

Capítulo 7

Conceito de aproximação por elementos finitos

Nos capítulos anteriores fizemos o desenvolvimento das formulações de elementos finitos para barras e vigas usando o chamado método direto (ou método de equilíbrio). Este método se baseia em ferramentas básicas de resistência dos materiais, na aplicação direta de condições de equilíbrio e num entendimento físico direto do problema. Conquanto esta abordagem seja possivelmente a mais adequada a um primeiro contato com o método de elementos finitos (MEF) ela, infelizmente, não se presta ao tratamento de problemas mais complexos como o de flexão de placas, cascas ou de elasticidade tridimensional além de uma infinidade de outros problemas de mecânica dos sólidos, dos fluidos, de acústica, de campos elétricos, etc. De fato, o MEF, em sua forma geral, se baseia num conjunto bastante amplo de conceitos e ferramentas matemáticas abstratas que, devido a sua aplicabilidade em diversos problemas, o torna um dos métodos mais versáteis existentes. Verifica-se seu uso corriqueiro em análises de problemas de estruturas, de transferência de calor, eletromagnetismo, reações químicas, astrofísica etc., isto é, qualquer problema que tenha sido previamente modelado por um conjunto de equações diferenciais.

Assim, este capítulo é dedicado a uma introdução às ferramentas básicas do método, que serão aplicados nos capítulos seguintes a elementos estruturais mais complexos como o de flexão de placas ou a problemas como dinâmica ou transferência de calor.

7.1 Modelo 1D - Equação diferencial de equilíbrio

Para entender o funcionamento do MEF trabalharemos inicialmente com o modelo que descreve o comportamento de uma barra elástica, convenientemente orientada, de forma tal que as equações resultantes envolvam uma única variável, a função deslocamento axial u , que por sua vez depende de uma única coordenada, a posição da seção transversal x , isto é, $u = u(x)$. Isto facilitará a compreensão tanto do modelo quanto do método numérico de solução.¹

O modelo é construído admitindo um conjunto de hipóteses que definem o escopo de aplicação do mesmo (conjunto de casos reais que o modelo é capaz de simular). Essas hipóteses são:

- **Hipótese geométrica:** O corpo é definido com o formato de um cilindro, de seção transversal arbitrária, com comprimento sensivelmente superior as dimensões da seção transversal. Em termos matemáticos, o fechamento $\bar{\Omega}$ (a região do espaço euclidiano que o corpo ocupa) pode ser definido como (Figura 7.1):

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq L, (y, z) \in A(x)\}, \quad (7.1)$$

¹Note que o desenvolvimento mostrado aqui para o problema de barras segue passos bastantes paralelos àqueles já mostrados no Capítulo 5, de forma que ambos os capítulos podem ser vistos independentemente, e parte do material é duplicado. Entretanto aqui é utilizado um procedimento mais formal, do ponto de vista matemático e de mecânica do contínuo.

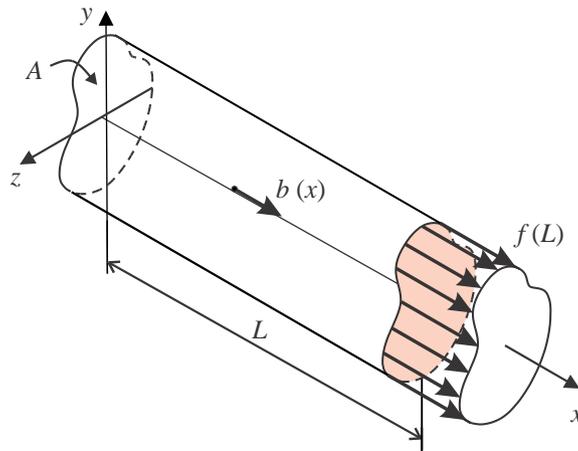


Figura 7.1: Configuração geométrica da barra.

onde A representa a área da seção transversal a barra. O contorno é o conjunto de pontos que identifica a superfície do corpo. Por simplicidade, admitimos que a seção transversal é constante ao longo da barra. A equação acima se lê como: Ω é o conjunto de pontos de coordenadas (x, y, z) tal que $0 \leq x \leq L$, e tal que $(y, z) \in A$. O contorno Γ é definido como a superfície que delimita o volume. Assim, o fechamento é $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, onde Ω é o domínio, que é constituído pelos pontos internos ao corpo.

- **Hipótese sobre as tensões. Estado uniaxial de tensão:** Considere um ponto de coordenada \mathbf{x} , onde \mathbf{x} é o vetor de componentes (x, y, z) . Admitimos que o estado de tensões da barra pode ser representado pela seguinte função (tensorial) $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_x(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Este é um estado uniaxial de tensões: a componente normal σ_x depende unicamente da coordenada axial x do ponto \mathbf{x} . Em outras palavras, a tensão é constante para todos os pontos de uma mesma seção transversal. As forças externas compatíveis com um estado uniaxial de tensões tem a forma

$$\mathbf{t}(L) = \begin{Bmatrix} f(L) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t}(0) = \begin{Bmatrix} f(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} b(x) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (7.3)$$

isto é, atuam exclusivamente na direção axial da barra. $f(L)$ e $f(0)$ são forças por unidade de área que atuam nas extremidades da barra, e \mathbf{b} é uma força de corpo por unidade de volume. Observamos que, no caso da barra se encontrar engastada, por exemplo no ponto $x = 0$, o valor de $f(0)$ é a reação do vínculo.

- **Hipótese de comportamento de material.** Supondo que a barra foi construída com um material isotrópico elástico linear (ao menos para o início do carregamento), é possível utilizar a lei de Hooke para obter as deformações a partir das tensões:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}, \quad (7.4)$$

Aplicando esta relação sobre as tensões (7.2), temos as componentes de deformação correspondente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_x = \frac{1}{E}\sigma_x, & \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x = -\nu\varepsilon_x, \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x = -\nu\varepsilon_x, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.\end{aligned}\quad (7.5)$$

Assim, os estados de tensão e deformação num ponto da barra são expressos pelos os tensores

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_x(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_x(x) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_x(x) \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

A partir destas hipóteses vamos formular a condição de equilíbrio de um segmento da barra de comprimento diferencial dx , submetida a uma distribuição de forças de corpo b , com unidades $[\text{N}/\text{m}^3]$. A equação diferencial de equilíbrio pode ser obtida diretamente para o problema de barra, tomando o elemento diferencial visto na Figura 7.2. Entretanto, podemos simplesmente tomar o conjunto de equações do movimento geral, já obtida em (2.25). Devido às hipóteses, duas das três equações são identicamente nulas, e apenas a primeira resulta na forma simplificada

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + b = \rho \ddot{u}. \quad (7.7)$$

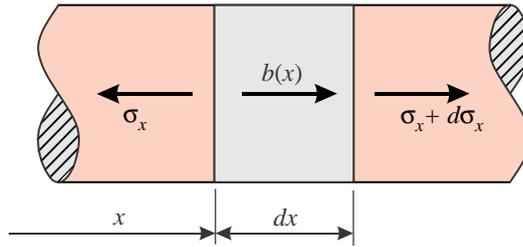


Figura 7.2: Forças num segmento da barra.

Podemos agora relacionar a tensão com a deformação axial da barra mediante a lei de Hooke 1D, eq.(7.5), isto é, $\sigma_x = E\varepsilon_x$. Por sua vez, a deformação é relacionada ao deslocamento pelas relações cinemáticas, que no caso 1D são $\varepsilon_x = du/dx$. Assim, a equação de equilíbrio estático pode ser colocada em termos do deslocamento axial:

$$\boxed{E \frac{d^2u(x)}{dx^2} + b(x) = 0 \quad \forall x \in (0, L)} \quad (7.8)$$

Essa é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, homogênea, que pode ser resolvida com condições de contorno adequadas. Para que o problema tenha solução, é necessário que se conheça uma **condição de contorno** em cada extremo da barra: ou o valor do deslocamento ou de sua derivada. Especificamente, as condições de contorno podem ser:

$$E \frac{du}{dx}(0) = f(0) \quad \text{ou} \quad u(0) = \bar{u}_0, \quad (7.9)$$

$$E \frac{du}{dx}(L) = f(L) \quad \text{ou} \quad u(L) = \bar{u}_L. \quad (7.10)$$

As condições de contorno nas quais se fixa o valor da derivada da função incógnita, du/dx , são conhecidas como condições de **contorno naturais** ou de **Neumann**. Outro tipo de condição de contorno usual é aquela em que se conhece o valor do deslocamento u no nó. Esta condição é conhecida por **condição essencial** ou de **Dirichlet**. No caso do presente exemplo (barra engastada em $x = 0$), temos uma condição essencial na origem onde, devido ao engaste, se conhece o valor do deslocamento $u(0) = \bar{u}$. Usualmente $\bar{u} = 0$ embora, devido a interferências negativas ou erros de montagem pode-se ter um valor não nulo para o deslocamento prescrito. No extremo oposto da

$$-N + (N + \Delta N) + bA\Delta x = 0. \quad (7.13)$$

Expandindo o produto dos parênteses, simplificando os termos $\pm\sigma_x A$ que aparecem, dividindo todos os termos por Δx e fazendo o limite $\Delta x \rightarrow 0$, obtém-se a equação diferencial de equilíbrio na forma

$$\boxed{\frac{d}{dx}(N) = -bA} \quad (7.14)$$

Considerando a lei de Hooke 1D com E constante em x , $\sigma_x = E\varepsilon_x = Eu'$. Então $N = EAu'$. Dessa forma a equação diferencial de equilíbrio em termos do deslocamento axial fica

$$\boxed{E \frac{d}{dx} \left(A \frac{du}{dx} \right) = -bA} \quad (7.15)$$

7.1.2 Exemplo 7.1 - Barra de seção triangular sob força de corpo

Considere uma barra de seção triangular como ilustrada na Figura, engastada em $x = 0$, sob a ação de força de corpo b [N/m³] na direção axial. A espessura é constante h . Determinar a expressão para o deslocamento axial e tensão.

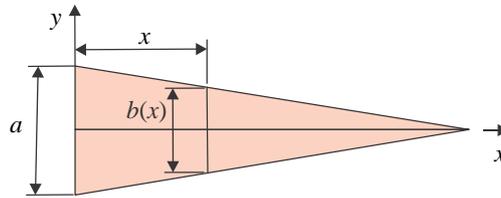


Figura 7.3: Barra de seção transversal triangular.

Solução:

Usando trigonometria, largura b da barra numa dada seção x é dada por

$$b(x) = a \left(1 - \frac{x}{L} \right).$$

Logo a variação da seção transversal é dada por

$$A(x) = bh = ah \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (7.16)$$

A equação de equilíbrio (7.14) se torna

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(N) &= -bA, \\ &= -bah \left(1 - \frac{x}{L} \right), \end{aligned} \quad (7.17)$$

cuja integral fica

$$N(x) = bah \left(\frac{x^2}{2L} - x \right) + c_1. \quad (7.18)$$

Aplicamos a condição de contorno (a) $N(L) = 0$. Isso produz

$$c_1 = \frac{bahL}{2}.$$

Logo,

$$N(x) = \frac{bah}{2L} (L^2 - 2Lx + x^2) \quad (7.19)$$

A tensão numa seção arbitrária é

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{b(L^2 - 2Lx + x^2)}{2L(1 - \frac{x}{L})} \quad (7.20)$$

Como $\varepsilon_x = \sigma_x/E = u'$,

$$\frac{du}{dx} = \frac{b(L^2 - 2Lx + x^2)}{2E(L - x)}.$$

Uma nova integração produz

$$u(x) = \frac{b}{4E} (2Lx - x^2) + c_2. \quad (7.21)$$

Aplicando a condição de contorno (b) $u(0) = 0$ se obtém $c_2 = 0$. Logo,

$$u(x) = \frac{b}{4E} (2Lx - x^2) \quad (7.22)$$

e o deslocamento máximo é $u_{\max} = bL^2/4E$.

7.2 Princípio dos trabalhos virtuais

A primeira pergunta que deve ser feita quando se procura uma solução aproximada para a função $u(x)$ é **onde procurar, em que espaço de funções**. Isto significa que é necessário identificar as características principais da solução $u(x)$ para procurar a mesma apenas no conjunto de funções que as possuem. Observamos que, tratando-se do deslocamento da barra, essa função deve ser contínua, pois uma descontinuidade na função $u(x)$ indicaria uma fratura ou penetração entre suas partes. Por outro lado, $u(x)$ deve satisfazer às condições de contorno de deslocamento, que no presente caso é a nulidade do deslocamento no engaste.

Assim, são definidos os seguintes conjuntos de funções (usaremos o problema da barra engastada, vista na Figura 7.1, como base de exemplificação na definição dos conjuntos de funções):

- **Conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis *Kin***. É o conjunto de todas as funções de deslocamento que satisfazem às condições de serem contínuas e diferenciáveis por partes no domínio e que satisfazem às condições de contorno de deslocamento do problema, isto é:

$$Kin = \{u(x) : \text{contínuo, diferenciável por partes, e } u(0) = \bar{u}\}. \quad (7.23)$$

As funções desse conjunto são “candidatas” à solução do problema, isto é, a solução de qualquer problema de barra é uma das infinitas funções do conjunto e, nenhuma função fora desse conjunto pode ser a solução do problema. Assim, é exigido que elas sejam diferenciáveis, de forma a permitir o cálculo de deformações. Observe-se que todos os deslocamentos do conjunto possuem um valor único e, no caso de um engaste em $x = 0$, a função tem o valor prescrito \bar{u} .

- **Conjunto das variações de deslocamentos *Var***. Para entender a definição desse outro conjunto, consideremos a barra deformada devido a um deslocamento descrito pela função $u_1(x)$ ilustrada na Figura 7.4, onde $u_1(x) \in Kin$. Se perturbamos o deslocamento, modificando-o, teremos uma outra função $u_2(x)$, que também pertence a *Kin*. Podemos calcular a diferença de deslocamentos em cada ponto, (também chamada **variação**): $\hat{u}(x) = u_2(x) - u_1(x)$. Esta função, $\hat{u}(x)$, não pertence mais ao conjunto *Kin* uma vez que o seu valor no contorno é

nulo (Figura 7.4) e não o valor prescrito \bar{u} . Assim, para coletar as variações de deslocamento definimos o conjunto das variações como:

$$Var = \{\hat{u}(x) : \text{contínuo, diferenciável por partes, } \hat{u}(0) = 0\}. \quad (7.24)$$

Devemos notar que as funções deste conjunto tem obrigatoriamente o valor zero em $x = 0$, uma vez que essas funções são obtidas pela diferença entre dois deslocamentos arbitrários de Kin , ambos com o mesmo valor \bar{u} no engaste.

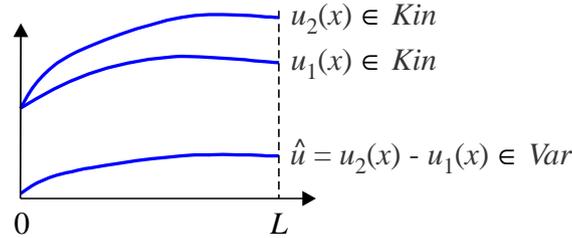


Figura 7.4: Funções dos conjuntos Kin e Var .

Se a função u aplicada ao lado esquerdo da equação diferencial (7.11) for a solução exata do problema, o resultado do lado direito será zero. Por outro lado, se a função u usada for uma função qualquer, o resultado será não nulo. Esse resultado é igual a um erro, denominado **função resíduo** $r(x)$. Isso pode ser posto como:

$$AE \frac{d^2 u(x)}{dx} + Ab(x) = r(x) \quad \forall x \in (0, L). \quad (7.25)$$

O nome **resíduo** indica justamente que, se a função $r(x)$ não for nula em algum ponto x , a equação diferencial de equilíbrio não está sendo completamente satisfeita, havendo um erro “residual”.

Uma forma possível de identificar se uma função é nula em todo ponto do seu domínio, consiste em realizar a operação

$$\int_0^L r(x) \hat{u}(x) dx, \quad (7.26)$$

sendo $\hat{u}(x)$ uma função **arbitrária**, conhecida, (denominada **deslocamento virtual** ou ainda **função peso**) pertencente ao conjunto Var . A palavra “virtual” é usada como equivalente a “fictício”, não verdadeiro. Se o resultado desta operação for o valor zero, existem chances de que

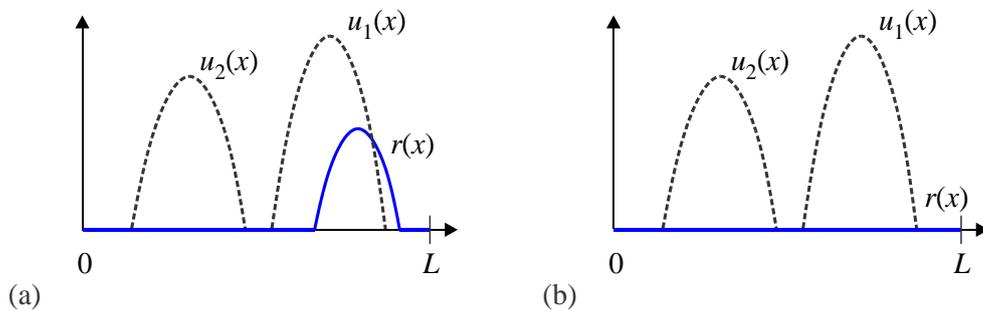


Figura 7.5: (a) Função resíduo não nula e (b) Função resíduo nula.

a função $r(x)$ seja zero em todo ponto x (Figura 7.5a). Obviamente não se pode concluir com isto que o resíduo seja identicamente nulo dado que o valor zero da integral pode ser produto de uma escolha particular de $\hat{u}(x)$. No entanto, é possível afirmar que a única função $r(x)$ que produz um valor nulo na integral acima **para toda função** $\hat{u}(x) \in Var$, é a função $r(x) \equiv 0$ (ver Figura 7.5b).

- **Trabalho virtual interno:** é o trabalho produzido pelas tensões reais $\sigma(u) = E \, du/dx$ sobre a uma deformação virtual $\varepsilon(\hat{u}) = d\hat{u}/dx$ que, por sua vez, é produzida por um campo de deslocamento virtual \hat{u} :

$$\hat{W}_i = AE \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx \quad \text{isto é,} \quad \hat{W}_i = A \int_0^L \sigma(u) \varepsilon(\hat{u}) dx. \quad (7.32)$$

Note que, como o deslocamento \hat{u} não é verdadeiro (é virtual, fictício), o trabalho produzido também não é real, mas virtual.

- **Trabalho virtual externo:** é o trabalho produzido pelas forças externas reais sobre o campo de deslocamento virtual \hat{u} :

$$\hat{W}_e = A \int_0^L b \hat{u} dx + A f \hat{u}(L). \quad (7.33)$$

O princípio dos trabalhos virtuais postula que as tensões $\sigma(u)$ estão em equilíbrio com o carregamento externo (f e b) **se e somente se** os trabalhos virtuais interno e externo são iguais para qualquer função peso $\hat{u} \in Var$, isto é⁵,

$$\hat{W}_i = \hat{W}_e \quad \forall \hat{u} \in Var. \quad (7.34)$$

O nome dado ao princípio segue o seguinte raciocínio:

- **Princípio:** porque pode ser utilizado como um postulado que define equilíbrio, e consequentemente como ponto de partida para cálculo e dedução de outras relações, inclusive a própria equação diferencial de equilíbrio.
- **Trabalhos:** porque cada termo tem o significado físico do trabalho realizado pelos esforços internos e externos para uma variação de deslocamento arbitrária (deslocamento virtual) \hat{u} .
- **Virtuais:** porque o deslocamento \hat{u} não é real, isto é, não tem relação com os esforços aplicados. São simplesmente funções arbitrárias do conjunto Var .

Veremos a seguir uma outra forma de obter idêntico resultado partindo da existência de uma função que mede a energia do sistema. Este item, porém, pode ser deixado momentaneamente de lado pelo leitor que deseje abordar imediatamente o tópico de aproximação pelo método de elementos finitos.

7.3 Princípio da Energia Potencial tTotal Mínima

Nesta seção mostraremos que a função deslocamento $u(x)$ que satisfaz ao princípio dos trabalhos virtuais é a mesma função que minimiza uma medida da energia acumulada no sistema, denominada **energia potencial total II**.

Consideramos aqui, como exemplo, uma barra submetida a esforços externos que provocam um campo de deslocamento $u(x)$ e, consequentemente, um estado de tensões $\sigma(u)$. Define-se a **densidade de energia de deformação interna** (para um material homogêneo elástico linear) à

⁵É comum se ter certa dificuldade em interpretar estes conceitos, principalmente pelo hábito de se visualizar o problema de equilíbrio através da ótica conhecida como “mecânica vetorial”, derivada diretamente das leis de Newton, baseadas principalmente nas equações de movimento $F = ma$ de uma partícula.

De fato, a representação do equilíbrio através dos conceitos do princípio dos trabalhos virtuais são anteriores a Newton e suas primeiras expressões remontam a Leonardo da Vinci (1452-1519), Galileo Galilei (1564-1642) e Jean Bernoulli (1667-1742) [64].

Hoje podemos ver claramente a relação entre ambas as formulações, como foi mostrado nas deduções anteriores.

Derivada e variação

Qual a diferença entre a derivada clássica de cálculo e aquela aqui efetuada? A derivada clássica de cálculo é a seguinte:

$$\delta f|_{[\Delta x]} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + t\Delta x) - f(x)}{t} \right).$$

Na derivação clássica de uma função real de uma única variável real, o incremento, ou “variação”, Δx , tem sempre a mesma direção. No caso de duas dimensões, é necessário levar em conta a direção da variação, tomando derivadas parciais (Figura 7.8):

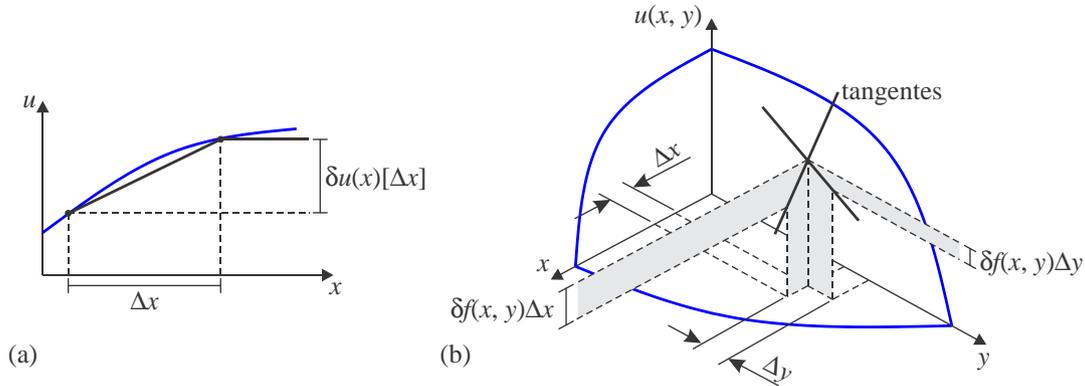


Figura 7.8: Derivadas parciais de uma função.

$$\begin{aligned} \delta f(x, y)|_{[\Delta x]} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + t\Delta x, y) - f(x, y)}{t} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta f(x, y)|_{[\Delta y]} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x, y + t\Delta y) - f(x, y)}{t} \right). \end{aligned}$$

No caso do funcional $\Pi(u)$, existem tantas formas de variar $\Pi(u)$ quanto funções virtuais \hat{u} existam, isto é, existem infinitas derivadas parciais:

$$\delta \Pi(u)|_{[\hat{u}]} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\Pi(u + t\hat{u}) - \Pi(u)}{t} \right). \quad (7.46)$$

Para cada função \hat{u} tem-se uma “derivada parcial” de Π . Isto é um problema, dado que, para garantir que haja equilíbrio, todas as derivadas parciais de $\Pi(u)$ devem ser zero. Isto é, a variação de $\Pi(u)$ para toda direção \hat{u} , deve ser zero.

7.4 Aproximação pelo método de elementos finitos

Como já foi visto, o problema de uma barra simples sob tração, como na Figura 7.1, possui solução analítica fechada, a eq.(7.12), que é também solução do PTV. Deve-se ter em mente que o objetivo aqui não é tratar apenas do problema de uma barra, que é extremamente simples, mas usar esse problema para ilustrar o desenvolvimento de um método geral de obtenção de soluções aproximadas

a problemas envolvendo milhares de barras e para outros tipos de elementos em distintos tipos de fenômenos físicos.

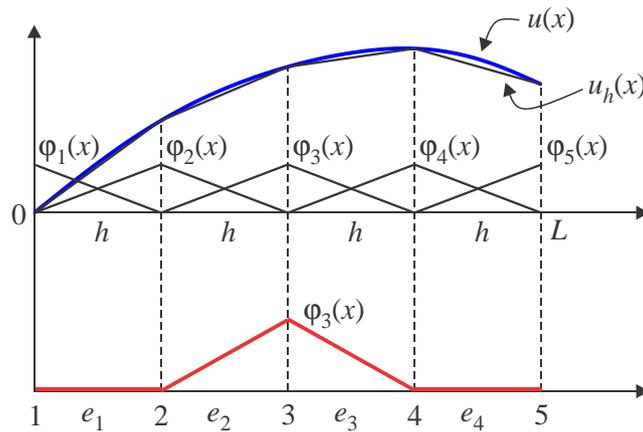


Figura 7.9: Malha de quatro elementos, funções de aproximação lineares φ_i , solução exata u e solução aproximada u_h .

Consideremos inicialmente a definição de uma **função linear por partes** como sendo uma função do tipo mostrada na linha quebrada $u_h(x)$ da Figura 7.9, isto é, uma função que é linear ao longo de segmentos definidos, porém não é linear em sua extensão completa.

Consideramos a solução exata de um problema, como ilustrada pela curva $u(x)$ da Figura 7.9. Uma aproximação possível da função u pode ser construída mediante uma **função linear por partes** u_h . A precisão dessa aproximação depende do número e do tamanho das divisões de comprimento h realizadas na barra. É intuitivo perceber que, a medida em que o número de divisões aumenta, o tamanho dos intervalos h diminui e a aproximação melhora. Em outras palavras, fazendo o intervalo $h \rightarrow 0$, tem-se que $u_h \rightarrow u$.

Os segmentos em que foi dividida a barra são conhecidos como **elementos**. Os pontos de união entre estes elementos são chamados de **nós**. O conjunto de elementos é conhecido como **malha** de elementos finitos. Neste caso, a malha é composta de 4 elementos e 5 nós.

Uma função linear por partes como u_h pode ser construída como a combinação linear de funções $\varphi_i(x)$ mais simples denominadas **funções de aproximação**⁷. No presente exemplo a solução $u(x)$ pode ser aproximada pela função u_h da seguinte forma (Figura 7.9):

$$u(x) \simeq u_h(x) = 0\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + u_3\varphi_3(x) + u_4\varphi_4(x) + u_5\varphi_5(x), \quad (7.47)$$

ou, em termos gerais,

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_{nos}} u_i \varphi_i(x), \quad (7.48)$$

onde N_{nos} é o **número total de nós do modelo**, que, nesse caso, é o número de funções de interpolação.

Da mesma forma, uma função arbitrária \hat{u}_h pode ser expressa pelas mesmas funções de interpolação φ_i e por diferentes constantes \hat{u}_i :

$$\hat{u}_h(x) = \hat{u}_1\varphi_1(x) + \hat{u}_2\varphi_2(x) + \hat{u}_3\varphi_3(x) + \hat{u}_4\varphi_4(x) + \hat{u}_5\varphi_5(x) = \sum_{j=1}^{N_{nos}} \hat{u}_j \varphi_j(x). \quad (7.49)$$

As funções $\varphi_i(x)$ são convenientemente construídas de forma tal que seu valor seja igual a 1 (um)

⁷Em geral, a aproximação da solução exata não é uma interpolação dos seus pontos - os valores nodais não necessariamente coincidem com os valores exatos, exceto em problemas muito simples, como tração e flexão de barras e problemas de condução uniaxial de calor.

no nó i , e zero nos nós j , se $j \neq i$, isto é,

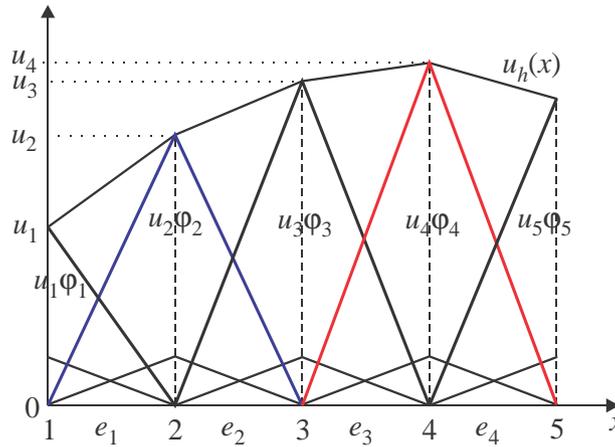
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_i, \\ 0 & \text{se } x = x_j, \quad j \neq i \end{cases} \quad (7.50)$$

Por exemplo, $\varphi_3(x)$ é uma função não nula apenas entre os nós 2 e 4 e φ_5 é não nula apenas no intervalo dos nós 4 e 5. Fora dos respectivos intervalos as funções são nulas. Esta forma de aproximação de $u(x)$ é um dos alicerces conceituais do método dos elementos finitos. Toda solução dada por este método estará baseada num conjunto de funções de interpolação tal que a combinação linear adequada destas permita aproximar a solução exata. O grau de precisão da aproximação é dado pela qualidade e quantidade das funções $\varphi_i(x)$.

Se, em (7.48) fazemos $x = x_j$, onde x_j é a coordenada de um nó j , da propriedade (7.50) temos que

$$u_h(x_j) = \sum_{i=1}^{N_{\text{nos}}} u_i \varphi_i(x_j) = u_j \underbrace{\varphi_j(x_j)}_{=1} = u_j, \quad (7.51)$$

isto é, u_j é o valor da função no nó j . É dito então que u_j é o deslocamento nodal do nó j . Nesse ponto da dedução essas são as incógnitas do problema. A Figura 7.4 ilustra a relação entre as funções de forma e os valores nodais no processo de representação de uma função $u_h(x)$ no exemplo de quatro nós com quatro elementos idênticos. Por exemplo, os termos $u_2\varphi_2(x)$ e $u_3\varphi_3(x)$ na representação $u_h(x)$ em (7.47), são os dois triângulos ilustrados na figura. A soma de ambos no elemento 2 gera o segmento linear de $u_h(x)$ naquele elemento.



Observação: problema de dimensão finita. A série de Fourier é conhecida por representar, dentro de certas condições, uma função periódica mediante uma série infinita na forma

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varphi_i(x). \quad (7.52)$$

Em outras palavras, $u(x)$ é representada por uma combinação de infinitos elementos da base harmônica $\varphi_i(x)$. Isto significa que a função $u(x)$ é de *dimensão infinita*. O termo “infinito” se refere a que, se o conjunto de funções $\varphi_i(x)$ for previamente conhecido, para representar a função u se necessita determinar e conhecer infinitos valores u_i . No caso de uma função de deslocamentos u no MEF, precisaríamos de uma combinação linear com uma quantidade infinita de termos para representar a solução exata $u(x)$ para um carregamento arbitrário. De forma prática isso é evidentemente impossível, de forma que o que é feito no MEF é *truncar a série*, passando a uma *representação finita* para a representação de $u(x)$. Em outras palavras, $u_h(x)$ no MEF é uma aproximação construída através de um *número finito* de funções de aproximação ou funções base (geralmente não

somente pouco mais que a metade dos termos da matriz de rigidez precisa ser calculada e armazenada. O **método de Gauss** para a solução também se beneficia dessa característica.

7.4.1 Exemplo 7.2 - Quatro elementos idênticos

Tomemos como exemplo a barra em análise, modelada por 4 elementos, ilustrada na Figura 7.9, com os seguintes dados: $L = 100$ mm, $A = 2$ mm², $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $b = 4$ N/mm³, força de tração na extremidade $f = -25$ N/mm², $L_e = 25$ mm. A solução exata é dada pela equação (7.12) e é representada pela figura 7.13. As funções de aproximação para a malha de quatro elementos são:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 1 - \frac{x}{L_e}, & \varphi'_1 &= -\frac{x}{L_e}, & 0 \leq x \leq L_e, \\
 \varphi_2 &= \frac{x}{L_e}, & \varphi'_2 &= \frac{x}{L_e}, & 0 \leq x \leq L_e, \\
 \varphi_2 &= 2 - \frac{x}{L_e}, & \varphi'_2 &= -\frac{x}{L_e}, & L_e \leq x \leq 2L_e, \\
 \varphi_3 &= \frac{x}{L_e} - 1, & \varphi'_3 &= \frac{x}{L_e}, & L_e \leq x \leq 2L_e, \\
 \varphi_3 &= 3 - \frac{x}{L_e}, & \varphi'_3 &= -\frac{x}{L_e}, & 2L_e \leq x \leq 3L_e, \\
 \varphi_4 &= \frac{x}{L_e} - 2, & \varphi'_4 &= \frac{x}{L_e}, & 2L_e \leq x \leq 3L_e, \\
 \varphi_4 &= 4 - \frac{x}{L_e}, & \varphi'_4 &= -\frac{x}{L_e}, & 3L_e \leq x \leq 4L_e, \\
 \varphi_5 &= \frac{x}{L_e} - 3, & \varphi'_5 &= \frac{x}{L_e}, & 3L_e \leq x \leq 4L_e.
 \end{aligned} \tag{7.65}$$

As componentes da matriz de rigidez são calculadas por integração das derivadas das funções de aproximação segundo a expressão (7.58). Por exemplo, os primeiros elementos da matriz são:

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= AE \int_0^L \varphi'_1 \varphi'_1 dx = AE \int_0^{L_e} \left(-\frac{1}{L_e}\right)^2 dx = \frac{AE}{L_e}, \\
 K_{12} &= K_{21} = AE \int_0^L \varphi'_1 \varphi'_2 dx = AE \int_0^{L_e} -\left(\frac{1}{L_e}\right)^2 dx = -\frac{AE}{L_e}, \\
 K_{13} &= K_{31} = AE \int_0^L \varphi'_1 \varphi'_3 dx = 0 = K_{14} = K_{15} = K_{41} = K_{51}, \\
 K_{22} &= AE \int_0^L \varphi'_2 \varphi'_2 dx = \underbrace{AE \int_0^{L_e} \left(\frac{1}{L_e}\right)^2 dx}_{\text{elem. 1}} + \underbrace{AE \int_{L_e}^{2L_e} \left(-\frac{1}{L_e}\right)^2 dx}_{\text{elem. 2}} = 2\frac{AE}{L_e},
 \end{aligned}$$

Cálculo similar acontece com o termo de carregamento nodal \mathbf{F} : (lembre que $\varphi_1(L) = \varphi_2(L) = \varphi_3(L) = \varphi_4(L) = 0$ e $\varphi_5(L) = 1$). Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 F_1 &= A \int_0^L b \varphi_1 dx + Af \varphi_1(L) = Ab \int_0^{L_e} \left(1 - \frac{x}{L_e}\right) dx = Ab \frac{L_e}{2}, \\
 F_2 &= A \int_0^L b \varphi_2 dx + Af \varphi_2(L) = Ab \int_0^{L_e} \frac{x}{L_e} dx + Ab \int_{L_e}^{2L_e} \left(2 - \frac{x}{L_e}\right) dx = AbL_e,
 \end{aligned}$$

$$F_5 = A \int_0^L b\varphi_5 dx + Af \varphi_5(L) = Ab \int_{3L_e}^{4L_e} \left(\frac{x}{L_e} - 3 \right) dx + Af \cdot 1 = Ab \frac{L_e}{2} + Af.$$

Em forma matricial isso pode ser posto como:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} Ab \frac{L_e}{2} \\ Ab L_e \\ Ab L_e \\ Ab L_e \\ Ab \frac{L_e}{2} + Af \end{Bmatrix}.$$

Substituindo os valores dados, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$16,800 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 50 \end{Bmatrix}.$$

Considerando que a viga está engastada na origem, $u_1 = 0$. Assim, a primeira equação é dispensada do sistema, restando⁹

$$16.800 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 50 \end{Bmatrix},$$

o que resulta na solução:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3,869 \\ 6,548 \\ 8,036 \\ 8,333 \end{Bmatrix} 10^{-2}.$$

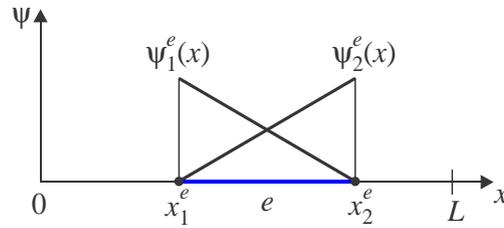
Com estes parâmetros podemos calcular o deslocamento, deformação e tensão em qualquer ponto da barra mediante as operações já conhecidas:

$$\begin{aligned} u_h(x) &= u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + u_3\varphi_3(x) + u_4\varphi_4(x) + u_5\varphi_5(x), \\ \varepsilon_h(x) &= \frac{du_h}{dx} = u_1\varphi_1'(x) + u_2\varphi_2'(x) + u_3\varphi_3'(x) + u_4\varphi_4'(x) + u_5\varphi_5'(x), \\ \sigma_h(x) &= E\varepsilon_h(x) = E(u_1\varphi_1'(x) + u_2\varphi_2'(x) + u_3\varphi_3'(x) + u_4\varphi_4'(x) + u_5\varphi_5'(x)). \end{aligned} \tag{7.66}$$

7.5 Matriz de rigidez e vetor de carga elementares

Uma das características da matriz \mathbf{K} , como já foi mencionada, é sua esparsidade, isto é, uma grande quantidade de seus termos são nulos. Esta característica aqui observada num exemplo simples fica extremamente acentuada em problemas complexos onde o número de equações e incógnitas pode chegar a dezenas de milhares ou mesmo milhões. Assim, o cálculo de \mathbf{K} e \mathbf{F} , como mostrado em (7.58) usando funções globais, é ineficiente pela quantidade de termos cujo resultado da integral dá o valor nulo. Uma outra sequência de cálculo se impõe então.

⁹Um procedimento computacionalmente mais eficiente para impor as condições de contorno no sistema algébrico é descrito sucintamente na seção 7.6.

Figura 7.10: Funções de interpolação do elemento e .

Para isso, inicialmente particionamos o domínio fechado $\bar{\Omega} = [0, L]$ em elementos finitos. Em seguida, para o elemento genérico e , cujo domínio é $\Omega_e = [x_1^e, x_2^e]$, definimos as chamadas **funções elementares** ψ_1^e e ψ_2^e . A Figura 7.10 ilustra o caso de **funções lineares** entre os dois nós do elemento genérico e . Essas funções são definidas por:

$$\psi_1^e = \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} \quad \text{e} \quad \psi_2^e = \frac{x_1^e - x}{x_1^e - x_2^e}, \quad \text{para } x \in \Omega_e. \quad (7.67)$$

Aqui se usa uma nova notação, onde o supra-índice indica o número do elemento ao qual a função é associada, enquanto que os sub-índices indicam a numeração dos nós intrínsecos do elemento, que neste caso, de elementos de dois nós, são numerados como nós 1 e 2 do elemento e .¹⁰ Estas funções são definidas apenas no elemento correspondente e satisfazem à propriedade de valer 1 (um) no nó da função e 0 (zero) nos demais nós do elemento.

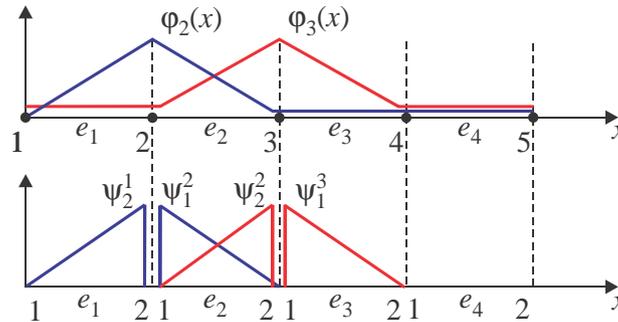


Figura 7.11: Funções de interpolação globais e elementares. São indicadas a numeração global dos nós, e também a numeração local dos nós em cada elemento.

Observemos a Figura 7.11. A função global φ_2 é decomposta em duas **funções elementares** ψ_2^1 e ψ_1^2 :

$$\varphi_2 = \psi_2^1 \cup \psi_1^2 \quad \text{e} \quad \varphi_3 = \psi_2^2 \cup \psi_1^3, \quad (7.68)$$

sendo que ψ_2^1 é a rampa não nula apenas no elemento 1 e nula nos demais elementos, (é unitária no nó 2 do elemento 1) e a função elementar ψ_1^2 é não nula apenas no elemento 2 e nula nos demais (é unitária no nó 1 do elemento 2). Em geral, a notação ψ_i^e indica a função de aproximação associada do nó local i (unitária nesse nó) do elemento e .

O deslocamento numa seção genérica do elemento fica definido pelos deslocamentos nodais em seus dois nós, u_1 e u_2 , e pelas funções elementares, isto é,

$$u(x) = u_1 \psi_1^e(x) + u_2 \psi_2^e(x). \quad \text{Em geral, } u(x) = \sum_{i=1}^2 u_i \psi_i^e(x). \quad (7.69)$$

Utilizando estas funções, os termos K_{22} , K_{23} , K_{33} , F_2 e F_3 , da matriz de rigidez e do vetor força

¹⁰Note que agora temos duas numerações distintas para os nós, a **numeração global** na estrutura e a **numeração local** do elemento. No caso da barra, o elemento linear possui dois nós, de forma que os nós locais são 1 e 2. Várias bibliografias e programas comerciais denotam a numeração local por I, J, K, L etc.

calculadas elemento a elemento. Já cargas concentradas nos nós, são colocadas diretamente no vetor global de carregamento.

7.5.2 Exemplo 7.3 - Quatro elementos com malha irregular

Usando as mesmas dimensões do exemplo anterior, $L = 100$ mm, $A = 2$ mm², $E = 2.1 \times 10^5$ MPa, $b = 4$ N/mm³, $f = -25$ N/mm², modificamos os tamanhos dos elementos, fazendo $L_1 = L_2 = 30$ mm, $L_3 = L_4 = 20$ mm. (Observação: o leitor que já tiver estudado os Capítulos 5 e 6, ou ainda o Capítulo 13, pode suprimir restante do presente capítulo.)

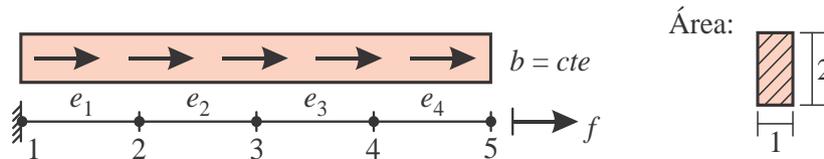


Figura 7.12: Exemplo 7.2 de barras.

O primeiro bloco de dados adequados a um programa de MEF são os dados de coordenadas nodais.¹¹

Coordenadas nodais

Nós	x	y	z
1	0	0	0
2	30,0	0	0
3	60,0	0	0
4	80,0	0	0
5	100,0	0	0

Define-se a matriz de conectividade (ou incidência) como aquela que indica os nós globais que compõem o elemento:

Conectividade dos elementos

Elemento	Nó inicial (1)	Nó final (2)
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

Esta informação permite montar a matriz de rigidez global a partir das matrizes elementares. A divisão por elementos considera 5 nós e, portanto, 5 incógnitas (modelo de MEF com 5 graus de liberdade). A matriz \mathbf{K} é, portanto, de dimensões 5×5 . Os termos desta matriz são calculados elemento por elemento e posteriormente montados usando a informação de conectividade. A matriz de rigidez de cada elemento é:

¹¹ As informações de comprimentos de elementos não são adequadas a um programa geral, devido aos outros tipos de elementos existentes. Isso é fácil de compreender considerando, por exemplo, um elemento de placa quadrilateral, distorcido (não retangular). Seria quase impossível informar a geometria correta dele usando comprimentos e ângulos. A definição usada nos programas de MEF, por coordenada nodais, é versátil e aplicável a qualquer geometria de placas, cascas e sólidos.

É preciso destacar que, neste modelo de EF, os deslocamentos variam linearmente ao longo de cada elemento, as **aproximações para as deformações nesse modelo de EF são constantes ao longo de cada elemento**, como ilustrado na Figura 7.14. Como as tensões são proporcionais às deformações, segue-se que as tensões do MEF são também aproximadas como constantes em cada elemento.

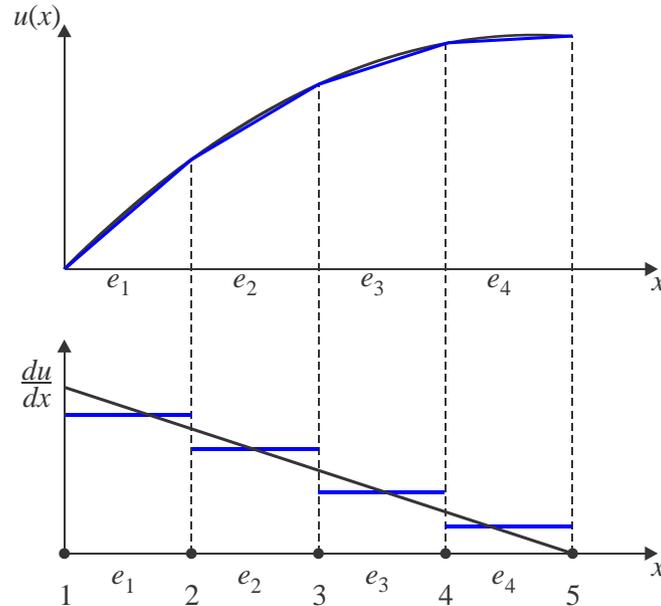


Figura 7.14: Deslocamentos e deformações na barra do Exemplo 2 para o caso $b = 0$.

7.5.5 Deslocamentos prescritos não nulo

É frequente a necessidade de se determinar deformações e tensões de uma estrutura submetida a um deslocamento prescrito não nulo. Mecanicamente isto pode ser fruto de ajustes com interferência negativa ou até montagens incorretas de um equipamento. Observe que sempre será necessária a aplicação de uma força para deformar a estrutura mecanicamente, mas algumas vezes, esta força é desconhecida. O que se mede, o que se tem controle ou interesse, é o deslocamento que foi imposto num certo ponto. Uma vez conhecido este deslocamento imposto, queremos estimar os deslocamentos nos outros pontos e as tensões produzidas.

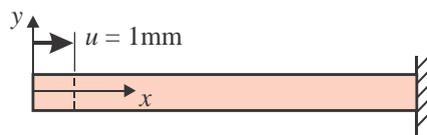


Figura 7.15: Barra montada sob interferência.

Consideremos o problema de interferência ilustrado na Figura 7.15, onde o extremo esquerdo de uma barra engastada no apoio direito e submetida a um deslocamento dado de 1 mm no apoio esquerdo, para a direita. Também é aplicada a mesma força de corpo do exemplo anterior. Assim, o problema pode ser descrito de forma análoga ao anterior. Somente muda o carregamento e as condições de contorno. Assim, os espaços de funções ficam com a seguinte definição:

$$\begin{aligned} Kin_h &= \{u(x) : \text{contínua, diferenciável por partes, } u(0) = 1 \text{ mm, } u(L) = 0\}, \\ Var_h &= \{\hat{u}(x) : \text{contínua, diferenciável por partes, } \hat{u}(0) = 0, \hat{u}(L) = 0\}. \end{aligned}$$

A matriz de rigidez de uma estrutura é independente de suas condições de contorno e dos

processamento num método numérico como o MEF, é a etapa de solução. Como a inversão de uma matriz envolve uma quantidade muito maior de operações que sua fatoração de Gauss, a inversão simplesmente não é admitida.

3. A partição das matrizes como em (7.93) só é feita por motivos didáticos. Na prática, também não é realizada, por ser ineficiente, em termos de tempo de processamento e consumo de área de memória. Um procedimento usual é descrito a seguir.
4. A aplicação das condições de contorno através da geração de uma matriz menor, como a (7.91), também nunca é realizada. Em vez disso, é usado um procedimento como o descrito a seguir.

7.6 Aplicação de condições de contorno

Consideremos o sistema (7.90) na forma

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}. \quad (7.96)$$

com a matriz tal como foi sobreposta, antes da imposição das condições de contorno. Designaremos esse sistema por $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$. Considere que estamos, de fato, tratando de sistemas algébricos, não de ordem 5, como no exemplo, mas ordem de milhares de graus de liberdade. A área de memória ocupada com essa matriz, em problemas reais, tende a ser bastante grades. Assim não é eficiente a geração de uma segunda matriz de dimensões reduzidas para incorporar as condições de contorno prescritos, como em (7.91). Isso porque, apesar de menor, essa matriz reduzida também é bastante grande, de fato, quase tão grande quanto a matriz original \mathbf{K} . Assim, uma das estratégias consiste no seguinte. Considerar um deslocamento a ser imposto, $u_j = \bar{u}_j$ no grau de liberdade j da matriz. Para facilitar a explicação, vamos supor que $j = 1$. Visualmente, o sistema tem a forma

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = \bar{u} \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}$$

Multiplicando a coluna j por \bar{u}_j tem-se um novo vetor força, conhecido, que deve ser transferido para o lado direito, deixando a matriz na forma

$$\begin{bmatrix} 0 & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} - \bar{u}_1 \begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \\ K_{51} \end{Bmatrix}$$

A área de memória da matriz ainda tem as dimensões 5×5 originais ($N \times N$ num sistema arbitrário de ordem N), e a coluna 1 fica ocupada por zeros.

Em seguida, a linha j do sistema, matriz e vetor, é zerada, resultando

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} - \bar{u}_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \\ K_{51} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \end{Bmatrix}$$

Nesse formato, a matriz tem uma linha/coluna nulas, e é singular. Entretanto, em vez de copiar todos os seus termos não nulos numa nova área de memória de dimensões 4×4 originais $(N-1 \times N-1)$, o mais simples consiste em simplesmente fazer $K_{jj} = 1$ e $\bar{F}_j = \bar{u}_j$. Assim, o sistema original $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ torna-se transformado para o sistema $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$, com a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \end{Bmatrix}$$

que incorpora a condição de contorno desejada, isto é, sua solução produz $u_1 = \bar{u}_j$ e todos os demais deslocamentos nodais.

Os termos da linha j da matriz são armazenados em outra área da memória para uso posterior no cálculo das reações, como em (7.87).

Um procedimento alternativo para incorporar as condições de contorno ao sistema algébrico consiste no seguinte. Em vez de montar a matriz \mathbf{K} completa e em seguida eliminar as linhas/colunas prescritas, montar apenas os termos das linhas/colunas não prescritas, gerando assim, diretamente, apenas a matriz reduzida. Os termos da linha/coluna j são armazenados em outra área de memória para posterior cálculo das reações.

7.7 Exercícios

7.1 Considere o seguinte problema de valor no contorno ($\Omega = \{x \in R \text{ tal que } x \in (0; 1)\}$):

$$\begin{aligned} u_{,xx} + 4u &= 12 && \text{para } x \in \Omega, \\ u(0) &= 3, \\ u(1) &= 1. \end{aligned} \tag{7.97}$$

- Determine a forma fraca simétrica correspondente, utilizando o método dos resíduos ponderados. Defina os conjuntos *Kin* e *Var*. (Sol.: $\int_{\Omega} (\hat{u}_{,x} u_{,x} - 4\hat{u}u + 12\hat{u}) d\Omega = 0$.)
- Obter uma aproximação de Galerkin usando a aproximação $u_G(x) = 3 - 2x + a x(x-1)$. (Obs. Não precisa gastar muito tempo para obter precisamente o valor da constante a , basta escrever a equação algébrica que a define.)

7.2 Resolva os itens do problema anterior para a seguinte forma forte:

$$\begin{aligned} u_{,xx} + 4u &= 12 && \text{para } x \in \Omega, \\ u_{,x}(0) &= 4,399, \\ u(1) &= 1. \end{aligned} \tag{7.98}$$

onde $\Omega = \{x \in R \text{ tal que } x \in (0; 1)\}$.

7.3 Considere o seguinte problema de valor no contorno ($\Omega = \{x \in R \text{ tal que } x \in (0; 1)\}$):

$$\begin{aligned} u_{,xx} - 4u &= 12x && \text{para } x \in \Omega, \\ u(0) &= 1, \\ u(1) &= -3. \end{aligned} \tag{7.99}$$

- Determine a solução analítica do problema. (Dica: essa é uma equação diferencial ordinária não homogênea de coeficientes constantes. Logo, pode ser usado o método padrão de solução.) (Solução: $u(x) = -3x + \frac{1}{1-e^4}(e^{2x} - e^{4-2x})$.)
- Determine a forma fraca simétrica correspondente, utilizando o método dos resíduos ponderados. Defina os conjuntos *Kin* e *Var*. (Sol.: $\int_{\Omega} (\hat{u}_{,x} u_{,x} + 4\hat{u}u + 12x\hat{u}) d\Omega = 0$.)