300} = 3,3$, portanto não passa.
- Tensão na face $\sigma_f = 11,9 \text{ MPa} < \sigma_E = 165 \text{ MPa} \implies OK!$
- Tensão cisalhante no núcleo no meio do lado de comprimento b : $\tau_b = 0,018 \text{ MPa} < S_{WT} = 0,6 \text{ MPa} \implies OK!$
- Tensão cisalhante no núcleo no meio do lado de comprimento a : $\tau_a = 0,025 \text{ MPa} < S_{LT} = 0,6 \text{ MPa} \implies OK!$

A análise de flambagem local (*wrinkling*) é feita como no Capítulo 17. O parâmetro característico da flambagem de placas sobre apoio elástico é dado por (17.29) como

$$\rho = \frac{h_f}{H} \left(\frac{E^f}{E^n} \right)^{1/3} = \frac{0,5}{11} \left(\frac{70.000}{19} \right)^{1/3} = 0,702.$$

Deve-se buscar o valor de B_2 para o caso II de flambagem sob flexão, que neste caso será $B_2 = 0,6196$. De (17.31) temos a tensão crítica de *wrinkling*:

$$\sigma_{cr} = B_2 \left(E_x^f \right)^{1/3} \left(E_x^n \right)^{2/3} = 0,6196 \times 70.000^{1/3} 19^{2/3} = 182 \text{ MPa.}$$

Note que este valor é superior à tensão aplicada à face, $\sigma_f = 11,9 \text{ MPa}$, portanto a face passa no teste. Note também que aqui não ocorre o *dimpling*, uma vez que esse é um fenômeno exclusivo dos núcleos de colméia. Note, finalmente, que o painel passa em todos os testes, embora a deflexão seja um pouco excessiva. O peso dessa configuração é 10,23 kg.

10.7 Exercícios

10.1 Deduza a equação (10.33).

10.2 Deduza a equação (10.35).

10.3 Deduza a equação (10.36).

10.4 Obtenha (10.49) e tente resolvê-la com um manipulador simbólico.

10.5 Obtenha (10.62). Explique o seu significado.

10.6 Refaça o Exemplo 2 obtendo um painel que satisfaça a todas as restrições impostas. Obtenha o coeficiente de segurança para a configuração obtida.