O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos

Dados para contato com os autores:
Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.,
Eduardo A. Fancello, D.Sc.
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Engenharia Mecânica
paulo.tarso@ufsc.br, eduardo.fancello@ufsc.br
CP 476 - Florianópolis, SC - 88040-900

O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos

Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.

Eduardo A. Fancello, D.Sc.

ORSA MAGGIORE

Projeto gráfico, ilustrações: Paulo de Tarso R. Mendonça
Editoração eletrônica: Paulo de Tarso R. Mendonça
Capa: Maria Elisa Ramos

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M539m Mendonça, Paulo de Tarso R.,
O Método de Elementos Finitos aplicado à
Mecânica dos Sólidos / Paulo de Tarso R. Mendonça,
Eduardo A. Fancello.
Florianópolis, SC : Orsa Maggiore, 2019.
706 p.: il., tabs., gráfs.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-907153-1-3

1. Engenharia mecânica. 2.Análise estrutural (Engenharia).
3. Método de Elementos Finitos. 4. Projeto estrutural.
I. Fancelo, Eduardo A. II. Título.

CDD-620.105

Índices para catálogo sistemático:
1. O Método de Elementos Finitos aplicado à
Mecânica dos Sólidos: Engenharia civil 620.1

1ª edição - 2019

Direitos adquiridos pela:
Editora Orsa Maggiore.
www.OrsaMaggiore.com.br

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Sobre os autores

O prof. Paulo de Tarso possui graduação em Engenharia Mecânica pela Universidade de Brasília (1980), mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina (1983) e doutorado em Engenharia Mecânica no Departamento de Engenharia Aeroespacial da Universidade de Minnesota (1995). No período de 2012/2013 realizou atividades de pesquisa no *Laboratoire de Mechanique et Technologie* da *École Normale Superieure de Cachan*, França, na área de estimativa *a-posteriori* de erros em modelos numéricos. Desde 1984 trabalha na Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, onde atualmente é Professor Titular. Concentra suas atividades na área de Mecânica dos Sólidos Computacional, atuando principalmente nos seguintes temas: desenvolvimento do método de elementos finitos, com ênfase em elementos finitos generalizados, modelagem do comportamento de componentes mecânicos de materiais compostos e estimativa de erros de modelagem e de modelo.

O Prof. Eduardo A. Fancello possui graduação em Ingeniería Mecánica Electricista pela Universidad Nacional de Córdoba (1987), mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1989) e doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1993). No período de 2004/2005 realizou atividades de pesquisa na Universidade de Liège, Bélgica, na área de modelagem constitutiva. Atualmente é Professor Titular no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Especialista em Mecânica dos Sólidos Computacional, concentra suas pesquisas em: a) desenvolvimento de modelos constitutivos e ensaios experimentais aplicados preferencialmente a polímeros termoplásticos e tecidos biológicos; b) aplicações em Biomecânica; c) otimização topológica em Mecânica dos Sólidos.

Sumário

Conteúdo

Prefácio

Tradicionalmente, o trabalho de engenharia no dimensionamento de componentes estruturais, e sua análise quanto à adequação a solicitações mecânicas, sempre foi baseado no uso de formulações algébricas desenvolvidas para componentes de geometria e carregamentos simples, como barras, vigas, alguns tipos de placas circulares e retangulares, e alguns tipos de cascas cilíndricas e esféricas. Mesmo nesses casos, os carregamentos deviam ser simples, do tipo concentrado ou uniforme na maioria dos casos. Entretanto, a partir da década de 1960, com o desenvolvimento dos computadores, desenvolveu-se uma nova classe de métodos de análise, que pode ser geralmente denominada *métodos numéricos*, que visava incorporar na análise uma quantidade cada vez maior de detalhes de geometria e carregamento, tornando-a progressivamente mais capaz de simular os processos e fenômenos presentes num problema real. O principal e mais versátil desses métodos se constitui no chamado *método de elementos finitos*.

Até o início dos anos 1990, entretanto, a aplicação do método era restrita apenas a universidades, grandes corporações e centros de pesquisa, devido ao alto volume de computação envolvido, ao alto preço e às limitações da capacidade dos computadores da época. Durante os anos 1990, com a disseminação dos computadores pessoais e seu correspondente aumento de capacidade de processamento, os softwares comerciais de elementos finitos anteriormente desenvolvidos para computadores de grande porte nas décadas anteriores foram sendo adaptados para os PC's e seu preço reduzido. Dessa forma, tanto os computadores quanto os programas de elementos finitos tornaram-se disponíveis ao uso de qualquer engenheiro em seu trabalho diario. Essa nova realidade, por um lado, tornou obsoletos diversos dos antigos métodos de análise disponíveis, e por outro lado, passou a exigir um tipo novo de qualificação ao engenheiro. Apenas a partir da década de 1990 as escolas de engenharia passaram a oferecer, de forma sistemática, disciplinas de formação em análise estrutural numérica. Por outro lado, as escolas que buscam uma atualização em seu currículo encontram séria dificuldade em obter material didático adequado. Em geral os livros existentes são compêndios volumosos, escritos em formato não didático, adequados a um público já especialista, escrito em lingua estrangeira e sem exemplos e sem exercícios propostos que auxiliem no processo ensino-aprendizagem. Este livro visa atender a essas deficiências: procura-se usar uma linguagem o mais simples e clara possível e as deduções são feitas incluindo o maior número possíveis de etapas. A exposição de todos os conceitos é sempre acompanhada por exemplificação detalhada, que permite fácil acompanhamento pelo leitor.

O material do livro é agrupado em três grandes partes. A **primeira parte** consiste numa revisão de conceitos que normalmente os engenheiros em seus cursos de graduação veem nas disciplinas de *Resistência dos Materiais* ou *Mecânica dos Sólidos*, isto é, conceitos como o de tensão, deformação, equações de equilíbrio, transformação de tensões e critérios de falha. A razão da presença deste material, além de permitir fácil referência a partir do restante do texto, é a seguinte. Observa-se que o material da área de Resistência dos Materiais é, normalmente, apresentado aos alunos de maneira segmentada, baseada em análise de componentes simples, como barras e vigas, obscurecendo a forte correlação dos conceitos subjacentes. Assim, por exemplo, apesar de que os conceitos de tensão e tensor tensão tenha sido, provavelmente, apresentados e desenvolvidos, essa exposição se concentra geralmente a uma ou duas aulas de graduação. Em geral, durante todo o desenrolar das disciplinas de Resistência dos Materiais, o aluno lida apenas com uma única componente desse tensor, e mesmo esta, é dependente de apenas uma única coordenada. Assim, o objetivo da exposição desse conteúdo aqui consiste em prover uma visão mais abrangente do assunto e das formulações matemáticas, iniciando o hábito de uma interpretação tridimensional das grandezas e dos fenômenos. Por exemplo, a transformação de tensões abandonará a restrição bidimensional e sua representação de círculo de Mohr, e será vista através da formulação tridimensional de transformação de tensões e de conceitos de autovalores e autovetores. Também, conceitos que serão essenciais nos capítulos seguintes, como mudança de base, notação indicial e regra do somatório são apresentados previamente na primeira parte do texto.

A **segunda parte** do texto apresenta a análise estrutural realizada através do método de elementos finitos. Aqui o método é introduzido paralelamente em duas formas distintas. Primeiramente nos Capítulos 5 e 6, o método é apresentado usando conceitos e ideias mecânicas bastante intuitivas com as quais um leitor normalmente é familiarizado: os comportamentos de barras e vigas sob flexão. Assim chega-se, de forma bastante natural, à estrutura algébrica básica do método, isto é, aos conceitos de matriz de rigidez, de vetores de deslocamentos nodais e de forças nodais. Nesta forma, o método tem todas as características daquilo que nas décadas de 1960 e 1970 chamava-se, em alguns círculos da engenharia estrutural, de "análise matricial de estruturas". Sem dúvida que os procedimentos usados ali tem sua aplicabilidade restrita apenas àqueles tipos de problemas. São, em geral, impossíveis de serem estendidos a problemas planos ou tridimensionais como os de placas, cascas ou sólidos, ou à modelagem de outros fenômenos físicos. Dessa forma, ainda nessa parte do texto, o método é re-introduzido no Capítulo 7, utilizando agora procedimentos consistentes de mecânica do contínuo. Nesse capítulo, o problema de barras ainda é usado como pano de fundo, de forma que o leitor possa comparar resultados chaves com aqueles previamente obtidos no Capítulo 5. Entretanto, uma vez que o método foi bem apresentado, os procedimentos são prontamente estendidos a problemas mais complexos, como o de análise de tensões de corpos elásticos tridimensionais e de placas, nos capítulos seguintes. Adicionalmente, a modelagem de problemas de transferência de calor é apresentada nessa parte do texto, num capítulo que também pode ser usado como material inicial no estudo do Método de Elementos Finitos.

A **terceira parte** do texto faz aplicações do método geral delineado na parte dois. Assim, enquanto que a parte dois considera apenas o problema da resposta elástica estática do corpo, na parte três diferentes fenômenos são abordados, como análise dinâmica e plasticidade.

Ao final de cada capítulo, uma lista de exercícios é proposta como forma de fixar os conteúdos e desenvolver a autoconfiança. A maioria dos exemplos pode ser resolvida usando um software comercial como o Ansys® ou o Abaqus® dentre outros, além de manipuladores simbólicos como o Mathematica® ou Maple®. Adicionalmente, diversos problemas são propostos para o estudante adquir destreza em programação dos algorítmos. O trabalho do engenheiro no projeto e análise de estruturas através de elementos finitos é sempre feito baseado em um programa já disponível, quer seja um código próprio ou um código comercial de grande porte. Os códigos comerciais possuem a vantagem de permitir análise de diversos tipos de fenômenos e, principalmente, possuem interfaceamento gráfico para manipulação de dados de geração de dados e visualização de resultados. É uma característica marcante do método a de necessitar quantidades muito grandes desses dados, de forma que os programas de elementos finitos possuem uma vasta quantidade de procedimentos e comandos que permitam sua operação. Essa quantidade de procedimentos implica sempre numa maior ou menor complexidade em sua operação e tempo de aprendizagem. Assim, o engenheiro que deseja qualificar-se como analista estrutural enfrenta múltiplas exigências em seu aprendizado: ele deve adquirir conhecimento teórico sobre o método, através de cursos como o descrito no presente texto, e simultaneamente, deve adquirir destreza na operação de um ou mais programas comerciais. Finalmente, no âmbito de pesquisa, é necessária a capacidade de programação.

Origens históricas do método de elementos finitos

A origem do método de elementos finitos pode se tornar dificil de identificar, pois alguns trabalhos matemáticos, espalhados desde o século 18 até meados do 20, podem ser vistos como apresentando algumas das ideias do método. Existem diversas tentativas de escrever a história do método e, curiosamente, sob certos aspectos, elas apresentam diferenças no que são considerados os pontos mais importantes. Alguns artigos de levantamento históricos são os de Oden, 1990 [78] e o de Clough e Wilson, 2010 [24] que traça uma história até o início os anos 1970.

Em geral, a comunidade de engenharia e de matemática costuma marcar dois trabalhos como a origem "oficial" do método. O primeiro é um artigo de Courant, de 1943 [27] (e similarmente o de Polya em 1952 [84]), em cujo apêndice ele descreve uma aproximação por funções lineares por partes para um problema de Dirichlet usando triângulos. É interessante observar que o primeiro computador eletrônico, digital e programavel, de uso público, o ENIAC, foi colocado em operação dois anos depois, em final de 1945, na Universidade da Pensilvânia. Os primeiros dois computadores da história, a bomba de Turing e o Colossus, haviam sido desenvolvido e construidos na Inglaterra durante a segunda guerra, porém foram construidos sob secredo de guerra, sendo o primeiro desmontado logo em seguida.

O segundo trabalho chave é o célebre artigo de Turner, Clough, Martin e Topp, de 1956, [103] em que uma aproximação local foi obtida de maneira consistente para as equações de elastoestática, já com o uso de algumas estratégias essenciais ao MEF. Esse trabalho ainda obtinha as equações elementares sem o uso de princípio variacional. O próprio nome, *métodos de elementos finitos,* foi cunhado apenas em 1960 pelo próprio Clough [23]. A década passou a ser ocupada por aplicações do método a todos os problemas com princípio variacional conhecido. Nesse período era considerado que o método era limitado apenas a problemas auto adjuntos (baseados em operadores simétricos).

Já no final dos anos 1960 tornou-se aparente que o método podia também ser aplicado a problemas com operadores não simétricos e com diversos tipos de não linearidade, sem nenhuma dificuldade formal. Assim, problemas de mecânica dos flúidos comecaram a ser tratados pelo método, a partir das equações completas de Navier-Stokes [80][79]. Também na década de 1970 os desenvolvimentos matemáticos das décadas anteriores sobre equações diferenciais comecaram a ser dirigidos ao MEF, e comecaram a surgir os teoremas de convergência e estimativas de erro.

Lista de Símbolos

T	- transposta de uma matriz quando super-índice.
$\mathcal{T}$	- térmico, quando super-índice.
$\forall$	- para qualquer.
$\bar{\bullet}$	- barra indica grandeza num segundo sistema de coordenadas,
	- ou indica valor prescrito de uma variável no contorno,
	- ou indica modificação da grandeza $\cdot$.
$(\cdot)_{,x}$	- diferenciação de uma função, $\partial(\bullet)/\partial x$.
$(\cdot)'$, $(\cdot)''$	- primeiras derivadas em x.
$\hat{\cdot}$, $\delta(\cdot)$	- função peso, primeira variação.
Δ	- variação finita de uma grandeza.
$a \equiv b$	- a é *definido por* por b.
sse	- *se e somente se.*
$\partial\Omega_e \backslash \Gamma_f$	- parcela do conjunto $\partial\Omega_e$ não contido em Γ_f.
$\mathbf{a}$ e $\mathbf{A}$	- negritos em minúsculos e maiúsculos em geral indicam vetor e tensor respectiv.
{ }	- componentes de um arranjo unidimensional de valores ou funções. Tb. vetores.
[ ]	- componentes de um arranjo bidimensional de valores ou funções. Tb. matrizes.
Ω, Γ	- dominio e contorno de um corpo.
Σ e $\partial\Sigma$	- área de seção transversal (em EPT e EPD, por exemplo) e seu contorno.
$\cdot$	- produto escalar entre vetores (pg.7) e entre tensores (pg.12).
$:$	- produto interno de tensores, pg.12.
$\otimes$	- produto tensorial, pg 10.
$\times$	- produto vetorial.
δ_{ij}	- operador delta de Kronecker.
$\delta(\mathbf{x}_p)$	- função generalizada delta de Dirac em $\mathbf{x}_p$.
e_{ijk}	- símbolo de permutação, pg.9
R, R^d	- espaço dos números reais, e espaço de dimensão d, onde $d = 1, 2$ ou 3.
Kin	- conjunto das funções cinematicamente admissíveis.
Var	- espaço das funções das variações.
N_{nos}	- número de nós de uma malha.
N_{glno}	- número de graus de liberdade por nó.
N_{ne}	- número de nós do elemento.
N_{gle}	- número de graus de liberdade do elemento.
N_{el}	- número de elementos no modelo.
$\mathbf{n}$	- vetor normal unitário.
$\mathbf{t}$	- vetor tensão num ponto, força por unidade de área, eq.(2.15).
$\mathbf{1}$	- tensor identidade de segunda ordem.
$\mathbf{I}$	- tensor identidade de quarta ordem.
$\mathbf{K}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}^a$, $\mathbf{R}$	- matriz de rigidez global, vetor deslocamento nodal, nodais
	vetor força aplicada conhecida e vetor de reações nodais, eqs.(5.22), (10.13).
$\mathbf{B}$	- matriz de deformações do elemento finito.
$\mathbf{x}$	- vetor posição de um ponto, com coordenadas cartesianas $(x_1; x_2; x_3)$ ou (x, y, z).
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	- eixos locais em elementos de barra, viga e casca.