

Capítulo 17

Instabilidade local em painéis-sanduíche

Num painel-sanduíche, as faces podem ser vistas como placas sob compressão (ou tração) montadas sobre apoios elásticos. Esse apoio é o núcleo do sanduíche, que pode ser homogêneo como nos casos de núcleos de espuma, ou discreto como nos casos de núcleos de colmeia ou de corrugados. Esse arranjo pode levar a diversos tipos de falha no sanduíche associados à instabilidade local das faces, como ilustrado qualitativamente no Capítulo 10. A quantificação aproximada de alguns desses modos de falha foi sucintamente apresentada no Capítulo 15 para falha por *wrinkling* e *dimpling* de faces em sanduíches de núcleo de colmeia, e para falhas por *wrinkling* em casos de núcleo de espuma. Neste capítulo, apresentaremos as análises que deram origem àquelas formulações, iniciando pelo caso do núcleo isotrópico-homogêneo. Toda a análise que segue neste capítulo é baseada nos trabalhos de Gough e Hoff [77] e de Hoff [99], também sumarizados por Allen [27] e Vinson [208].

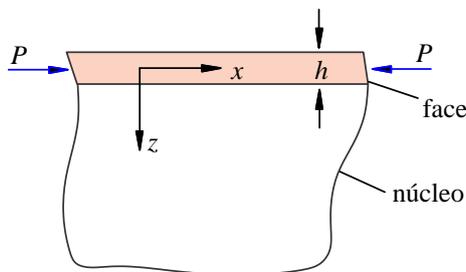


Figura 17.1: Modelo de viga sobre apoio elástico semi-infinito.

17.1 Flambagem de viga sobre apoio elástico

Consideramos inicialmente a análise de uma situação mais simples: uma viga, em lugar de uma placa, **apoiada sobre um núcleo homogêneo-isotrópico**. Além disso, como um primeiro caso, consideramos o núcleo como um meio semi-infinito, isto é, a extensão do núcleo é indefinida na direção de sua espessura. O problema pode ser visualizado como na Figura 17.1. A equação diferencial da viga é

$$D_v \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = b \sigma_z, \quad (17.1)$$

onde D_v é a rigidez flexural da viga, igual a EI , P é a força compressiva em Newtons e b a espessura ao longo da direção y . O deslocamento transversal w da viga é feito contra a resistência oferecida pelo apoio elástico, de forma que se desenvolve uma tensão normal σ_z na superfície da viga. Observe o problema é modelado como um EPT, com $\sigma_y = 0$.

Supõe-se que a viga flamba a uma configuração senoidal com meio comprimento de onda l_w :

$$w(x) = w_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l_w}. \quad (17.2)$$

Esse comprimento l_w é ainda uma incógnita do problema. Na realidade, o problema da Figura 17.1 só pode ser resolvido pela conjugação das análises dos dois problemas, o da viga e o do meio elástico onde ela se apoia, como na Figura 17.2.

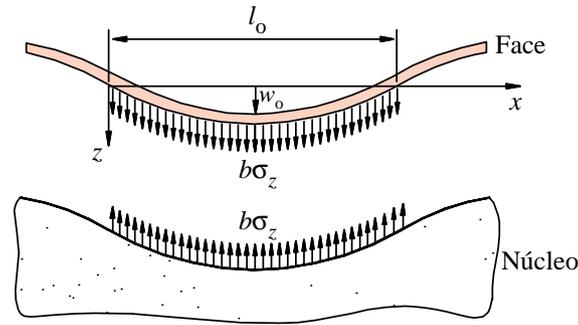


Figura 17.2: Decomposição em dois problemas, um para a viga e outro no apoio elástico.

A análise do problema do meio elástico será mostrada na Seção 17.1.1. Ela é feita tomando o campo de deslocamentos (17.2) como uma das condições de contorno. A solução deste problema resulta na seguinte distribuição de tensões na interface:

$$\sigma_z = -\frac{a}{l_w} w_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l_w}, \quad \text{onde} \quad a = \frac{2\pi E_n}{(3 - \nu_n)(1 + \nu_n)}, \quad (17.3)$$

e E_n e ν_n são o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do meio semi-infinito, no caso, o núcleo. Note que a tensão é claramente proporcional aos deslocamentos, como visto em (17.3).

A solução do problema conjunto é então obtida levando (17.2) e (17.3) à equação diferencial do problema de flambagem da viga, eq.(17.1). Após a simplificação dos termos $w_0 \operatorname{sen}(\pi x/l_w)$ temos a equação algébrica

$$D_v \left(\frac{\pi}{l_w} \right)^4 - P \left(\frac{\pi}{l_w} \right)^2 = -\frac{ab}{l_w}. \quad (17.4)$$

Esta expressão pode ser posta numa outra forma, fazendo

$$D_v = E_f I = E_f \frac{bh^3}{12}, \quad \text{e} \quad P = \sigma bh, \quad (17.5)$$

onde E_f é o módulo da face, donde resulta

$$\sigma = \frac{\pi^2 E_f}{12} \left(\frac{l_w}{h} \right)^{-2} + \frac{a}{\pi^2} \left(\frac{l_w}{h} \right). \quad (17.6)$$

σ é a carga crítica, relacionada a l_w/h . Esta função tem a forma mostrada na Figura 17.3. Ali a variação é mostrada para uma face de aço, com $E_f = 200.000$ MPa, e núcleo com $E_n = 200$ MPa e $\nu_n = 0,25$. De fato, o mais importante dessa curva é o seu mínimo, que define o valor de tensões na face mais provável de desencadear a flambagem. Este é então considerado o valor crítico σ_{cr} de flambagem do conjunto face-núcleo. A determinação desse mínimo é feita de forma simples por:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial (l_w/h)} = 0. \quad (17.7)$$

A solução deste problema é

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{l_w}{h}\right)_{cr} &= B_1 \left(\frac{E_f}{E_n}\right)^{1/3}, & \text{onde} & \quad B_1 = \pi \left[\frac{(3 - \nu_n)(1 + \nu_n)}{12}\right]^{1/3}, \\
 \sigma_{cr} &= B_2 E_f^{1/3} E_n^{2/3}, & \text{onde} & \quad B_2 = 3 \left[12(3 - \nu_n)^2(1 + \nu_n)^2\right]^{-1/3}
 \end{aligned}
 \tag{17.8}$$

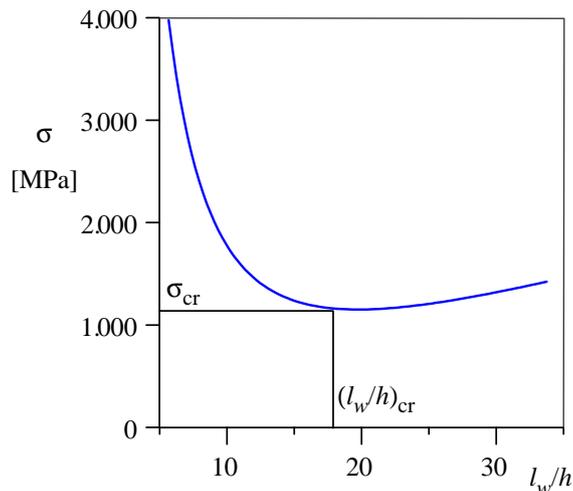


Figura 17.3: Variação da carga crítica com l_w/h para face de aço com $E_f = 200.000$ MPa e núcleo com $\nu_n = 0,25$, $E_n = 200$ MPa, conforme as eqs.(17.6) e (17.3).

A Tabela a seguir mostra valores de B_1 e B_2 para alguns valores de ν_n . Nota-se que esses valores são pouco sensíveis a ν_n .

ν_n	B_1	B_2
0	1,98	0,63
0,25	2,07	0,575
0,30	2,09	0,570
0,50	2,13	0,545

A eq.(17.8) dá uma estimativa da tensão crítica na face, e pode ser usada caso a espessura do núcleo do sanduíche seja “grande”. A solução (17.3) que originou (17.8) foi baseada no pressuposto de que a tensão σ_z no núcleo se atenua a zero conforme z cresce ao infinito. Caso o núcleo não tenha espessura “infinita”, ocorrerá interação entre as duas faces do sanduíche e outra solução para a carga crítica deve ser buscada, como desenvolvido nas seções seguintes. Ali também se dará uma estimativa quantitativa do que se entende por uma espessura grande do núcleo.

17.1.1 Soluções em núcleos de espessura infinita e finita

Aqui identificamos duas situações de carregamento: a compressão apenas da face, como idealizado no caso II da Figura 17.4 e a compressão do painel-sanduíche como nos casos III e IV. O caso II tem semelhança com o que ocorre na flexão de uma viga, em que uma das faces está sob tração e a outra face sob compressão.

O caso I corresponde à espessura infinita do núcleo. Caso o sanduíche como um todo esteja comprimido, são identificadas as duas possibilidades, denotadas por casos III e IV, para a configuração flambada das faces. A solução no núcleo depende do caso considerado. Os dois primeiros casos serão analisados a seguir, mas a formulação geral é a mesma. Observe que estamos usando elasticidade plana, EPT. Em coordenadas retangulares a solução de um problema de tensões num meio isotrópico elástico-linear pode ser sintetizada na obtenção de uma *função tensão* $\phi(x, z)$ (ver Malvern [129] ou Timoshenko [196]), que seja a solução da equação diferencial bi-harmônica $\nabla^4 \phi = 0$, isto é,

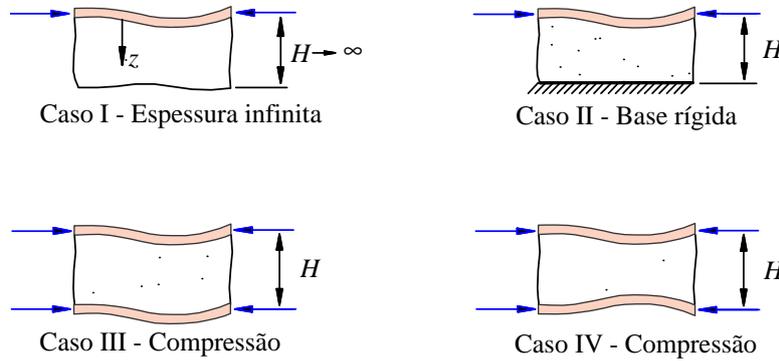


Figura 17.4: Ilustração dos casos I, núcleo com espessura infinita; II, flexão com uma face rígida; e casos III e IV, compressão anti-simétrica e simétrica, respectivamente.

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} = 0, \quad (17.9)$$

e devidas condições de contorno. As tensões se relacionam à função tensão ϕ por

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}; \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \quad (17.10)$$

com as demais componentes de tensão nulas. Essas tensões satisfazem as equações de equilíbrio para qualquer função $\phi(x, z)$ contínua. As deformações e os deslocamentos vêm das relações cinemáticas lineares e da lei de Hooke para materiais isotrópicos no EPT aplicado ao núcleo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_n} (\sigma_x - \nu_n \sigma_z), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E_n} (\sigma_z - \nu_n \sigma_x), \quad (17.11)$$

onde E_n e ν_n são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material do núcleo.

A equação bi-harmônica (17.9) é proveniente da única das seis condições de compatibilidade não-triviais que resta após a substituição das deformações usando (17.10) e (17.11). A solução geral de (17.9) pode ter suas variáveis separadas na forma

$$\phi(x, z) = \text{sen} \frac{m\pi x}{l_w} \cdot Z(z), \quad (17.12)$$

que substituída na (17.9) produz

$$\alpha^4 Z - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial z^4} = 0, \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{m\pi}{l_w}. \quad (17.13)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária homogênea em termos da função auxiliar $Z(z)$. A solução pode ser obtida mais facilmente reescrevendo-a na forma

$$\left(\alpha^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\alpha^2 Z - \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (17.14)$$

o que resulta no sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \alpha^2 G - \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0, & \text{onde} \\ \alpha^2 Z - \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = G(z). \end{cases} \quad (17.15)$$

A primeira equação é diferencial ordinária comum, de segunda ordem e coeficientes constantes, em termos de uma nova função incógnita $G(z)$, e pode ser resolvida de forma padrão. Uma vez obtida $G(z)$, a segunda equação é resolvida para $Z(z)$, com o que a equação (17.12) torna-se

$$\begin{cases} w(x, H) = 0, \\ w(x, 0) = w_0 \operatorname{sen} \alpha x, \\ \varepsilon_x(x, H) = 0, \\ \varepsilon_x(x, 0) = 0, \end{cases} \quad \text{para } \alpha = \pi/l_w, \quad (17.22)$$

onde H é a espessura do núcleo. A aplicação destas condições a (17.17)–(17.18) permite a determinação das constantes de integração como

$$\begin{cases} C_1 = C_e \{ C_6 (3 - \nu_n) + \alpha^2 H^2 e^{2\alpha H} (1 + \nu_n) - \alpha H [-2e^{2\alpha H} + \nu_n (2 - 3e^{2\alpha H}) + \nu_n^2 e^{2\alpha H}] \}, \\ C_2 = C_e e^{2\alpha H} [C_6 (\nu_n - 3) + \alpha^2 H^2 (1 + \nu_n) + \alpha H (\nu_n - 2 - \nu_n^2)], \\ C_3 = \frac{E_n w_0}{C_5} [2\alpha H (e^{2\alpha H} - \nu_n) + (e^{2\alpha H} - 1) (3 - \nu_n)], \\ C_4 = \frac{E_n w_0 e^{2\alpha H}}{C_5} [C_6 (\nu_n - 3) - 2\alpha H (1 + \nu_n)], \text{ onde} \\ \begin{cases} C_5 = C_6^2 (3 - \nu_n)^2 + 2\alpha \nu_n H C_6 - 4\alpha^2 H^2 e^{2\alpha H} (1 + \nu_n), \\ C_6 = e^{2\alpha H} - 1, \end{cases} \end{cases} \quad (17.23)$$

para $C_e = \frac{2E_n w_0}{C_5 \alpha (1 + \nu_n)}$. Os valores das constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 podem então ser levados a (17.17) e (17.18), gerando as expressões para as tensões e deslocamentos.

17.1.2 Sumário das soluções

Gough [77] e Hoff [99] apresentaram os resultados das tensões e deslocamentos na superfície $z = 0$ do núcleo de forma compacta, o que mostraremos a seguir. Observe que em qualquer dos casos ilustrados na Figura 17.4 as constantes de integração C_1 , C_3 , C_3 e C_4 para a solução das tensões no núcleo em (17.17) são função de $\theta = \pi H/l_w$. A função $\sigma_z(x, z)$ em (17.17) pode ser particularizada para $z = 0$ e colocada na forma

$$\sigma_z(x) := \sigma_z(x, 0) = -\frac{w_0 E_n}{H} \theta^2 f(\theta) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l_w}, \quad \text{onde } \theta = \frac{\pi H}{l_w}, \quad (17.24)$$

onde claramente $\theta^2 f(\theta)$ pode ser posto em termos de C_1 , C_3 , C_3 e C_4 . Nessa equação foi usada a notação $\sigma_z(x) := \sigma_z(x, 0)$, para evitar a proliferação de símbolos. As expressões para $f(\theta)$ são as seguintes [77], [99]:

Caso I	→	$f(\theta) = \frac{2}{\theta} \frac{1}{(1 + \nu_n)(3 - \nu_n)}$,	
Caso II	→	$f(\theta) = \frac{2}{\theta} \frac{(3 - \nu_n) \operatorname{senh} \theta \cosh \theta + (1 + \nu_n) \theta}{(1 + \nu_n)(3 - \nu_n)^2 \operatorname{senh}^2 \theta - (1 + \nu_n)^3 \theta^2}$,	
Caso III	→	$f(\theta) = \frac{2}{\theta} \frac{-1 + \cosh \theta}{(1 + \nu_n)(3 - \nu_n) \operatorname{senh} \theta + (1 + \nu_n)^2 \theta^2}$,	
Caso IV	→	$f(\theta) = \frac{2}{\theta} \frac{\cosh \theta + 1}{3 \operatorname{senh} \theta - \theta}$	(caso $\nu_n = 0$).

(17.25)

	Caso II	Erro <	
$\nu_n = 0,25$	$\frac{l_w}{H} = 1,862\vartheta - 0,209\vartheta^2$	7%	
$\vartheta < 0,45$	$B_2 = 0,607 - 0,128\nu_n$	2%	
$\vartheta > 0,45$	$B_2 = 0,534 - 0,189\nu_n + 0,150\vartheta - 0,00347\vartheta^2 + 0,181\vartheta\nu_n$	2%	
	Caso III		
$\vartheta < 0,2$, qualquer ν_n	$\frac{l_w}{H} = 2,25\vartheta$,	1%	
$0,2 < \vartheta < 0,422$, $\nu_n = 0,25$	$\frac{l_w}{H} = 3,23 - 23,7\vartheta + 49,17\vartheta^2$	1%	(17.32)
$0,25 \leq \vartheta \leq \left[\frac{1 - \nu_n}{8(1 + \nu_n)} \right]^{1/3}$	$B_2 = 0,5 - 1,09\vartheta - 0,8\vartheta\nu_n - 2,3\vartheta^2 + 0,425\vartheta^4$	2%	
$\vartheta < 0,25$	$B_2 = 0,63 - 0,22\nu_n + 0,08\nu_n^2$,	0,1%	
	Caso IV	1%	
$\vartheta > 0$, $\nu_n = 0$	$\frac{l_w}{H} = 1,79\vartheta - 0,342\vartheta^2$		
$\vartheta > 0$, $\nu_n = 0$	$B_2 = 0,63 - 0,0884\vartheta + 0,481\vartheta^2 - 0,169\vartheta^3$		

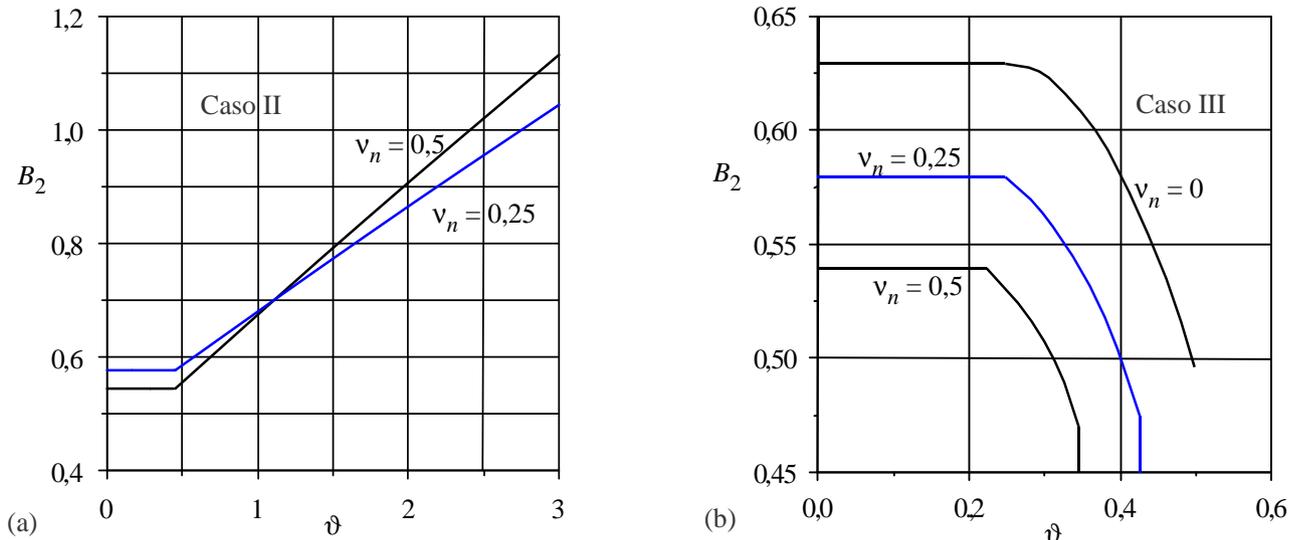


Figura 17.5: *Wrinkling* para os casos II e III de flexão de sanduíche de núcleo homogêneo-isotrópico. A abcissa ϑ é calculada por (17.29). B_2 é o fator a ser usado na eq.(17.31) para a determinação da tensão crítica na face. Os valores são obtidos pelas funções aproximadas (17.32). No caso III, as curvas de B_2 terminam em $\vartheta = [(1 - \nu_n)/8(1 + \nu_n)]^{1/3}$.

Os erros indicados na última coluna são os do processo de ajuste de curvas. As curvas aproximadas para B_2 em termos de ϑ para os casos II, III e IV são mostradas nas Figuras 17.5 e 17.6 para alguns valores de coeficiente de Poisson ν_n do núcleo. As equações aproximadas para B_2 em (17.32) podem ser usadas para a determinação de σ_{cr} , em vez dos gráficos. Entretanto, os gráficos são ainda úteis por mostrarem visualmente certos tipos de comportamento. Por exemplo, no **caso II**, observamos que em baixos valores de ϑ , o que corresponde a faces “fracas” em relação ao núcleo, na faixa $\vartheta \lesssim 0,385$,

Note que, como $\vartheta = 0,567$, portanto maior que 0,5, a Figura 17.5b indica que a flambagem não deve ocorrer pelo caso III, isto é, ela deve ser pelo caso IV.

17.3 Corrugados e colmeias – *Dimpling* e *wrinkling*

A análise na seção anterior era toda baseada em um núcleo homogêneo e isotrópico. Porém, duas classes importantes de núcleos caem fora desta categoria: são os núcleos de corrugados e as colmeias. No caso da colmeia, em geral, os módulos de elasticidade coplanares, paralelos às faces, são muito menores que o módulo na direção normal às faces.

Caso o tamanho das células seja muito menor que o comprimento de onda l_w de flambagem da face, é possível tratar o processo de *wrinkling* como se ocorresse num núcleo homogêneo ortotrópico. Esse tipo de análise foi desenvolvido até certo ponto por Norris [144].

Não apresentaremos aqui uma análise detalhada do *wrinkling em núcleos de colmeia*. Uma fórmula semi-empírica é freqüentemente usada como indicativo de projeto na forma [208]

$$\sigma_{cr} = \left[\frac{16h_f h_c E_T \sqrt{E_x^f E_y^f}}{9H_n c \left(1 - \nu_{xy}^f \nu_{yx}^f\right)} \right]^{1/2} \quad \text{wrinkling em sanduíche de colmeia: tensão crítica na face} \quad (17.34)$$

h_f e h_c são as espessuras da face do sanduíche e da chapa da colmeia. H_n é a espessura do núcleo, c é o diâmetro da célula da colmeia. E_x^f e E_y^f são módulos de elasticidade das faces. E_T é o módulo do núcleo na direção normal T (ou 3) do painel.

17.3.1 *Dimpling*

Outro modo de falha possível num sanduíche colmeia é a flambagem da face na pequena região em que ela não é suportada pelas paredes de uma célula. Este é o chamado ***dimpling* ou flambagem intra-celular**. Algumas fórmulas têm sido propostas. Uma delas, de Norris [143], é a seguinte:

$$\sigma_{cr} = \frac{E^f}{3} \left[\frac{h}{R_c} \right]^{2/3} \rightarrow \text{Dimpling} \quad (17.35)$$

onde R_c é o raio do maior círculo inscrito na célula, e σ_{cr} , a tensão crítica na face. Essa fórmula não tem uma base teórica completa, mas foi verificada em alguns casos por resultados experimentais.

Vinson [208], usando desenvolvimentos de teoria de flambagem de placas comuns, apresenta a seguinte equação em lugar da (17.35):

$$\sigma_{cr} = \frac{2E^f}{(1 - \nu^f)^2} \left[\frac{h}{R_c} \right]^2 \rightarrow \text{Dimpling} \quad (17.36)$$

Um outro processo de cálculo, mais detalhado, é apresentado em forma de curvas na referência [5].

Certamente, todas essas fórmulas devem ser vistas apenas como indicações grosseiras a serem usadas nas etapas preliminares de projeto. Dependendo da responsabilidade do sistema, pode ser necessária a realização de ensaios.