

Resistência dos Materiais e
fundamentos da Mecânica dos Sólidos

Dados para contato com os autores:
Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.,
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Engenharia Mecânica
paulo.tarso@ufsc.br
CP 476 - Florianópolis, SC - 88040-900

Resistência dos Materiais e
Fundamentos de Mecânica dos Sólidos

Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.



Copyright © 2021 Editora Orsa Maggiore.

Projeto gráfico, ilustrações: Paulo de Tarso R. Mendonça
Editoração eletrônica: Paulo de Tarso R. Mendonça
Capa: Maria Elisa Ramos

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M539r Mendonça, Paulo de Tarso R.,
Resistência dos Materiais e
Fundamentos da Mecânica dos Sólidos / Paulo de Tarso R. Mendonça,
Florianópolis, SC : Orsa Maggiore, 2021.
651 p.: il., tabs., gráfs.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-65-993681-1-0

1. Engenharia mecânica. 2. Engenharia civil. 3. Análise estrutural (Engenharia).
4. Resistência dos Materiais. 5. Projeto estrutural.
I. Título.

CDD-620.105

Índices para catálogo sistemático:

1. Resistência dos Materiais e
Fundamentos da Mecânica dos Sólidos: Engenharia civil 620.1

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão expressa dos editores. É proibida a reprodução por xerox.

1ª edição - 2021

Direitos adquiridos pela:
Editora Orsa Maggiore.
www.EditoraOrsaMaggiore.com.br

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Sobre o autor

O prof. Paulo de Tarso possui graduação em Engenharia Mecânica pela Universidade de Brasília (1980), mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina (1983) e doutorado em Engenharia Mecânica no Departamento de Engenharia Aeroespacial da Universidade de Minnesota (1995). No período de 2012/2013 realizou atividades de pesquisa no *Laboratoire de Mécanique et Technologie* da *École Normale Supérieure de Cachan*, França, na área de estimativa *a-posteriori* de erros em modelos numéricos. Desde 1984 trabalha na Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, onde atualmente é Professor Titular. Concentra suas atividades na área de Mecânica dos Sólidos Computacional, atuando principalmente nos seguintes temas: desenvolvimento do método de elementos finitos, com ênfase em elementos finitos generalizados, modelagem do comportamento de componentes mecânicos de materiais compostos e estimativa de erros de modelagem e de modelo.

Outras publicações da editora

1. *Materiais compostos e Estruturas sanduíche - Projeto e análise*, (impresso e digital), Mendonça, 2019
2. *O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos*, (impresso e digital), Mendonça e Fancello, 2019
3. *800 problemas resolvidos de Mecânica dos Sólidos, propostos no livro Resistência dos Materiais e Fundamentos de Mecânica dos Sólidos* (digital), Mendonça, 2021.

Sumário

Palavra aos Professores	ix
Resumo de fórmulas	xiii
1 A mecânica dos sólidos na engenharia	1
2 Esforços internos	9
3 Tensões	67
4 Deformações e tensões	93
5 Transformação de tensões e deformações	169
6 Modos e critérios de falha e aplicações	213
7 Torção em eixos de seção circular	243
8 Flexão plana em vigas retas	277
9 Cisalhamento em vigas sob flexão	311
10 Carregamentos combinados	343
11 * Aplicações de elasticidade e plasticidade plana	375
12 Deflexão de vigas	425
13 Estabilidade de colunas	465
14 Métodos de energia	369
15 Elementos finitos para barras e treliças	543
16 Elementos finitos para vigas	573
17 Apêndices	617
Bibliografia	633

Conteúdo

Palavra aos professores	xiii
Resumo de fórmulas	xvii
1 A mecânica dos sólidos na engenharia	1
1.1 Processo geral de análise mecânica de corpos sólidos	1
1.2 Tipos de componentes estruturais	5
2 Esforços internos	9
2.1 Equilíbrio de um corpo e reações de apoio	9
2.1.1 Tipos de apoios em vigas	11
2.2 Esforços internos em barras e vigas	16
2.3 Ideias preliminares sobre tensões	18
2.3.1 Um tratamento mais rigoroso	20
2.4 Caso geral de esforços em vigas	23
2.5 Equações diferenciais de equilíbrio de viga em flexão e tração	36
2.5.1 Dedução simplificada	37
2.5.2 Dedução detalhada para flexão	39
2.5.3 Usos das equações diferenciais de equilíbrio e equilíbrio para forças concentradas	42
2.6 Sistemas de coordenadas locais	50
2.7 Exemplos adicionais	55
2.8 Exercícios	61
3 Tensões	67
3.1 Alguns aspectos sobre tensões	69
3.2 Tensor tensão	70
3.3 Equações diferenciais de equilíbrio	73
3.4 Alguns problemas reais resolvidos por tensões médias	76
3.4.1 Tensões normal e cisalhante médias	77
3.4.2 Modos de falhas e tensões admissíveis	80
3.4.3 Usos da tensão cisalhante média - Pinos e chapas coladas	85
4 Deformações e tensões	93
4.1 Ideias básicas de deslocamento e deformação	93
4.2 Campos de deslocamento e de deformações	94
4.2.1 Hipóteses cinemáticas	98
4.3 Efeito de Poisson	99
4.4 Casos clássicos de campos cinemáticos	103
4.5 Ensaio de tração - diagrama tensão-deformação	106
4.5.1 Procedimento geral do ensaio	107
4.5.2 Comportamentos elástico e plástico do material	109
4.5.3 Tensão de ruptura, de fratura e alongamento máximo	111
4.5.4 Materiais frágeis e dúcteis	113
4.6 Princípio de Sobreposição dos Efeitos	114

4.7	Relação tensão-deformação triaxial - Lei de Hooke	115
4.7.1	Deformações térmicas	120
4.7.2	Experimentação das propriedades elásticas	125
4.7.3	Estado Plano de Tensões	126
4.8	Equações gerais de mecânica dos sólidos	129
4.9	O problema de barras sob carga axial	130
4.9.1	Barra uniforme sob carga concentrada	135
4.9.2	Problemas hiperestáticos	145
4.10	Princípio de Saint-Venant e concentração de tensões	157
4.10.1	Concentradores de tensão	158
4.11	Exercícios	162
5	Transformação de tensões e deformações	169
5.1	Aspectos qualitativos de transformação de tensões	169
5.2	Transformação plana do EPT	172
5.3	Tensões principais e cisalhamento máximo no plano	177
5.3.1	Determinação dos ângulos na função arco tangente	178
5.3.2	Tensões cisalhantes máximas	179
5.4	Círculo de Mohr para rotação plana de EPT	182
5.5	Processo de construção do círculo de Mohr plano	186
5.6	Tensões principais num estado triaxial de tensões	189
5.6.1	Quando o cisalhamento ocorre num único plano	192
5.6.2	Rotação das tensões principais	194
5.6.3	Círculos de Mohr de estado triaxial de tensões	195
5.6.4	Tensão cisalhante máxima absoluta.	195
5.7	Transformação de deformações em estado plano	197
5.7.1	Aspectos gerais de transformação de deformações	199
5.7.2	Equação de transformação plana de EPD	200
5.7.3	Comentários adicionais	205
5.8	Extensômetros e rosetas	206
5.9	Exercícios	207
6	Modos e critérios de falha e aplicações	213
6.1	Modos de falha	213
6.2	O problema fundamental dos critérios de falha	218
6.3	Teoria da máxima tensão normal - TMTN	220
6.4	Teoria da máxima tensão cisalhante - TMTC	221
6.5	Teoria da máxima energia de distorção - von Mises	223
6.6	Vasos de pressão cilíndricos de paredes finas	228
6.6.1	Vasos de pressão esféricos	233
6.6.2	Observações e limitações nas fórmulas	234
6.6.3	Variação do diâmetro devido à pressurização	236
6.7	Exercícios	239
7	Torção em eixos de seção circular	243
7.1	Hipóteses cinemáticas	244
7.2	Transmissão de potência	245
7.3	Diagramas de esforços de torção	246
7.4	Fórmula de torção	248
7.4.1	Seções maciças e tubulares – Momento polar e tensão máxima	252
7.4.2	Dimensionamento	256
7.5	Concentração de tensões em torção	258
7.6	Ângulo de torção	260
7.6.1	Problemas hiperestáticos de torção	264

7.7	Exemplos adicionais	266
7.8	Exercícios	270
8	Flexão plana em vigas retas	277
8.1	Teoria de flexão de vigas	277
8.2	Fórmula de Flexão	281
8.2.1	Equilíbrio de forças em x e a linha neutra	281
8.2.2	Momentos em z e fórmula de flexão	281
8.2.3	Coeficiente de segurança e critério de falha	282
8.2.4	Momentos em y e direções principais de inércia	283
8.2.5	Momento estático de inércia e determinação do centroide	283
8.3	2º momento de inércia - casos básicos - seção retangular	285
8.3.1	Momentos de inércia de seção circular e tubular	287
8.4	Teorema dos Eixos Paralelos para momento de inércia I_{ZZ}	288
8.5	Alguns exemplos	289
8.6	* Vigas compostas por dois ou mais materiais	294
8.6.1	Linha neutra	295
8.6.2	Tensão normal	297
8.7	Exercícios	304
9	Cisalhamento em vigas sob flexão	311
9.1	Efeitos do esforço cortante	311
9.2	Fluxo de cisalhamento e tensão cisalhante	314
9.2.1	Tensão cisalhante	316
9.3	Casos particulares	317
9.3.1	Seção retangular	317
9.3.2	Distribuição real de tensões cisalhantes na seção retangular	318
9.3.3	Seção circular	319
9.3.4	Limitações da teoria em perfil I	322
9.3.5	Fórmula aproximada para τ_{\max} em perfis I e T	323
9.4	Fluxo de cisalhamento em perfis de paredes finas	323
9.5	Vigas formadas pela união de barras finas	326
9.6	Tensões combinadas - efeitos do momento fletor e cortante	328
9.7	Tensões combinadas - torção e cortante em vigas	333
9.8	Centro de torção e perfis abertos não simétricos	334
9.9	Exercícios	337
10	Carregamentos combinados	343
10.1	Carregamento combinado - torção e tração	344
10.2	Carregamento oblíquo - flexão não plana elástica	346
10.2.1	Fórmula de flexão oblíqua	347
10.2.2	Linha neutra	349
10.3	Flexão oblíqua com carregamento axial	352
10.4	Propriedades geométricas de uma seção	357
10.4.1	Momentos estáticos e centroide de uma seção assimétrica	357
10.4.2	Momentos de inércia da seção assimétrica	358
10.4.3	Teorema dos Eixos Paralelos para momentos de inércia	359
10.4.4	Rotação de eixos - Eixos Principais de Inércia	360
10.5	Flexão em viga de seção assimétrica	362
10.6	Carregamento combinado - tração, flexão e torção	365
10.7	Exercícios	368
11	* Aplicações de elasticidade e plasticidade plana	375
11.1	Equações gerais em coordenadas cartesianas e polares	375

11.2	Problemas axisimétricos: disco e cilindro pressurizado	378
11.2.1	Barra e disco sem furo	380
11.2.2	Tubo pressurizado de parede espessa e disco	380
11.2.3	Limite para Casca Fina	385
11.3	Plastificação num cilindro de parede espessa	386
11.3.1	Pressão para início de plastificação	386
11.3.2	Pressão para plastificação total da parede	387
11.3.3	Plastificação parcial da parede	388
11.3.4	Exemplo 11.2 - Pressões máximas em cilindro de parede espessa	389
11.4	Furo circular em placa sob tração	391
11.5	Fator de concentração de tensões	396
11.6	Torção em barras de seção não circular	396
11.6.1	Analogia da membrana	402
11.6.2	Barra de seção aberta delgada	403
11.6.3	Barra de seção retangular	407
11.6.4	Tubos de parede delgada	408
11.7	Vigas curvas	410
11.8	Exercícios	420
12	Deflexão de vigas	425
12.1	Equação diferencial de linha elástica	428
12.1.1	Dedução curta da equação diferencial da curva elástica	431
12.2	Integração de curva elástica e condições de contorno	432
12.2.1	Exemplo 12.1 – Viga biapoiada sob carga distribuída	435
12.2.2	Exemplo 12.2 – Uso da equação diferencial de 4ª ordem	437
12.2.3	Exemplo 12.3 – Viga biapoiada sob carga concentrada	438
12.3	Método de integração para vigas hiperestáticas	441
12.3.1	Exemplo 12.4 – Integração em viga hiperestática	441
12.3.2	Exemplo 12.5 – Carga concentrada em viga hiperestática	443
12.3.3	Exemplo 12.6 – Condição de simetria	447
12.4	O Método de sobreposição para flexão de vigas	448
12.4.1	Exemplo 12.7 – Um vão, método de sobreposição	451
12.5	O método de multicorpos	453
12.5.1	Exemplo 12.8 - Aplicação do método de multicorpos	454
12.6	Problemas diversos	455
12.6.1	Exemplo 12.9 - Montagem de conjunto viga-mola com deformação inicial	455
12.6.2	Exemplo 12.10 - Conjunto viga-mola sob deformação inicial	456
12.6.3	Exemplo 12.11 - Viga e mola flexural	458
12.7	Exercícios	459
13	Estabilidade de colunas	465
13.0.1	Exemplo 13.2 - “Snap-through” em barras no plano	469
13.1	Equação diferencial para viga-coluna	472
13.1.1	Solução da equação homogênea	474
13.1.2	Exemplo 13.3 - Carga de flambagem em barra bi-rotulada	475
13.1.3	Exemplo 13.4 - Carga de flambagem em barra bi-engastada	477
13.1.4	Outra abordagem do problema de flambagem de barras bi-rotuladas	479
13.1.5	Caso 13.5 - Carga de flambagem de barra engastada-livre	479
13.1.6	Exemplo 13.6 - Carga de flambagem de barra engastada-rotulada	482
13.1.7	Resumo dos casos	483
13.2	Excentricidade - fórmula da secante	485
13.2.1	Escoamento	488
13.3	Cálculo normalizado - colunas sob carga centrada	491
13.4	Enrijecimento por tração	496

13.4.1	Solução da equação homogênea	497
13.4.2	Exemplo 13.12 - Enrijecimento em viga bi-rotulada	497
13.5	Exercícios	499
14	Métodos de energia	509
14.1	Trabalho de deformação	510
14.1.1	Trabalho de deformação para estado uniaxial de tensão	510
14.1.2	Trabalho de deformação para o caso de cisalhamento puro	512
14.1.3	Trabalho de deformação para estado multiaxial de tensões	513
14.2	Energia de deformação elástica	513
14.2.1	Energia de deformação elástica de uma barra sob esforço normal	513
14.2.2	Energia de deformação para o problema de flexão	514
14.2.3	Energia de deformação para torção de eixos de seção circular	515
14.2.4	Energia de deformação devido ao esforço cortante	515
14.3	Deslocamento pelo método da energia	516
14.3.1	Exemplo 14.1 - Deslocamento em uma barra	516
14.3.2	Exemplo 14.2 - Calcular deslocamentos axiais numa barra	517
14.3.3	Exemplo 14.3 - Deslocamento máximo em viga em balanço	518
14.4	Teoremas de Castigliano	520
14.4.1	Exemplo 4 - Deflexão em uma barra com duas forças	522
14.4.2	Exemplo 5 - Deflexão onde não ha força aplicada	522
14.4.3	Exemplo 14.6 - Treliça simples de duas barras	524
14.4.4	Exemplo 14.7 - Problema hiperestático pelo 2º Teorema de Castigliano	526
14.4.5	Exemplo 14.8 - Estrutura plana - flexão e torção	528
14.4.6	Exemplo 14.9 - Estrutura plana - flexão e torção	529
14.4.7	Exemplo 14.10 - Pórtico plano - flexão plana	530
14.4.8	Exemplo 14.11 - Viga curva delgada - Arco sob flexão plana	532
14.4.9	Exemplo 14.12 - Viga curva delgada hiperestática	533
14.4.10	Exemplo 14.13 - Viga com mola flexural	534
14.4.11	Exemplo 14.14 - Viga com apoio em mola	535
14.5	Exercícios	537
15	Elementos finitos para barras e treliças	543
15.1	Interpolação dos deslocamentos	545
15.1.1	Interpretação das funções de interpolação lineares	548
15.1.2	Determinação da matriz de rigidez do elemento finito de barra	548
15.2	Matriz de rigidez de um elemento rotacionado no plano xy	552
15.3	Matriz de rigidez de um sistema de barras	555
15.3.1	Fase de pré-processamento de dados	555
15.3.2	Fase de processamento	558
15.3.3	Etapa 2 - Sobreposição da matriz de rigidez global	561
15.3.4	Etapa 3 - Definição do vetor de carregamento nodal	562
15.3.5	Etapa 4 - Aplicações das condições de contorno	563
15.3.6	Pós-processamento	565
15.4	Exercícios	569
16	Elementos finitos para vigas	573
16.1	Funções de forma	573
16.2	Equilíbrio do elemento de viga	576
16.2.1	Dedução 1 - Rigidez do elemento via Teorema de Castigliano	577
16.2.2	Dedução 2 - Rigidez do elemento via método da rigidez	578
16.3	Análise de vigas no plano	582
16.3.1	Exemplo 16.1 - Pórtico plano	586
16.4	Esforços e tensões nos elementos em problemas planos	589

16.4.1	Exemplo 16.2 - Esforços e tensões	590
16.4.2	Exemplo 16.3 - Viga escalonada	593
16.4.3	Exemplo 16.4 - Viga com seção uniforme	600
16.4.4	Exemplo 16.5 - Aplicação de deslocamento prescrito	601
16.5	Carga distribuída no elemento	603
16.5.1	Rotação do vetor força para uso em elementos inclinados	604
16.5.2	Exemplo 16.6 - Viga sob carga distribuída	605
16.5.3	Exemplo 16.7 - Pórtico sob carga distribuída	609
16.6	Exercícios	612
16.6.1	Exercícios conceituais	612
16.6.2	Exercícios numéricos	612
17	Apêndices	617
17.1	Fórmulas para vigas	617
17.2	Solução de equações diferenciais ordinárias de 2 ^a ordem	620
17.2.1	Solução particular	622
17.3	Fatores de concentração de tensões	623
17.4	Solução de exercícios selecionados	625
	Bibliografia	633

Palavra aos Professores

Todos os livros textos de Resistência dos Materiais conhecidos, tanto os traduzidos quanto os produzidos no Brasil, seguem uma lista mais ou menos padrão de tópicos que caracteriza a área. Cada um dos tópicos é desenvolvido através de diversos “métodos” de cálculo. Todo esse material é, de certa forma, derivado do texto fundamental de Timoshenko, que tem seus primeiros manuscritos originados nos anos 1920, escritos ainda na Rússia.

Embora muitos dos tópicos sejam praticamente mandatórios, os métodos de cálculos que os materializam necessitam periodicamente ser modernizados ou substituídos por outros mais eficientes. Por exemplo, uma das características marcantes de livros produzidos nos anos 1940-1960 era a ênfase em procedimentos gráficos, em que o engenheiro produzia diagramas de esforços e curvas elásticas trabalhando com desenhos em escala, onde realizava, graficamente, as operações de diferenciação e integração. Com o advento das calculadoras eletrônicas nos anos 1970, a ênfase nesses processos gráficos foi bastante reduzida, como pode ser verificado nos livros hoje em circulação. Entretanto, nos livros atuais ainda se nota claramente uma filosofia geral de operação baseada num mundo pré-computador. Existe uma profusão enorme de métodos para realizar uma mesma operação. Por exemplo, para obter o deslocamento ou rotação numa seção de um eixo, são desenvolvidos os métodos de integração direta, de sobreposição, de área de momento, se a viga for isostática. Se a viga for hiperestática, cada um desses métodos se desdobra em variações adequadas. O elenco ainda segue com equilíbrio de energia, com o segundo teorema de Castigliano, com o princípio do trabalho virtual e com funções de singularidade. Conquanto a apresentação de diversos desses métodos seja útil em diversas situações, de fato, o aluno não dispõe de amadurecimento suficiente para adquirir destreza de uso em mais que dois ou três deles.

Com vistas nisso, torna-se clara a necessidade de, sumariamente, remover alguns desses métodos dos materiais didáticos utilizados em disciplinas obrigatórias nos currículos. Outros, embora ainda devam ser mantidos no texto escrito, devem ter seu uso judiciosamente selecionado, pelo professor e pela instituição, da forma mais adequada às características do curso.

No aspecto da modernização do material, a introdução do uso do computador é crucial. Esse uso é feito de diversas formas. Mesmo nos métodos tradicionais, como o método de integração para a curva elástica de vigas, o computador pode ser usado. Nota-se que a aplicabilidade desse método sempre foi tradicionalmente limitada a vigas de poucos vãos, uma vez que cada vão implica em duas ou quatro constantes de integração incógnitas a serem resolvidas por um sistema de equações algébricas. A forma como isso é feito nos livros disponíveis é através de um trabalho manual de substituição de uma equação na outra até a determinação de todas as constantes. Obviamente, hoje isso pode ser feito sem limitação, simplesmente definindo um sistema algébrico de equação através de um matriz coeficiente, que pode ser imediatamente resolvido em computador e até mesmo em calculadoras de bolso. Esse é o procedimento adotado nos exemplos do presente texto.

A segunda forma de aplicação computacional é feita com a introdução direta ao **Método de Elementos Finitos**. Esse método, por ter capacidade de análise de estruturas com forma, carregamento e apoios arbitrários, permite a remoção de certos métodos tradicionais. Sem dúvida que esse método tem uma fundamentação demasiado complexa para o tempo disponível numa disciplina introdutória, e também para o grau de amadurecimento dos alunos envolvidos. Entretanto, isso é contornado no presente livro com o uso da estratégia tradicionalmente denominada “método de análise matricial de estruturas”. Com isso introduz-se o método de elementos finitos usando ideias mecânicas intuitivas já dominadas pelo aluno nesse estágio, isso é, as ideias sobre o comportamento

de uma barra ou viga. Essa estratégia tem sido aplicada com sucesso nas disciplinas oferecidas aos cursos de Engenharias Mecânica e Produção Mecânica pelo Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC, desde 1996. O material incluído, apesar de resumido, é autossuficiente para as necessidades normais do engenheiro, no sentido de permitir que ele realize todas as tarefas de cálculo de estruturas de barras e vigas que tradicionalmente eram realizadas pelos diversos métodos tradicionais, além de permiti-lo trabalhar com treliças e pórticos bastante mais complexos que aqueles anteriormente possíveis de serem tratados por cálculo manual. Mesmo as tarefas necessárias durante as disciplinas que têm esta como pré-requisito, como as de Estabilidade em engenharia civil, de Fadiga e de Elementos de Máquinas em Engenharia Mecânica, podem ser normalmente realizadas com as ferramentas de elementos finitos vistas nesse curso.

O aprofundamento do método de elementos finitos, em sua aplicação a elementos estruturais como placas, estados planos de tensão e deformação, e problemas sólidos, deve ser deixado para um segundo curso no currículo. Nesse caso, torna-se necessário o uso de um material adequado, como o livro *O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos*, em coautoria com o Prof. Eduardo A. Fancello, do EMC/UFSC. Ali, em seus capítulos iniciais, o método é apresentado de forma consistente, a partir de sua fundamentação no princípio dos trabalhos virtuais, de forma adaptada ao ensino de graduação.

Sem dúvida que quase todos os materiais didáticos incluem as definições e **equações gerais da Mecânica dos Sólidos** em problemas estático-lineares triaxiais: as componentes do tensor tensão, do tensor deformação, as relações deformação-deslocamento, as equações diferenciais de equilíbrio local, a lei de Hooke generalizada, as transformações de tensões e alguns critérios de falha. Entretanto, em sala de aula, o que se observa é que, embora se deduza e apresente os conceitos e relações gerais, tridimensionais, todos os tópicos realmente desenvolvidos e exemplificados, de fato, se restringem a estados uniaxiais de tensão: barra, viga sob momento plano e oblíquo e barra sob torção. Então, observa-se que o aluno nunca tem nenhum contato real com situações tridimensionais. De fato, quando ele conclui a disciplina, termina com a sensação de que Mecânica dos Sólidos se resume a um conjunto de 6 a 8 equações algébricas muito simples que resolvem problemas de barra e viga (fórmula de flexão, de torção, etc.), deduzidas de forma independente uma da outra. Isso o desestimula no prosseguimento de estudos avançados na área e, de fato, o limita no aprendizado da análise estrutural e da elasticidade, e de métodos modernos de análise como o de Elementos Finitos. Assim, uma preocupação do presente curso é que, além de ocupar a parte principal do texto com os componentes básicos necessários, barras e vigas, busca-se apresentar material auxiliar de problemas mais complexos visando ampliar a visão do estudante e inspirar estudos mais avançados na área. Assim, o problema de análise de tensões em tubos cilíndricos pressurizados de paredes delgadas é detalhado, e utilizado como caso de problema de estado biaxial de tensões, com aplicação de transformação de tensão e critérios de falha. Também, as equações gerais da mecânica dos sólidos são aplicadas ao caso do **tubo pressurizado de parede espessa**, onde se aplica as equações gerais triaxiais. O mesmo desenvolvimento é adaptado para a solução do problema clássico de elasticidade da **placa infinita sob tração, com furo circular**. Aqui se introduz, de forma natural e simples, os conceitos de campo de tensão com gradiente não elementar, o que leva naturalmente ao conceito de **concentração de tensões**. Esse último conceito é apresentado, mas sua exploração é deixada, como usual, para disciplinas seguintes, como a de Fadiga e de Elementos de Máquinas.

Tradicionalmente o material é introduzido em graduação seguindo o procedimento “partir do mais simples e ir ao complicado”, isto é, parte-se do elemento estrutural mais simples, a barra, depois a viga no plano, depois flexão oblíqua, carregamento combinado, etc. Deve-se enfatizar que o presente curso se constitui no primeiro contato do aluno de engenharia com os problemas de corpos deformáveis. De fato, até esse ponto, seu único contato com a mecânica consistia na estática e dinâmica dos corpos rígidos, que são as aplicações diretas da mecânica Newtoniana ao equilíbrio estático e dinâmico de partículas e corpos sólidos. Agora o aluno tem seu primeiro contato com os conceitos de deformação, tensões atuando no material, falha de material. Logo, embora o equacionamento desenvolvido seja bastante simples, a carga de conceituação introduzida é enorme e sofisticada. Tão sofisticada que o desenvolvimento da ciência na qual essa se insere, a Mecânica do Contínuo, consumiu o esforço das mentes mais brilhantes da humanidade durante cerca de trezentos

anos. Por exemplo, problemas que hoje parecem elementares, como o estado de tensões numa viga em balanço, foi objeto de estudos de Galileu, que forneceu uma solução incorreta. Esse fato explica a grande dificuldade que parte considerável dos estudantes experimenta em seu estudo da matéria, agravado pelo fato de que o equacionamento é tão simples que leva ao aluno a subestimar o esforço necessário em seu aprendizado.

Com isso, considera-se correta a estratégia “partir do mais simples e ir ao complicado” para a escolha e ordem de tópicos básicos para o curso. Considera-se totalmente desaconselhável, num curso introdutório, o desenvolvimento do assunto seguindo o caminho inverso, (“deduzir e simplificar uma formulação geral para chegar ao caso particular”) isto é, partindo da formulação geral, 3D do assunto, para em seguida chegar aos casos de interesse, barras e vigas, através de simplificações. Esse procedimento, entretanto, é aplicável numa segunda visita ao assunto, em disciplina avançada.

Uma outra característica do texto consiste na ordem de alguns tópicos. Tradicionalmente, a transformação de tensões e critérios de falha é apresentada após a apresentação de problemas de carregamento combinado. A forma adotada aqui é a de que sejam mostradas desde o início, de forma a permitir sua utilização quando da apresentação de cada elemento estrutural. Considera-se que quanto mais cedo o estudante for exposto aos problemas de modos e teorias de falha de material, mais facilmente ele poderá “suportar” toda a carga de abstração dos conceitos de tensão, deformação e suas transformações, uma vez que a maioria dos critérios de falha utilizados são baseados em tensões.

O material é dividido em duas partes, com o seguinte conteúdo.

PARTE I

A menos de algumas seções, esta parte corresponde a um curso de graduação em Engenharia Mecânica. Civil, e afins, de 60 horas-aula.

- **ESFORÇOS INTERNOS.** Equações diferenciais de equilíbrio de viga. Problemas isostáticos.
- **TENSÕES.** Tensor tensão, componentes, equações diferenciais de equilíbrio. Caso de cilindro pressurizado. Barras sob tração.
- **DEFORMAÇÕES E TENSÕES.** Diagramas tensão-deformação, Lei de Hooke 3D, deformações térmicas. Aplicações em experimentos. Princípio de sobreposição. Problemas hiperestáticos de barras.
- **TRANSFORMAÇÃO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES.** Transformação plana de tensões. Círculo de Mohr. Tensões principais em estados triaxiais de tensão usando autovalores. Rosetas.
- **CRITÉRIOS DE FALHA.** Teorias de início de escoamento. Aplicações com problemas de cilindro pressurizado.
- **TORÇÃO.** Tensões e rotação de barras de seção circular. Problemas hiperestáticos de torção.
- **FLEXÃO DE VIGAS.** Tensões em flexão plana. Análise de seções: momentos de inércia, determinação de centroide, eixos principais de inércia.
- **CISALHAMENTO EM VIGAS.** Fluxo de cisalhamento. Tensões combinadas de flexão, cortante, torção.

PARTE II

Essa parte é vista em uma segunda disciplina de 60 horas-aula, geralmente oferecida apenas a cursos de engenharia mecânica, civil e afins.

- **CARREGAMENTOS COMBINADOS.** Carregamento de torção, tração e flexão. Carregamento oblíquo. Produto de inércia, translação e rotação de eixos de inércia.

- APLICAÇÕES DE ELASTICIDADE E PLASTICIDADE PLANA. Soluções analíticas clássicas, como tubo pressurizado de parede espessa, sob resposta elástica e sob plastificação, placa tracionada com furo, torção de barras de seção arbitrária, flexão de vigas curvas espessas.
- DEFLEXÃO DE VIGA SOB FLEXÃO. Problemas isostáticos e hiperestáticos pelos métodos de integração direta e de sobreposição. Problemas multicorpos de viga-mola.
- ESTABILIDADE DE BARRAS. Conceito de instabilidade estrutural. Casos de “snap-trough”. Vigas longas e vigas curtas. Efeitos de excentricidade e de plastificação. Cálculo normalizado.
- MÉTODOS DE ENERGIA. Conceito de densidade de energia de deformação. Teoremas de Castigliano. Cálculos em treliças e pórticos planos.
- MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS. Construção do método para elementos de barras e vigas, para modelagem de treliças e pórticos. Dedução via análise matricial usando os conceitos de Resistência dos Materiais obtidos nos capítulos precedentes. Os objetivos são: (a) habilitar o estudante a realizar análise de estruturas complexas com o auxílio de programa comercial; (b) preparar o aluno para um estudo posterior, mais detalhado, do método de elementos finitos aplicado a estruturas e outras; (c) familiarizar o estudante com conceitos como valores nodais, aproximação, matriz de rigidez, elemento, singularidade de matriz, condições de contorno e carregamentos, formas típicas de entrada e saída de dados de programas de Elementos Finitos e estratégias de interpretação de resultados.

Material de apoio ao Professor

1. Todos os exercícios propostos possuem **gabaritos detalhados**, reunidos no livro *800 problemas resolvidos de Mecânica dos Sólidos, propostos no livro Resistência dos Materiais e Fundamentos de Mecânica dos Sólidos*. Esse volume é apenas em forma digital, e é de acesso apenas a professores.
2. **Video-aulas** são disponíveis em diversos tópicos, para auxílio aos professores e alunos.
3. Todas as figuras do livro são disponibilizadas para facilitar o preparo de aulas pelo professor.

Resumo de fórmulas

Equilíbrio diferencial de vigas: (página 43)

$$\frac{dN_x}{dx} = -p_x(x), \quad \frac{dM_z}{dx} = -V_y(x) \quad \frac{dM_y}{dx} = V_z(x)$$

$$\frac{dV_y}{dx} = -p_y(x) \quad \frac{dV_z}{dx} = -p_z(x)$$

Definição de vetor tensão: (página 69)

$$\mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}) := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}$$

Equações diferenciais do movimento para um elemento diferencial de volume: (página 75)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_{cx} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_{cy} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_{cz} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

O equilíbrio ocorre para o caso quasi-estático em que os termos de inércia são tomados como nulos. Em estado plano de tensões ou deformações, em **coordenadas polares** as equações de equilíbrio são: (página 376)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S = 0$$

Coefficiente de segurança n num ponto de coordenada \mathbf{x} do corpo, para um dado modo de falha:

$$n(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_{resist}}{\sigma_{aplic}(\mathbf{x})} = \frac{\text{máxima tensão de resistência do material}}{\text{tensão aplicada no ponto}}.$$

Relações deformação-deslocamento (relações cinemáticas) triaxiais, lineares, (para pequenas deformações, deslocamentos e rotações): (página 97)

$$\varepsilon_x(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z(\mathbf{x}) = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Em estado plano de tensões ou deformações, em **coordenadas polares** as relações cinemáticas são: (página 377)

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}$$

Definição do **coeficiente de Poisson**, para um material homogêneo isotrópico: (página 99)

$$\nu := -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{axial}}.$$

$$-\frac{\tau_{yz \max}}{h/2} = -2G\theta \quad \text{onde} \quad \theta = \frac{3T}{bh^3G}$$

Torção de tubos não circulares de parede delgada: (páginas 409 e 409)

$$\tau = \frac{T}{2h\bar{A}}, \quad \theta = \frac{TS}{4G\bar{A}^2h}$$

Fórmula de flexão para viga de Euler-Bernoulli: (página 282)

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{M_z(x)}{I_{zz}(x)}y$$

Posição \bar{Y} do centróide da seção em relação a um eixo temporário Y : (página 284)

$$\bar{Y} = \frac{1}{A}Q_Z = \frac{1}{A} \int_A Y \, dA$$

Teorema dos eixos paralelos: (página 289)

$$I_{ZZ} = I_{zz} + A\bar{Y}^2$$

Rotação plana de momentos de inércia: (página 360)

$$\begin{aligned} I_{z_c} &= I_{y_c} \sin^2 \theta + I_{z_c} \cos^2 \theta + 2I_{y_c z_c} \sin \theta \cos \theta, \\ I_{y_c} &= I_{z_c} = I_{y_c} \cos^2 \theta + I_{z_c} \sin^2 \theta - 2I_{y_c z_c} \sin \theta \cos \theta, \\ I_{y_c z_c} &= (I_{z_c} - I_{y_c}) \sin \theta \cos \theta + I_{y_c z_c} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Momentos de inércia principais centroidais: (página 362)

$$\left. \begin{array}{l} I_y \\ I_z \end{array} \right\} = \frac{(I_{y_c} + I_{z_c})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2}$$

Curva elástica em flexão. Equação diferencial: (página 431)

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M_z, \quad EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -V_y, \quad EI \frac{d^4 v}{dx^4} = p_y$$

Tensão cisalhamento em viga sob flexão: (página 317)

$$\tau = \frac{V_y Q_F}{t I_z}$$

Q_F é o momento estático da área A_F em relação ao eixo principal z . Tensão máxima em seção retangular e circular: (páginas 318 e 320)

$$\tau_{\max}(x) = \frac{3V_y}{2A} \quad \text{e} \quad \tau_{\max} = \frac{4V_y}{3A}$$

Fluxo de cisalhamento: (página 315)

$$q(x) = \frac{V_y Q_F}{I_z}$$

Carregamento combinado: tração + torção: (página 346)

$$\tau_{\max} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{N_x^2}{(d_e^2 - d_i^2)^2} + \frac{64M_x^2 d_e^2}{(d_e^4 - d_i^4)^2}}$$