

Capítulo 16

Estabilidade e carga crítica de flambagem

Uma forma simples de descrever sucintamente o conceito de estabilidade, e por extensão de instabilidade estrutural, consiste em considerar o caso elementar de uma barra idealmente reta, de seção e material uniformes, sujeita a um carregamento compressivo perfeitamente centrado e axial como mostrado na Figura 16.1.

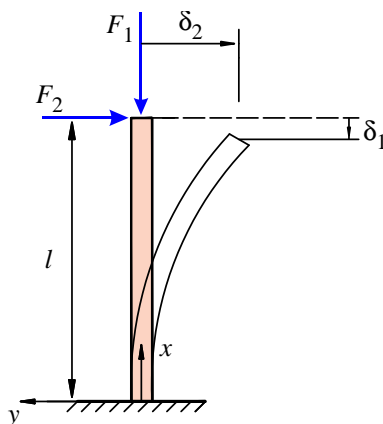


Figura 16.1: Barra sob cargas compressiva e transversal.

Considere a barra sob a ação de uma força axial F_1 “suficientemente pequena” que provoca um deslocamento axial δ_1 . Se, simultaneamente aplicamos uma outra força, transversal, de valor F_2 , obtemos um deslocamento transversal na extremidade de valor δ_2 . O sistema é dito **estável** se, com a remoção de F_2 , o deslocamento δ_2 retorna a zero. Por outro lado, o sistema é dito **instável** se, com a remoção de F_2 , a barra não volta à posição vertical. Um outro comportamento também caracteriza o sistema instável. Mesmo que F_2 seja bastante pequeno, δ_2 torna-se bastante grande, isto é, ordens de grandeza maior que o valor de δ_2 provocado por F_2 se F_1 fosse nulo.

Sem dúvida, a instabilidade do sistema dependerá do nível da força axial agindo, isto é, para F_1 grande, bastaria uma pequena força transversal F_2 para levar o sistema a uma resposta instável. Na realidade, existe um valor de F_1 abaixo do qual o sistema será sempre estável, a chamada **carga crítica de flambagem** F_{cr} . Observe que a determinação desse valor é importante para estruturas esbeltas como barras, placas e cascas, mesmo que seu carregamento previsto seja apenas coplanar ou axial, com ausência de forças transversais como o F_2 da Figura 16.1. Isto pelo seguinte motivo: se as estruturas reais fossem perfeitas poderíamos ter uma situação como a da barra da figura carregada por uma força $F_1 > F_{cr}$. Não haveria problemas caso as forças transversais fossem nulas. Evidentemente, um leve vento pode ocorrer, ou a carga pode estar levemente excêntrica, gerando um momento, o que seria suficiente para desencadear um processo de grandes deslocamentos no componente. Frequentemente, o material neste caso não suportaria as deformações geradas e sofreria algum tipo de

falha. A estrutura onde o componente se insere teria sua configuração bastante alterada, levando a uma perigosa redistribuição de esforços aos demais componentes. Um processo de falha em cascata, seguido de falha catastrófica, poderia então ocorrer.

Em alguns casos a compressão não se deve a um “carregamento compressivo” facilmente identificável, como foi o caso da Figura 16.1. Observemos o caso do **arco** da Figura 16.2. Mesmo o carregamento sendo transversal, ele provoca esforços e tensões compressivas. Quando F ultrapassa um certo valor crítico F_{cr} , o arco subitamente “pula” de uma configuração para a outra completamente diferente, como a ilustrada pela linha tracejada. Este é o comportamento chamado *snap-through* na literatura.

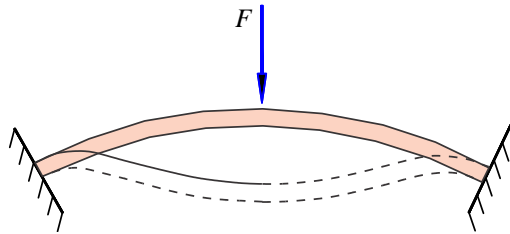


Figura 16.2: Efeito de *snap-through* num arco.

O mesmo tipo de efeito pode ocorrer em estruturas como tubulações e reservatórios compostos por cascas cilíndricas, esféricas, toroidais e outras. Tubulações enterradas ou submersas, túneis e fuselagens de aeronaves, além de treliças e pórticos, são casos práticos.

Nas seções seguintes apresentaremos a formulação clássica para a estimativa da carga crítica de flambagem de estruturas de barras e de placas. Deve-se observar que a formulação apresentada é frequentemente apenas uma aproximação grosseira, que pode em alguns casos sobrestimar a carga crítica em até cinco vezes o valor real. A forma mais precisa de obter essa carga é por uma análise não linear completa. Tradicionalmente, nas décadas de 1960 a 1980, essa análise era de custo proibitivo, o que obrigava o uso da análise simplificada aqui apresentada. Atualmente, com o aumento da capacidade dos computadores e de sua disponibilidade, a análise não linear completa deve se tornar mais e mais usada, levando à progressiva redução do uso da análise simplificada de carga crítica por autovalores. Entretanto, a compreensão desta análise é, em parte, pressuposta para o estudo do processo completo, o qual não é mostrado aqui por exceder ao escopo previsto para este livro. Apresentaremos, portanto, a análise numérica clássica de determinação de cargas críticas de flambagem.

A estabilidade de sistemas mecânicos tornou-se um problema mais crítico nas últimas décadas, conforme os materiais estruturais passaram a ser mais e mais resistentes, permitindo projetos de componentes de formas cada vez mais longas e delgadas. Estruturas naturalmente delgadas são as vigas, as placas e as cascas, as quais são, portanto, as mais propensas à instabilidade. Neste capítulo consideramos as vigas e as placas. As formulações não lineares de cascas necessárias para a análise simplificada de carga crítica são quase tão complexas quanto as equações completas necessárias para a análise não linear completa de grandes deslocamentos. Isto explica por que não incluímos aqui sua formulação. Para placas, devemos observar que a análise usada aqui para a carga crítica é não linear, permitindo grandes deslocamentos, mas não arbitrariamente grandes.

16.1 Estabilidade de placas – Método do equilíbrio adjacente

Consideramos aqui o problema de estabilidade inicial de placas laminadas semi-espessas. Usaremos nesta seção o método conhecido como **método do equilíbrio adjacente** para o tratamento de flambagem linear de placas ([194], [195]). Pelo menos dois outros métodos são também bastante usados, o da energia potencial mínima, que usa o critério de Trefftz, e o da energia cinética, que podem ser vistos em [46], [118] ou [70] por exemplo.

Consideramos o laminado inicialmente submetido a um conjunto de cargas coplanares \bar{X}_o e \bar{Y}_o em cada ponto do contorno pertencente a Γ_f , e o fixamos nos pontos do contorno pertencentes a Γ_u . (Γ_f e

conforme (16.2) e (16.3). Os demais termos compõem o incremento sofrido pelo esforço associado à flambagem. Os últimos três termos são não-lineares. Buscando uma teoria linearizada, para pequenos valores de w_1 , desprezam-se os últimos termos, de forma que

$$N_{xf} \approx \lambda N_{xo} + N_{x1}.$$

Repetindo o mesmo procedimento para as outras componentes dos esforços, obtemos as relações constitutivas para os incrementos nas formas:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{M}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \end{Bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_1 := \begin{Bmatrix} Q_{y1} \\ Q_{x1} \end{Bmatrix} = [E] \{\boldsymbol{\gamma}_{c1}\},$$

com

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{Bmatrix} u_{1,x} \\ v_{1,y} \\ u_{1,y} + v_{1,x} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa}_1 = \begin{Bmatrix} \psi_{x1,x} \\ \psi_{y1,y} \\ \psi_{x1,y} + \psi_{y1,x} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{c1} = \begin{Bmatrix} \psi_{y1} + w_{1,y} \\ \psi_{x1} + w_{1,x} \end{Bmatrix}. \quad (16.9)$$

Os incrementos de esforços são, então, definidos por relações lineares dos incrementos de deslocamentos. De forma geral, os esforços na configuração flambada se relacionam aos incrementos por

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_f \\ \mathbf{M}_f \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_o \\ \mathbf{M}_o \end{Bmatrix} \lambda + \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{M}_1 \end{Bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_f := \begin{Bmatrix} Q_{yf} \\ Q_{xf} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} Q_{yo} \\ Q_{xo} \end{Bmatrix} \lambda + \begin{Bmatrix} Q_{y1} \\ Q_{x1} \end{Bmatrix}. \quad (16.10)$$

Durante o processo de flambagem consideraremos a geração de uma carga transversal distribuída $q_1(x, y)$. A inclusão dessa carga é feita de forma a aumentar a generalidade da formulação e permitir, por exemplo, a simulação de flambagem de placas sobre apoio elástico. Nesse caso, a própria deflexão w_1 associada à flambagem gera uma força elástica q_1 como ilustrado na Figura 16.3, por causa da interação com o material onde a placa está apoiada. Nesse caso, na configuração pré-flambagem, a tensão normal na interface é nula, de forma que usamos $q_o = 0$ na eq.(16.1). Esse tipo de análise é importante, por exemplo, na análise de flambagem local das faces que compõem uma placa-sanduiche, como será visto no Capítulo 17.

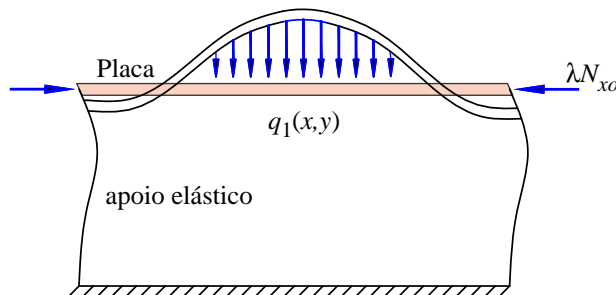


Figura 16.3: Placa sobre apoio elástico.

Buscamos a configuração de equilíbrio na condição flambada. Substituímos, então, (16.10) nas equações de movimento (11.51), depois de simplificar seus termos de inércia. Obtemos o seguinte:

regamento é, em geral, também simples, ou só N_{x_0} , ou só N_{y_0} etc., e também uniforme ao longo do segmento de contorno. Esse é o motivo pelo qual os livros clássicos que tratam do assunto, Timoshenko [194][195], por exemplo, praticamente não se referem à etapa de cálculo necessária à determinação desses esforços. Porém, quando a geometria e o carregamento são mais complexos e a análise precisa ser feita por elementos finitos, as duas etapas são realizadas. Nos programas comerciais, o usuário pode não perceber a realização em separado dessas etapas.

Novamente, se $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, o sistema (16.13) é acoplado, caso contrário as duas primeiras equações permanecem desacopladas. Como $\bar{X}_1 = \bar{Y}_1 = 0$, a solução de membrana para os incrementos no caso desacoplado será

$$u_1 = v_1 = N_{x1} = N_{y1} = N_{xy1} = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (16.14)$$

Assim, para um laminado simétrico, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, as equações diferenciais que regem o problema de flambagem são as três últimas de (16.13) ou, eliminando os esforços cortantes,

$$\frac{\partial^2 M_{x1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{y1}}{\partial y^2} + \lambda \left[N_{x_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2N_{xy_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + N_{y_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right] + q_1 = 0. \quad (16.15)$$

As equações (16.13) podem ser escritas em termos das funções de deslocamentos seguindo o procedimento usual. Por exemplo, para o caso do laminado simétrico, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e elas se tornam:

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_{11} \frac{\partial^2 u_1^o}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_1^o}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_1^o}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_1^o}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_1^o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_1^o}{\partial y^2} &= 0 \\ \Rightarrow A_{16} \frac{\partial^2 u_1^o}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_1^o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_1^o}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_1^o}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_1^o}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_1^o}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left[E_{55} \left(\frac{\partial \psi_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + E_{45} \left(\frac{\partial \psi_{x1}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y1}}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right) + E_{44} \left(\frac{\partial \psi_{y1}}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) \right] \\ + \lambda \left[N_{x_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2N_{xy_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + N_{y_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right] + q_1 = 0, \\ \Rightarrow D_{11} \frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial x \partial y} \\ + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial y^2} - \left[E_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + E_{45} \left(\psi_y + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right] = 0, \\ \Rightarrow D_{16} \frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial x \partial y} \\ + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial y^2} - \left[E_{45} \left(\psi_x + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + E_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (16.16)$$

Como o laminado é simétrico, as duas primeiras equações de forças coplanares são desacopladas das demais.

16.2 Formas integrais em flambagem

O problema de valor no contorno para a determinação dos incrementos de deslocamentos $\mathbf{u}_1 = \{u_1, v_1, w_1, \psi_{x1}, \psi_{y1}\}^T$ no processo de flambagem de uma placa laminada semi-espessa, isto é, analisada por uma teoria de primeira ordem, é dado pelas equações diferenciais (16.13), no domínio, junto às condições de contorno (16.12), o que compõe a chamada forma forte do problema. Por outro lado, atuando da mesma forma que na Seção 11.3, é possível aplicar o método dos resíduos ponderados

ao problema. Quando se comparam as equações da forma forte de flambagem, eqs.(16.13) e (16.12), à forma forte do problema de flexão de placas, eqs.(11.51) e (11.53), nota-se que a forma fraca do problema de flambagem pode ser obtida simplesmente fazendo $F_x = F_y = F_z = F_{mx} = F_{my} = 0$ em (11.83) ou (11.84), isto é, tornando o problema estático. Além disso, aplicamos as condições de contorno homogêneas de (16.12).

Assim, as equações (11.83), página 312, assumem a seguinte forma para o problema de flambagem de placas semi-espessas:

$$\begin{aligned}
 V = - \int_{\Omega} & \left\{ \left[\frac{\partial N_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy1}}{\partial y} \right] \hat{u} + \left[\frac{\partial N_{xy1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{y1}}{\partial y} \right] \hat{v} \right. \\
 & + \left[\frac{\partial Q_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y1}}{\partial y} + q_1 + \lambda \left(N_{xo} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + N_{yo} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + 2N_{xyo} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) \right] \hat{w} \\
 & + \left[\frac{\partial M_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy1}}{\partial y} - Q_x \right] \hat{\psi}_x + \left[\frac{\partial M_{xy1}}{\partial x} + \frac{\partial M_{y1}}{\partial y} - Q_y \right] \hat{\psi}_y \Big\} d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma_f} \left\{ X \hat{u} + Y \hat{v} + Q_n^* \hat{w} + X_m \hat{\psi}_x + Y_m \hat{\psi}_y \right\} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{16.17}$$

Esta é a primeira expressão dos resíduos ponderados para o problema de flambagem. Normalmente deveríamos aplicar integrações por partes a alguns termos, mas a similaridade de (16.17) com a forma (11.83) do caso de flexão permite tomar os resultados já obtidos da integração por partes feita na Seção 11.3, página 306, e adaptá-los aqui. Desta forma, o resultado da integração por partes de (16.17) pode ser obtido simplificando termos em (11.84). Em seguida consideramos o problema discretizado, o que leva ao enunciado padrão da **forma fraca de Galerkin**:

$$\begin{aligned}
 & \text{Dados } N_{xo}, N_{yo}, N_{xyo} : \Omega \rightarrow R, \text{ dado } \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_f, \text{ dado } \mathbf{u}_u \in \mathbb{U}_h(\Omega), \\
 & \text{determinar } \mathbf{u}_h = \tilde{\mathbf{u}}_h + \mathbf{u}_u, \text{ com } \tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbb{V}_h(\Omega) \text{ tal que} \\
 & \int_{\Omega} \left\{ \left\{ \begin{matrix} \mathbf{N}_{1h} \\ \mathbf{M}_{1h} \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1h} \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{1h} \end{matrix} \right\} + \{\mathbf{Q}_{1h}\}^T \{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{c1h}\} - q_{1h} \hat{w}_{1h} + \right. \\
 & \left. \lambda \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial w_{1h}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_{1h}}{\partial y} \end{matrix} \right\}^T \left[\begin{matrix} N_{xo} & N_{xyo} \\ N_{xyo} & N_{yo} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \hat{w}_{1h}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{w}_{1h}}{\partial y} \end{matrix} \right\} \right\} d\Omega = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_h \in \mathbb{V}_h(\Omega).
 \end{aligned} \tag{16.18}$$

$\bar{\mathbf{X}}$ são as trações no contorno definidas em (11.69), (11.70) e (11.73) na página 308. $\mathbb{U}_h(\Omega)$ e $\mathbb{V}_h(\Omega)$ são os espaços de dimensão finita definidos em (11.125) e (11.107). $\mathbf{u}_h = \{u_{1h}, v_{1h}, w_{1h}, \psi_{x1h}, \psi_{y1h}\}$ são as funções dos incrementos de deslocamento durante a flambagem.

Observe que o método de Galerkin foi enunciado como em (16.18), isto é, com a equação obtida pela integração por partes de (16.17). Sem dúvida, um método pode ser obtido diretamente a partir da forma discretizada da equação (16.17), desde que se usem funções suficientemente diferenciáveis, e que satisfaçam às devidas condições de contorno, isto é, $\{u_h\}$ deve satisfazer as condições de contorno em Γ_u e as funções peso $\hat{\mathbf{u}}_h$ devem ser nulas em Γ_u .

16.2.1 Energia potencial

Observe que, se os esforços coplanares N_{xo}, N_{yo}, N_{xyo} são conhecidos, possivelmente de uma iteração anterior, o funcional em (16.18) é linear, da mesma forma que as equações diferenciais (16.13). Colocando tudo em termos de deslocamentos observa-se que o problema é auto-adjunto, isto é, definido por um funcional linear, com derivadas de ordem par, apenas. Para este tipo de problema pode-se definir um princípio energético associado. Podemos tomar (11.140), página 323, como ponto de partida. Também nos restringimos aqui ao caso estático, embora isto não seja obrigatório. Então a energia

Condições de contorno para laminados delgados

As condições de contorno possíveis de serem aplicadas em (16.27) vêm de (11.103), página 316:

$$\left\| \begin{array}{l} u_1 = 0, \\ v_1 = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} w_1 = 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial n} = 0, \end{array} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_u, \quad e \quad \left\| \begin{array}{l} X_1 = 0, \\ Y_1 = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} V_{n1}^* = 0, \\ M_{n1} = 0, \end{array} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_f. \quad (16.28)$$

As condições de contorno em bordas curvilíneas podem igualmente ser postas em termos das componentes de deslocamentos e esforços nas direções normal e tangencial ao contorno, isto é, as funções u_n , u_t , N_n e N_{nt} . As trações normais e tangenciais ao contorno N_n e N_{nt} são dadas em (11.105) e ilustrados na Figura 11.8b, página 309.

As formas mais comuns de condições de contorno em problemas de flambagem de placas são:

1. Contorno simplesmente apoiado. São permitidos deslocamentos tangenciais e normais, u_t e u_n : $N_{n1} = N_{nt1} = w_1 = M_{n1} = 0$. (16.29)

2. Contorno simplesmente apoiado, deslizante na direção normal n . É permitido o deslocamento normal u_n : $N_{n1} = u_{t1} = w_1 = M_{n1} = 0$. (16.30)

3. Contorno simplesmente apoiado, deslizante na direção tangencial ao contorno t . É permitido o deslocamento tangencial u_t : $u_{n1} = N_{nt1} = w_1 = M_{n1} = 0$. (16.31)

4. Contorno engastado: $u_{n1} = u_{t1} = w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial n} = 0$. (16.32)

5. Contorno livre: $N_{n1} = N_{ns1} = M_{n1} = V_{n1}^* = 0$. (16.33)

16.3 Flambagem de vigas laminadas delgadas

Consideramos uma viga submetida a forças axiais nas extremidades, de forma que os esforços internos são sabidamente uniformes, de valor N_{xo} em qualquer seção. Lembremos que usamos a formulação de placa, em que os esforços são dados por unidade de comprimento. A equação diferencial de equilíbrio para o problema reduz-se à terceira e à quarta das eqs. (16.13). Eliminando o esforço cortante Q_x entre elas, obtemos:

$$\frac{\partial^2 M_{x1}}{\partial x^2} + \lambda N_{xo} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in (0; l), \quad (16.34)$$

onde l é o comprimento da viga. Substituímos o esforço de placa M_{x1} pelo esforço de viga M_1 definido por $M_1 = M_{x1}/b$ e fazemos o mesmo com N_{xo} definindo o esforço de viga $N_o = -N_{xo}/b$, onde b é a largura da seção. A forma da eq.(16.34) é então a mesma para placa e viga, isto é, para a viga ela será $M_{1,xx} - \lambda N_o w_{1,xx} = 0$.

A equação constitutiva para o momento numa viga homogêneo-isotrópica é dada por (5.30) como $M_1 = EI w_{1,xx}$. O tratamento de uma viga laminada pode ser aproximado simplesmente substituindo EI por $E_{xF}I$, onde E_{xF} pode ser obtido por meio das técnicas de determinação de módulos equivalentes vistas no Capítulo 8, eqs.(8.35) ou (8.62), dependendo da forma da seção. Assim, para uma viga delgada, (16.34) fica

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} + \bar{\lambda}^2 \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0, \quad \forall x \in (0; l) \quad \text{com} \quad \bar{\lambda}^2 = \frac{\lambda N_{xo}}{E_{xF}I}. \quad (16.35)$$

Note que, como trataremos de cargas compressivas, $N_{xo} < 0$, $N_o > 0$ e $\lambda > 0$ de forma que $\bar{\lambda}$ é um número real.

A solução de (16.35) é bastante conhecida. Pode ser obtida definindo uma função auxiliar $\bar{w}(x) = w_{1,xx}(x)$ e obtendo uma equação diferencial ordinária de segunda ordem $\bar{w}_{,xx} + \bar{\lambda}^2 \bar{w} = 0$, cuja solução está nos livros de equações diferenciais para graduação. A solução é, portanto, na forma

$$\boxed{F_{cr} = \frac{F_{Bern}}{1 + \frac{F_{Bern}}{AG}}, \quad F_{Bern} = EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} \quad (16.48)$$

onde F_{Bern} é a carga obtida pela teoria de Euler-Bernoulli correspondente à expressão (16.41). Para os demais casos ilustrados nas eqs.(16.42) as soluções não são obtidas aqui de forma explícita. Por exemplo, para o primeiro caso na eq.(16.42), o da coluna **engastada-simplesmente apoiada**, o determinante da matriz obtida é

$$\det = \frac{E_{55}\bar{\lambda}l \cos \bar{\lambda}l - (E_{55} + D_{11}\bar{\lambda}^2) \text{sen} \bar{\lambda}l}{D_{11}\bar{\lambda}^2}.$$

Para obter a carga crítica, primeiramente devemos calcular a menor das raízes de $\det = 0$, que nesse problema deve ser obtida numericamente. O valor da menor raiz $\bar{\lambda}$ é em seguida substituído em (16.45), de onde pode ser explicitada a expressão para a carga crítica:

$$F_{cr} = -\lambda N_{x0} = \frac{D_{11}\bar{\lambda}^2}{\left[1 + \frac{D_{11}\bar{\lambda}^2}{E_{55}}\right]}. \quad (16.49)$$

Note que, caso $E_{55} \rightarrow \infty$, essa expressão converge à equação obtida para a viga de Euler-Bernoulli, com raiz $\bar{\lambda}l = 4,493409458 \dots \approx \sqrt{2}\pi$.

16.5 Placa retangular ortotrópica sob compressão biaxial

Consideramos aqui o problema de flambagem de uma placa delgada retangular, simétrica, ortotrópica, simplesmente apoiada sob compressão biaxial uniforme como na Figura 16.4, para valores conhecidos e fixos de N_{x0} e N_{y0} , que são números negativos. O carregamento é amplificado de forma proporcional das duas direções pelo mesmo fator λ , de forma que as compressões aplicadas por unidade de comprimento são λN_{x0} e λN_{y0} . Buscamos, então, o valor crítico de λ , λ_{cr} , que define a carga de início de instabilidade.

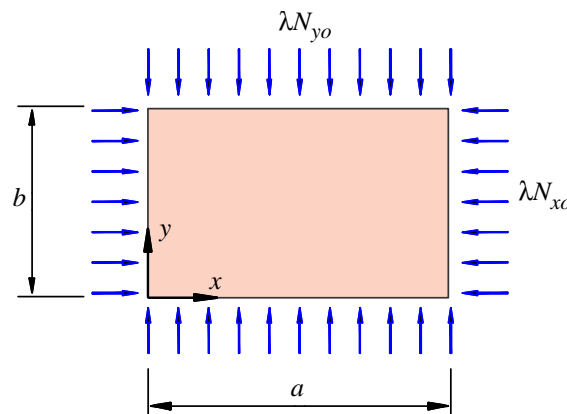


Figura 16.4: Placa retangular sob compressão biaxial uniforme.

A configuração inicial da placa é conhecida, plana, de forma que basta determinar a solução para o estado flambado. Como o laminado é simétrico ortotrópico, a equação que rege o problema para os incrementos de deslocamentos $w_1(x, y)$ no processo de flambagem é a equação (16.24), que nesse caso se reduz a

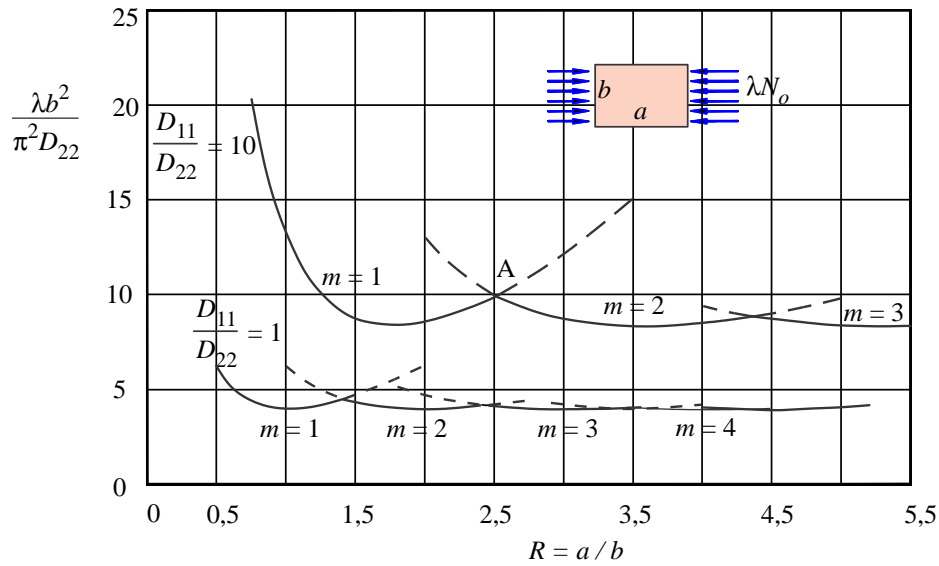


Figura 16.5: Variação da carga crítica com o aspecto da placa a/b , para $D_{11}/D_{22} = 1$ e 10, para placa ortotrópica simplesmente apoiada.

O caso $D_{11}/D_{22} = 1$ corresponde a uma placa isotrópica e as curvas correspondentes na Figura 16.5 são clássicas, que podem ser vistas em [195], por exemplo. Para um dado aspecto a/b , λ_{cr} corresponde ao valor obtido pela curva mais inferior, o que define o modo m de flambagem. Observa-se que λ_{cr} não difere muito do valor mínimo de cada curva. Diferenciando (16.55) em (a/b) , temos que em cada curva m o mínimo de λ ocorre para aspecto de placa

$$\left(\frac{a}{b}\right) = m \left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/4}, \quad (16.56)$$

de forma que o mínimo de λ é

$$\lambda_{\min} = \frac{\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[\left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/2} + \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \right] \quad (16.57)$$

Observe que o mínimo é o mesmo em qualquer curva m , como ilustrado na Figura 16.5. Como a variação de λ_{cr} com a/b é relativamente pequena para aspectos $a/b > 1,5$, o valor λ_{\min} pode ser usado como aproximação de λ_{cr} .

Para certos aspectos de placa a/b , é possível a ocorrência simultânea de dois modos de flambagem para uma mesma carga crítica, como ilustrado no ponto A da figura. A determinação desse aspecto de placa pode ser obtida aplicando (16.55) para m e $(m+1)$ e igualando os resultados. Com isso, se obtém a localização dos pontos de transição entre modos subsequentes:

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/4} \sqrt{m(m+1)} \quad (16.58)$$

16.5.2 Caso II – $N_{x_0} = N_{y_0}$ – Compressão biaxial, placa quadrada

Para uma placa quadrada comprimida igualmente nas duas direções por $N_{x_0} = N_{y_0} = -N_0$, (16.54) produz:

$$\lambda = \frac{\pi^2 D_{22}}{a^2 N_0} \frac{\left[\frac{D_{11}}{D_{22}} m^4 + \frac{2\bar{D}}{D_{22}} m^2 n^2 + n^4 \right]}{(m^2 + n^2)}, \quad \text{onde } \bar{D} = D_{12} + 2D_{66}. \quad (16.59)$$

Para a situação mais comum, onde $D_{11}/D_{22} \geq 1$, o valor de λ_{cr} ocorre para $m = 1$ e a carga é dada por

$$\lambda = \frac{\pi^2 D_{22}}{a^2 N_o} \frac{\left[\frac{D_{11}}{D_{22}} + \frac{2\bar{D}}{D_{22}} n^2 + n^4 \right]}{(1+n)^2}. \quad (16.60)$$

O mínimo de λN_o ocorre em diferentes valores de n , dependendo dos valores das relações D_{11}/D_{22} e \bar{D}/D_{22} . Alguns valores para a carga crítica para $N_{x_o} = N_{y_o} = -N_o$ e $(D_{12} + 2D_{66})/D_{22} = 1$ são:

$\frac{D_{11}}{D_{22}}$	n	$\frac{\lambda_{cr} N_o a^2}{\pi^2 D_{22}}$, eq.(16.60)
1	1	2,00
5	1	4,00
10	1	6,50
15	2	7,80

16.5.3 Caso III – $N_{x_o} < 0$ e $N_{y_o} > 0$ – Compressão e tração

Neste caso existe compressão na direção x e tração em y . Da eq.(16.54) se nota que quando N_{y_o} é trativo λ_{cr} é maior que quando N_{y_o} é nulo, isto é, a carga trativa aumenta o valor da compressão crítica, de forma que a aplicação de uma carga trativa numa direção é benéfica à flambagem em relação à compressão uniaxial simples aplicada na direção ortogonal.

16.6 Placa sob cisalhamento – Método de Galerkin

Consideramos aqui uma **placa retangular laminada, simétrica, ortotrópica, delgada, simplesmente apoiada**, sujeita a cisalhamento puro, $N_{x_o} = N_{y_o} = 0$ e $N_{x_y_o} \neq 0$. Observe que não é conhecida uma base de funções algébricas que satisfaça a equação de equilíbrio (16.24) no domínio e as condições no contorno. Resta então a busca a uma solução aproximada que pode ser obtida usando o método de Ritz pela eq.(16.19), o método de Galerkin, ou sua outra forma, o princípio dos trabalhos virtuais, eq.(16.18). A solução desse problema, aparentemente foi primeiro reportada por Lekhnitskii [123] usando um método energético. Apresentamos aqui a aproximação pelo método de Galerkin.

Como o laminado é simétrico, os incrementos de esforços normais durante a flambagem são nulos, isto é, $\mathbf{N}_1 = \mathbf{0}$. Dessa forma, a eq.(16.18) do PTV fica reduzida a:

$$\int_{\Omega} \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \hat{w}_{1,xx} \\ \hat{w}_{1,yy} \\ 2\hat{w}_{1,xy} \end{array} \right\}^t \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w_{1,xx} \\ w_{1,yy} \\ 2w_{1,xy} \end{array} \right\} + \lambda N_{x_y_o} \left\{ \begin{array}{c} \hat{w}_{1,x} \\ \hat{w}_{1,y} \end{array} \right\}^t \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w_{1,x} \\ w_{1,y} \end{array} \right\} \right\} d\Omega = 0 \quad (16.61)$$

Usa-se uma base trigonométrica de tal forma que

$$w_1(x, y) = \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (16.62)$$

Cada elemento dessa base satisfaz as condições de contorno, eqs.(16.51). As funções peso, nesse método, devem usar a mesma base, de forma que tomamos

$$\hat{w}_1(x, y) = \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} \hat{W}_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (16.63)$$

As curvaturas em (16.61) tornam-se

por

$$K_{ijmn} = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b V_{rij} D_{rs} V_{smn} \, dx dy, \quad K_{ijmn}^G = N_{xyo} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b U_{1ij} U_{2mn} U_{2ij} U_{1mn} \, dx dy \quad (16.71)$$

O primeiro índice em \mathbf{U} e \mathbf{V} indica a linha em \mathbf{U} e \mathbf{V} . Realizando as integrações, obtemos o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ijmn} = \frac{\pi^4}{4R^3 b^2} [D_{11} m^4 + 2(D_{11} + 2D_{66})(mnR)^2 + D_{22}(nR)^4], \quad \text{para } i = m \text{ e } j = n. \\ K_{ijmn}^G = \frac{-8N_{xyo} i j m n}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)}, \quad \text{se } i \pm m \text{ e } j \pm n \text{ são ímpares.} \\ = 0, \quad \text{nos casos } i = m \text{ com } m \pm i \text{ par e } j = n \text{ com } n \pm j \text{ par.} \end{array} \right. \quad (16.72)$$

Observe que nesse problema \mathbf{K} é uma matriz diagonal. $R = a/b$ é o aspecto da placa. A eq.(16.70) é um problema clássico de autovalor, isto é, só existem soluções não-triviais $\{W\}$ para deflexões transversais sob carga cisalhante coplanar λN_{xyo} se o determinante da matriz $\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}^G$ for nulo. O valor λ que torna esse determinante nulo é o autovalor do problema. Esse é o fator que define a carga crítica de flambagem $\lambda_{cr} N_{xyo}$. Das definições em (16.71) ou (16.72) sabe-se que \mathbf{K} e \mathbf{K}^G são matrizes simétricas, de forma que os autovalores de (16.70) são reais. Como temos $m_1 \times n_1$ equações, podemos ter até $m_1 \times n_1$ autovalores distintos. Fisicamente pode-se prever que, para uma placa ortotrópica, o valor da carga crítica deve ser indiferente ao sinal da carga cisalhante N_{xyo} . Assim, os autovalores ocorrem em pares de módulos idênticos, positivo e negativo, de forma que temos apenas $m_1 \times n_1/2$ cargas críticas. Observe que \mathbf{K}^G não depende diretamente das propriedades do material, mas apenas de parâmetros geométricos da placa. Isso explica por que essa matriz é conhecida como **matriz de rigidez geométrica**. Na realidade, a matriz em (16.72) é a mesma matriz obtida para uma placa isotrópica.

Lekhnitskii [123] fornece valores numéricos para carga crítica usando 5×5 termos na série. O menor autovalor de (16.70) para o caso de uma placa quadrada com $D_{11}/D_{22} = 10$, $(D_{12} + 2D_{66})/D_{22} = 1,67$, usando diversas quantidades de termos na série, são dados por Whitney [213] como:

$m_1 \times n_1 =$	2×2	3×3	4×4	5×5
$\frac{\lambda_{cr} N_{xyo} a^2}{D_{22}}$	392,9	313,7	310,2	309,0

No processo de cálculo se observa que a convergência é bastante lenta, muito mais que em casos semelhantes de placa isotrópica.

16.7 Placa anisotrópica sob compressão e cisalhamento

Nas seções anteriores consideramos a flambagem de **placas retangulares ortotrópicas simplesmente apoiadas sob carga compressiva e cisalhante**. Ali, as bases de funções usadas, as séries duplas em senos, satisfaziam precisamente tanto as condições de contorno de deslocamentos, $w = 0$, quanto de força $M_n = 0$. No caso atual consideramos o mesmo tipo de carregamento, ilustrado na Figura 16.6, mas o material da placa **não é mais ortotrópico, mas apenas simétrico**, isto é, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, mas os termos (16) e (26) em \mathbf{A} e \mathbf{D} são não-nulos. Neste caso, aparentemente não existe nenhuma base de funções que satisfaça os dois tipos de condições de contorno. A série dupla de senos, eq.(16.62), satisfaz apenas $w_1 = 0$ no contorno.

Observemos com mais detalhes as condições de contorno, que são:

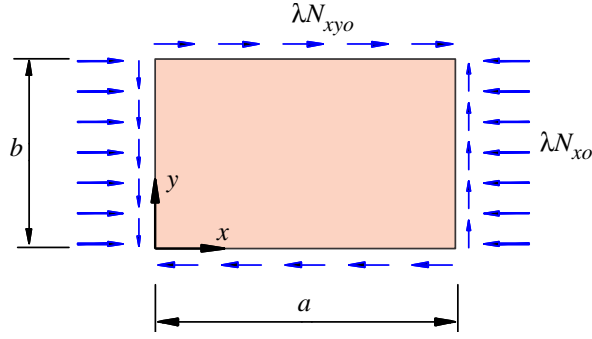


Figura 16.6: Placa sob compressão uniaxial e cisalhamento uniformes.

$$\begin{cases} w_1 = 0, \\ M_{x1} = -D_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} = 0, \end{cases} \quad \text{em } x = 0, \text{ e } x = a. \quad (16.73)$$

$$\begin{cases} w_1 = 0, \\ M_{y1} = -D_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - 2D_{26} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} = 0, \end{cases} \quad \text{em } y = 0, \text{ e } y = b.$$

Observamos que, mesmo que a expressão (16.62) não satisfaça as condições de momento fletor, ela satisfaz $w_{1,xx} = w_{1,yy} = 0$ em todo o contorno, o que deixa apenas os termos $w_{1,xy}$ não satisfeitos.

O método de Galerkin pode ser tomado a partir de (16.26). Como o laminado é simétrico e os incrementos de esforços coplanares no contorno são $\bar{X}_1 = \bar{Y}_1 = 0$, de (16.13) temos que $N_{x1} = N_{y1} = N_{xy1} = 0$ em toda a placa, da mesma forma que os incrementos de deslocamentos coplanares vêm de (16.20)–(16.21) como $u_1 = v_1 = 0$. Assim, (16.26) torna-se

$$\int_{y=0}^b \int_{x=0}^a \left[D_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \right. \\ \left. + \lambda \left[N_{xo} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - 2N_{xyo} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right] \hat{w}_1 dx dy + \int_{\Gamma_f} \left[V_{n1}^* \hat{w}_1 - M_{n1} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial n} \right] d\Gamma = 0, \quad (16.74)$$

onde $N_{xo} < 0$ em compressão. Usaremos uma função peso na forma (16.63), para que $\hat{w} = 0$ em Γ , o que elimina o primeiro termo na integral de contorno em (16.74). A integral no contorno então será

$$I = - \int_{\Gamma_f} M_{n1} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial n} d\Gamma = - \int_{x=0}^a \left[M_{y1} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial y} \Big|_{y=0} + M_{y1} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial y} \Big|_{y=b} \right] dx \\ - \int_{y=0}^b \left[M_{x1} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} \Big|_{x=0} + M_{x1} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} \Big|_{x=a} \right] dy.$$

Substituindo os momentos de (16.73) e a função peso de (16.63), temos:

$$I = \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} \hat{W}_{mn} I_{mn}, \quad \text{com} \quad I_{mn} = \frac{2D_{66}n\pi}{b} \int_{x=0}^a \left[\left((-1)^n \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \Big|_{y=b} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \right] dx \\ + \frac{2D_{16}m\pi}{a} \int_{y=0}^b \left[\left((-1)^m \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0} \right) \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \right]. \quad (16.75)$$

O desenvolvimento deste problema é semelhante àquele da Seção 16.6. A substituição das eqs. (16.62) e (16.63) em (16.74) e (16.75) e a subsequente integração resultam num sistema algébrico de