

Capítulo 6

Cálculo variacional

O *cálculo variacional* é uma parte da matemática geralmente não abordada nos cursos de graduação em engenharia. Fazemos aqui uma introdução deste assunto por julgá-lo imprescindível ao entendimento das formulações integrais da mecânica das estruturas, tais como o princípio dos deslocamentos virtuais, princípio da energia potencial, dentre outras.

Uma aplicação elementar do *cálculo diferencial* consiste na determinação de pontos em que uma dada função, de uma ou mais variáveis, é estacionária. Seja a função $f(x)$, de uma única variável, representada na Figura 6.1 com todos os três possíveis pontos estacionários: máximo local, mínimo local e inflexão. Geometricamente, a reta tangente à curva nesses pontos é horizontal e, portanto, a derivada primeira f' é nula. Adotamos aqui $()' = d()/dx$. A condição $f'(x) = 0$ identifica um ponto estacionário, mas não informa nada sobre a natureza desse ponto: se é de máximo, mínimo ou inflexão. São necessárias condições adicionais.

Vamos supor que em $x = a$ ocorra um ponto estacionário. Analisemos a função na vizinhança desse ponto, considerando a expansão em série de Taylor

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \dots \quad (6.1)$$

na qual admitimos que todas as derivadas sejam contínuas.

Se $f(a)$ é um máximo local ($a = x_1$ na Figura 6.1), por exemplo, então $f(x) - f(a) < 0$ na vizinhança do ponto. Enquanto os valores das derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, etc., são fixos, $x - a$ muda de sinal dependendo se estamos à esquerda ou à direita do ponto. Como o primeiro termo à direita da igualdade (6.1) é o dominante na vizinhança do ponto, devemos impor $f'(a) = 0$ para evitar alternância de sinal em $f(x) - f(a)$. Isso confirma o que já sabíamos do ponto de vista geométrico. Eliminado esse termo, o dominante passa a ser o que contém a derivada segunda. A quantidade $(x - a)^2$ é sempre positiva, quer estejamos à esquerda ou à direita do ponto de máximo local. Se $f''(a) \neq 0$, certamente essa derivada é negativa se o ponto é de máximo. Generalizando, dizemos que num ponto de máximo local $f'(a) = 0$ e que a próxima derivada não nula no ponto é de ordem par e negativa.

Um raciocínio análogo mostraria que $f(a)$ será um mínimo local ($a = x_2$ na Figura 6.1) se

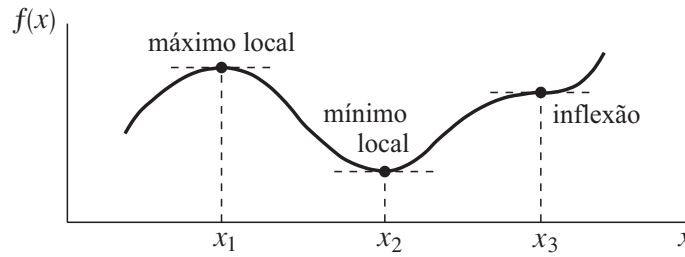


Figura 6.1 Os três pontos em que a função $f(x)$ é estacionária: máximo local, mínimo local e inflexão.

$f'(a) = 0$ e uma derivada de ordem par e positiva for a primeira a ser não nula no ponto. Caso $f'(a) = 0$ e a derivada a ser primeiro não nula for de ordem ímpar, então o ponto será de inflexão ($a = x_3$ na Figura 6.1). Verifique, por exemplo, que $f(0)$ é um mínimo local para a função $f(x) = x^4$ mas um ponto de inflexão para $f(x) = x^3$.

6.1 Algumas definições

O cálculo variacional estende os conceitos acima para determinar os pontos estacionários de expressões integrais. Seja, por exemplo, o caso de encontrar a função $u(x)$ que torna a integral

$$I(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx \quad (6.2)$$

estacionária e satisfaz as restrições

$$u(a) = u_a \quad u(b) = u_b. \quad (6.3)$$

O integrando $F(x, u, u')$ é uma função conhecida de x , u e u' . Escolhida $u(x)$, a integral $I(u)$ torna-se um número real específico. O objetivo do cálculo variacional é mostrar como se identifica a função que torna (6.2) estacionária, dentre uma infinidade de funções que satisfazem (6.3). Quantidades como $I(u)$, que associam a cada função $u(x)$ um único número real, são denominadas *funcionais*. Por ser função de outras funções, o domínio de um funcional é um conjunto de *funções admissíveis*. A *ordem* de um funcional é dada pela maior ordem da derivada que consta na sua definição. O funcional (6.2) é de ordem 1.

Vamos supor que $u(x)$, indicada na Figura 6.2, seja a função que faz $I(u)$ estacionário (evidentemente $u(x)$ é uma função ainda desconhecida). Para analisar o funcional na vizinhança de $u(x)$, consideremos a função $\bar{u}(x)$ definida por

$$\bar{u}(x) = u(x) + \varepsilon \eta(x), \quad (6.4)$$

onde ε é um número real infinitamente pequeno (a necessidade de $\varepsilon \rightarrow 0$ torna-se clara mais adiante durante a identificação da condição de $I(u)$ ser estacionário). Como apenas as funções $\bar{u}(x)$ que satisfazem (6.3) são de interesse, a função arbitrária $\eta(x)$ deverá satisfazer

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \quad (6.5)$$

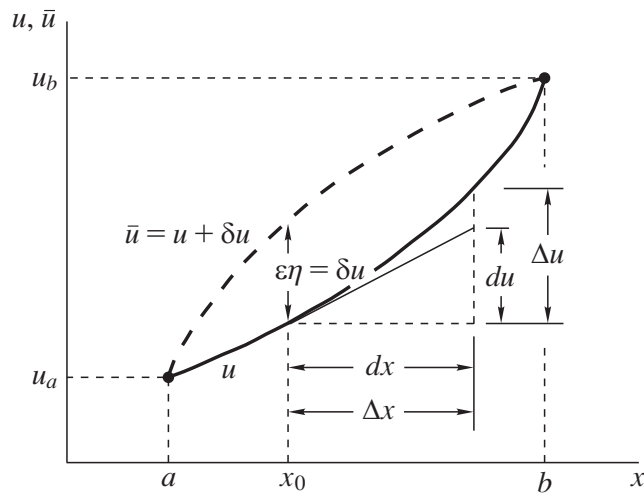


Figura 6.2 Representação geométrica de Δu , du e δu .

além de apresentar a mesma continuidade e diferenciabilidade de $u(x)$, de modo que $\bar{u}(x)$ seja uma função admissível. Para cada valor fixo de x , a quantidade $\varepsilon\eta(x)$ pode ser entendida como uma *variação* de $u(x)$, que será denotada por

$$\delta u(x) = \bar{u}(x) - u(x) = \varepsilon\eta(x). \quad (6.6)$$

A diferença entre Δu , du e δu é ilustrada na Figura 6.2. Em $x = x_0$, uma mudança Δx na variável independente corresponde a uma mudança Δu na função, enquanto corresponderia a uma mudança $du = u' dx$ ($dx = \Delta x$) se a função fosse localmente linearizada, trocando-se a curva pela reta tangente à curva no ponto (Δx e Δu são medidas ao longo da curva; dx e du são medidas ao longo da reta tangente). A quantidade Δu aproxima-se de du quando Δx tende a zero. A variação δu é, por sua vez, a diferença entre as ordenadas de duas curvas próximas $\bar{u}(x)$ e $u(x)$ para uma mesma abscissa ($\delta x = 0$). Assim, enquanto Δu e du estão vinculados a mudanças em x numa curva particular, a variação δu é completamente arbitrária, limitando-se apenas a ser uma quantidade pequena, como veremos mais adiante, que se anula onde $u(x)$ é conhecido e que apresenta a mesma continuidade e diferenciabilidade de $u(x)$. É aqui onde está a diferença entre o *operador diferencial* d e o *operador variacional* δ : a diferencial de uma função considera mudanças nas variáveis dependentes e independentes, ao passo que o variacional considera mudanças apenas nas variáveis dependentes.

Usemos, então, $\bar{u}(x)$ para analisar $I(u)$ na vizinhança de $u(x)$. Para um valor fixo da variável independente x , F depende de u e u' . Da expansão de F em série de Taylor em torno de u e u' , obtemos

$$\begin{aligned} F(x, \bar{u}, \bar{u}') - F(x, u, u') &= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u'}_{\delta F} + \frac{1}{2!} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (\delta u)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} \delta u \delta u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} (\delta u')^2 \right]}_{\delta^2 F} + \dots \end{aligned} \quad (6.7)$$

Por analogia ao operador d , definimos

Integrando a primeira equação,

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = C_1,$$

e impondo a condição de contorno natural dada pela segunda equação, obtemos $C_1 = 0$. Portanto,

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad u' = 0 \quad \Rightarrow \quad u = C_2.$$

Da condição de contorno essencial $u(a) = u_a$,

$$C_2 = u_a \quad \Rightarrow \quad u = u_a.$$

Já era mesmo de se esperar que a curva de menor comprimento fosse um segmento de reta horizontal.

Perceba que a condição de contorno natural efetivamente impõe $u' = 0$ em $x = b$. ■

Comentários 6.2:

- De uma maneira geral, se o funcional é de ordem m então as variáveis primárias (e as possíveis condições de contorno essenciais) envolverão a função e suas derivadas até a ordem $m - 1$.
- O operador variacional comuta com o operador diferencial e integral,

$$\begin{aligned} (\delta u)' &= (\bar{u} - u)' = \bar{u}' - u' = \delta(u') \\ \int (\delta u) dx &= \int (\bar{u} - u) dx = \int \bar{u} dx - \int u dx = \delta \left(\int u dx \right), \end{aligned} \quad (6.25)$$

e goza das propriedades do operador diferencial. Por exemplo, se $F = F(u)$ e $G = G(u)$, podemos verificar que

$$\delta(F + G) = \delta F + \delta G \quad \delta(FG) = (\delta F)G + F(\delta G) \quad \delta(F^n) = nF^{n-1}\delta F. \quad (6.26)$$

- Dada uma função $F(x, u, u')$,

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \quad dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du'. \quad (6.27)$$

O operador δ age como o operador d só que em relação às variáveis dependentes, visto que a variável independente x não varia com a mudança de u para $\bar{u} = u + \delta u$.

- Eis algumas similaridades entre o cálculo diferencial e o cálculo variacional:

	Cálculo diferencial	Cálculo variacional
Ponto estacionário	função $f(x)$	funcional $I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx$
Condição necessária	primeira derivada $df/dx = 0$	primeira variação $\delta I = 0$
Resultado	um valor x	uma função $u(x)$
Natureza do ponto	derivadas de ordem superior	variações de ordem superior

Capítulo 7

Princípio dos deslocamentos virtuais

As equações de equilíbrio e as condições de contorno mecânicas podem ser igualmente expressas numa forma integral usando o *princípio dos deslocamentos virtuais*. As demais equações da mecânica das estruturas (relações de deformação-deslocamento, equações constitutivas e condições de contorno geométricas) acham também formas integrais equivalentes em outros princípios (Washizu, 1982; Reddy, 2002; Wunderlich e Pilkey, 2002). O princípio dos deslocamentos virtuais, porém, é o mais fundamental de todos.

Substituir as equações de equilíbrio e as condições de contorno mecânicas pelo princípio dos deslocamentos virtuais não é trocar seis por meia dúzia. O uso do princípio é tão crucial na formulação de teorias, como as de vigas, placas e cascas, e na solução de seus problemas que sua ausência traria sérias limitações. Seria um gesto sábio mantê-lo por perto, bem como o operador δ apresentado no Capítulo 6, nas andanças pela mecânica das estruturas.

Enquanto a *mecânica vetorial* (mecânica newtoniana) baseia-se nas leis de Newton, que são formuladas em termos de quantidades vetoriais como forças e momentos, a *mecânica analítica* (mecânica lagrangiana e mecânica hamiltoniana) fundamenta-se em princípios que são estabelecidos em termos de quantidades escalares como trabalho e energia (Goldstein *et al.*, 2001). São conceitos como trabalho e energia que fazem o tratamento de um problema pela abordagem analítica ser de interpretação física não tão óbvia. O princípio dos deslocamentos virtuais é parte da mecânica analítica e sua primeira concepção geral, mais próxima do que se tem hoje, é normalmente atribuída a Jean Bernoulli.

7.1 Trabalho e energia

A Figura 7.1a mostra uma partícula que se move ao longo de uma trajetória sob a ação de uma força \mathbf{F} . A partícula é identificada, em qualquer instante, pelo vetor posição \mathbf{x} . O *trabalho* realizado por \mathbf{F} em mover a partícula por um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{u}$ ($= d\mathbf{x}$) é, por definição, a grandeza escalar

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} = |\mathbf{F}||d\mathbf{u}| \cos \theta \quad (7.1)$$

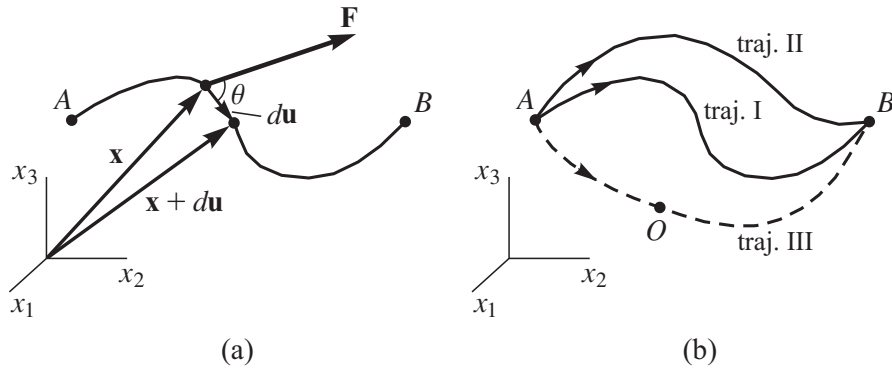


Figura 7.1 (a) Partícula movendo-se ao longo de uma trajetória sob a ação de uma força \mathbf{F} ; (b) trajetórias alternativas entre as posições A e B .

onde θ é o ângulo entre \mathbf{F} e $d\mathbf{u}$ (a força é suposta constante durante o deslocamento infinitesimal).

Escrevendo \mathbf{F} e $d\mathbf{u}$ em função de suas componentes, uma forma alternativa para (7.1) é

$$dW = (F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3) \cdot (du_1\mathbf{e}_1 + du_2\mathbf{e}_2 + du_3\mathbf{e}_3) = F_1du_1 + F_2du_2 + F_3du_3. \quad (7.2)$$

O trabalho realizado entre as posições A e B da trajetória escreve-se

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}. \quad (7.3)$$

O resultado da integral de linha (7.3) dependerá, em geral, não somente das posições A e B como também da trajetória percorrida entre elas.

Se a força \mathbf{F} é *conservativa*, o trabalho dependerá apenas das posições A e B , sendo irrelevante a trajetória seguida pela partícula. Usando as trajetórias indicadas na Figura 7.1b, podemos escrever

$$W = \underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}}_{\text{traj. I}} = \underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}}_{\text{traj. II}} = \underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}}_{\text{traj. III}}. \quad (7.4)$$

Por essa definição, forças que dependem explicitamente do tempo são claramente não conservativas (Ziegler, 1977).

A *energia potencial* V_A associada a uma certa posição, por exemplo, à posição A , é, por definição, o trabalho realizado pela força conservativa para mover a partícula dessa posição para uma posição de referência O previamente estabelecida:

$$V_A = \int_A^O \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}. \quad (7.5)$$

Como o trabalho independe da trajetória, vamos em (7.3) escolher um percurso entre as posições A e B de modo a passar pela posição de referência (veja trajetória III na Figura 7.1b):

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} = \int_A^O \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} + \int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} = -(V_B - V_A). \quad (7.6)$$

Na forma diferencial,

$$dW = -dV. \quad (7.7)$$

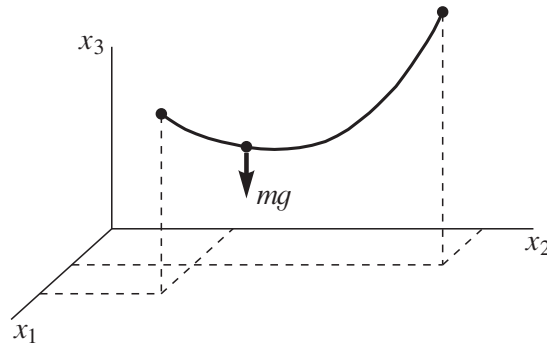


Figura 7.2 Exemplo 7.1: partícula movendo-se ao longo de uma trajetória sob a ação de seu peso.

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} dt = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 \right) dt = \frac{dT}{dt} dt = dT. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Ou seja, o trabalho realizado é igual a mudança da *energia cinética*

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2. \quad (7.13)$$

Se a força é conservativa,

$$dW = -dV = dT \quad \Rightarrow \quad d(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad T + V = \text{constante}, \quad (7.14)$$

a soma da energia cinética e potencial, conhecida por *energia mecânica* ($= T + V$), se conserva ao longo da trajetória.

- Quando as forças que atuam sobre a partícula não são todas conservativas, parte da energia mecânica é transformada em alguma outra forma de energia, cuja natureza depende de cada caso, de modo que a energia total continua mantida. Essa é a consagrada *primeira lei da termodinâmica*, conhecida também por *princípio da conservação da energia*, que tem (7.14) como caso particular. Para chegar à conclusão de que a energia mecânica mantém-se constante na presença exclusiva de forças conservativas, só bastou definir trabalho, energia potencial e energia cinética, e recorrer à segunda lei de Newton. Agora dizer que a energia total se conserva, como afirma a primeira lei da termodinâmica, é admitir um axioma que está acima das leis de Newton, mas que tem sido verificado até hoje, sem exceção.

Exemplo 7.1 Considere a partícula de massa m , indicada na Figura 7.2, que se move sob o campo gravitacional terrestre com aceleração g constante.

De acordo com a definição, a energia potencial associada a uma dada posição é o trabalho realizado pelo peso no deslocamento da partícula da posição onde se encontra para a posição de referência $u_3 = 0$:

$$V(u_3) = \int_{u_3}^0 (-mg \mathbf{e}_3) \cdot (du_1 \mathbf{e}_1 + du_2 \mathbf{e}_2 + du_3 \mathbf{e}_3) = - \int_{u_3}^0 mg du_3 = mgu_3.$$

A substituição de $V(u_3)$ em (7.9) fornece as componentes do peso. ■

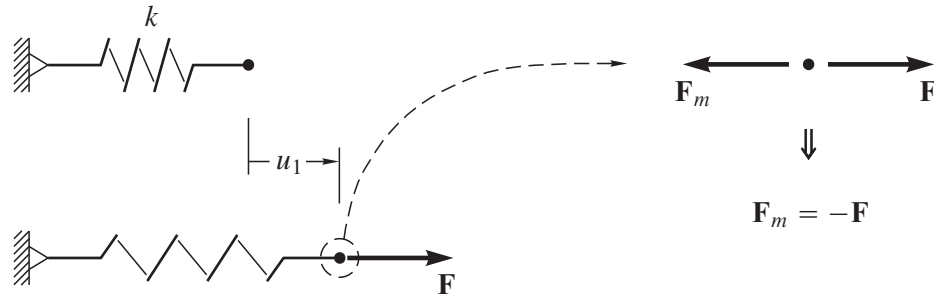


Figura 7.3 Exemplo 7.2: mola linear de rigidez k .

Exemplo 7.2 Seja a mola linear de rigidez k , mostrada na Figura 7.3, cujo deslocamento u_1 da extremidade livre é medido em relação à configuração inicial (mola não deformada).

Se a mola é distendida para a direita pela ação de uma força externa \mathbf{F} , vai se desenvolver na mola uma força interna \mathbf{F}_m de mesma intensidade e direção, porém de sentido oposto ($\mathbf{F}_m = -\mathbf{F}$):

$$\mathbf{F}_m = -ku_1\mathbf{e}_1.$$

A energia potencial associada a uma dada posição é o trabalho realizado por \mathbf{F}_m no deslocamento da posição onde se encontra para a posição de referência $u_1 = 0$:

$$V(u_1) = \int_{u_1}^0 (-ku_1\mathbf{e}_1) \cdot (du_1\mathbf{e}_1 + du_2\mathbf{e}_2 + du_3\mathbf{e}_3) = - \int_{u_1}^0 ku_1 du_1 = \frac{1}{2}ku_1^2.$$

A substituição de $V(u_1)$ em (7.9) fornece as componentes da força interna da mola.

É intuitivamente claro que a mola armazena a energia $V(u_1)$, independentemente se é tracionada ou comprimida, e a libera quando retorna à configuração inicial. A função V neste exemplo é *positiva definida*: $V > 0$ para $u_1 \neq 0$ e $V = 0$ para $u_1 = 0$. ■

Trabalho realizado pela tensão

Se v é o volume do sólido na configuração atual e s é a superfície que envolve v , o trabalho infinitesimal realizado pelas forças externas (conhecidas ou não) é dado por

$$dW_e = \int_s d\mathbf{u}^T \mathbf{t} ds + \int_v d\mathbf{u}^T \mathbf{b} dv \quad (7.15)$$

onde \mathbf{t} representa aqui as forças de superfície e \mathbf{b} as forças de volume. Usando a fórmula de Cauchy

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \quad (7.16)$$

escrevemos

$$dW_e = \int_s d\mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds + \int_v d\mathbf{u}^T \mathbf{b} dv. \quad (7.17)$$

Pelo teorema da divergência,

$$\int_s d\mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds = \int_v (d\mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\nabla}_x dv = \int_v [d\mathbf{u}^T (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nabla}_x) + (d\mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}_c) \boldsymbol{\nabla}_x] dv \quad (7.18)$$

onde lembramos que a presença do índice “c” na parcela $(d\mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}_c) \boldsymbol{\nabla}_x$ é para enfatizar que o operador $\boldsymbol{\nabla}_x$ não atua sobre os elementos de $\boldsymbol{\sigma}$ (veja página 32). Assim,

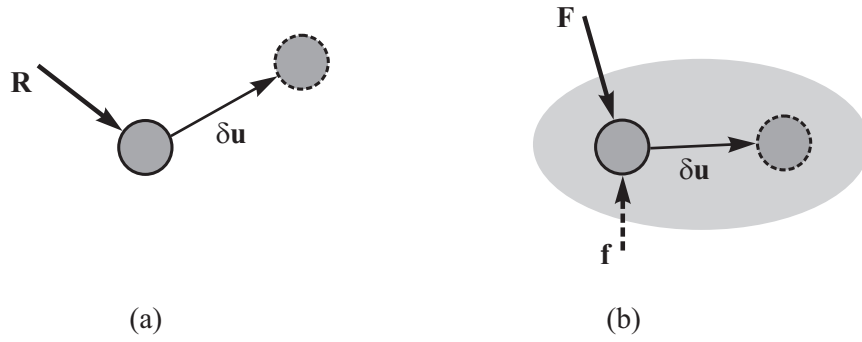


Figura 7.4 (a) Partícula livre de mover-se em qualquer direção, sob a ação de forças com resultante \mathbf{R} ; (b) partícula restrita a mover-se sobre uma superfície lisa (a resultante \mathbf{F} exclui a reação de apoio \mathbf{f} perpendicular à superfície).

partícula está em equilíbrio, então

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad R_1 = 0 \quad R_2 = 0 \quad R_3 = 0 \quad (7.39)$$

pela segunda lei de Newton. O equilíbrio permite afirmar que a expressão

$$G = R_1\alpha_1 + R_2\alpha_2 + R_3\alpha_3 \quad (7.40)$$

é nula para quaisquer parâmetros α_1 , α_2 e α_3 , visto que $R_1 = R_2 = R_3 = 0$. A representação matricial

$$G = [R_1 \quad R_2 \quad R_3] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\alpha} \quad (7.41)$$

sugere α_i como componentes de um vetor $\boldsymbol{\alpha}$.

A condição $G = 0$ ocorre em uma das três situações: a força resultante \mathbf{R} é nula; $\boldsymbol{\alpha}$ é nulo; os vetores \mathbf{R} e $\boldsymbol{\alpha}$ são ortogonais. Se $\boldsymbol{\alpha}$ é arbitrário em magnitude e direção, ou melhor, as componentes α_i são arbitrárias e independentes ($\boldsymbol{\alpha}$ não é especificamente nulo, nem perpendicular a \mathbf{R}), então $G = 0$ implicará força resultante nula, tornando-se uma condição necessária e suficiente para o equilíbrio. Necessária porque o equilíbrio (7.39) implica $G = 0$ como deveria; suficiente porque agora com a arbitrariedade de $\boldsymbol{\alpha}$ a condição $G = 0$ implica (7.39).

Escrever G usando as equações de equilíbrio e, em seguida, dizer que o equilíbrio é dado por $G = 0$ parece óbvio e inócua. No entanto, existem situações em que é importante se obter as equações de equilíbrio, ainda não conhecidas, a partir de $G = 0$. Mas que expressão utilizar para G ? Urge, portanto, atribuí-la um significado físico. Uma sugestão é dada pela expressão (7.41): se $\boldsymbol{\alpha}$ for deslocamento G será trabalho.

Supondo que a partícula esteja em equilíbrio, como podemos aplicar um deslocamento arbitrário, em magnitude e direção, que mantenha ainda a partícula na posição de equilíbrio? Esse deslocamento fictício, hipotético, é conhecido como *deslocamento virtual*. A mecânica analítica utiliza a primeira variação $\delta \mathbf{u} = [\delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_3]^T$ para o deslocamento virtual (veja Figura 7.4). Neste caso, o

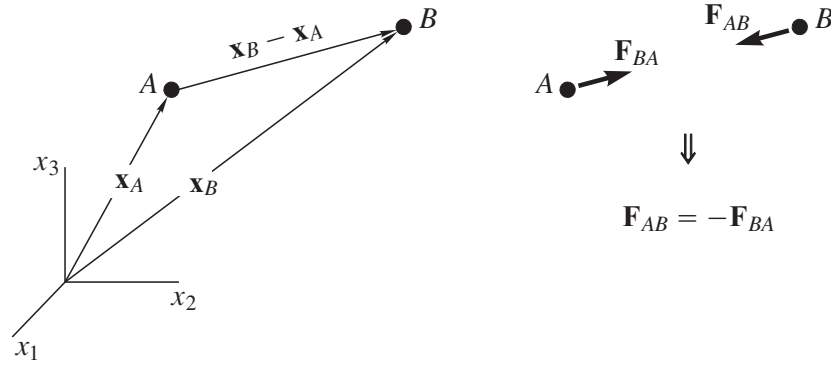


Figura 7.5 Exemplo 7.3: duas partículas A e B afastadas uma da outra de uma mesma distância $|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A| = L$.

As quantidades Q_i são as *forças generalizadas* na direção dos *deslocamentos virtuais generalizados* δq_i . Nem δq_i tem necessariamente dimensão de deslocamento, nem Q_i tem necessariamente dimensão de força, porém $Q_i \delta q_i$ tem dimensão de trabalho. Dizemos que Q_i e q_i formam um par conjugado no trabalho, de modo que o trabalho $\delta W = \sum Q_i \delta q_i$ permanece o mesmo independentemente da escolha de q_i . Uma outra vantagem de ser o deslocamento virtual infinitesimal, além daquela de manter inalteradas as forças que atuam na posição de equilíbrio, pode também ser apreciada na fácil troca de $\delta \mathbf{u}$ pelos novos deslocamentos virtuais generalizados δq_i na expressão de δW em (7.48) viabilizada pelo uso do operador variacional. Se a força \mathbf{F} for conservativa, então

$$Q_i = F_1 \frac{\partial u_1}{\partial q_i} + F_2 \frac{\partial u_2}{\partial q_i} + F_3 \frac{\partial u_3}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (7.51)$$

Exemplo 7.3 Considere um sistema de duas partículas A e B , no qual \mathbf{F}_{AB} é a força que A exerce sobre B e \mathbf{F}_{BA} é a força que B exerce sobre A . Supondo que essas forças de interação entre as partículas sejam capazes de mantê-las afastadas uma da outra de uma mesma distância, mostre que é nula a soma dos trabalhos virtuais realizados por elas.

Denotemos por \mathbf{x}_A e \mathbf{x}_B os vetores posições das partículas A e B , como indicado na Figura 7.5, e por \mathbf{u}_A e \mathbf{u}_B os deslocamentos que elas sofrem. A soma dos trabalhos virtuais realizados pelas forças exercidas entre elas é

$$\delta W = \mathbf{F}_{BA} \cdot \delta \mathbf{u}_A + \mathbf{F}_{AB} \cdot \delta \mathbf{u}_B.$$

Pela terceira lei de Newton $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$. Assim,

$$\delta W = \mathbf{F}_{AB} \cdot (\delta \mathbf{u}_B - \delta \mathbf{u}_A).$$

Se L é a distância fixa mantida entre as partículas,

$$(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = L^2,$$

então

$$\delta [(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)] = 2(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \cdot (\delta \mathbf{x}_B - \delta \mathbf{x}_A) = 0$$

ou

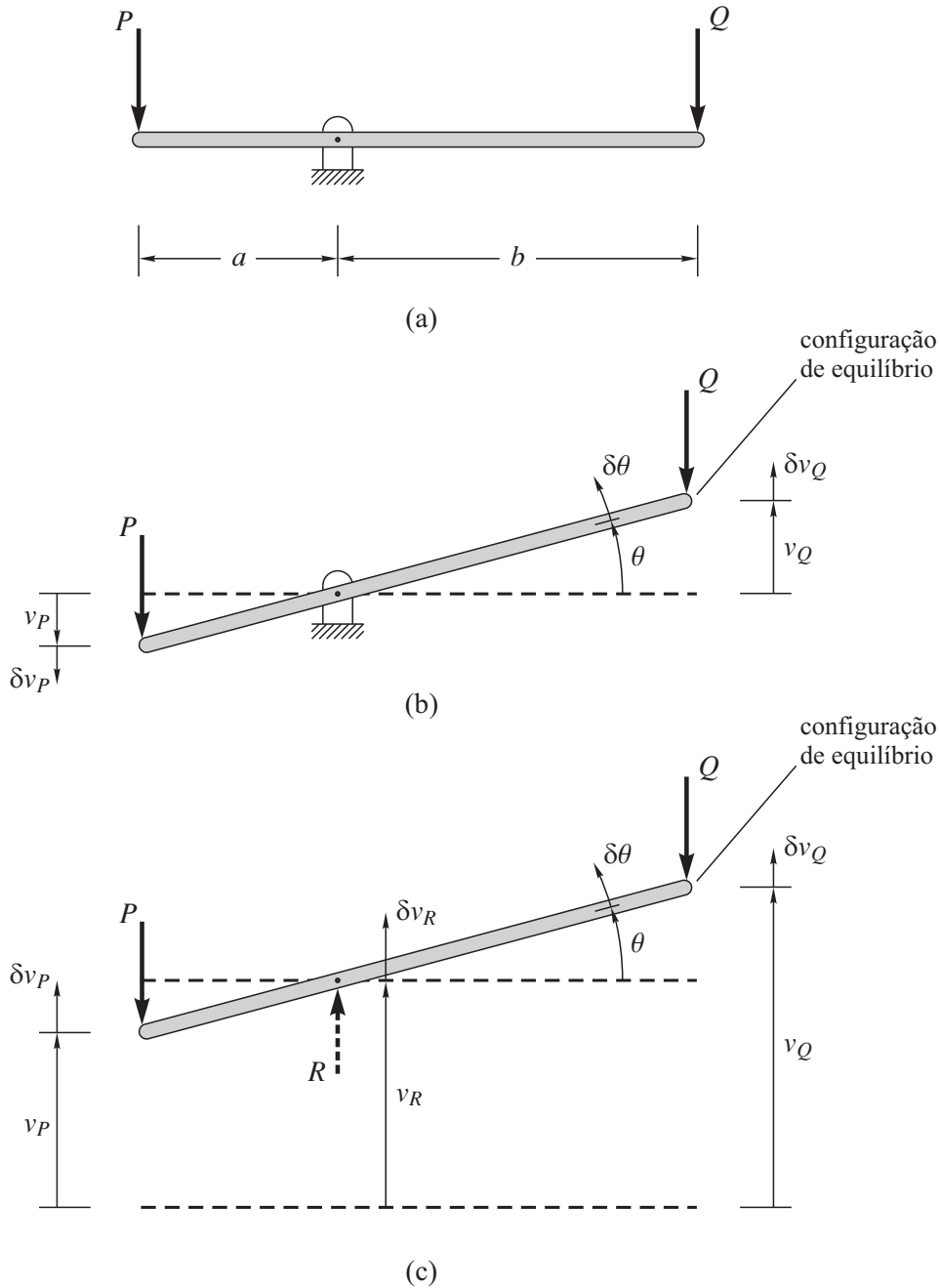


Figura 7.6 Exemplos 7.4: (a) Barra rígida restrita a mover-se no plano vertical; (b) deslocamento virtual compatível com a natureza rígida da barra e com o tipo de apoio; (c) deslocamento virtual compatível com a natureza rígida da barra e com a substituição do apoio pela reação R .

forças internas é nula, eliminando-se automaticamente essas forças da equação de equilíbrio) e à condição de estar a barra sobre um apoio que impede translação (a reação R também realiza trabalho nulo e não aparece na equação de equilíbrio). O campo de deslocamentos é, portanto, compatível com os vínculos internos (barra rígida) e externos (apoio que impede translação).

Para incluir a reação de apoio na expressão de δW , o que é desejável em certas situações, removamos o apoio e explicitemos em seu lugar a reação incógnita R por ele exercida. A translação vertical passa agora a ser um movimento admissível (veja Figura 7.6c), adquirindo a barra mais um grau de liberdade.

Se além do ângulo θ , escolhemos também o deslocamento vertical v_R do ponto de aplicação de R

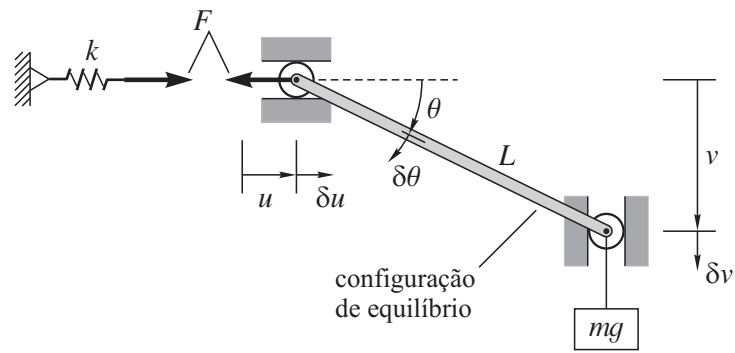


Figura 7.7 Exemplo 7.6: deslocamento virtual compatível com a natureza rígida da barra e com os tipos de apoio.

como coordenada, a Figura 7.6c mostra as equações de vínculo

$$v_P = v_R - a \operatorname{sen} \theta \quad v_Q = v_R + b \operatorname{sen} \theta.$$

O trabalho realizado pelas forças para um deslocamento virtual δv_R e $\delta \theta$ aplicados à barra na configuração de equilíbrio é

$$\begin{aligned} \delta W &= -P \delta v_P + R \delta v_R - Q \delta v_Q = -P (\delta v_R - a \cos \theta \delta \theta) + R \delta v_R - Q (\delta v_R + b \cos \theta \delta \theta) \\ &= (-P + R - Q) \delta v_R + (Pa - Qb) \cos \theta \delta \theta = 0. \end{aligned}$$

Considerando que δv_R e $\delta \theta$ são arbitrários e independentes (podemos ter, por exemplo, $\delta v_R \neq 0$ e $\delta \theta = 0$ ou $\delta v_R = 0$ e $\delta \theta \neq 0$),

$$P + Q = R \quad Pa = Qb \quad (\text{para } \cos \theta \neq 0).$$

A expressão de δW é simplesmente a soma do produto da equação de equilíbrio de translação vertical por δv_R com o produto da equação de equilíbrio de rotação por $\delta \theta$. ■

Exemplo 7.6 O sistema indicado na Figura 7.7 consiste de uma massa m suspensa por uma barra rígida, de comprimento L e massa desprezível, e de uma mola linear de rigidez k . A barra encontra-se na horizontal para a mola não deformada ($u = 0$). Use o princípio dos deslocamentos virtuais para determinar a equação cuja solução dá o valor do ângulo θ correspondente à configuração de equilíbrio.

A barra apresenta um único grau de liberdade. Se escolhermos θ como coordenada, temos com base na figura as equações de vínculo

$$u = L(1 - \cos \theta) \quad v = L \operatorname{sen} \theta$$

onde u é o deslocamento horizontal da extremidade esquerda da barra e v é o deslocamento vertical da extremidade direita. O trabalho realizado pelas forças para um deslocamento virtual $\delta \theta$ aplicado à barra na configuração de equilíbrio é

$$\delta W = -F \delta u + mg \delta v = 0.$$

Pelas equações de vínculo que relacionam u , v e θ ,

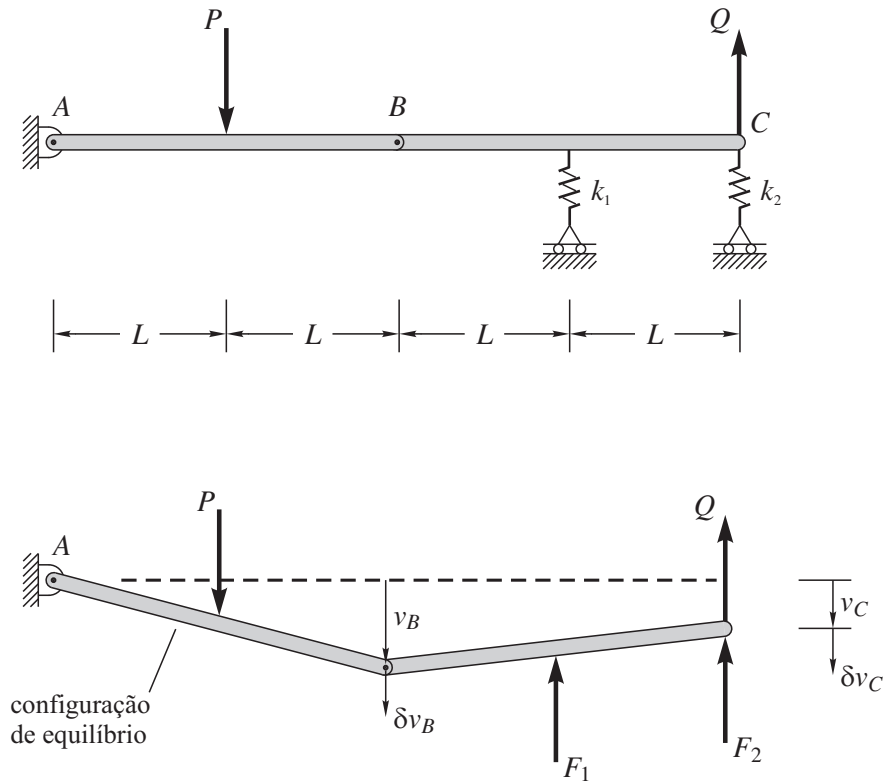


Figura 7.8 Exemplo 7.8: sistema formado por duas barras rígidas.

Observe que as mesmas equações teriam sido obtidas se δu , δv e $\delta \theta$ tivessem sido tratados como independentes na expressão modificada de δW . A substituição de

$$F = ku = kL(1 - \cos \theta)$$

na última equação resulta em

$$(1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \theta = \frac{mg}{kL}.$$

Os parâmetros λ_1 e λ_2 , que introduzem as equações de vínculo na expressão de δW , são conhecidos como *multiplicadores de Lagrange*. Podemos identificar λ_1 e λ_2 como sendo, respectivamente, a reação horizontal na extremidade direita da barra e a reação vertical na extremidade esquerda. Ambas são forças de vínculo impostas ao sistema. ■

Exemplo 7.8 Considere o sistema mostrado na Figura 7.8 formado por duas barras rígidas AB e BC . As molas são lineares e não estão deformadas quando as barras estão na horizontal. Use o princípio dos deslocamentos virtuais para determinar a configuração de equilíbrio do sistema.

É um sistema com dois graus de liberdade. Vamos escolher v_B e v_C como coordenadas e aplicar ao sistema, na configuração de equilíbrio, os deslocamentos virtuais δv_B e δv_C . O trabalho realizado pelas forças é

$$\delta W = P \frac{\delta v_B}{2} - Q \delta v_C - F_1 \left(\frac{\delta v_B + \delta v_C}{2} \right) - F_2 \delta v_C = 0.$$

Reagrupando os termos,

$$\left(-\frac{F_1}{2} + \frac{P}{2} \right) \delta v_B + \left(-\frac{F_1}{2} - F_2 - Q \right) \delta v_C = 0.$$

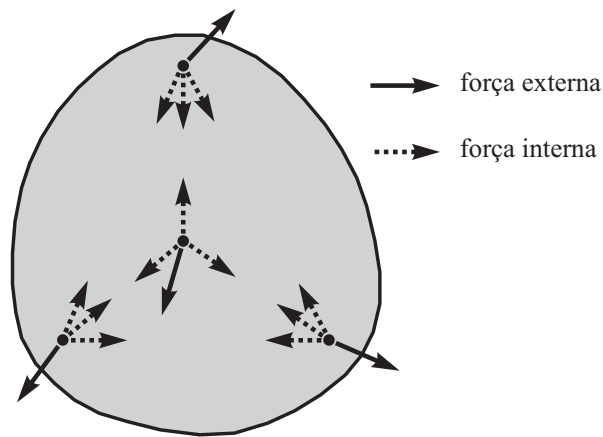


Figura 7.9 Sólido deformável na configuração de equilíbrio representado como um sistema com um número infinito de pontos materiais.

o sólido rígido, dessa vez a soma dos trabalhos virtuais realizados pelas forças internas pode não ser nula devido ao deslocamento relativo entre pontos materiais. Conceitualmente, essas forças não são mais de vínculo por não reduzirem o número de graus de liberdade.

Se o sólido está em equilíbrio, um ponto material dele extraído estará também em equilíbrio se todas as forças que nele atuam forem mantidas. A soma dos trabalhos virtuais realizados por essas forças é nula. Adicionando a contribuição do trabalho virtual nulo que provém de cada ponto material e separando o trabalho δW_e , realizado pelas forças externas, do trabalho δW_i , realizado pelas forças internas, o princípio dos deslocamentos virtuais se escreve

$$\delta W_e + \delta W_i = 0. \quad (7.52)$$

O princípio pode ser assim enunciado:

Um sólido deformável está em equilíbrio se, e somente se, a soma do trabalho realizado pelas forças externas e do trabalho realizado pelas forças internas é nula para deslocamentos virtuais.

Apesar de (7.52) ser a expressão geral do princípio, ela é aqui apresentada de maneira meramente qualitativa. Sua aplicação a partículas ou a sólidos rígidos se faz eliminando δW_i . Quantifiquemos a seguir δW_e e δW_i .

Para estender o uso das três coordenadas generalizadas q_1 , q_2 e q_3 de uma partícula no espaço para o sólido deformável, basta utilizar as funções $q_1(x_1, x_2, x_3)$, $q_2(x_1, x_2, x_3)$ e $q_3(x_1, x_2, x_3)$. Os infinitos pontos materiais do sólido são individualmente identificados pelas coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) . Façamos $q_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(x_1, x_2, x_3)$.

Um ponto material p no interior do sólido em equilíbrio é representado na Figura 7.10. Sabemos que a soma das forças/volume que atuam sobre o ponto na direção de um eixo coordenado é nula para o equilíbrio de translação. As três equações que daí decorrem, conforme (1.81), estão indicadas na figura. Essas equações já incorporam a condição de equilíbrio de rotação ao adotar $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. O

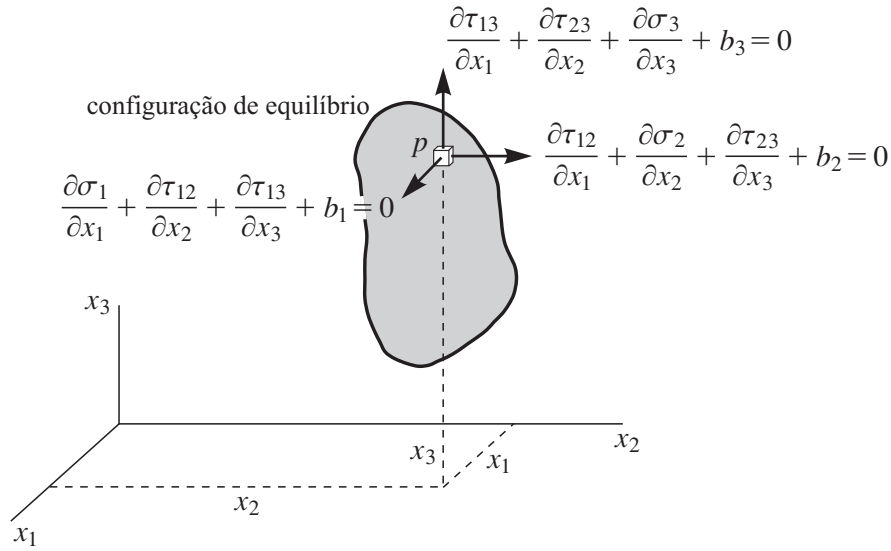


Figura 7.10 Representação de um ponto material p no interior do sólido em equilíbrio.

trabalho virtual realizado pelas forças que atuam sobre um volume infinitesimal em torno do ponto é nulo, dada a condição de equilíbrio, assim como é nula a soma dos trabalhos virtuais provenientes de todos os pontos:

$$\int_v \left[\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_3} + b_1 \right) \delta u_1 + \left(\frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_3} + b_2 \right) \delta u_2 + \left(\frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_3}{\partial x_3} + b_3 \right) \delta u_3 \right] dv = 0. \quad (7.53)$$

Esta expressão foi obtida por argumentações físicas, recorrendo-se ao conceito de trabalho. Sua obtenção direta por um procedimento puramente matemático consiste em usar o lema fundamental do cálculo variacional: a expressão integral (7.53) é matematicamente equivalente às equações de equilíbrio (1.81). Para transformar (7.53) numa expressão mais útil, vamos inicialmente reescrevê-la na forma

$$\int_v \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_3} + b_1 \\ \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_3} + b_2 \\ \frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_3}{\partial x_3} + b_3 \end{Bmatrix} dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_v \delta \mathbf{u}^T (\boldsymbol{\sigma} \nabla_x + \mathbf{b}) dv = 0 \quad (7.54)$$

onde o campo de deslocamento virtual é representado por $\delta \mathbf{u} = [\delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_3]^T$.

Pela regra da derivação de produtos de funções,

$$(\delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) \nabla_x = (\delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}_c) \nabla_x + \delta \mathbf{u}^T (\boldsymbol{\sigma} \nabla_x) \quad (7.55)$$

onde a presença do índice “c” em $\boldsymbol{\sigma}$ já foi explicada na página 32. Introduzindo (7.55) em (7.54),

$$\int_v [(\delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) \nabla_x - (\delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}_c) \nabla_x + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}] dv = 0. \quad (7.56)$$

Sabendo-se que pelo teorema da divergência

$$\int_v (\delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) \nabla_x dv = \int_s \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds, \quad (7.57)$$

(veja Capítulo 11) e cascas (veja Capítulo 13), que sejam variacionalmente consistentes. Uma outra vantagem é servir de base para métodos eficientes na obtenção de soluções aproximadas (veja Capítulos 9 e 10).

- Em problemas dinâmicos, a contribuição da força de inércia é incluída na expressão do princípio dos deslocamentos virtuais simplesmente trocando \mathbf{b} por $\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ onde ρ é a massa específica do material e $\ddot{\mathbf{u}}$ é a aceleração.

Infelizmente, não podemos aplicar (7.63) diretamente porque as forças, tensões e deformações lá presentes referem-se a uma configuração desconhecida (configuração atual ou de equilíbrio). Devemos antes transformar a expressão para a configuração inicial, ou para uma outra configuração conhecida. No entanto, se os gradientes do deslocamento são pequenos em módulo comparados à unidade, como usualmente ocorre na prática, podemos aplicar (7.63) diretamente como se a expressão referisse à configuração inicial (veja Seção 5.1).

Princípio dos deslocamentos virtuais referido à configuração inicial

Vamos expressar o princípio dos deslocamentos virtuais (7.63) em relação à configuração inicial usando o tensor deformação de Green $\boldsymbol{\epsilon}$ como medida de deformação.

De (2.13),

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{F} = \frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \quad (7.64)$$

onde \mathbf{F} é o gradiente da transformação, \mathbf{I} é a matriz identidade, X_i e x_i são as coordenadas lagrangianas e eulerianas, respectivamente. O tensor deformação \mathbf{e} , que aparece como par conjugado no trabalho do tensor tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ em relação à configuração atual, é dado por

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right]. \quad (7.65)$$

Sabendo-se que

$$\frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}, \quad (7.66)$$

obtemos

$$\delta \mathbf{e} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \delta \mathbf{F}^T) = \mathbf{F}^{-T} \frac{\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F}}{2} \mathbf{F}^{-1}. \quad (7.67)$$

Dado que o tensor deformação de Green é

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}}{2}, \quad (7.68)$$

então

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \delta \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{F}^{-1}. \quad (7.69)$$

O trabalho virtual realizado pelas forças internas foi identificado como sendo

$$\delta W_i = - \int_v \{ \boldsymbol{\sigma} \}^T \{ \delta \mathbf{e} \} dv \quad (7.70)$$