

Capítulo 6

Análise de um laminado

As várias combinações de orientações, espessuras e materiais de cada lâmina que compõe um laminado fazem com que o comportamento deste possua características diferentes das observadas em cada lâmina individual. A análise macromecânica de um laminado é a modelagem do comportamento do laminado supondo conhecidas as propriedades mecânicas e o comportamento individual de cada lâmina. Este capítulo primeiramente descreve as relações tensão-deformação elásticas de um laminado por meio da chamada teoria clássica de laminação. Em seguida, é considerada a resistência do laminado, buscando-se estimativas de cargas limites de ruptura. A seção 6.5 apresenta um tratamento para placas e grelhas metálicas com enrijecedores, em que é feita a determinação dos parâmetros elásticos de rigidez ortotrópicos aplicáveis à teoria clássica de laminação.

6.1 Teoria clássica de laminação – TCL

Inicialmente, adotamos para o laminado o conjunto de pressupostos que são comumente conhecidos como **hipóteses de Kirchhoff** nos estudos placas, e **hipóteses de Kirchhoff-Love** nos estudos de cascas. Essas hipóteses gerais de placas e cascas isotrópicas, juntamente com outras próprias a materiais compostos laminados, são:

1. O laminado consiste de lâminas perfeitamente coladas, isto é, sem deslizamento ou descolamento.
2. A camada de resina que é usada para unir as lâminas é infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento. Isso significa que os deslocamentos são contínuos através das lâminas.
3. O laminado é considerado delgado, ou seja, é uma placa ou casca de parede relativamente fina em relação a uma das dimensões da superfície. Normalmente isso é quantificado, de forma bastante arbitrária, considerando que o erro na resposta estará na faixa de até 5% em deslocamentos usando a teoria de placa delgada se a relação comprimento/espessura for maior que 100.
4. Como consequência dessa hipótese, pode-se utilizar a chamada hipótese das seções planas. Ela diz que uma linha originalmente reta e perpendicular à superfície que define a geometria da estrutura (a chamada **superfície de referência**) permanece reta e perpendicular a essa superfície quando o laminado for estendido e flexionado. Como consequência $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, onde os eixos $0xyz$ estão como na Figura 6.1.
5. Os segmentos normais à superfície de referência são considerados inextensíveis, isto é, têm comprimentos constantes. Isso significa que $\varepsilon_z = 0$ em qualquer ponto.

As hipóteses 3 a 5 são as mesmas usadas na teoria de Kirchhoff para placas delgadas isotrópico-homogêneas. Com essas hipóteses podem ser deduzidas as relações mostradas a seguir entre as componentes de deslocamento u , v e w de um ponto qualquer C , e as componentes u_0 e v_0 de um ponto situado sobre a superfície de referência, como indicado na Figura 6.1. A hipótese das seções retas implica que os deslocamentos do ponto genérico C do laminado, nas direções x e y , são dados respectivamente por

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) + z \psi_x(x, y) \quad \text{e} \quad v(x, y, z) = v^0(x, y) + z \psi_y(x, y), \quad (6.1)$$

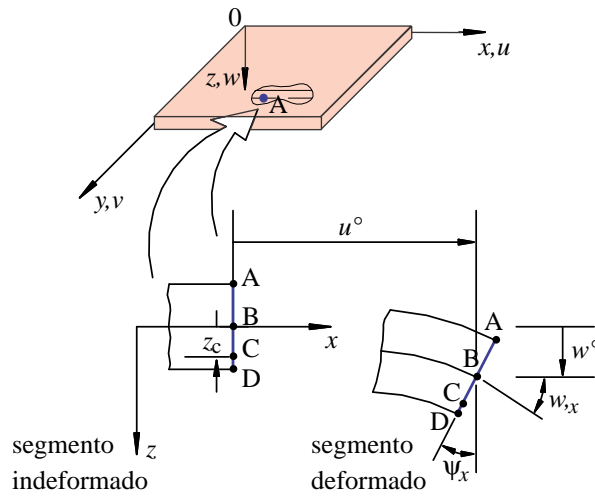


Figura 6.1: Geometria da deformação da placa no plano xz .

onde ψ_x e ψ_y são as inclinações da normal à superfície média nas direções x e y no ponto (x, y) da superfície de referência.

Observe que as relações para flexão e extensão de uma placa isotrópico-homogênea podem ser consideradas separadamente. Entretanto, numa placa de material composto torna-se necessário que a análise leve em conta simultaneamente os dois efeitos, flexão e membrana. Isso se faz a partir das eqs.(6.1), onde u^o e v^o são as parcelas de deslocamento de membrana, uniformes ao longo da espessura, enquanto os termos $z\psi_x$ e $z\psi_y$ são os deslocamentos coplanares, variáveis com z , associados à flexão.

Em seguida usamos a hipótese 4 da Seção 5.1, o que resulta em

$$\psi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{e} \quad \psi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6.2)$$

Dessa forma as três componentes de deslocamento se relacionam aos deslocamentos e rotações na superfície de referência por:

$$u(x, y, z) = u^o(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y), \quad (6.3)$$

$$v(x, y, z) = v^o(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y), \quad (6.4)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y). \quad (6.5)$$

A última destas equações é consequência da inextensividade do segmento normal.

Usamos agora a hipótese de que as deformações e rotações são relativamente pequenas. Desta forma, as relações deformação-deslocamento são:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0. \quad (6.6)$$

Substituindo-se os deslocamentos das eqs.(6.3) em (6.6), obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u^o(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial v^o(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u^o(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v^o(x, y)}{\partial x} - z 2 \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

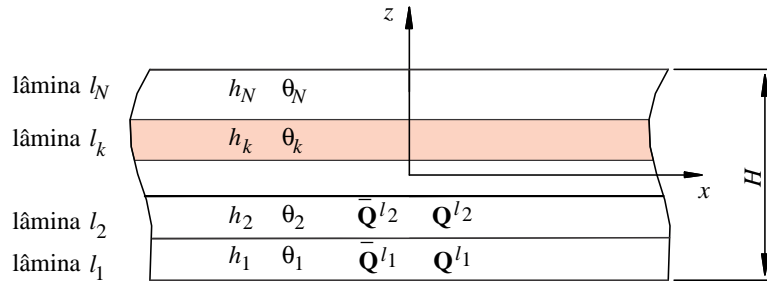


Figura 6.2: Nomenclatura em um laminado de N lâminas. l_k é o número de uma lâmina genérica; h a espessura; θ a orientação dos eixos principais da lâmina.

serão usados simultaneamente na mesma variável. O sobrescrito x indica o sistema de eixos usado na definição da tensão.

Os esforços no laminado são obtidos pela integração das tensões em cada lâmina através da espessura do laminado:

$$\begin{aligned} \{N_x, N_y, N_{xy}\} &= \int_{-H/2}^{H/2} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} dz, \\ \{M_x, M_y, M_{xy}\} &= \int_{-H/2}^{H/2} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} z dz, \end{aligned} \quad (6.12)$$

ou, em notação matricial,

$$\boxed{\mathbf{N} = \int_{-H/2}^{H/2} \boldsymbol{\sigma} dz, \quad \mathbf{M} = \int_{-H/2}^{H/2} \boldsymbol{\sigma} z dz} \quad (6.13)$$

onde os \mathbf{N} e \mathbf{M} são os esforços normais e de momentos por unidade de comprimento ao longo de uma aresta de um elemento diferencial de placa, paralelos aos eixos x e y . As orientações positivas das forças e dos momentos são representados na Figura 6.3, e H é a espessura total do laminado. Considera-se a geometria do laminado como mostrada na Figura 6.4, onde z_k é a cota da face superior da lâmina k , e N é o número de lâminas.

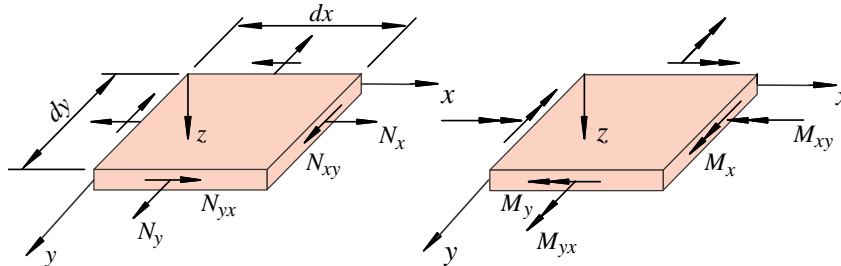


Figura 6.3: Forças e momentos resultantes num elemento diferencial de laminado plano.

A integral ao longo da espessura nas definições das forças resultantes em (6.12) pode ser substituída por um somatório de integrais definidas ao longo da espessura de cada lâmina. Temos então:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{l_k} dz, \quad (6.14)$$

Laminados simétricos de lâminas isotrópicas

Um laminado desse tipo pode ser formado, por exemplo, usando dois tipos de lâminas isotrópicas para montar um laminado simétrico de três lâminas como:

$$\begin{array}{l} \text{Lâmina 1} \rightarrow E_{l_1}, \nu_{l_1} \text{ e } h_1 \\ \text{Lâmina 2} \rightarrow E_{l_2}, \nu_{l_2} \text{ e } h_2 \\ \text{Lâmina 3} \rightarrow E_{l_1}, \nu_{l_1} \text{ e } h_1 \end{array},$$

onde E_{l_1} e E_{l_2} são os módulos de elasticidade de cada um dos dois materiais isotrópicos. Também podemos ter os dois tipos de lâminas já vistos formando um laminado de 4 lâminas:

$$\begin{array}{l} \text{Lâmina 1} \rightarrow E_{l_2}, \nu_{l_2} \text{ e } 2h_2 \\ \text{Lâmina 2} \rightarrow E_{l_1}, \nu_{l_1} \text{ e } 3h_1 \\ \text{Lâmina 3} \rightarrow E_{l_1}, \nu_{l_1} \text{ e } 3h_1 \\ \text{Lâmina 4} \rightarrow E_{l_2}, \nu_{l_2} \text{ e } 2h_2 \end{array}.$$

A simetria do laminado garante que $B_{ij} = 0$, o que significa que não há acoplamento flexão-extensão, isto é, uma carga axial não provoca flexão. Sendo as lâminas isotrópicas,

$$\bar{Q}_{11}^{l_k} = \bar{Q}_{22}^{l_k} = \frac{E_k}{1 - \nu_k^2}, \quad \bar{Q}_{12}^{l_k} = \frac{\nu_k E_k}{1 - \nu_k}, \quad \bar{Q}_{66}^{l_k} = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)}, \quad \bar{Q}_{16}^{l_k} = \bar{Q}_{26}^{l_k} = 0. \quad (6.27)$$

Uma vez que os termos \bar{Q}_{16}^k e \bar{Q}_{26}^k de acoplamento são nulos, os termos correspondentes em **A** e **D** também o são.

6.2.3 Laminado cruzado

Trata-se de um caso particular onde as lâminas ortotrópicas são empilhadas alternadamente com o eixo principal 1 orientado a 0° e 90° em relação a x , de forma simétrica em relação à superfície de referência. Uma vez que todas as lâminas têm o eixo 1 fazendo ângulos de 0° ou 90° com x , as eqs.(4.51) de definição de $\bar{\mathbf{Q}}$ mostram que \bar{Q}_{16} e $\bar{Q}_{26} = 0$. Como consequência, $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ no laminado. As matrizes de rigidez **A** e **D** terão apenas quatro termos não nulos cada uma. Esta é uma boa propriedade dos laminados cruzados, pois a presença desses termos, em geral, é um fator complicante em qualquer processo de cálculo.

O comportamento de um laminado cruzado é bastante influenciado pelo fator M , definido pela relação entre a espessura do conjunto de lâminas ímpares e a espessura do conjunto par.

$$M = \frac{\text{Espessura total das lâminas ímpares}}{\text{Espessura total das lâminas pares}}. \quad (6.28)$$

No caso de laminado regular, em que todas as lâminas ímpares tenham mesma espessura e propriedades, da mesma forma que as pares, então

$$M = \frac{N_i h_i}{N_p h_p}, \quad (6.29)$$

onde N_i e h_i são a quantidade de lâminas ímpares e espessura de de cada uma, e similarmente para N_p e h_p .

Laminado cruzado simétrico regular

Tem-se a mesma situação, mas aqui o laminado é regular, ou seja, todas as lâminas têm espessuras e propriedades idênticas, alternando-se em 0° e 90° . Um laminado desse tipo tem necessariamente um número de lâminas N ímpar. Um laminado cruzado regular com N par não é simétrico. É usual na literatura a notação $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, por exemplo, para indicar as orientações das lâminas.

a rigidez é dada por Tsai [202] como:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{11}H(M+F)}{(1+M)} & Q_{12}H & 0 & F_0Q_{11} & 0 & 0 \\ & \frac{A_{11}(1+MF)}{(M+F)} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ & & Q_{66}H & 0 & 0 & 0 \\ & & & Q_{11}F_1 & \frac{Q_{12}H^3}{12} & 0 \\ & & & & Q_{11}F_2 & 0 \\ sim. & & & & & \frac{Q_{66}H^3}{12} \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } R &= \frac{1}{1+M} + \frac{8M(M-1)}{N^2(1+M)^3}, & F_0 &= \frac{M(F-1)H^2}{N(1+M)^2}, \\ F_1 &= \frac{[(F-1)R+1]H^3}{12}, & F_2 &= \frac{[(1-F)R+F]H^3}{12}, \end{aligned} \quad (6.33)$$

e $M = N_i h_i / (N_p h_p)$ e $F = E_2 / E_1$. Verifica-se que a matriz de rigidez (6.32) e sua inversa possuem idênticas esparsidades.

6.3 Determinação das tensões e deformações nas lâminas

Em muitas situações de análise têm-se disponíveis as forças e os momentos resultantes \mathbf{N} e \mathbf{M} . A falha das lâminas, e conseqüentemente do laminado, entretanto, está ligada às tensões ou deformações nas lâminas. Apresentamos aqui a seqüência de operações necessárias para obter um grupo de valores a partir do outro. Essa seqüência é, de forma geral, a inversa das operações desenvolvidas na Seção 6.1. A operação que se deseja pode ser visualizada da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{Q}^k, \bar{\mathbf{Q}}^k} \boldsymbol{\sigma}^{lk}.$$

O ponto final na seção 6.1 era a relação entre os esforços e as deformações de membrana e curvaturas de placa representadas, pelas eqs.(6.21). Deve-se primeiramente achar a inversa dessa relação, isto é, a matriz \mathbf{C}' de flexibilidade do laminado, tal que

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{G}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}' \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}} \quad (6.34)$$

de forma a ter as deformações se forem conhecidos os esforços. A matriz de rigidez \mathbf{C} é de ordem 6×6 , simétrica, e não-singular. Pode, portanto, ser diretamente invertida. O Exercício 18 mostra expressões explícitas para essas submatrizes. Suas unidades são:

$$\mathbf{A}' \rightarrow \text{m/N}, \quad \mathbf{B}' \rightarrow 1/\text{N}, \quad \mathbf{D}' \rightarrow 1/\text{Nm}.$$

Deve-se enfatizar que, em (6.34), $\mathbf{A}' \neq \mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{D}' \neq \mathbf{D}^{-1}$, (exceto no caso $\mathbf{B} = \mathbf{0}$). A matriz de flexibilidade é simétrica, isto é, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}'^T$, tanto quanto todas as submatrizes em (6.34). Nesse ponto temos os valores das deformações e curvaturas. Nota-se que nem sempre será necessária a referida etapa de inversão. Num programa de elementos finitos de deslocamentos, por exemplo, após a obtenção dos valores nodais de deslocamentos, as deformações e curvaturas são obtidas diretamente e só então os esforços são obtidos, também diretamente, pela eq.(6.21).

Observe a Figura 6.6. Suponha que se deseja conhecer as deformações num ponto P de cota z que pertence a uma lâmina k , isto é, $z \in (z_{k-1}; z_k)$. As deformações nesse ponto são:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{xl_k} = \boldsymbol{\varepsilon}^o + z\boldsymbol{\kappa}. \quad (6.35)$$

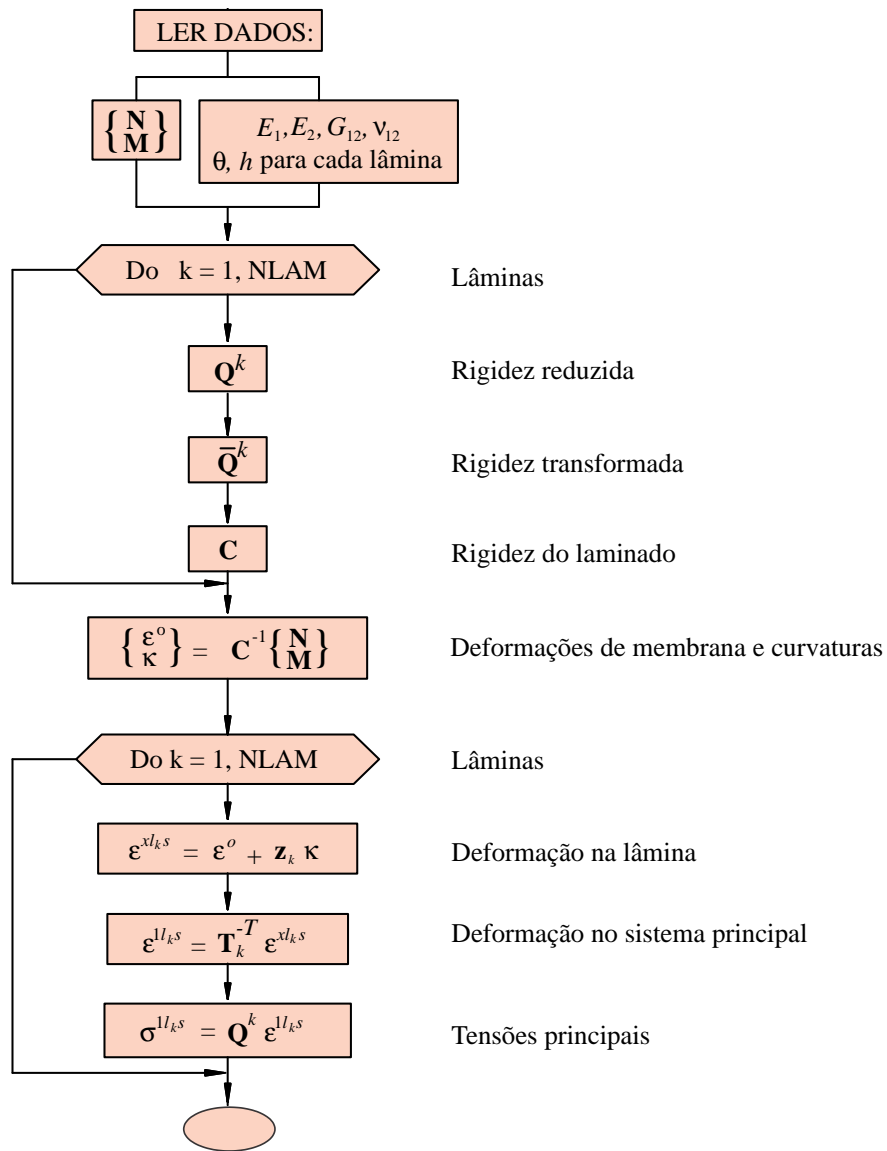


Figura 6.7: Fluxograma para análise de tensões nas lâminas.

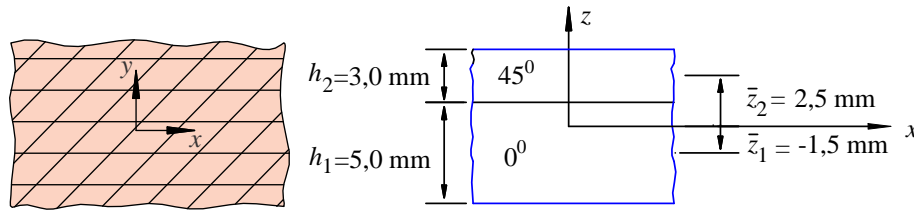


Figura 6.8: Laminado de duas lâminas do Exemplo 1.

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^2 \bar{\mathbf{Q}}^k h_k = \bar{\mathbf{Q}}^1 \times 5,0 + \bar{\mathbf{Q}}^2 \times 3,0 = \begin{bmatrix} 370,0 & 59,77 & 28,00 \\ & 183,3 & 28,00 \\ \text{sim.} & & 93,55 \end{bmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

(Observe que $1 \text{ GPa} \cdot \text{mm} = 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot \text{mm} = 10^3 \text{ N/mm} = 10^6 \text{ N/m}$). A matriz de acoplamento membrana-flexão é:

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^2 \bar{\mathbf{Q}}^k h_k \bar{z}_k = \bar{\mathbf{Q}}^1 \times 5,0 \cdot (-1,5) + \bar{\mathbf{Q}}^2 \times 3,0 (2,5),$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -19,58 & 55,86 & 70,00 \\ & 84,12 & 70,00 \\ \text{sim.} & & 55,86 \end{bmatrix} 10^3 \text{N}.$$

Por fim, a matriz de rigidez flexural da placa é:

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^2 \bar{\mathbf{Q}}^k \left(h_k \bar{z}_k^2 + \frac{h_k^3}{12} \right) = \bar{\mathbf{Q}}^1 \left(5,0 (-1,5)^2 + \frac{5,0^3}{12} \right) + \bar{\mathbf{Q}}^2 \left(3,0 (2,5)^2 + \frac{3,0^3}{12} \right),$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.843,0 & 356,0 & 196,0 \\ & 1.034,0 & 196,0 \\ \text{sim.} & & 536,2 \end{bmatrix} 10^3 \text{Nmm}.$$

Combinando as matrizes anteriores, a matriz \mathbf{C} de rigidez pode ser montada e a relação constitutiva para o laminado torna-se

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 370,0 & 59,77 & 28,00 & -195,8 & 55,86 & 70,00 \\ & 183,3 & 28,00 & 55,86 & 84,12 & 70,00 \\ & & 93,55 & 70,0 & 70,0 & 55,86 \\ & & & 1843,0 & 356,0 & 196,0 \\ & & & & 1034,0 & 196,0 \\ \text{sim.} & & & & & 536,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (6.40)$$

Exemplo 2 – Deflexão associada ao acoplamento membrana-flexão

Considerar o laminado do Exemplo 1 submetido a esforços dados por $\{\mathbf{N}; \mathbf{M}\}^T = \{1; 0; 0; 0; 0; 0\}^T$ N/mm. Obter a função de deflexão transversal $w(x, y)$.

Solução:

Primeiramente, tomamos a matriz de rigidez \mathbf{C} obtida no Exemplo 1. Obtendo sua inversa usando (6.34), tem-se:

e H_3 , a serem determinadas pelas condições de contorno. Por simplicidade de visualização neste exemplo, consideramos a placa engastada em seu ponto central, ou seja, com $w = w_{,x} = w_{,y} = 0$ em $(x, y) = (0, 0)$. Logo $H_1 = H_2 = H_3 = 0$ e a solução será:

$$w(x, y) = -\frac{d}{2}x^2 - fxy - \frac{e}{2}y^2 \quad (6.52)$$

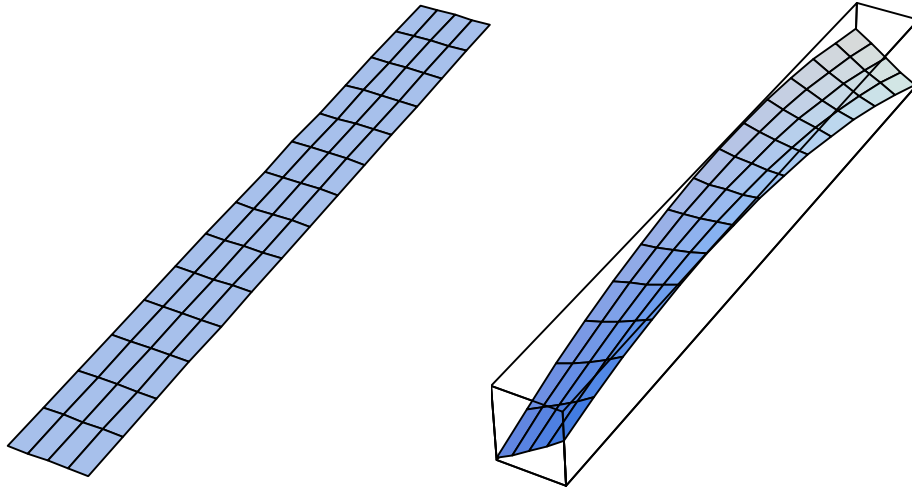


Figura 6.9: Placa tracionada do Exemplo 2 e sua configuração deformada mostrando o efeito de acoplamento de flexão e torção.

Para o problema considerado, essa equação assume a forma

$$w(x, y) = -N_x \left(\frac{C'_{41}}{2}x^2 + \frac{C'_{61}}{2}xy + \frac{C'_{51}}{2}y^2 \right). \quad (6.53)$$

A Figura 6.9 mostra uma placa de $20 \times 200 \times 1$ mm feita do laminado considerado, submetida à tração de $N_x = 1$ N/mm. Da matriz de rigidez, observa-se que as curvaturas são constantes, dadas pelas eqs.(6.42). Apesar de a barra estar sendo tracionada, pela eq.(6.53) e pela figura nota-se que existe uma flexão em x , dada por $dx^2/2$, uma flexão em y dada por $ey^2/2$ (não muito bem visível na figura), e uma torção dada por fxy , visível na figura pelo ângulo formado entre as duas extremidades da placa. Este caso é um exemplo do significado do acoplamento membrana-flexão num laminado não-simétrico: um carregamento coplanar $\{N\}$ provoca também deformações de flexão. Reversamente, como \mathbf{B} aparece também no segundo quadrante da matriz de rigidez \mathbf{C} , a aplicação de um momento fletor puro provocará também deformações extensionais $\{\kappa\}$, além da flexão dada por $\{\kappa\}$.

Exemplo 3 – Placa bimetal

Considere uma placa de bimetal, constituída por duas lâminas metálicas isotrópicas de espessuras idênticas, $h_1 = h_2 = 3,0$ mm. A lâmina 1 é de aço, com $E = 2,1 \cdot 10^5$ N/mm², $G = 8,077 \cdot 10^4$ N/mm² e $\nu = 0,3$, e a lâmina 2 é de alumínio com $E = 7,0 \cdot 10^4$ N/mm², $G = 2,6 \cdot 10^4$ N/mm² e $\nu = 0,3$. Obtenha as distribuições de deformações e de tensões e a função deflexão $w(x, y)$ para a superfície de referência deformada.

Solução:

As matrizes de rigidez em cada lâmina são dadas pela eq.(4.29):

$$\mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} 23,08 & 6,932 & 0 \\ 6,932 & 23,08 & 0 \\ 0 & 0 & 8,077 \end{bmatrix} 10^4, \quad \mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} 7,692 & 2,308 & 0 \\ 2,308 & 7,962 & 0 \\ 0 & 0 & 2,60 \end{bmatrix} 10^4,$$

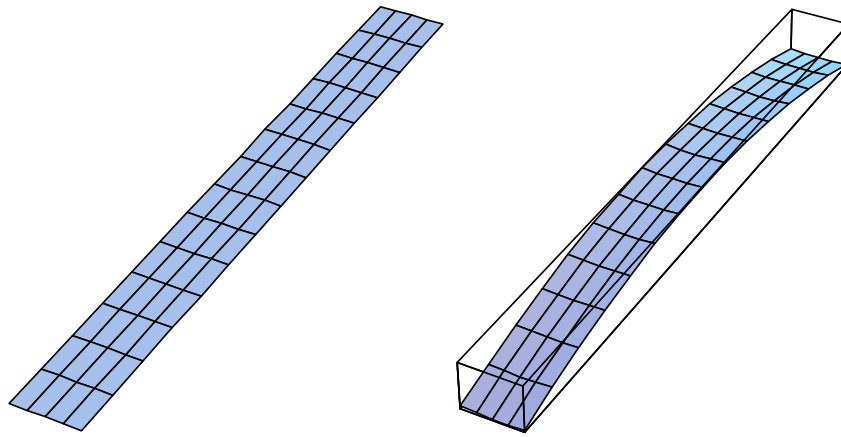


Figura 6.12: Configuração inicial e deformada da placa bimetal do Exemplo 3.

Exemplo 4 – Laminado simétrico com 3 lâminas ortotrópicas

Considere o laminado de três lâminas mostrado na Figura 6.13. As lâminas externas, 1 e 3, são idênticas, com $h_1 = h_3 = 3,0\text{ mm}$ e $\theta_1 = \theta_3 = 45^\circ$. A lâmina central 2 tem $h_2 = 6,0\text{ mm}$ e $\theta_2 = 0^\circ$. Cada lâmina tem as mesmas propriedades do Exemplo 1, página 136. Obtenha as matrizes de rigidez **A**, **B** e **D**.

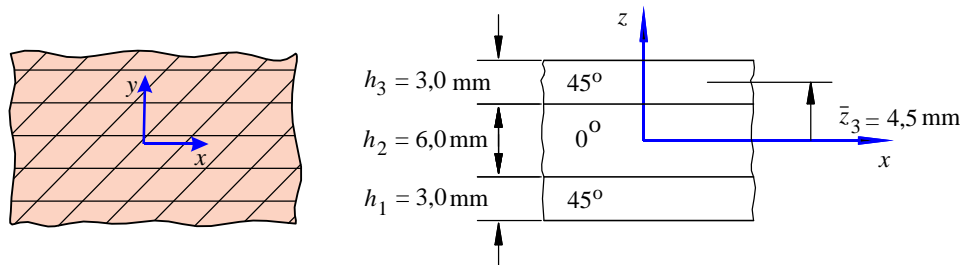


Figura 6.13: Laminado simétrico angular de três lâminas do Exemplo 4.

Solução:

Do exemplo 2, as matrizes de rigidez rotacionadas são:

$$\bar{\mathbf{Q}}^1 = \bar{\mathbf{Q}}^3 = \begin{bmatrix} 29,93 & 12,13 & 9,33 \\ & 29,93 & 9,33 \\ \text{sim.} & & 16,35 \end{bmatrix} 10^3 \text{MPa},$$

$$\bar{\mathbf{Q}}^2 = \begin{bmatrix} 56,04 & 4,68 & 0 \\ & 18,71 & 0 \\ \text{sim.} & & 8,9 \end{bmatrix} 10^3 \text{MPa}.$$

Para este laminado as cotas das superfícies médias das lâminas são $\bar{z}_3 = -\bar{z}_1 = 4,5\text{ mm}$ e $\bar{z}_2 = 0,0\text{ mm}$. A matriz $[A]$ é, portanto,

$$A = \sum_{k=1}^3 h_k \bar{\mathbf{Q}}^k = 3,0\bar{\mathbf{Q}}^1 + 6,0\bar{\mathbf{Q}}^2 + 3,0\bar{\mathbf{Q}}^3 = 6,0 \left(\bar{\mathbf{Q}}^1 + \bar{\mathbf{Q}}^2 \right),$$

o que resulta em

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 515,8 & 100,8 & 56,00 \\ & 291,8 & 56,00 \\ \text{sim.} & & 151,5 \end{bmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

A matriz de acoplamento \mathbf{B} é dada por

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^3 \bar{\mathbf{Q}}^k h_k \bar{z}^k = \bar{\mathbf{Q}}^1 3,0 \times (-4,5) + \bar{\mathbf{Q}}^2 6,0 \times (0,0) + \bar{\mathbf{Q}}^3 3,0 \times (4,5).$$

Uma vez que $\bar{\mathbf{Q}}^1 = \bar{\mathbf{Q}}^3$, temos que $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ como era de esperar de um laminado simétrico. A rigidez de flexão é:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4,78 & 1,61 & 1,18 \\ & 4,11 & 1,18 \\ sim. & & 2,22 \end{bmatrix} 10^6 \text{Nmm}.$$

Embora este laminado não exiba acoplamento membrana-flexão, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, ele apresenta anisotropias de membrana e de flexão, representadas por A_{16} , A_{26} , D_{16} e D_{26} não-nulos.

Exemplo 5 – Análise do efeito da orientação das lâminas na rigidez do laminado

Análise o efeito de orientação das lâminas na rigidez de um laminado. Considere os seguintes laminados:

- $[(+45^\circ)_8]$, isto é, todas as lâminas a 45° ;
- $[(45^\circ)_2 / (-45^\circ)_2]_s$, isto é, $[45^\circ/45^\circ / -45^\circ / -45^\circ // -45^\circ / -45^\circ / +45^\circ / +45^\circ]$;
- $[(\pm 45^\circ)_2]_s$, isto é, $[45^\circ / -45^\circ / +45^\circ / -45^\circ // -45^\circ / +45^\circ / -45^\circ / +45^\circ]$;
- $[\pm \mp 45^\circ]_s$, isto é, $[45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / +45^\circ // +45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / +45^\circ]$;

Todas as lâminas têm espessura idêntica, $h = 3,0$ mm, e as mesmas propriedades do Exemplo 1, isto é, $E_1 = 54,87$ GPa, $E_2 = 18,32$ GPa, $G_{12} = 8,9$ GPa e $\nu_{12} = 0,25$.

Este exemplo contempla a situação na qual se tem um lote de lâminas idênticas e a definição de uma espessura total, $H = 8h$, e deseja-se determinar a sequência de empilhamento para ângulos também já definidos de $\pm 45^\circ$. Observa-se que obteremos diversos tipos de comportamento conforme o caso escolhido. O caso (a) funciona como se o laminado fosse constituído por uma única lâmina de espessura $8h$. Cada um dos outros três casos possuem quatro lâminas a $+45^\circ$ e quatro a -45° .

Solução:

a) Esse laminado é idêntico a um laminado de uma só lâmina, de espessura $H = 8 \cdot 3,0 = 24,0$ mm a 45° . A matriz $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{Q}}^1 H$, logo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 718,2 & 291,0 & 224,0 \\ & 718,2 & 224,0 \\ sim. & & 392,4 \end{bmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{Q}}^1 \left(24,0 \times 0 + \frac{24,0^3}{12} \right) = \begin{bmatrix} 34,48 & 13,97 & 10,75 \\ & 34,48 & 10,75 \\ sim. & & 18,83 \end{bmatrix} 10^6 \text{Nmm}.$$

Objetivando comparações posteriores calculamos $D_{16}/D_{11} = 0,318$. Este coeficiente pode servir de quantificador para o grau de anisotropia de flexão exibido pelo laminado.

b) Os termos A_{11} , A_{12} , A_{22} e A_{66} dependem dos respectivos termos em $\bar{\mathbf{Q}}$, que são independentes do sinal de θ . Portanto, estes termos são idênticos aos do item a). Os termos \bar{Q}_{16} e \bar{Q}_{26} têm o mesmo sinal de θ . Como o laminado tem o mesmo número de lâminas a $+45^\circ$ e -45° , os termos A_{16} e A_{26} se anulam. Então,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 718,2 & 291,0 & 0 \\ & 718,2 & 0 \\ sim. & & 392,4 \end{bmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

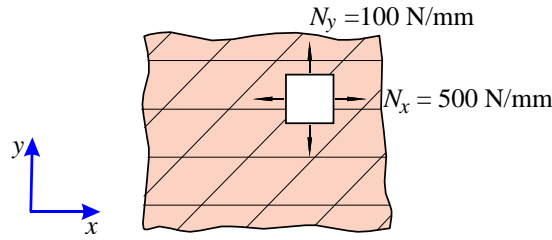


Figura 6.14: Definição das forças aplicadas no laminado do Exemplo 6.

Do Exemplo 4 temos as matrizes **A**, **B** e **D** que compõem a matriz rigidez do laminado **C**. Sua inversa é a matriz de flexibilidade, obtida das equações (6.34):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,121 & & & & & \\ -0,627 & 3,874 & & & & \\ -0,552 & -1,20 & 7,249 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0,2580 & & \\ 0 & 0 & 0 & -0,0732 & 0,3078 & \\ 0 & 0 & 0 & -0,0979 & -0,1242 & 0,568 \end{bmatrix} \begin{matrix} sim. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} 10^{-6}.$$

As submatrizes **A'** e **D'** têm unidades de mm/N e 1/Nmm. Seguindo o procedimento indicado no fluxograma da Figura 6.7 na página 137, substituímos o carregamento dado para obter as deformações de membrana:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 997,9 \\ 73,91 \\ -396,2 \end{Bmatrix} 10^{-6}.$$

Uma vez que $\{\kappa\} = \{0\}$, as deformações em qualquer lâmina são:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{xl_k} = \boldsymbol{\varepsilon}^o + z_k \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\varepsilon}^o, \quad \text{para qualquer lâmina } k.$$

Para a lâmina 1 a 45° e a lâmina 2 a 0° , as matrizes de transformação definidas em eq.(4.38) são:

$$\mathbf{T}_{l_1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 1,0 \\ 0,5 & 0,5 & -1,0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_{l_2} = \mathbf{I},$$

onde **I** é a matriz identidade. Usando a eq.(4.52), temos as deformações nas direções principais das lâminas:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{1l_1} = \mathbf{T}_{l_1}^{-T} \boldsymbol{\varepsilon}^{xl_1} = \begin{Bmatrix} 3,38 \\ 7,34 \\ -9,24 \end{Bmatrix} 10^{-4}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{1l_2} = \begin{Bmatrix} 997,9 \\ 73,91 \\ -396,2 \end{Bmatrix} 10^{-6}.$$

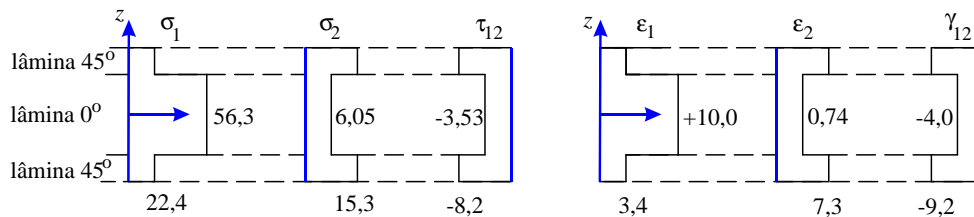


Figura 6.15: Tensões (em MPa) e deformações principais ($\times 10^{-4}$) nas lâminas.

As tensões principais são dadas por $\boldsymbol{\sigma}^{1l_k} = \mathbf{Q}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{1l_k}$. As matrizes de rigidez são tomadas do Exemplo 2, logo,

$$\boldsymbol{\sigma}^{1l_1} = \begin{bmatrix} 56,04 & 4,68 & 0 \\ 4,68 & 18,71 & 0 \\ 0 & 0 & 8,9 \end{bmatrix} \text{GPa} \begin{Bmatrix} 3,38 \\ 7,34 \\ -9,24 \end{Bmatrix} 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 22,37 \\ 15,31 \\ -8,22 \end{Bmatrix} \text{MPa},$$

$$\sigma^{1l_2} = \begin{bmatrix} 56,04 & 4,68 & 0 \\ 4,68 & 18,71 & 0 \\ 0 & 0 & 8,9 \end{bmatrix} \text{ GPa} \begin{Bmatrix} 9,979 \\ 0,7391 \\ -3,962 \end{Bmatrix} 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 56,27 \\ 6,05 \\ -3,53 \end{Bmatrix} \text{ MPa}.$$

As deformações e tensões principais são representadas graficamente na Figura 6.15. Estes valores podem ser comparados com as tensões ou deformações admissíveis em cada lâmina e a análise de resistência pode ser feita, conforme o procedimento descrito na próxima seção. Observa-se que, embora as deformações nas direções x - y sejam contínuas ao longo da espessura, nas direções principais elas não o são, graças à variação brusca de orientação entre uma lâmina e outra. A Figura 6.16 mostra a orientação relativa dos diversos eixos e a representação das tensões principais em elementos diferenciais de cada lâmina.

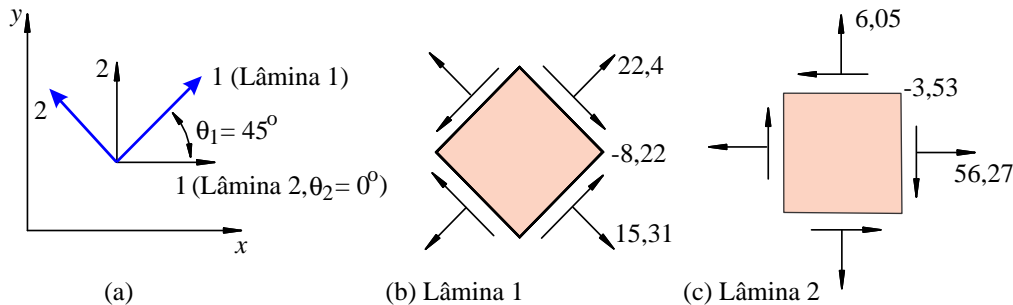


Figura 6.16: (a) Eixos de referência e principais em cada lâmina; (b) e (c), tensões principais, em MPa, nas lâminas 1 e 2.

6.4 Análise de resistência do laminado

6.4.1 Análise de falha inicial

A verificação da segurança do laminado pode ser feita aplicando as componentes de tensão em cada lâmina a um dos critérios de falhas mostrados no Capítulo 4. As deformações variam linearmente ao longo da espessura do laminado e , conseqüentemente, de cada lâmina k . Desta forma, também as tensões principais terão variação linear. Isto pode ser visto substituindo (6.10) em (4.52) e esta em (4.29):

$$\sigma^{1l_k} = \mathbf{Q}^k \mathbf{T}^{-T} \{ \varepsilon^o + z \boldsymbol{\kappa} \}. \quad (6.57)$$

O ponto mais solicitado da lâmina k pode então estar na sua superfície inferior $z = z_{k-1}$ ou na superfície superior $z = z_k$. Usamos os sobrescritos i e s para indicar as superfícies inferior e superior de cada lâmina, isto é, para a superfície inferior as tensões são $\sigma^{1l_k^i}$ e para a superior, $\sigma^{1l_k^s}$. Usando, por exemplo, o critério de falha de Tsai-Hill, visto na Seção 4.7.3, página 98, tem-se em cada superfície da lâmina l_k :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1^i}{X} \right)^2 - \frac{\sigma_1^i \sigma_2^i}{X^2} + \left(\frac{\sigma_2^i}{Y} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^i}{S} \right)^2 &= \frac{1}{C_{R_{1i}}^2} \quad \text{e} \\ \left(\frac{\sigma_1^s}{X} \right)^2 - \frac{\sigma_1^s \sigma_2^s}{X^2} + \left(\frac{\sigma_2^s}{Y} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^s}{S} \right)^2 &= \frac{1}{C_{R_{1s}}^2}, \end{aligned} \quad (6.58)$$

onde se omitiu o índice k da lâmina e o índice 1 do sistema de eixos para simplificar a notação. Se o menor valor dentre $C_{R_{1i}}$ e $C_{R_{1s}}$, denominado $C_{R_{1k}}^k$, for maior que 1 significa que a lâmina está segura para o nível de carga associado a $\{N; M\}^T$. Esta análise pode ser repetida para todas as N lâminas do laminado, gerando a coleção dos coeficientes locais de segurança $C_{R_i}^k$ dada por

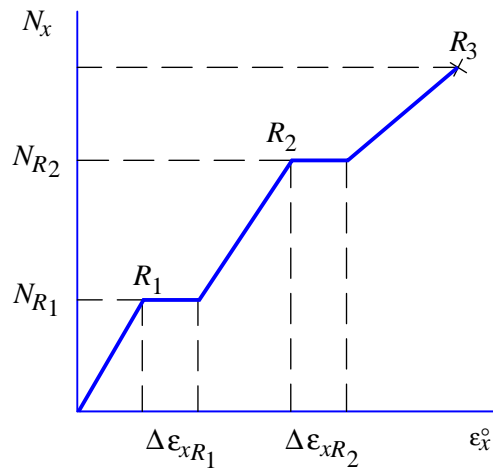


Figura 6.18: Diagrama esquemático de esforços *versus* deformação.

se distribui em vários pontos das lâminas transversais e, só posteriormente, algumas delas se unem entre si até que uma trinca macroscópica surja. Essas lâminas, porém, ainda se encontram coladas e restritas às lâminas vizinhas. Se as duas lâminas vizinhas forem longitudinais, elas serão capazes de impedir um aumento de deformações na lâmina rompida, exercendo uma restrição local. Isto é o que teria ocorrido no laminado com $[(0^\circ/90^\circ)_2]_s$, em que o patamar é ausente. Por sua vez, no laminado com $[0^\circ/90^\circ_2]_s$, todas as quatro lâminas transversais encontram-se juntas e as longitudinais estão nas faces, portanto demasiado distantes para poderem restringir eficientemente as lâminas internas, resultando num certo relaxamento do laminado.

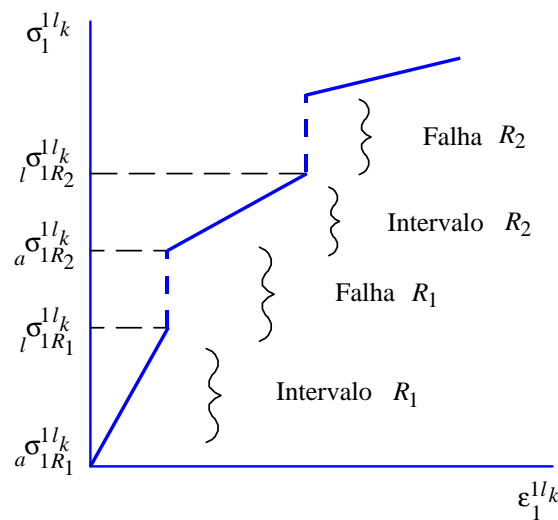


Figura 6.19: Curva tensão-deformação idealizada na direção principal 1 de uma lâmina genérica.

De forma geral, a análise de carga limite dos laminados é feita desconsiderando o patamar de deformações. Isto se faz por dois motivos. Primeiro, pela dificuldade de prever se ele realmente ocorrerá no caso sob análise. Segundo, porque em geral o valor do relaxamento, quando ocorre, é pequeno em comparação aos valores de deformação atingidos pelos laminados durante as falhas. O diagrama carga-deformação é então idealizado na forma mostrada na Figura 6.21a, e o diagrama tensão-deformação na Figura 6.19. Nestes diagramas R_i indica tanto o número da falha quanto o do intervalo de carga: o **intervalo de carga** R_i é definido como o intervalo entre as falhas R_{i-1} e R_i . A origem dos eixos é definida como o ponto de falha R_0 .

lâminas remanescentes, alterando os valores de tensões que tinham logo antes da falha, como ilustrado na Figura 6.19.

Assim, os valores de tensão calculados em (6.69) são apenas os valores máximos no intervalo R_i , e uma outra equação deve ser usada para obter uma estimativa das tensões no início do intervalo de carga seguinte R_{i+1} .

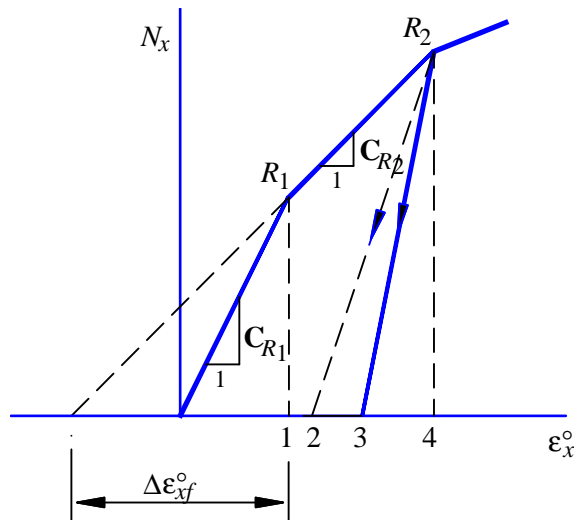


Figura 6.20: Deformação fictícia usada para obter as tensões no início do intervalo de carga R_i .

O procedimento usado é ilustrado na Figura 6.20 para a obtenção das tensões no início do intervalo R_2 . Uma vez identificadas as lâminas que falharam na carga associada ao fator C_{R_1} , suas propriedades são eliminadas e a nova rigidez C_{R_2} do laminado é calculada. Obtém-se então uma variação fictícia das deformações generalizadas dada por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta\epsilon_f^o \\ \Delta\kappa_f \end{array} \right\}_{R_{i+1}} = [C_{R_{i+1}}]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\}_{R_i}, \quad (6.74)$$

onde, no exemplo da Figura 6.20, $i = 1$. Esses incrementos de deformação são aproximadamente os que seriam obtidos se o laminado fosse descarregado a partir dos esforços acumulados no instante de falha, caso este laminado tivesse uma rigidez $C_{R_{i+1}}$. A rigidez do laminado em descarga não é esta. Esta matriz, entretanto, pode ser usada aqui, uma vez que o incremento de deformações generalizadas obtido será usado apenas para redistribuir as tensões nas lâminas. Isto é feito da seguinte forma: os incrementos de deformações fictícias nas lâminas são

$$\Delta\epsilon_f^{lk} = \Delta\epsilon_f^o + z_k \Delta\kappa_f \quad (6.75)$$

e as tensões correspondentes são

$${}_a\sigma_{R_{i+1}}^{lk} = \mathbf{Q}^k \mathbf{T}_k^{-T} \Delta\epsilon_f^{lk}. \quad (6.76)$$

Estas são, portanto, as componentes de tensão logo após a falha R_i na lâmina k , e são os valores iniciais nos cálculos do intervalo de carga R_{i+1} , usados no segundo termo de (6.69).

6.4.5 Carregamento inicial

O processo de cálculo descrito até este ponto permite a estimativa da carga limite num ponto arbitrário de um laminado, utilizando o princípio de um **carregamento proporcional**, ou seja, um perfil $\{\bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{M}}\}^T$ é fixado para os esforços no ponto, como ilustrado na Figura 6.17, e esse perfil é amplificado de forma a manter as mesmas proporções até a falha final. Essa restrição pode ser abrandada de maneira simples com o recurso do **carregamento inicial**. Considera-se que o ponto esteja sujeito a um conjunto de esforços $\{\mathbf{N}_0, \mathbf{M}_0\}^T$ fixo. Sobreposto a estes esforços é que seria aplicado, até a

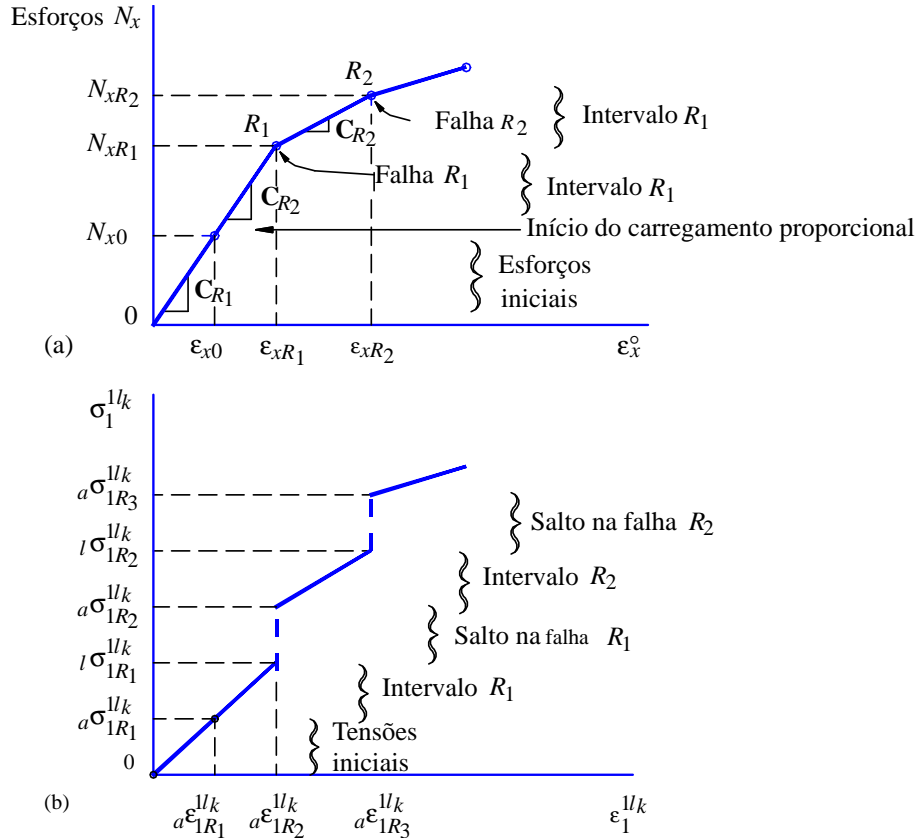


Figura 6.21: Diagramas esforços-deformação média e tensão-deformação numa lâmina, ilustrando esforços e tensões iniciais e saltos nas tensões. Na notação $a\sigma_{1R_i}^{lk}$ e $l\sigma_{1R_i}^{lk}$, o índice inferior 1 indica a componente de tensão na direção principal 1. Os índices à esquerda a e l indicam valores de tensão tomados no início e no final do intervalo de falha R_i . Como definido previamente, os índices superiores 1 e l_k indicam o sistema de eixos e o número da lâmina.

falha final, o carregamento variável, proporcional ao perfil $\{\bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{M}}\}$. Observe que os esforços iniciais não são necessariamente proporcionais a $\{\bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{M}}\}^T$, o que resulta num certo acréscimo de flexibilidade na forma de definir o histórico de carga imposto. O processo de cálculo é simples, como ilustrado na Figura 6.21. Os esforços e tensões iniciais nas lâminas devem apenas ser sobrepostos aos esforços e tensões proporcionais, até que a soma obtida atinja um valor crítico.

A Tabela 6.1 apresenta um fluxograma que detalha o processo completo de análise de resistência de um laminado.

Tabela 6.1 - Fluxograma de análise de resistência num ponto de um laminado.

1.	$\left\{ \begin{array}{l} \{\bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{M}}\}, \{\mathbf{N}_0, \mathbf{M}_0\}, \\ N \\ E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \\ X_t, X_c, Y_t, Y_c, S \end{array} \right\}$	Dados
2.	$R_i: \quad i = 1$	Contador de cargas de falha
3.	Do $k = 1, N$	Rigidez inicial
4.	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_{R_i}^k \longrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_{R_i}^k \longrightarrow \mathbf{C}_{R_i} \\ \left\{ \begin{array}{l} a\boldsymbol{\varepsilon}^o \\ a\boldsymbol{\kappa} \end{array} \right\}_{R_i} = \mathbf{C}_{R_i}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{M}_0 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$	Deformações no início do intervalo
5.	Do $k = 1, N$	Tensões e deformações iniciais
6.	$a\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{xlki} = a\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^o + z_i a\boldsymbol{\kappa}_{R_i}$	
7.	$a\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{xlki} = \bar{\mathbf{Q}}_{R_i}^k a\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{xlki}$	Tensões iniciais, direções xyz
8.	$a\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{llki} = \mathbf{T}_k a\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{xlki}$	Tensões iniciais, direções 123
9.	$a\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{llki} = \mathbf{T}_k^{-T} a\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{xlki}$	Deformações iniciais, direções 123
10. Início do cálculo nos intervalos de falha		
11.	Do $k = 1, N$	
12.	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^{xlki} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^o + z_i a\bar{\boldsymbol{\kappa}}_{R_i}$	Perfil de deformações (xyz)
13.	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^{llki} = \mathbf{T}_k^{-T} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^{xlki}$	Perfil de deformações (123)
14.	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}^{llki} = \mathbf{Q}_{R_i}^k \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^{llki}$	Perfil de tensões
15.	$l\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{llki} = a\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{llki} + C_{R_i}^{llki} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}^{llki}$	Tensões no limiar da falha R_i
16.	$C_{R_i}^{llki}$ e $C_{R_i}^{llks}$	Fatores nas superfícies inferior e superior
17.	$C_{R_i}^{llk} = \min\{C_{R_i}^{llki}, C_{R_i}^{llks}\}$	Menor fator na lâmina k
18.	$C_{R_i} = \min_{l_k} \{C_{R_i}^{ll1}, \dots, C_{R_i}^{llk}, \dots, C_{R_i}^{llN}\}$	Menor fator no laminado
19.	Se $C_{R_i} \leq 0 \longrightarrow$ Relatório, fim	Laminado não suporta acréscimo de carga
20.	Do $k = 1, N$	
21.	$l\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{llki} = a\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{llki} + C_{R_i} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}^{llki}$	Tensões no limiar da falha R_i para C_{R_i} dado
22.	$a\boldsymbol{\varepsilon}_{R_{i+1}}^{llki} = a\boldsymbol{\varepsilon}_{R_{i+1}}^{llki} + C_{R_i} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^{llki}$	Deformações no início do intervalo R_{i+1}
23.	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\}_{R_{i+1}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\}_{R_{i+1}} + C_{R_i} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{\mathbf{M}} \end{array} \right\}$	Esforços e deformações generalizadas

24. $\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^o \\ \kappa \end{array} \right\}_{R_{i+1}} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^o \\ \kappa \end{array} \right\}_{R_{i+1}} + C_{R_i} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\varepsilon}^o \\ \bar{\kappa} \end{array} \right\}$ no início do intervalo R_{i+1}
25. Se há lâminas restantes → **Relatório, fim**
26. $R_i: \quad i = 1$ Contador de cargas de falha
27. Do $k = 1, N$
28. $\mathbf{Q}_{R_i}^k \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_{R_i}^k \rightarrow \mathbf{C}_{R_i}$ Recálculo, com eliminação de lâminas
29. $\left\{ \begin{array}{c} \Delta \varepsilon_f^o \\ \Delta \kappa_f \end{array} \right\}_{R_i} = \mathbf{C}_{R_i}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\}_{R_i}$
30. Do $k = 1, N$ Corre apenas as lâminas remanescentes
31. $\Delta \varepsilon_{fR_i}^{xl_k i} = \Delta \varepsilon_{fR_i}^o + z_i \Delta \kappa_{fR_i}$ Direções xyz , superfície inferior da lâmina
32. ${}_a \sigma_{R_i}^{1l_k i} = \mathbf{Q}_{R_i}^k \mathbf{T}_k^{-T} \Delta \varepsilon_{fR_i}^{xl_k i}$ No início do intervalo R_i (direções 123)
33. **Ir para etapa 10**

Exemplo 7 – Curva carga-deformação de laminado angular

Considere um laminado de três lâminas idênticas orientadas a $[+15^\circ / -15^\circ / +15^\circ]$. Considere um corpo de provas desse material com dimensões $200 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$, testado num ensaio uniaxial de tração. Estime a curva carga *versus* deformação. Assuma que as lâminas falham pelo critério de Tsai-Hill e use o método de eliminação parcial de propriedades de lâminas. Estime a carga de fratura do laminado. As propriedades elásticas das lâminas são $E_1 = 53,74 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $E_2 = 17,91 \text{ GPa}$, $G_{12} = 8,967 \text{ GPa}$, enquanto as resistências são $X_t = 1.034 \text{ MPa}$, $X_c = 1.034 \text{ MPa}$, $Y_t = 27,6 \text{ MPa}$, $Y_c = 138 \text{ MPa}$ e $S = 41,3 \text{ MPa}$.

Solução:

O procedimento a ser seguido é aquele descrito no fluxograma da Tabela 6.1. A matriz \mathbf{Q}^k é idêntica para todas as lâminas e pode ser obtida da eq.(4.30), na página 79:

$$\mathbf{Q}^1 = \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}^3 = \begin{bmatrix} 54,89 & 4,574 & 0 \\ 4,574 & 18,30 & 0 \\ 0 & 0 & 8,967 \end{bmatrix} 10^3 \text{MPa}. \quad (6.77)$$

As matrizes de rigidez transformadas vêm das eqs.(4.51), na página 83:

$$\bar{\mathbf{Q}}^1 = \bar{\mathbf{Q}}^3 = \begin{bmatrix} 50,67 & 6,33 & 7,62 \\ 6,33 & 19,00 & 1,53 \\ 7,62 & 1,53 & 10,73 \end{bmatrix} 10^3 \text{MPa}, \quad (6.78)$$

enquanto $\bar{\mathbf{Q}}^2$ pode ser obtido de $\bar{\mathbf{Q}}^1$ simplesmente trocando os sinais dos termos 13 e 23.

a) Análise da falha inicial

A matriz \mathbf{A} é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 50,67 & 6,33 & 2,54 \\ & 19,00 & 0,5083 \\ \text{sim.} & & 10,73 \end{bmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Como o laminado é simétrico, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Então a partição $[\mathbf{A}']$ da matriz de flexibilidade é obtida de (6.34) simplesmente por $[\mathbf{A}'] = \mathbf{A}^{-1}$:

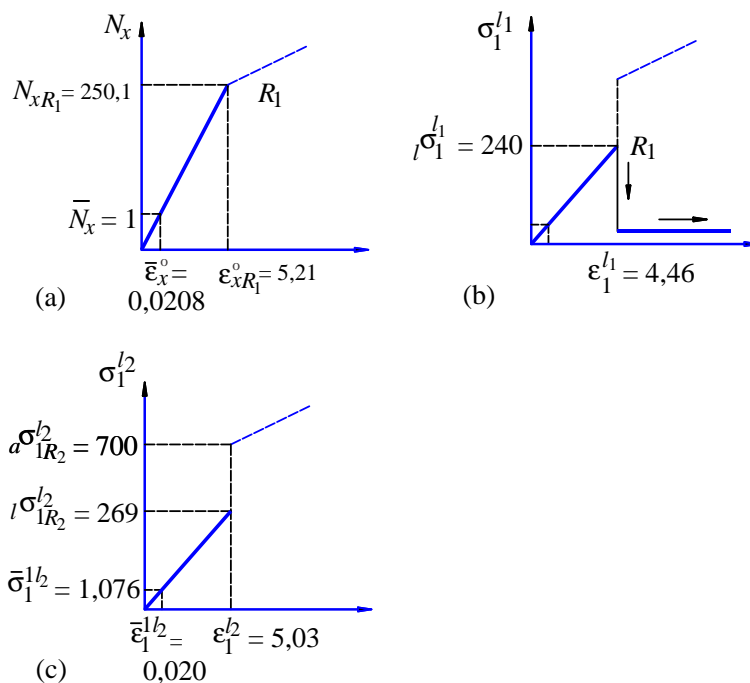


Figura 6.22: Evolução de esforços e tensões nas lâminas do Exemplo 7. Tensões em MPa, deformações multiplicadas por 10^{-3} , esforços em N/mm.

O maior valor é $\tau_{12}/S = 0,968$, o que indica que ocorreu o modo 3 de falha nas lâminas 1 e 3, isto é, falha por cisalhamento. O valor estimado da força aplicada para a primeira falha do laminado é: $N_{xR_1} = C_{R_1} \bar{N}_x = 250,1 \cdot 1 \text{ N/mm} = 250,1 \text{ N/mm}$, enquanto as deformações generalizadas são:

$$\epsilon_{R_1}^o = C_{R_1} \bar{\epsilon}_{R_1}^o = 250,1 \begin{Bmatrix} 20,82 \\ -6,820 \\ -4,609 \end{Bmatrix} 10^{-6} = \begin{Bmatrix} 5,207 \\ -1,706 \\ -1,15 \end{Bmatrix} 10^{-3}. \quad (6.87)$$

b) Análise da segunda falha

Uma vez que as lâminas 1 e 3 falharam pelo modo 3, todas as componentes de suas matrizes de rigidez $[Q]$ se anulam, conforme (6.64), isto é, para o próximo intervalo de carga faremos a eliminação total das lâminas impondo: $\mathbf{Q}^1 = \mathbf{Q}^3 = \bar{\mathbf{Q}}^1 = \bar{\mathbf{Q}}^3 = \mathbf{0}$. Temos agora o laminado composto apenas pela lâmina 2. A matriz $[A]$ do laminado no segundo intervalo de falha será simplesmente $\mathbf{A}_{R_2} = \bar{\mathbf{Q}}^2 h_2$, e sua inversa,

$$\mathbf{A}_{R_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 6,85 & -1,92 & 4,60 \\ & 16,5 & 0,988 \\ sim. & & 31,4 \end{bmatrix} 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{N}}.$$

O incremento fictício de deformação correspondente a \mathbf{N}_{R_1} é

$$\Delta \epsilon_f^o = \mathbf{A}_{R_2}^{-1} \begin{Bmatrix} 250,1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17,0 \\ -4,79 \\ 11,5 \end{Bmatrix} 10^{-3}.$$

O incremento de deformação fictícia nas lâminas nas direções xy é $\Delta \epsilon_f^{xl_2} = \Delta \epsilon_f^o$, uma vez que não há flexão. Fazendo a rotação para as direções principais calculamos as tensões na lâmina 2 logo no início do intervalo R_2 , quando ela tem que suportar sozinha todo o esforço N_{R_1} . Estas tensões são:

$${}_a \sigma_{R_2}^{1l_2} = \mathbf{Q}_{R_2}^{l_2} \mathbf{T}_{l_2}^{-T} \Delta \epsilon_f^{xl_2} = \begin{Bmatrix} 700,1 \\ 50,3 \\ 187,6 \end{Bmatrix} \text{MPa}.$$

pela falha da lâmina 2. No limiar da falha 1, isto é, no final do intervalo de carga R_1 , as tensões nas lâminas são:

$${}^l\sigma_{R_1}^{1l_1} = C_{R_1} \bar{\sigma}_{R_1}^{1l_1} = \begin{Bmatrix} 84,12 \\ 4,416 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \quad \text{e} \quad \{{}^l\sigma_{R_1}^{1l_2}\} = C_{R_1} \bar{\sigma}_{R_1}^{1l_2} = \begin{Bmatrix} -0,8832 \\ 27,59 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}.$$

Observe que a lâmina 2 tem tensão $\sigma_2 = 27,59$ MPa, que é bastante próxima da resistência transversal $Y_t = 27,6$ MPa. Ela falha então pelo modo 2, por separação entre as fibras. Para concluir os cálculos neste primeiro intervalo de falha, calculemos as deformações médias no momento da falha:

$$\varepsilon_{R_1}^o = C_{R_1} \bar{\varepsilon}_{R_1}^o = \begin{Bmatrix} 1,545 \\ -0,1448 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}.$$

b) Segundo intervalo de carga

A primeira tarefa neste ponto consiste em estimar as tensões nas lâminas no início do segundo intervalo, isto é, logo imediatamente após a primeira falha. Para isto usamos o método de eliminação parcial de propriedades na lâmina 2, ou seja, fazemos $Q_{22} = Q_{12} = Q_{66} = 0$. A matriz de rigidez do laminado fica então:

$$\mathbf{A}_{R_2} = \begin{bmatrix} 24,39 & 0,7623 & 0 \\ & 48,79 & 0 \\ \text{sim.} & & 1,494 \end{bmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{A}_{R_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 10,95 & -0,1710 & 0 \\ & 2,052 & 0 \\ \text{sim.} & & 66,91 \end{bmatrix} 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{N}}.$$

De (6.74), os incrementos de deformações fictícias são $\Delta\varepsilon_{fR_2}^o = \mathbf{A}_{R_2}^{-1} \mathbf{N}_{R_1}\} = \{405,23; -6,332; 0\}^T 10^{-3}$. De (6.76), as tensões nas lâminas logo após a primeira falha, no início do segundo intervalo, são:

$${}^a\sigma_{R_2}^{1l_1} = \mathbf{Q}_{R_2}^{l_1} \mathbf{T}_{l_1}^{-T} \Delta\varepsilon_f^o = \begin{Bmatrix} 222,1 \\ 17,38 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \quad \text{e} \quad {}^a\sigma_{R_2}^{1l_2} = \begin{Bmatrix} -3,475 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}.$$

Observe que a lâmina 2 encontra-se comprimida na direção 1. Isto ocorre porque as lâminas 1 e 3 estão tracionadas e o efeito de Poisson impõe uma contração na direção y do laminado, o que comprime a lâmina interna. Uma vez que a resina está fragmentada, ela não suporta tensões σ_2 e τ_{12} .

O perfil de esforços $\{\bar{N}\}$ impõe um perfil de deformações médias de $\{\bar{\varepsilon}_{R_2}^o = \mathbf{A}_{R_2}^{-1} \bar{N} = \{10,95; -0,1710; 0\}^T 10^{-5}$. Os perfis de tensão são

$$\bar{\sigma}_{R_2}^{1l_1} = \mathbf{Q}_{R_2}^{l_1} \mathbf{T}_{l_1}^{-T} \bar{\varepsilon}_{R_2}^o = \begin{Bmatrix} 6,000 \\ 0,469 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_{R_2}^{1l_2} = \begin{Bmatrix} -0,0939 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}.$$

Aplicamos o critério de Tsai-Hill a cada lâmina para obter os fatores de carga para as seguintes tensões:

$$\begin{aligned} \text{Lâmina 1} &\rightarrow {}^a\sigma_{R_2}^{1l_1} + C_{R_2}^{l_1} \bar{\sigma}_{R_2}^{1l_1}, \\ \text{Lâmina 2} &\rightarrow {}^a\sigma_{R_2}^{1l_2} + C_{R_2}^{l_2} \bar{\sigma}_{R_2}^{1l_2}. \end{aligned}$$

Os fatores obtidos são respectivamente $C_{R_2}^{l_1} = 18,86$ e $C_{R_2}^{l_2} = 10,978$. Usando o menor, $C_{R_2} = 18,86$, as tensões no limiar da segunda falha são

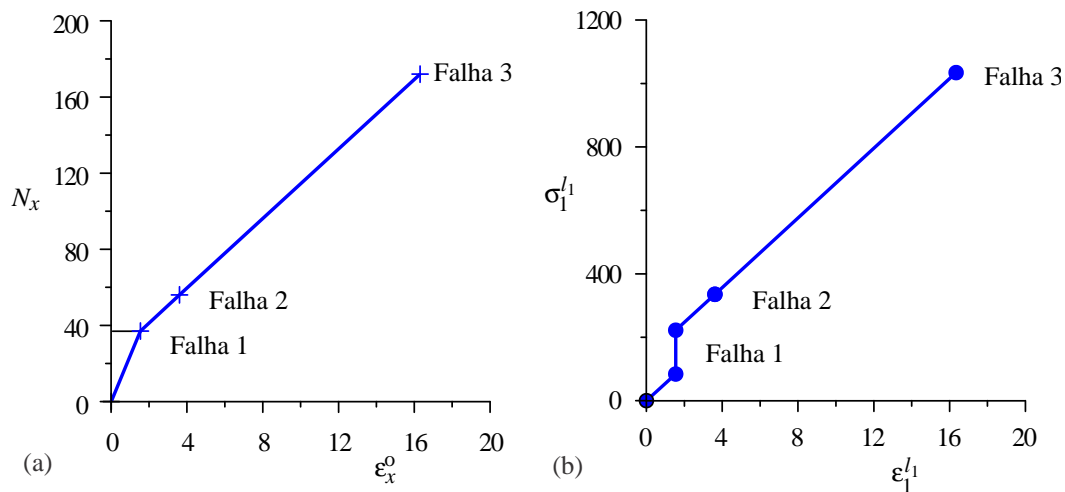


Figura 6.23: (a) Estimativa de curva esforços *versus* deformação generalizada no Exemplo 8. Esforços em N/mm e deformações multiplicadas por 10^{-3} . (b) Estimativa da curva σ_1 *versus* ϵ_1 na lâmina 1 nas direções principais, até a falha final do laminado. N_x em N/mm, σ_1 em MPa e ϵ_1 multiplicada por 10^{-3} .

Todo o processo físico de falhas de um laminado é na realidade muito mais complexo do que aquele que pode ser considerado nos cálculos algébricos simples que está incluído neste capítulo e resumido no fluxograma de cálculo da Tabela 6.1. Algumas das deficiências principais nestes procedimentos consistem em considerar um procedimento inteiramente local, associado unicamente ao que ocorre através da espessura, num ponto de coordenadas (x, y) . Adicionalmente, considera que no presente problema, da barra tracionada, o estado de tensões é completamente uniforme na direção transversal y . Na realidade, o processo físico ocorre com interações do material circundante, exigindo modelagem da microestrutura do material, determinando os gradientes necessários das variáveis.

Geralmente considera-se que laminados regulares angulares, como o do Exemplo 9, possuem apenas um intervalo de carga, e que laminados cruzados, como o do Exemplo 8, possuem apenas dois intervalos de carga. Seguindo o procedimento de cálculo apresentado, obtivemos um único intervalo no Exemplo 7 e três no Exemplo 8. Observando o gráfico da Figura 6.23, verificamos que a falha 2 ocorreu bastante próximo da falha inicial. Caso as duas falhas realmente ocorram separadamente, é difícil fazer sua identificação experimentalmente. Lembramos que nenhum modo de falha parcial ocorre de forma instantânea. Primeiramente, pequenas fissuras surgem, crescem e aumentam em número, de forma que às vezes é difícil indicar o momento preciso em que surgiram ou qual seu momento mais representativo.

O mesmo procedimento de cálculo usado no Exemplo 8 pode ser usado para outras relações entre as espessuras das lâminas. Lembramos que na eq.(6.28) foi definido o coeficiente M para laminados cruzados. Para três lâminas, sua definição é simplesmente $M = 2h_1/h_2$. No Exemplo 10 tínhamos, portanto, $M = 0,2$. Pode-se calcular as cargas de falha para outros fatores M , obtendo os resultados ilustrados na Figura 6.24. Ali encontramos os valores de esforços por unidade de espessura estimados para a falha inicial e para a falha final. Valores semelhantes são apresentados por Tsai [201].

6.5 Placas metálicas com *stiffeners* e grelhas metálicas

Até a década de 1940, antes, portanto, das fibras de alto desempenho, uma quantidade razoável de pesquisas em placas e cascas já era feita para os casos ortotrópicos, simétricos ou não. Na época, diversas motivações já existiam: estruturas em madeira e compensados, concreto reforçado e laminação de chapas de aço, entre outros. Um tipo bastante importante de painel metálico, desde o século XIX, é aquele constituído por placas metálicas (ou de qualquer outro material homogêneo-isotrópico), reforçadas em uma ou duas direções ortogonais com os chamados *stiffeners* ou nervuras. Dois tipos de reforços são considerados aqui, os ilustrados nas Figuras 6.25 e 6.26. Os conjuntos podem ser

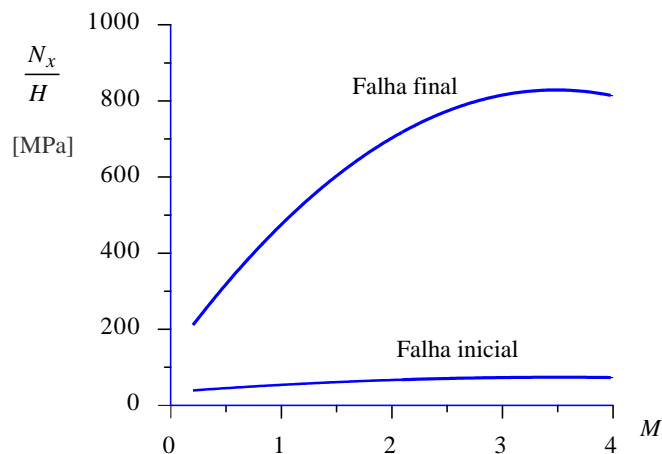


Figura 6.24: Resistência de laminados cruzados em termos do coeficiente M .

compostos por uma chapa, com uma série de barras soldadas longitudinalmente numa certa direção, ou ainda com um segundo conjunto de barras soldadas transversalmente formando uma grelha de malha retangular. As barras longitudinais, na direção x , e as transversais, na direção y , podem ter seções transversais idênticas ou diferentes. Em muitas aplicações prescinde-se da chapa e o painel é constituído apenas pela grelha metálica. O processo de construção não necessita ser necessariamente por solda. Dependendo do material, os processos são diversos: a peça pode ser construída em uma única operação por fundição ou forjamento para os painéis metálicos. Os painéis plásticos podem ser injetados ou moldados também em uma única operação. Painéis de madeira ou outros materiais podem ter os reforços colados. De fato, mesmo estruturas metálicas podem ser construídas por cola, resultando num processo muito mais eficiente de transmissão de esforços que com o uso de pinos, parafusos ou outras formas pontuais de união.

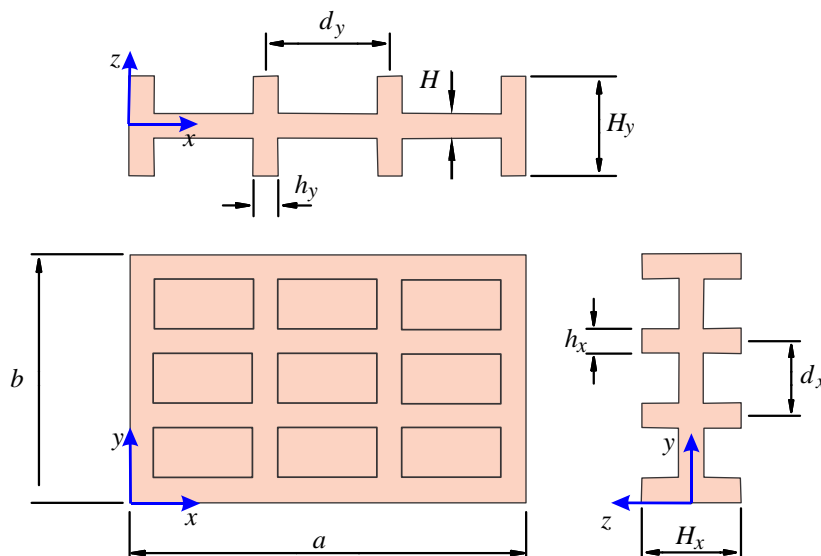


Figura 6.25: Placa metálica reforçada com *stiffeners* em duas direções ortogonais. Configuração simétrica.

Dois tipos de painéis são considerados. O da Figura 6.25 é simétrico e o da Figura 6.26, assimétrico. Em ambos os casos, porém, eles são ortotrópicos. **O objetivo aqui consiste em definir procedimentos para a estimativa dos termos das matrizes constitutivas A , B e D** para o painel. Conhecidas essas matrizes, a princípio podem-se usar todas as formulações e soluções desenvolvidas para placas ortotrópicas, apresentadas na Parte II do livro.

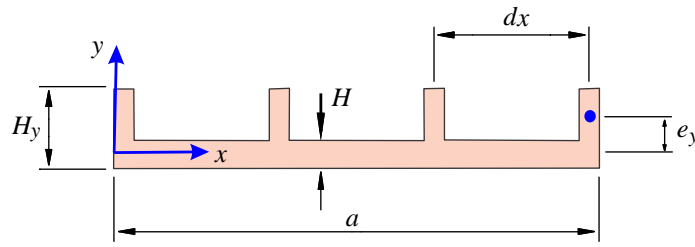


Figura 6.26: Placa metálica reforçada com *stiffeners* em duas direções ortogonais. Configuração assimétrica.

termos de rigidez do caso simétrico, eqs.(6.88) e (6.89), aplicam-se também neste caso, adicionados dos termos de \mathbf{B} dados por [36]:

$$\boxed{B_{11} = e_x \frac{EA_x}{d_x}, \quad B_{22} = -e_y \frac{EA_y}{d_y}} \quad (6.93)$$

onde os novos termos são:

- I_x, I_y – momentos de inércia das barras em relação à superfície média da chapa.
- e_x, e_y – distância do centróide das barras à superfície média da chapa. Para o caso de cilindro, as distâncias são positivas para fora.

Os demais termos são nulos e a notação é idêntica ao caso simétrico. Para o caso de casca cilíndrica basta substituir os índices x e y por x e s , medidos nas direções axial e tangencial, respectivamente.

6.6 Exercícios

6.1 Deduza as eqs.(6.19) a partir de (6.16) e (6.17).

6.2 Deduza (6.20) a partir de (6.19).

6.3 Considere um laminado com duas lâminas idênticas em propriedades elásticas e espessuras, orientadas em $[0^\circ/90^\circ]$. Mostre que $N_x = A_{11} \varepsilon_x^o + A_{12} \varepsilon_y^o + B_{11} \kappa_x$ e $M_x = B_{11} \varepsilon_x^o + D_{11} \varepsilon_y^o + D_{12} \kappa_y$. Deduza as expressões para os valores de rigidez.

6.4 Prove que a rigidez B_{ij} é zero para laminados simétricos.

6.5 Prove que $\mathbf{G}' = \mathbf{B}'^T$ na eq.(6.34).

6.6 Tome o laminado bimetal do Exemplo 6.3 submetido a um momento fletor $M_x = 1,0\text{ N}$ e os outros esforços nulos. Obtenha e plote a função de deflexão $w(x, y)$.

6.7 Um laminado angular simétrico, com lâminas idênticas orientadas a $[\pm\theta]_s$, é submetido a um esforço axial N_x .

a) Mostre que as tensões nas direções principais nas lâminas são ($s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$):

$$\begin{aligned} \sigma_1|_{\theta} &= \sigma_1|_{-\theta} = \sigma_x c^2 + \sigma_y s^2 + 2\tau_{xy} s c, \\ \sigma_2|_{\theta} &= \sigma_2|_{-\theta} = \sigma_x s^2 + \sigma_y c^2 - 2\tau_{xy} s c, \\ \tau_{12}|_{\theta} &= -\tau_{12}|_{-\theta} = -\sigma_x s c + \sigma_y s c + \tau_{xy} (c^2 - s^2). \end{aligned}$$

b) Mostre a origem e explique o significado de τ_{xy} .

- b) Calcule e plote ao longo de z as tensões e deformações principais nas lâminas.
- c) Use o critério de Tsai-Hill e obtenha o perfil de cargas para as falhas inicial e final do laminado. Use as resistências do Exemplo 6.9, página 156.
- 6.16 Construa e use um programa computacional para resolver o Exemplo 6.7 para o laminado com $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$.
- 6.17 Deduza a equação (6.72) para o critério de falha de Tsai-Wu.
- 6.18 Mostre que as matrizes de flexibilidade do laminado, eq.(6.34), obtidas pela inversão das submatrizes de rigidez (6.21), podem ser obtidas pelas seguintes operações:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{C}^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{B}^{*T}, & \mathbf{D}' &= \mathbf{D}^{*-1}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} = -\mathbf{D}^{*-1} \mathbf{C}^* \end{aligned}$$

onde $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^* = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{B}^{*T}$, $\mathbf{D}^* = \mathbf{D} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$. (Isto significa que a inversão de \mathbf{C} é obtida realizando

apenas três inversões de matrizes 3×3 .

- 6.19 Considere um piso de passarela industrial constituído por painéis retangulares de dimensões $a \times b = 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$. Cada painel é composto por uma placa de espessura constante $H = 6,0 \text{ mm}$, reforçada por uma grelha metálica simétrica. Cada painel é simplesmente apoiado pelas duas extremidades mais distantes, formando um vão de comprimento a , e é submetido a uma carga distribuída uniforme q . Determine a máxima carga distribuída que pode ser aplicada a um painel. Caso a carga requerida seja de 300 kgf/m^2 , que modificações você faria para adequar o projeto? Os parâmetros geométricos da grelha são os seguintes:

$$\begin{aligned} d_x &= 100 \text{ mm}, & h_x &= 3,0 \text{ mm}, & H_x &= 20,0 \text{ mm}, \\ d_y &= 150 \text{ mm}, & h_y &= 3,0 \text{ mm}, & H_y &= 30,0 \text{ mm}. \end{aligned}$$

- 6.20 Considere um vaso de pressão bobinado em camadas orientadas com ângulos $\theta = \pm 54,74^\circ$. Considere que o processo de bobinamento produz um composto uniforme com 70% de fibra em volume. Usa-se vidro/epóxi com as seguintes características:

Vidro	Epóxi
$\rho_f = 2.500 \text{ kg/m}^3$,	$\rho_m = 2.500 \text{ kg/m}^3$,
$E_f = 72.000 \text{ MPa}$,	$E_m = 3.500 \text{ MPa}$,
$\sigma_{Rf} = 1.700 \text{ MPa}$,	$\sigma_{Rm} = 45 \text{ MPa}$,

e $\nu_f = \nu_m = 0,3$. O raio médio R do cilindro é 400 mm e cada camada tem $h = 0,2 \text{ mm}$ de espessura. A pressão interna aplicada é de $p = 5 \text{ atm}$ ($1 \text{ atm} = 9,81 \text{ N/cm}^2$). Determine o número de camadas mínimo necessário, N , e a espessura H total da parede. Considere que, na parte cilíndrica, os esforços na parede são dados por $N_{circ} = 2N_{long} = pR$, onde *circ* e *long* se referem às direções circunferencial e longitudinal, respectivamente. (Dica: primeiro, estime as propriedades de uma lâmina unidirecional usando as fórmulas de micromecânica. Em seguida, verifique o fator de carga para um laminado unitário constituído por apenas quatro lâminas orientadas a $[+\theta/-\theta/-\theta/+\theta]$. Finalmente divida por quatro o número calculado, obtendo assim a quantidade necessária de lâminas. Explique o que justifica este procedimento.)