

Capítulo 17

Vibrações em sistemas de 1 grau de liberdade

O estudo que relaciona as forças que atuam sobre um corpo com o movimento, tanto do corpo como um todo quanto de suas partes relativamente umas às outras, é denominado **dinâmica**. As equações que representam este movimento em velocidades não relativísticas são as leis do movimento de Newton. Um tipo particular de comportamento dinâmico é o “movimento vibratório” ou simplesmente a “vibração”, onde o sistema oscila em torno de uma certa posição de equilíbrio ou de um trajeto de movimento de frequência inferior.

O presente capítulo faz um levantamento dos principais resultados clássicos do estudo de vibrações em sistemas de um grau de liberdade. Caso o leitor já possua segurança nesse tipo de conteúdo pode passar para o capítulo seguinte. Entretanto, deve-se ter claro que o tratamento de problemas de multigrados de liberdade utiliza, em maior ou menor grau, a nomenclatura, o equacionamento, os conceitos e a compreensão física proporcionadas pelo modelo de um grau de liberdade.

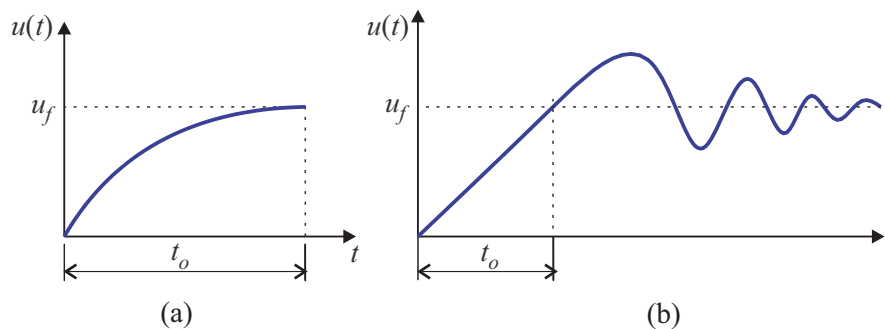


Figura 17.1: Exemplo de aplicação sem efeitos dinâmicos apreciáveis em (a), solicitações tipicamente com $t_o > 3T_{\max}$, e com resposta dinâmica em (b), para intervalos $t_o < T_{\max}$, onde $T_{\max} = 2\pi/\omega_1$.

Considere o caso em que normalmente se considera como estático, onde o carregamento não varia com o tempo. Devemos lembrar que certamente houve um período inicial onde a carga teve que ser aplicada, quando ela variou de zero até seu valor final. Quando este período é suficientemente longo, as acelerações desenvolvidas pela estrutura são baixas o suficiente para poder serem desprezadas e a análise pode ser feita como estática, sem o primeiro termo de (18.23). Ali a força e o deslocamento são agora constantes no tempo, constituindo-se no problema estático de obter o deslocamento final u_f a partir de $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$. Isto corresponderá, por exemplo, a soltar uma carga sobre a carroceria de um caminhão com infinito cuidado. A carroceria baixaria suave e lentamente até atingir sua posição final, como na Figura 17.1a. Na situação oposta a carga seria simplesmente jogada. A carroceria então oscilaria várias vezes sobre a suspensão. Devido ao amortecimento, essas oscilações gradualmente se reduziriam enquanto o sistema tenderia à sua posição final de repouso como na Figura 17.1b.

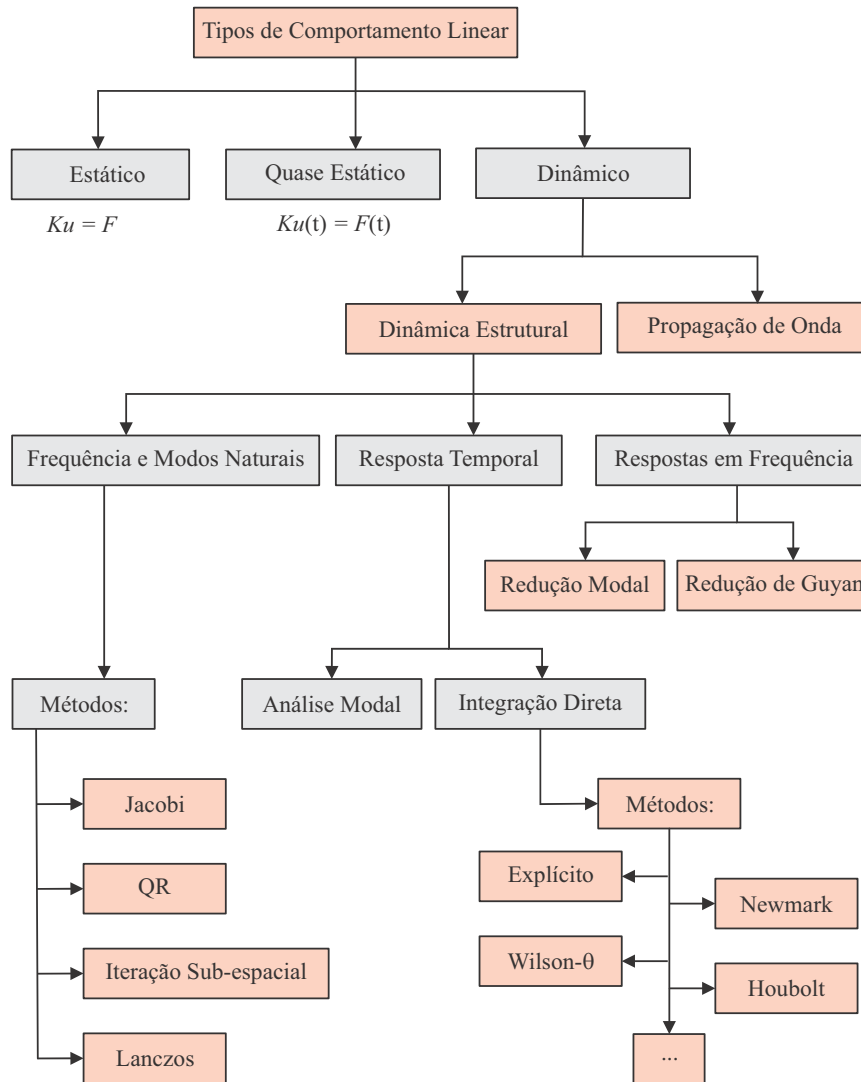


Figura 17.2: Classificação aproximada do comportamento dinâmico linear, tipos de análises e métodos de cálculo em dinâmica linear.

Nota-se então que a classificação de um problema como estático ou dinâmico nem sempre é simples e direta. Mesmo que o carregamento varie com o tempo não necessariamente se tem um problema dinâmico. Por exemplo, considere um carregamento cíclico com baixa frequência. Novamente, se a frequência de carregamento for baixa, as acelerações, que também são cíclicas, serão baixas. Isto pode ser visto de (17.58). Então as acelerações do sistema podem ser desprezadas nas equações do movimento (2.25) (página 32), resultando num sistema algébrico dado por $\mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$. Este é o chamado **problema quasi-estático** porque, embora não tenha o termo de inércia, a resposta varia com o tempo como se fosse um problema dinâmico. Para classificar um problema como quasi-estático ou não basta saber se a frequência de excitação é baixa o suficiente. Este “pequeno” é geralmente quantificado de forma um tanto arbitrária. Se a frequência de excitação for menor que aproximadamente um terço da menor frequência natural do sistema, isto é,

$$\omega \lesssim \frac{\omega_1}{3}, \quad (17.1)$$

então o problema pode ser tratado como quase-estático com precisão aceitável.

A outra situação é quando as frequências de carregamento são altas e as forças de inércia devem ser consideradas, o que constitui o problema da dinâmica. Dois grandes tipos de problemas existem, os problemas de **propagação da onda** e os de **dinâmica estrutural**. Os problemas de propagação de onda ocorrem em situações de impacto ou de explosões ou de acústica entre outros, onde tanto

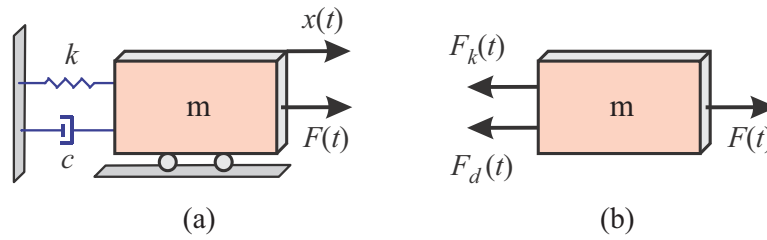


Figura 17.3: (a) Sistema idealizado k - c - m excitado, (b) diagrama de corpo livre.

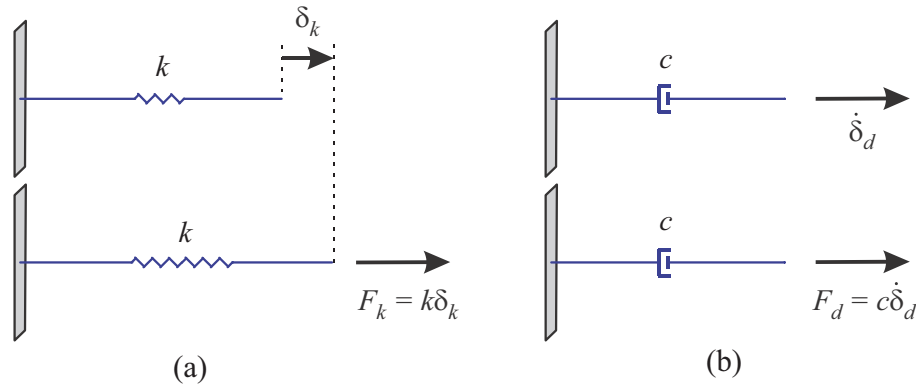


Figura 17.4: (a) Força numa mola proporcional ao deslocamento; (b) força num amortecedor proporcional à velocidade.

Observando o diagrama de corpo livre na figura e usando a segunda Lei de Newton, obtemos a equação de movimento do sistema como:

$$F(t) - F_k(t) - F_d(t) = m\ddot{x}(t), \quad (17.2)$$

onde $x(t)$ é o deslocamento da massa, **medido a partir da posição de deformação nula da mola**. Esta posição corresponde à situação onde a mola está descarregada. Substituindo as expressões para as forças obtemos a equação do movimento na forma:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (17.3)$$

Esta é uma equação diferencial linear, ordinária de coeficientes constantes m , c e k , que definem as características do sistema físico sendo simulado. O carregamento aplicado sobre o sistema é representado pela força $F(t)$, função do tempo t .

17.2 Vibrações livres de sistema não amortecido

O chamado **problema de vibrações livres** é aquele em que o sistema se move em ausência de forças de excitação, isto é, quando na eq. (17.3) se tem $F(t) = 0$ para todo $t > 0$. Neste caso a eq. (17.3) é dita estar em sua forma homogênea. Fisicamente, um sistema pode permanecer em movimento durante algum tempo após a aplicação e subsequente remoção de força. Também é possível colocá-lo em movimento aplicando um deslocamento ou velocidade de curta duração. Por outro lado, a solução deste problema fornece subsídios para a solução de problemas excitados, o que constitui a outra razão pela qual ele é sempre estudado.

É costumeiro reescrever a equação de movimento (17.3) em sua forma homogênea não amortecida como

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (17.4)$$

Além das formas (17.7) e (17.9) uma terceira forma para a solução do problema (17.4), é

$$x(t) = A e^{st}, \quad (17.13)$$

onde A e s são constantes a serem determinadas. Derivando (17.13) é possível ver que ela satisfaz a equação diferencial do PVI. Realmente, fazendo a substituição em (17.4) obtemos

$$s^2 A e^{st} + \omega^2 A e^{st} = 0. \quad (17.14)$$

Como A e e^{st} são não nulos para uma solução não trivial, podemos dividir toda a equação por $s^2 A$ obtendo a chamada **equação característica** do problema:

$$s^2 + \omega^2 = 0. \quad (17.15)$$

Esta equação tem duas soluções, dadas por

$$s = \pm i\omega, \quad (17.16)$$

onde i é a unidade complexa, $i = \sqrt{-1}$. A solução da equação do movimento é então uma combinação linear das duas formas resultantes da substituição das duas raízes (17.16) em (17.13):

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}} \quad (17.17)$$

Aplicando as condições iniciais se tem

$$\begin{aligned} x(0) &= A_1 + A_2 = u_o, \\ \dot{x}(0) &= i\omega (A_1 - A_2) = v_o. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema se obtém as amplitudes (que são complexas)

$$\boxed{A_1 = \frac{1}{2} \left(u_o + \frac{iv_o}{\omega} \right), \quad A_2 = \frac{1}{2} \left(u_o - \frac{iv_o}{\omega} \right)} \quad (17.18)$$

Nota-se que a solução aparece toda no plano complexo.

17.3 Vibração livre de sistema amortecido

Quando o amortecimento do sistema não é nulo, a equação de movimento (17.3) é reescrita para a forma análoga a (17.4):

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (17.19)$$

onde

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega}. \quad (17.20)$$

é o chamado **quociente de amortecimento viscoso**. ζ tem significado físico definido e será visto na seção 19.6. A solução do problema é aquela mostrada na eq. (17.13). Substituindo a solução $x(t) = A e^{st}$ em (17.19) obtemos a equação característica

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = 0. \quad (17.21)$$

Dois valores de s satisfazem a esta equação:

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega. \quad (17.22)$$

Cada raiz produz uma solução. Da teoria de equações diferenciais lineares, temos que a solução do problema é uma combinação linear de soluções independentes. **Caso as raízes sejam distintas e reais**, a solução é:

$$x(t) = \left[A_1 e^{\omega t \sqrt{\zeta^2 - 1}} + A_2 e^{-\omega t \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right] e^{-\zeta \omega t} \quad (17.23)$$

Caso as condições iniciais sejam $x(0) = u_o$ e $\dot{x}(0) = v_o$, com amortecimento $\zeta > 1$, as constantes ficam:

$$\left. \begin{array}{l} 2A_1 \\ 2A_2 \end{array} \right\} = u_o \pm \frac{v_o + \zeta \omega u_o}{\omega \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (17.24)$$

A Figura 17.5 mostra respostas para dois casos, com deslocamento inicial nulo e velocidade inicial nula. (A curva com v_o tem, de fato, derivada nula na origem, apesar de não ser bem visível no gráfico.) Como se observa da equação da solução, (17.23), a solução não é oscilatória, mas decai monotonicamente. Após um certo período de tempo, o deslocamento é praticamente nulo. Isso explica o motivo de se referir a essa solução como **resposta transiente**. Uma vez que a única excitação ocorre no instante inicial, a dissipação faz com que os efeitos desapareçam com o tempo.

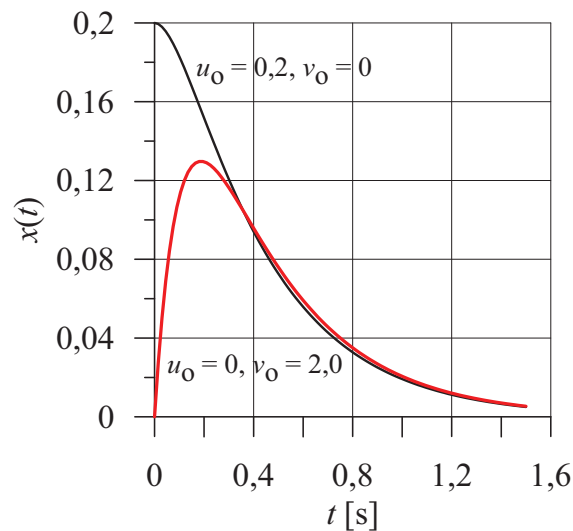


Figura 17.5: Exemplo de solução transiente amortecimento $\zeta > 1$. (Usados os valores $\omega = 5$ rad/s, $\zeta = 1,2$, $u_o = 0,2$ mm, $v_o = 2,0$ mm.)

Caso se tenha o quociente de **amortecimento** $\zeta = 1$, as raízes da equação característica (17.21) são idênticas, $s_1 = s_2 = -\zeta$. A solução da equação diferencial de movimento torna-se

$$x(t) = [A_1 + A_2 t] e^{-\omega t} \quad (17.25)$$

Se as condições iniciais forem $x(0) = u_o$ e $\dot{x}(0) = v_o$, com amortecimento $\zeta = 1$, as constantes ficam:

$$A_1 = u_o, \quad A_2 = v_o + u_o \omega$$

o que gera a solução

$$x(t) = [u_o + (v_o + u_o \omega)t] e^{-\omega t} \quad (17.26)$$

Essa solução é esboçada na Figura 17.6 para os casos de deslocamento e de velocidade inicial prescrita. O comportamento da resposta é não oscilatório, da mesma forma que para $\zeta > 1$ mostrado na Figura 17.5.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x_1 + x_2) &= e^{-\zeta\omega t} \cos \omega_d t, \\ \frac{1}{2i}(x_1 - x_2) &= e^{-\zeta\omega t} \text{sen } \omega_d t.\end{aligned}$$

x_1 e x_2 são soluções independentes. Os lados direitos da equação acima também são independentes, além de reais. O teorema fundamental de equações diferenciais lineares mostra que se duas funções independentes são solução da equação diferencial homogênea, então uma combinação linear delas também é solução. Então, a solução de (17.21), com amortecimento $\zeta < 1$, pode ser posta na forma real:

$$\boxed{4^a \text{ forma: } x(t) = [C_1 \cos \omega_d t + C_2 \text{sen } \omega_d t] e^{-\zeta\omega t}} \quad (17.31)$$

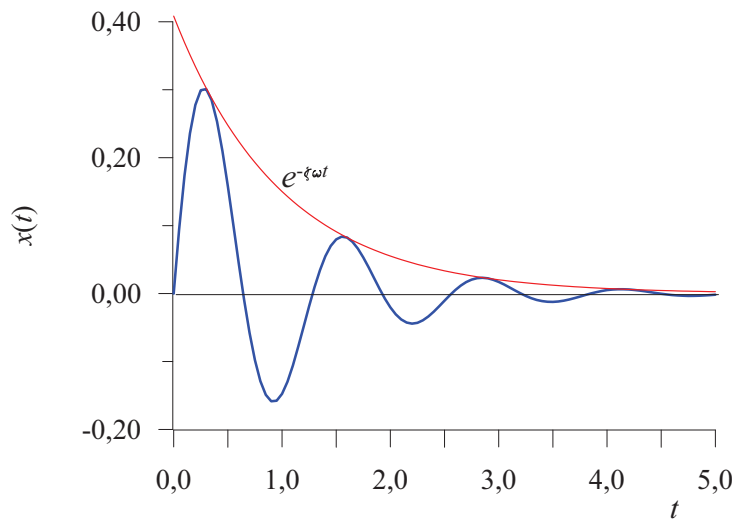


Figura 17.7: Ilustração de solução transiente amortecida com velocidade inicial prescrito. (Usados os valores $\omega = 5$ rad/s, $\zeta = 0,2$, $v_o = 2$ mm/s, $\omega_d = 4,899$.)

Caso particular 1 - Velocidade inicial

Para $0 < \zeta < 1$, aplicando as condições iniciais $x(0) = u_o = 0$, com $\dot{x}(0) = v_o$ em (17.30) temos

$$\begin{aligned}x(0) &= x(t) = A \cos \phi = 0, \\ \dot{x}(0) &= v_o = -\zeta\omega A \cos \phi + \omega_d A e^{-\zeta\omega t} \text{sen } \phi.\end{aligned}$$

Isso resulta $\phi = \pi/2$ e $A = v_o/\omega_d$ e a solução fica $x(t) = (v_o/\omega_d) e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_d t - \pi/2)$, que pode ser posta como

$$\boxed{x(t) = \frac{v_o}{\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \text{sen } \omega_d t, \quad \omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (17.32)$$

Esta é então a resposta do sistema à velocidade inicial v_o , denominada **solução transiente** do sistema. O termo “transiente” refere-se ao fato de que ela consiste em uma função periódica, o seno, que por si tem amplitude constante igual a 1 para todo $t > 0$. Porém o amortecimento no termo exponencial faz com que o fator multiplicando seno decresça ao longo do tempo. Desta forma as oscilações vão diminuindo de amplitude como ilustrado na Figura 17.7.

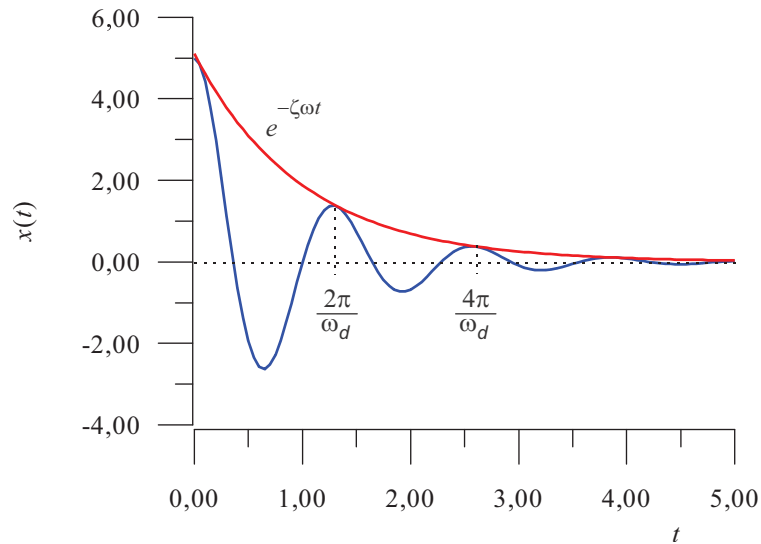


Figura 17.8: Ilustração de solução transiente amortecida com deslocamento inicial prescrito. (Usados os valores $\omega = 5$ rad/s, $\zeta = 0,2$, $u_o = 5$ mm, $\omega_d = 4,899$, $A = 5,1$, $\phi = 0,201$.)

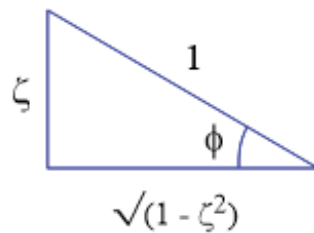


Figura 17.9: Triângulo no plano complexo.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\zeta\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \\ x(0) = u_o, \\ \dot{x}(0) = v_o. \end{cases} \quad (17.39)$$

Uma vez que o problema é linear podemos simplesmente sobrepor a solução (17.32) obtida para $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_o$, com a solução (17.38) obtida para $x(0) = u_o$ e $\dot{x}(0) = 0$. Então a solução completa é

$$x(t) = \left[\frac{u_o}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \phi) + \frac{v_o}{\omega_d} \text{sen } \omega_d t \right] e^{-\zeta\omega t} \quad (17.40)$$

onde ω_d e ϕ são definidos em (17.32) e (17.35). Esta solução pode ainda ser posta nas **formas alternativas**:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\frac{v_o + u_o\zeta\omega}{\omega_d} \text{sen } \omega_d t + u_o \cos \omega_d t \right] e^{-\zeta\omega t}, \quad \text{ou ainda} \\ x(t) &= \sqrt{\left(\frac{v_o + u_o\zeta\omega}{\omega_d} \right)^2 + u_o^2} \cos(\omega_d t - \phi) e^{-\zeta\omega t}, \quad \text{com } \tan \phi = \frac{v_o + u_o\zeta\omega}{\omega_d u_o} \end{aligned} \quad (17.41)$$

Essas soluções são obtidas partindo das 4ª e 3ª **formas** de solução, respectivamente, isto é, as eqs. (17.31) e (17.30). Para obter (17.41)₂, é necessário usar o procedimento mostrado na **dedução 2** acima.

17.4 Carregamento harmônico

O caso mais simples de carregamento é o chamado carregamento harmônico, que é um carregamento que varia harmonicamente (segundo um seno ou cosseno) ao longo do tempo. É um tipo de carregamento usual, em que uma carga varia ao longo do tempo com uma amplitude e frequência conhecida e constante. É uma situação típica em estruturas conectada a máquinas que giram a rotação constante. Durante um curto período inicial a resposta depende das condições iniciais (solução homogênea, transiente, da equação do movimento), mas, devido ao amortecimento, essa parcela da solução decai a zero, e o que continua é a **solução em regime permanente** (solução particular).

Consideremos aqui a solução particular do problema (17.3) na forma :

$$F(t) = A \cos \Omega t. \quad (17.42)$$

A força aumenta e diminui ao longo do tempo com amplitude A constante e frequência conhecida constante Ω . A eq. (17.3) pode ser dividida pela m , gerando uma equação similar a (17.19):

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{A}{m} \cos \Omega t. \quad (17.43)$$

A solução particular deste problema tem a seguinte forma

$$\boxed{x(t) = X \cos(\Omega t - \phi)} \quad (17.44)$$

onde X e ϕ são a amplitude e o ângulo de fase da resposta em relação ao instante $t = 0$.

Substituindo a solução na eq. (17.43) obtém-se a **equação característica** do problema

$$X [(\omega^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t - \phi) - 2\zeta\omega\Omega \sin(\Omega t - \phi)] = \frac{A}{m} \cos \Omega t. \quad (17.45)$$

Usando em seguida as relações trigonométricas (17.8), podem-se igualar os coeficientes de $\cos \Omega t$ de ambos os lados da igualdade e fazer o mesmo com os coeficientes de $\sin \Omega t$, o que gera duas equações:

$$\begin{cases} X[(\omega^2 - \Omega^2) \cos \phi + 2\zeta\omega\Omega \sin \phi] = \frac{A}{m}, \\ X[(\omega^2 - \Omega^2) \sin \phi - 2\zeta\omega\Omega \cos \phi] = 0. \end{cases}$$

Estas equações podem ser resolvidas para as incógnitas do problema, X e ϕ (fazer o quadrado de ambas as equações e somar e usar $\omega^2 = k/m$)

$$\boxed{X = \frac{A}{k} \left[\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad \text{e} \quad \tan \phi = \frac{2\zeta\Omega/\omega}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2}} \quad (17.46)$$

Levando (17.46) a (17.44) temos que o sistema responde com a mesma frequência Ω do carregamento, com amplitude X proporcional à amplitude A do carregamento.

Observa-se que a máxima amplitude da resposta amortecida não ocorre nem na frequência não amortecida ω e nem na frequência amortecida ω_d . Isso pode ser demonstrado tomando a amplitude da resposta em (17.46) e derivando-a em relação à frequência de excitação Ω e anulando o resultado. Com isso tem-se

$$\frac{2\Omega^2 [\Omega^2 + \omega^2 (2\zeta^2 - 1)]}{\omega^5 \left[\frac{\Omega^4 + \omega^4 + 2\Omega^2\omega^2 (2\zeta^2 - 1)}{\omega^4} \right]^{3/2}} = 0.$$

Do numerador se obtém o valor Ω_{am} da **frequência de pico** de excitação que gera a amplitude

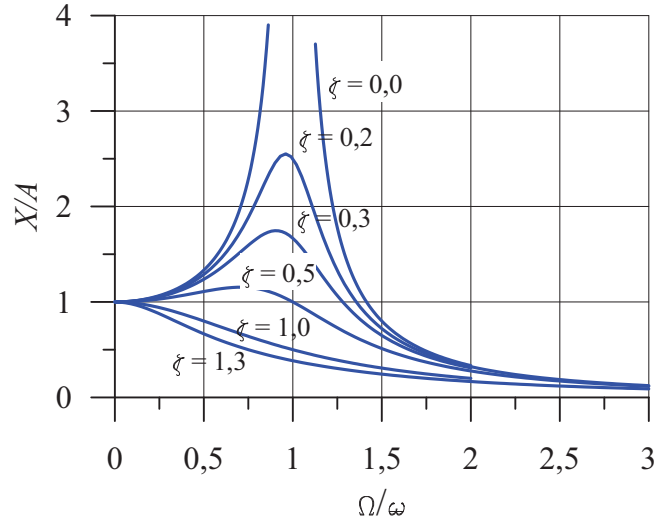


Figura 17.10: X/A versus Ω/ω para varios valores de amortecimento ζ , conforme eq.(17.48).

máxima na resposta:

$$\Omega_{am} = \omega \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (17.47)$$

Essa frequência é diferente da frequência natural amortecida $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$. Ω_{am} encontra-se no intervalo $\Omega_{am} < \omega_d < \omega$ para $\zeta < 1$. Para pequenos amortecimentos são bastante próximas. Por exemplo, $\zeta = 0,01$, essas frequências são $\omega_d = 0,99995 \omega$ e $\Omega_{am} = 0,99990 \omega$. Já para $\zeta = 0,10$, tem-se $\omega_d = 0,9950 \omega$ e $\Omega_{am} = 0,98995 \omega$.

De (17.46) obtém-se uma relação importante, entre a amplitude da resposta em relação à amplitude da solicitação

$$R \equiv \frac{X}{A/k} = \left[\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (17.48)$$

Essa relação é conhecida como **fator dinâmico de magnificação**. Nota-se que A/k é deslocamento obtido elasticamente numa situação estática, o fator R quantifica o efeito da inércia e do amortecimento na amplitude do movimento.

O comportamento dessa relação é visualizado na Figura 17.10. Para a situação estática, $X/A = 1$. No caso de ausência de amortecimento, a amplitude da resposta tende ao infinito se a frequência de excitação coincide com a frequência natural ω . A resposta máxima ocorre na frequência de pico $\Omega_{am} = \omega \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ para $\zeta \leq 1$. Nessa faixa de amortecimento, o máximo de R decresce com o aumento do amortecimento, e esse máximo ocorre em frequências cada vez menores até que, para $\zeta > 1$, o máximo passa a ocorrer sempre na frequência $\Omega/\omega = 0$. De (17.48) verifica-se que a amplitude de resposta tende a zero conforme a frequência de excitação cresce, qualquer que seja o amortecimento. Fisicamente, pode-se entender que não há tempo suficiente para a massa se mover antes que a força reverta o sentido.

Figura 17.11 mostra a variação do ângulo de fase ϕ versus Ω/ω para diversos valores de amortecimento ζ , conforme a eq. (17.46)₂. Observa-se que para $\zeta = 0$, o ângulo de fase da resposta é zero, isto é, a resposta transiente é em fase com a excitação. Conforme o amortecimento cresce, a evolução de ϕ depende de que a frequência de excitação esteja abaixo ou acima da frequência natural. Caso $\Omega/\omega < 0$, um crescimento de ζ leva ao crescimento do ângulo de fase em direção a $+\pi/2$. Ao contrário, se $\Omega/\omega > 0$, um crescimento de ζ leva ao decréscimo de ϕ em direção a $-\pi/2$.

Caso de sistema não-amortecido

A **solução geral** do sistema sob carregamento $F(t) = A \cos \Omega t$, **não-amortecido**, é obtida simplificando (17.49) e (17.52) para $\zeta = 0$:

$$x(t) = \underbrace{C_1 \cos \omega t + C_2 \sen \omega t}_{\text{sol. homogênea}} + \underbrace{\frac{A \cos \Omega t}{k(1 - \beta^2)}}_{\text{sol. particular}}$$

Aplicando as **condições iniciais** $x(0) = u_o$ e $\dot{x}(0) = v_o$, obtêm-se $C_2 = v_o/\omega$ e $C_1 = u_o - A/(1 - \beta^2)k$, e a solução fica

$$x(t) = \left[u_o - \frac{A}{k(1 - \beta^2)} \right] \cos \omega t + \frac{v_o}{\omega} \sen \omega t + \frac{A \cos \Omega t}{k(1 - \beta^2)} \quad (17.53)$$

17.4.2 Carregamento harmônico com ângulo de fase

Uma outra forma de colocar a solução consiste em considerar a equação de movimento (17.3) $m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = F(t)$ e considerar a excitação e a solução em **forma complexa**. Representemos o carregamento por

$$F(t) = B e^{i\Omega t}. \quad (17.54)$$

onde B pode ser real ou complexo. Se consideramos B complexo, ele pode ser representado por

$$B = b e^{i\psi}. \quad (17.55)$$

Considerando a forma polar do número complexo, tem-se $B = b [\cos \psi + i \sen \psi]$. Note que no instante $t = 0$, o carregamento físico é igual à parte real $b \cos \psi$ ou à parte imaginária $b \sen \psi$. ψ é o **ângulo de fase do carregamento**. Note que a solução da seção 17.4.1 foi desenvolvida para ângulo de fase nulo no carregamento.

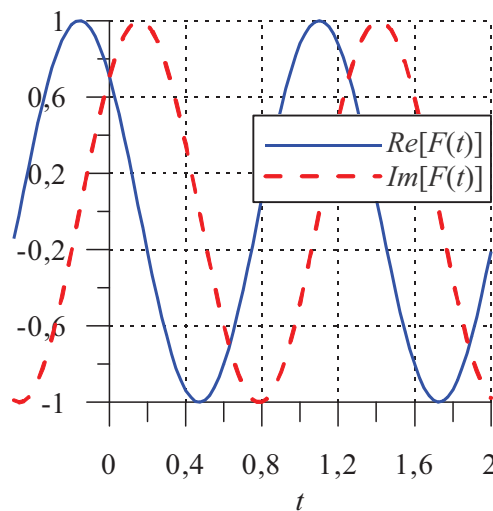


Figura 17.12: Partes real e imaginária de $F(t)$ em (17.56), com $b = 2 \text{ N}$, $\omega = 5 \text{ rad/s}$, $\psi = \pi/4$.

Em seguida, exprimindo B na forma $B = b e^{i\psi}$, tem-se as formas alternativas

$$\begin{aligned} F(t) &= b e^{i(\Omega t + \psi)}, \quad \text{ou} \\ &= b [\cos(\Omega t + \psi) + i \sen(\Omega t + \psi)], \quad \text{ou} \\ &= B \cos \Omega t + i B \sen \Omega t. \end{aligned} \quad (17.56)$$

17.5 Resposta a carregamentos não periódicos

Estamos interessados em obter a resposta do sistema a um carregamento arbitrário como aquele ilustrado na Figura 17.13. Vários métodos existem para estimar a solução deste problema, como métodos baseados na transformada de Fourier, mas nos concentraremos aqui no método baseado na **integral de convolução**, também chamada em dinâmica, **integral de Duhamel**.

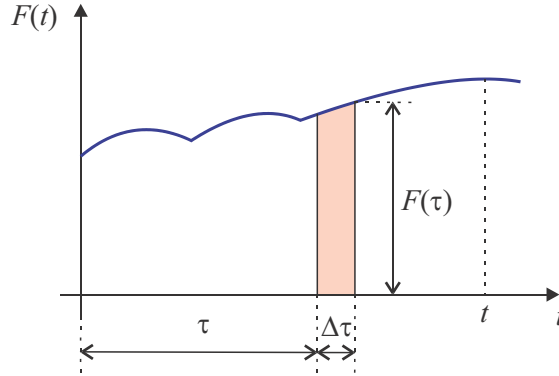


Figura 17.13: Carregamento temporal arbitrário.

Primeiramente introduzimos o conceito de **função Delta de Dirac**. Observe a função ilustrada na Figura 17.14. É uma função $g_a(t)$ definida em $\forall t \in R$, tal que

$$\begin{aligned} g_a(t) &= 0, & \forall t < a & \quad \text{e} \quad \forall t > a + \epsilon, \\ g_a(t) &= \frac{1}{\epsilon}, & \forall t \in [a; a + \epsilon]. \end{aligned} \tag{17.66}$$

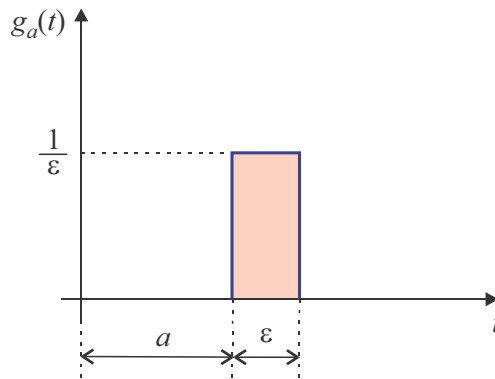


Figura 17.14: Função com integral unitária.

É visível que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g_a(y) dy = 1, \quad \forall \epsilon \in \mathcal{R}. \tag{17.67}$$

Uma vez que a integral será sempre unitária para qualquer valor de ϵ pode-se definir uma pseudo-função denominada “**função**” **Delta de Dirac** $\delta(t - a)$ como

$$\delta(t - a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_a(t). \tag{17.68}$$

Esta função então tem valor

$$\delta(t - a) = 0 \quad \forall t \neq a \tag{17.69}$$

impulso \widehat{F} tem unidade [Ns].

17.5.1 Resposta impulsiva

A resposta impulsiva $h(t)$ é definida como a resposta do sistema a uma força impulsiva unitária aplicada no instante inicial $t = 0$, isto é, $F(t) = \widehat{F}\delta(t)$, com $\widehat{F} = 1$ Ns, sob condições iniciais nulas, isto é, a resposta à força impulsiva $F(t) = \widehat{F}\delta(t)$, é a solução do PVI (eq. (17.3)):

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \widehat{F}\delta(t), & t > 0, \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (17.74)$$

Integra-se cada termo de (17.74)₁ no intervalo $t \in [0; \epsilon]$ e faz-se o limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \widehat{F}\delta(t) dt &= \widehat{F}, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon m \ddot{x} dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (m \dot{x})|_0^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} m (\dot{x}(\epsilon) - \dot{x}(0)) = m \dot{x}(0^+), \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon m \dot{x} dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (m x)|_0^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} m (x(\epsilon) - x(0)) = 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon m x dt &= 0. \end{aligned} \quad (17.75)$$

Aqui, $\dot{x}(0^+)$ é a velocidade logo após o instante inicial. Note que em $t = 0$ a velocidade é nula, mas é possível aplicar uma variação de velocidade em um intervalo Δt bastante curto. Por outro lado, não é possível aplicar uma variação de posição num intervalo de tempo infinitesimalmente curto (implicaria aceleração desenvolvida e a força necessária infinitas). Assim, não apenas $x(0) = 0$, mas também $x(0^+) = 0$.

O resultado da integração de (17.74)₁ é

$$\dot{x}(0^+) = \frac{\widehat{F}}{m}. \quad (17.76)$$

Isto mostra que a aplicação de uma força impulsiva \widehat{F} produz uma mudança instantânea de velocidade. Também se pode visualizar esse resultado como $\widehat{F} = m\dot{x}(0^+)$. Considerando que a velocidade inicial é zero, isso significa a mudança na quantidade de movimento na massa no instante inicial. Isto é interessante porque estamos interessados em obter a resposta do sistema a \widehat{F} . Mas, devido a (17.76), podemos usar a solução que já dispomos para a resposta do sistema a uma velocidade inicial. Usamos então a eq. (17.40) com $v_o = \widehat{F}/m$ e $u_o = 0$:

$$x(t) = \frac{\widehat{F}}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \text{sen } \omega_d t, \quad \text{onde } \omega_d = \omega(1 - \zeta^2)^{1/2}, \quad \text{para } t > 0. \quad (17.77)$$

Fazendo $\widehat{F} = 1$ temos a chamada **resposta impulsiva**

$$\boxed{\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \text{sen } \omega_d t, & t > 0, \\ h(t) &= 0, & t \leq 0. \end{aligned}} \quad (17.78)$$

Observando a Figura 17.13 vemos que conseguimos a solução no instante t devido a um impulso $F(0)\Delta\tau$ aplicado no instante inicial $\tau = 0$. Esta solução é

$$x(t) = F(0)\Delta\tau h(t). \quad (17.79)$$

Esta é a resposta no instante t devido a uma faixa de carregamento como aquela hachurada na Figura 17.13, localizada na origem. É uma resposta oscilatória que decai no tempo, na forma ilustrada na Figura 17.7.

17.5.2 Carregamento arbitrário

Imagine agora o histórico de carga representado pela curva $F(t)$ na Figura 17.13, substituído por uma seqüência de retângulos como aquele hachurado, cada um iniciando num instante τ , com duração $\Delta\tau$, e altura $F(\tau)$.

Pergunta: qual a resposta no instante t devido a um impulso aplicado num instante anterior τ ? Observando a eq. (17.79) notamos que a solução num dado instante t depende apenas do tempo decorrido entre o instante do impulso e o instante t . Isto porque, obviamente, o corpo não sofre nenhum efeito do impulso antes dele ter sido aplicado, isto é em $t > \tau$. Mais ainda, a resposta do sistema no instante t depende apenas do lapso de tempo desde a aplicação do impulso, isto é, do comprimento da extensão de tempo $(t - \tau)$. Então, se o impulso foi aplicado no instante τ , a solução em t pode ser obtida simplesmente usando a solução (17.79), substituindo t por $(t - \tau)$, isto é

$$\Delta x(t) = F(\tau) \Delta\tau h(t - \tau) = \frac{F(\tau)}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t - \tau) \Delta\tau. \quad (17.80)$$

Mas, observe que no instante t , o valor do deslocamento não é apenas devido a este intervalo de carregamento aplicado entre τ e $\tau + \Delta\tau$. Existe também as outras parcelas devidas aos impulsos de duração $\Delta\tau$ aplicados desde o instante 0 até t que compõem a curva $F(t)$. Então a resposta total em t é

$$x(t) = \sum F(\tau) h(t - \tau) \Delta\tau. \quad (17.81)$$

Fazendo $\Delta\tau \rightarrow 0$ o somatório tende à integral e se tem

$$x(t) = \int_{\tau=0}^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (17.82)$$

Esta integral aparece em diversas áreas das ciências físicas e é logicamente objeto de estudo matemático em busca de suas propriedades. É a chamada **integral de convolução**. Uma das propriedades mais úteis desta integral, que apresentamos sem demonstração, [60] é que (ver Exercício 17)

$$\int_{\tau=0}^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t F(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (17.83)$$

Substituindo a definição de $h(t)$ em (17.78) temos a solução do sistema a um carregamento arbitrário:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t - \tau) d\tau \quad (17.84)$$

e a velocidade e a aceleração são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{m} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \cos \omega_d(t - \tau) d\tau - \zeta\omega x(t), \\ \ddot{x}(t) &= \frac{F(t)}{m} - 2\zeta\omega \dot{x}(t) - (\zeta\omega)^2 x(t) \end{aligned} \quad (17.85)$$

No estudo de vibrações a integral é chamada **integral de Duhamel**. Esta solução é a **solução particular** (solução de **regime permanente**). Lembremos que esta é apenas parte da solução geral, válida apenas no caso em que $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

A solução do problema geral (com condições iniciais não nulas),

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t), & t > 0, \\ x(0) = u_o, \\ \dot{x}(0) = v_o, \end{cases} \quad (17.86)$$

é obtida sobrepondo a solução de regime permanente (17.84) com a solução de transiente (17.40)

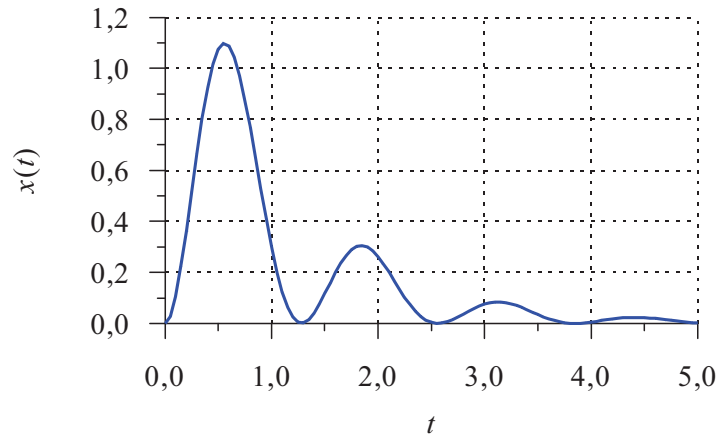


Figura 17.17: Resposta do sistema do Exemplo 1, sob o carregamento exponencial da eq. (17.88). (Usados os valores: $m = 1$ kg, $\xi = 0,2$, $\omega = 5$ s⁻¹, $\omega_d = 4,9$ s⁻¹.)

17.5.4 Propriedades e cálculo numérico da integral de Duhamel

Observe a definição da integral de Duhamel em (17.87). Em alguns casos de carregamento, ela pode ser integrada analiticamente. Para isso, duas propriedades são úteis:

1. Sua linearidade, que permite a soma de soluções previamente obtidas com carregamentos mais simples, e
2. Translação de uma solução no tempo.

Consideremos o caso em que o carregamento seja dado como uma combinação de dois outros carregamentos, na forma

$$F(\tau) = a F_1(\tau) + b F_2(\tau), \quad (17.90)$$

como por exemplo as funções ilustradas nas Figuras 17.18a e b, onde $F_1(t) = \text{sen } \omega t$ e $F_2(t) = 0$ para $t < t_1$ e $F_1(t) = \text{sen } \omega t$ e $F_2(t) = \text{sen } \omega(t - t_1)$ para $t \geq t_1$. Podemos definir uma função $F(t)$ como $F(t) = F_1(t) - F_2(t)$ como ilustrado na Figura 17.18c. Da integral de convolução temos para a eq. (17.90):

$$\int_{\tau=0}^t F(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t-\tau) d\tau = a \int_{\tau=0}^t F_1(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t-\tau) d\tau + b \int_{\tau=0}^t F_2(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t-\tau) d\tau. \quad (17.91)$$

Suponha que se tenha conseguido obter a solução para um carregamento $F_1(t)$ como mostrado na Figura 17.18a. Se transladarmos $F_1(t)$ em t_1 e definirmos assim a função $F_2(t)$, ($F_2(t) = F_1(t-t)$, para $t \geq t_1$ e $F_2(t) = 0$ para $t < t_1$), a solução $x_2(t)$ é a solução $x_1(t)$ transladada, isto é, $x_2(t) = x_1(t - t_1)$ para $t \geq t_1$ e $x_2(t) = 0$ para $t < t_1$. A solução devida a $F = a F_1 + b F_2$ é a combinação das duas soluções:

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t). \quad (17.92)$$

Esta possibilidade de combinação é devida à linearidade da equação do movimento usada. Estas operações também necessitam que as condições iniciais u_o e v_o sejam combinadas da mesma forma através das mesmas constantes a e b .

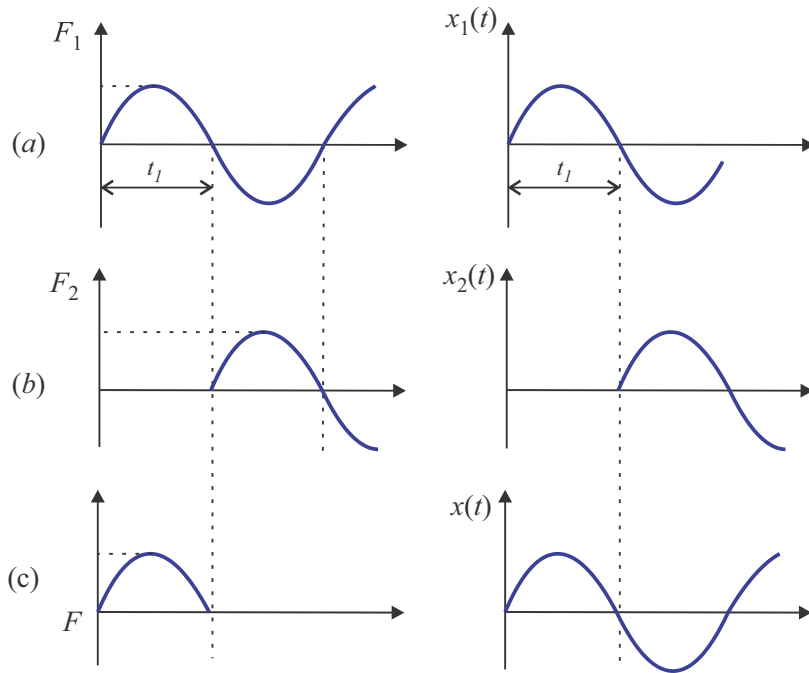


Figura 17.18: Solicitações e respostas com translação e sobreposição.

Integração numérica da integral de Duhamel

Em geral, a integral de Duhamel é realizada numericamente. Uma vez que ela é uma integral de convolução, sua integração numérica pode se tornar cara se não forem tomados cuidados especiais na escolha do algoritmo. Isso ocorre porque, para obter a aproximação do resultado no instante t , é necessário fazer a integração numérica desde o instante inicial. Porém, se forem usados procedimentos mais simples, para obter a aproximação em $t + \Delta t$, é necessário integrar novamente desde o instante inicial. O problema do custo computacional não é grave quando se trata de problemas de um grau de liberdade como aqueles vistos nessa seção. Entretanto, deve-se notar que a principal função da presente teoria de um grau de liberdade é ser base para as teorias de múltiplos graus de liberdade, que serão vistas nos próximos capítulos. Naqueles casos, a integral de Duhamel deve ser repetida para cada grau de liberdade modal do modelo.

Um procedimento consiste em simplesmente não usar (19.105) para avaliar $\eta_j(t)$. Em vez disso, $\eta_j(t)$ é obtido por um método de integração direta a partir da equação diferencial desacoplada (19.115). Isso é feito usando qualquer dos métodos de integração direta mostrados no Capítulo 21 (método de diferença central, de Newmark, etc), usando a solução no instante t_{k-1} como condição inicial para estimar a solução $\eta_j(t_k)$. Deve-se notar que esse procedimento trará consigo todas as características típicas desses tipos de integração: possibilidade de perda cumulativa de precisão, instabilidade, etc.

Entretanto, um outro procedimento mais eficiente é aquele visto a seguir, baseado no uso da relação trigonométrica (17.8)₂, $\sin \omega_d(t - \tau) = \sin \omega_d t \cos \omega_d \tau - \cos \omega_d t \sin \omega_d \tau$, para separar o integrando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega_d} \int_{\tau=0}^t F(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau &= \frac{1}{m\omega_d} \sin \omega_d t e^{-\zeta\omega t} \underbrace{\int_{\tau=0}^t F(\tau) e^{\zeta\omega\tau} \cos \omega_d \tau d\tau}_{A(t)} \\ &\quad - \frac{1}{m\omega_d} \cos \omega_d t e^{-\zeta\omega t} \underbrace{\int_{\tau=0}^t F(\tau) e^{\zeta\omega\tau} \sin \omega_d \tau d\tau}_{B(t)} \end{aligned} \quad (17.93)$$

Nota-se que agora as integrais $A(t)$ e $B(t)$ não mais são integrais de convolução. Então podem ser integradas normalmente usando um dos vários métodos padrão, como regra do trapézio, regra de Simpson, por exemplo. Adicionalmente, uma vez que se tenha a aproximação para o instante t_n , a aproximação para t_{n+1} pode ser obtida por

$$A(t_{n+1}) = A(t_n) + \int_{\tau=t_n}^{t_n+\Delta t} F(\tau) e^{\zeta\omega\tau} \cos \omega_d \tau d\tau. \quad (17.94)$$

A integral agora é feita apenas sobre o último intervalo.

17.6 Exercícios

17.1 Considere um sistema de um grau de liberdade, não amortecido, sujeito a um carregamento do tipo:

$$\begin{cases} F(t) = F_o \operatorname{sen} \Omega t & \text{para } t > 0, \\ F(t) = 0 & \text{para } t < 0. \end{cases}$$

As condições iniciais são $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Calcule a resposta do sistema usando integral de Duhamel. (Resposta: $x(t) = \frac{F_o}{k[1-(\Omega/\omega)^2]} (\operatorname{sen} \Omega t - \frac{\Omega}{\omega} \operatorname{sen} \omega t)$ para $t > 0$.)

17.2 Considere um sistema de um grau de liberdade, amortecido, sob condições iniciais nulas, sujeito a um carregamento temporal dado por uma **função degrau unitário** d_u (também conhecida como **função Heaviside**) definida por:

$$F(t) = f d_u(t - a), \quad \text{onde} \quad d_u(t - a) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } t < a, \\ 1 & \text{se } t \geq a, \end{cases}$$

com condições iniciais nulas. Determine a resposta de regime permanente. (Resposta: $x(t) = \frac{f}{k} [e^{-\zeta\omega a} (\cos \omega_d a + \frac{\zeta\omega}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d a) - e^{-\zeta\omega t} (\cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t)] d_u(t - a)$.)

17.3 Use a solução do problema 17.2, para o caso sem amortecimento, e obtenha a solução de regime permanente para o carregamento da Figura 17.19. (Resposta: $x(t) = \frac{f}{k} \{ [1 - \cos \omega(t + T)] d_u(t + T) - [1 - \cos \omega(t - T)] d_u(t - T) \}$, onde $d_u(\alpha)$ é a função degrau unitário do exercício 17.2.)

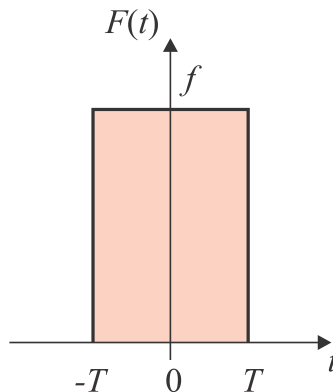


Figura 17.19: Carregamento temporal do Exercício 17.3.

17.4 Obtenha as eqs. (17.90)-(17.92) para translação da integral de Duhamel.

17.5 Use a integral de convolução para obter a solução de regime permanente de um sistema de um grau de liberdade amortecido sob carga $f(t) = At$, com condições iniciais $u_o = v_o = 0$. (Resposta: $x(t) = \frac{A}{k} \{ (\omega t - 2\zeta) + \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\omega_d} [2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \omega_d t + (2\zeta^2 - 1) \operatorname{sen} \omega_d t] \}$.)