

O Método de Elementos Finitos  
aplicado à Mecânica dos Sólidos

Dados para contato com os autores:  
Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.,  
Eduardo A. Fancello, D.Sc.  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC  
Departamento de Engenharia Mecânica  
paulo.tarso@ufsc.br, eduardo.fancello@ufsc.br  
CP 476 - Florianópolis, SC - 88040-900

O Método de Elementos Finitos  
aplicado à Mecânica dos Sólidos

Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.

Eduardo A. Fancello, D.Sc.



ORSA MAGGIORE

Copyright © 2019 Editora Orsa Maggiore.

Projeto gráfico, ilustrações: Paulo de Tarso R. Mendonça

Editoração eletrônica: Paulo de Tarso R. Mendonça

Capa: Maria Elisa Ramos

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M539m Mendonça, Paulo de Tarso R.,  
O Método de Elementos Finitos aplicado à  
Mecânica dos Sólidos / Paulo de Tarso R. Mendonça,  
Eduardo A. Fancello.  
Florianópolis, SC : Orsa Maggiore, 2019.  
706 p.: il., tabs., gráfs.

Inclui bibliografia.  
ISBN 978-85-907153-1-3

1. Engenharia mecânica. 2. Análise estrutural (Engenharia).  
3. Método de Elementos Finitos. 4. Projeto estrutural.  
I. Fancelo, Eduardo A. II. Título.

CDD-620.105

Índices para catálogo sistemático:

1. O Método de Elementos Finitos aplicado à  
Mecânica dos Sólidos: Engenharia civil 620.1

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão expressa dos editores. É proibida a reprodução por xerox.

1ª edição - 2019

Direitos adquiridos pela:  
Editora Orsa Maggiore.  
[www.OrsaMaggiore.com.br](http://www.OrsaMaggiore.com.br)

Impresso no Brasil  
*Printed in Brazil*

## Sobre os autores

O prof. Paulo de Tarso possui graduação em Engenharia Mecânica pela Universidade de Brasília (1980), mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina (1983) e doutorado em Engenharia Mecânica no Departamento de Engenharia Aeroespacial da Universidade de Minnesota (1995). No período de 2012/2013 realizou atividades de pesquisa no *Laboratoire de Méchanique et Technologie* da *École Normale Supérieure de Cachan*, França, na área de estimativa *a-posteriori* de erros em modelos numéricos. Desde 1984 trabalha na Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, onde atualmente é Professor Titular. Concentra suas atividades na área de Mecânica dos Sólidos Computacional, atuando principalmente nos seguintes temas: desenvolvimento do método de elementos finitos, com ênfase em elementos finitos generalizados, modelagem do comportamento de componentes mecânicos de materiais compostos e estimativa de erros de modelagem e de modelo.

O Prof. Eduardo A. Fancello possui graduação em Ingeniería Mecánica Electricista pela Universidad Nacional de Córdoba (1987), mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1989) e doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1993). No período de 2004/2005 realizou atividades de pesquisa na Universidade de Liège, Bélgica, na área de modelagem constitutiva. Atualmente é Professor Titular no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Especialista em Mecânica dos Sólidos Computacional, concentra suas pesquisas em: a) desenvolvimento de modelos constitutivos e ensaios experimentais aplicados preferencialmente a polímeros termoplásticos e tecidos biológicos; b) aplicações em Biomecânica; c) otimização topológica em Mecânica dos Sólidos.

# Sumário

Prefácio	xvii
Lista de símbolos	xx
<b>I Introdução à Mecânica do Contínuo</b>	<b>1</b>
1 Conceitos matemáticos preliminares	5
2 Tensões - equações de equilíbrio	25
3 Análise de deformações - equações cinemáticas	47
4 Comportamento do material - equações constitutivas	61
<b>II O MEF Aplicado à Mecânica dos Sólidos</b>	<b>75</b>
5 Análise matricial - modelo de barras	77
6 Análise matricial - modelo de viga	107
7 Conceito de aproximação por elementos finitos	147
8 Tecnologia de elementos finitos I	179
9 Tecnologia de elementos finitos II	237
10 Condições de restrições	271
11 <i>Locking, patch test</i>	289
12 Operações matriciais no MEF	299
13 Transferência de calor pelo MEF	333
14 Propriedades matemáticas básicas do MEF	369
<b>III Análise mecânica</b>	<b>417</b>
15 Modelo de placas	419
16 MEF para materiais compostos laminados	439
17 Vibrações em sistemas de 1 grau de liberdade	463
18 Elementos finitos em dinâmica	489
19 Método de sobreposição modal	503
20 Redução matricial e resposta harmônica	541
21 Métodos de integração direta	557
22 Plasticidade clássica	575
23 Métodos numéricos para autovalores	633
Bibliografia	677
Índice Remissivo	683

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>xx</b>
<b>I Introdução à Mecânica do Contínuo</b>	<b>1</b>
<b>1 Conceitos matemáticos preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Grandezas na mecânica do contínuo . . . . .	5
1.2 Vetores e tensores . . . . .	6
1.2.1 Produto interno . . . . .	7
1.2.2 Base ortonormal . . . . .	8
1.2.3 Produto vetorial . . . . .	9
1.2.4 Produtos entre tensores . . . . .	10
1.3 Notação . . . . .	14
1.4 Mudança de base . . . . .	16
1.5 Cálculo tensorial - gradientes e divergentes . . . . .	17
1.5.1 Teorema do divergente . . . . .	19
1.6 Exercícios . . . . .	20
<b>2 Tensões - equações de equilíbrio</b>	<b>25</b>
2.1 Conceito de tensão . . . . .	25
2.2 Tensor tensão . . . . .	27
2.3 Equações de equilíbrio . . . . .	28
2.3.1 Equação de equilíbrio num ponto do contorno - condições de contorno . . . . .	30
2.3.2 Equação de equilíbrio dinâmico num ponto do interior do corpo . . . . .	32
2.3.3 Equilíbrio de momentos - simetria do tensor tensão . . . . .	33
2.3.4 Equações de equilíbrio - dedução simplificada . . . . .	33
2.4 Mudança de base - tensões principais . . . . .	35
2.4.1 Círculo de Mohr - 3D . . . . .	38
2.4.2 Círculo de Mohr para rotação plana . . . . .	40
2.5 Tensões esféricas e deviatóricas - critérios de falha . . . . .	42
2.5.1 Critério da máxima tensão normal . . . . .	43
2.5.2 Critério da máxima tensão cisalhante . . . . .	44
2.5.3 Critério da máxima energia de distorção . . . . .	44
2.6 Exercícios . . . . .	44
<b>3 Análise de deformações - equações cinemáticas</b>	<b>47</b>
3.1 Deslocamentos e deformações . . . . .	47
3.1.1 Deformação específica longitudinal . . . . .	49
3.1.2 Deformação angular ou cisalhante . . . . .	51
3.2 Pequenas deformações e deslocamentos . . . . .	52
3.2.1 Pequenas deformações . . . . .	52
3.2.2 Pequenos deslocamentos . . . . .	53

3.2.3	Interpretação gráfica do tensor de deformação infinitesimal . . . . .	55
3.3	Propriedades do tensor deformação . . . . .	56
3.3.1	Deformações principais . . . . .	56
3.3.2	Deformação volumétrica . . . . .	57
3.3.3	Deformações esféricas e deviatóricas . . . . .	57
3.4	Exercícios . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Comportamento do material - equações constitutivas</b>	<b>61</b>
4.1	Introdução . . . . .	61
4.2	Elasticidade linear . . . . .	62
4.2.1	Deformações de origem térmicas . . . . .	65
4.2.2	Estado plano de deformação . . . . .	66
4.2.3	Estado plano de tensão . . . . .	68
4.2.4	Sólido de revolução e problemas axi-simétricos . . . . .	69
4.3	Problema de equilíbrio em termos de deslocamento - Eqs. de Navier . . . . .	71
4.4	Exercícios . . . . .	74
<b>II</b>	<b>O MEF Aplicado à Mecânica dos Sólidos</b>	<b>75</b>
<b>5</b>	<b>Análise matricial - modelo de barras</b>	<b>77</b>
5.1	Equilíbrio de uma barra . . . . .	78
5.2	Sistema de barras . . . . .	81
5.2.1	Exemplo 5.1 - barra 1D . . . . .	81
5.2.2	Exemplo 5.2 - Barras em paralelo . . . . .	87
5.3	Estruturas planas de barras . . . . .	91
5.3.1	Exemplo 5.3 - Treliça plana simples . . . . .	93
5.4	Barras em 3D - treliças espaciais . . . . .	99
5.4.1	Exemplo 5.4 - treliça espacial . . . . .	100
5.5	Observações Finais . . . . .	104
5.6	Exercícios . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Análise matricial - modelo de viga</b>	<b>107</b>
6.1	Flexão de viga - Hipóteses geométricas e cinemáticas . . . . .	107
6.2	Equação diferencial de equilíbrio em vigas . . . . .	109
6.3	Matriz de rigidez para flexão de vigas - Método direto . . . . .	111
6.3.1	Curvas elásticas para deslocamentos unitários . . . . .	113
6.3.2	Matriz de rigidez de viga . . . . .	115
6.3.3	Exemplo 6.1 - Viga em balanço . . . . .	116
6.3.4	Exemplo 6.2 - Viga em balanço . . . . .	117
6.4	Aplicação de condições de contorno . . . . .	121
6.4.1	Condição de contorno - caso $u_i = \bar{u}_i$ . . . . .	121
6.5	Viga com carregamento axial e flexão plana . . . . .	123
6.5.1	Exemplo 6.3 - Pórtico plano simples . . . . .	126
6.6	Vetor força consistente para carga distribuída . . . . .	128
6.6.1	Rotação do vetor força para uso em elementos inclinados . . . . .	128
6.7	Esforços e tensões nos elementos em problemas planos . . . . .	129
6.7.1	Exemplo 6.4 - Carga distribuída e condição de restrições no contorno . . . . .	132
6.7.2	Exemplo 6.5 - Pórtico plano . . . . .	136
6.8	Torção em Vigas . . . . .	138
6.8.1	Equação diferencial de vigas em torção . . . . .	138
6.8.2	Matriz de rigidez de elemento de torção de viga . . . . .	140
6.9	Vigas no espaço tridimensional . . . . .	141
6.10	Observações - cisalhamento transversal e vigas de Timoshenko . . . . .	144



<b>7</b>	<b>Conceito de aproximação por elementos finitos</b>	<b>147</b>
7.1	Modelo 1D - Equação diferencial de equilíbrio . . . . .	147
7.1.1	Equação diferencial para seção variável . . . . .	150
7.1.2	Exemplo 7.1 - Barra de seção triangular sob força de corpo . . . . .	151
7.2	Princípio dos trabalhos virtuais . . . . .	152
7.3	Princípio da Energia Potencial Total Mínima . . . . .	155
7.4	Aproximação pelo método de elementos finitos . . . . .	159
7.4.1	Exemplo 7.2 - Quatro elementos idênticos . . . . .	165
7.5	Matriz de rigidez e vetor de carga elementares . . . . .	166
7.5.1	Integração analítica da matriz de rigidez . . . . .	169
7.5.2	Exemplo 7.3 - Quatro elementos com malha irregular . . . . .	170
7.5.3	Cálculo das reações nos apoios . . . . .	173
7.5.4	Cálculo de tensões nos elementos . . . . .	173
7.5.5	Deslocamentos prescritos não nulo . . . . .	174
7.6	Aplicação de condições de contorno . . . . .	176
7.7	Exercícios . . . . .	177
<b>8</b>	<b>Tecnologia de elementos finitos - I</b>	<b>179</b>
8.1	O problema de elasticidade linear . . . . .	179
8.1.1	Da formulação diferencial ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) . . . . .	180
8.1.2	Do Princípio dos Trabalhos Virtuais à formulação diferencial . . . . .	182
8.2	Estado plano de deformação (EPD) . . . . .	184
8.2.1	Princípio dos trabalhos virtuais em EPD . . . . .	184
8.2.2	Elementos finitos em estado plano de deformações . . . . .	186
8.2.3	Exemplo 8.1 - Bloco sob tração . . . . .	191
8.3	Estado plano de tensões . . . . .	196
8.3.1	Elemento retangular . . . . .	197
8.4	Problema axissimétrico . . . . .	199
8.4.1	Formulação . . . . .	199
8.4.2	Elementos finitos em modelo axissimétrico . . . . .	201
8.5	Elementos volumétricos . . . . .	203
8.5.1	Elemento hexaédrico trilinear de 8 nós . . . . .	205
8.6	Termoelasticidade linear . . . . .	206
8.7	Elementos isoparamétricos e outros . . . . .	208
8.7.1	Elemento triangular linear . . . . .	208
8.7.2	Mapeamento em elemento triangular arbitrário . . . . .	209
8.7.3	Exemplo 8.2 - Modelo de EPD com mapeamento . . . . .	213
8.8	Tipos de elementos e suas funções . . . . .	214
8.8.1	Elementos unidirecionais . . . . .	214
8.8.2	Elementos triangulares lineares . . . . .	215
8.8.3	Elementos triangulares de alta ordem . . . . .	217
8.8.4	Elementos Lagrangeanos quadriláteros . . . . .	218
8.8.5	Elementos tridimensionais . . . . .	220
8.8.6	Mapeamento em elementos quadriláteros e hexaédricos arbitrários . . . . .	222
8.8.7	Elementos colapsados . . . . .	225
8.8.8	Condensação estática . . . . .	226
8.8.9	Funções de aproximação serendipity . . . . .	227
8.9	Técnicas de recuperação de tensões e fluxos e estimativa de erro . . . . .	230
8.9.1	Técnica de recuperação de tensão por médias nodais . . . . .	232
8.9.2	Técnica de recuperação de tensão de Zienkiewicz-Zhu . . . . .	233
8.10	Exercícios . . . . .	233
<b>9</b>	<b>Tecnologia de elementos finitos - II</b>	<b>237</b>
9.1	Integração numérica . . . . .	237

9.1.1	Exemplo 9.1 - Integração 1D . . . . .	239
9.1.2	Regra de integração de Gauss-Lobatto . . . . .	240
9.1.3	Integração dos elementos quadriláteros e hexaédricos . . . . .	240
9.1.4	Integração em elementos triangulares . . . . .	242
9.1.5	Exemplo 9.2 - Integração de função em triângulo . . . . .	243
9.1.6	Exemplo 9.3 - Mapeamento em elemento quadrangular bilinear . . . . .	245
9.1.7	Exemplo 9.4 - Mapeamento em elemento triangular quadrático . . . . .	247
9.2	Vetores força nodal consistente . . . . .	249
9.2.1	Vetor força em elementos quadrangulares . . . . .	249
9.2.2	Vetor força em elementos hexaédricos . . . . .	251
9.2.3	Casos de vetor força em faces planas regulares . . . . .	252
9.3	Exemplos e comentários sobre modelagem . . . . .	261
9.3.1	Exemplo 9.5 - Barra de seção retangular sob torção – curvas de convergência . . . . .	261
9.3.2	Exemplo 9.6 - Entalhe em barra sob tração - refino não-uniforme . . . . .	265
9.4	Exercícios . . . . .	269
<b>10</b>	<b>Condições de restrições</b>	<b>271</b>
10.1	Método direto . . . . .	271
10.1.1	Matriz de transformação . . . . .	273
10.2	Multiplicadores de Lagrange e penalização . . . . .	274
10.2.1	Método dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	275
10.2.2	Método de penalização . . . . .	279
10.2.3	Método Lagrangiano aumentado . . . . .	281
10.3	Exemplos . . . . .	283
10.4	Exercícios . . . . .	287
<b>11</b>	<b>Locking, patch test</b>	<b>289</b>
11.1	Locking nos elementos de estado plano . . . . .	289
11.1.1	Elemento triangular linear . . . . .	289
11.1.2	Elemento bilinear . . . . .	290
11.2	Subintegração e modos espúrios . . . . .	292
11.2.1	Subintegração seletiva . . . . .	294
11.3	Locking no elemento de viga de Timoshenko . . . . .	295
11.4	Patch test . . . . .	297
<b>12</b>	<b>Operações matriciais no MEF</b>	<b>299</b>
12.1	Tipos de armazenamento de matrizes . . . . .	300
12.1.1	Matriz triangular . . . . .	300
12.1.2	Matriz banda . . . . .	301
12.1.3	Matriz skyline . . . . .	304
12.1.4	Matriz esparsa . . . . .	305
12.2	Métodos de solução de sistemas algébricos estáticos . . . . .	305
12.2.1	Eliminação de Gauss . . . . .	305
12.2.2	Método de Cholesky . . . . .	308
12.2.3	Contagem de operações no método de Gauss - matriz cheia . . . . .	309
12.2.4	Contagem de operações no método de Cholesky . . . . .	312
12.2.5	Matriz banda . . . . .	312
12.2.6	Comparações . . . . .	315
12.3	Métodos iterativos baseados em minimização de potencial . . . . .	316
12.3.1	Método do gradiente . . . . .	318
12.3.2	Método do gradiente conjugado - GC . . . . .	322
12.3.3	Método do gradiente conjugado pré-condicionado . . . . .	325
12.3.4	Pré-condicionadores . . . . .	329
12.4	Comentários gerais . . . . .	330

12.5	Exercícios . . . . .	331
<b>13</b>	<b>Transferência de calor pelo MEF</b>	<b>333</b>
13.1	Definição do problema . . . . .	334
13.1.1	Relação constitutiva - Lei de Fourier . . . . .	334
13.1.2	Transferência de Calor 2-D e 3-D . . . . .	335
13.2	Formas forte e fraca do problema de Poisson . . . . .	337
13.2.1	Forma integral - Método de resíduos ponderados . . . . .	338
13.3	Solução aproximada via formulação de Galerkin . . . . .	340
13.3.1	Funções de aproximação . . . . .	343
13.3.2	Condições de contorno de temperatura prescrita . . . . .	347
13.4	Matriz de rigidez e vetor força do elemento . . . . .	350
13.4.1	Funções de aproximação global e local do elemento . . . . .	351
13.4.2	Processo de sobreposição das matrizes elementares . . . . .	353
13.5	Elemento triangular linear . . . . .	355
13.5.1	Exemplo 13.1- Malha triangular em domínio 2-D . . . . .	358
13.5.2	Exemplo 13.2 - Curvas de convergência . . . . .	361
13.6	Elemento quadrilateral bilinear . . . . .	363
13.7	Exercícios . . . . .	366
<b>14</b>	<b>Propriedades matemáticas básicas do MEF</b>	<b>369</b>
14.1	Espaços vetoriais de funções . . . . .	369
14.2	Formas simbólicas . . . . .	371
14.2.1	Problema variacional 1D, elasticidade . . . . .	371
14.2.2	Problema variacional de condução de calor . . . . .	372
14.2.3	Problema variacional de elastostática linear . . . . .	373
14.2.4	Propriedades das formas lineares e bilineares . . . . .	374
14.2.5	Norma de energia no problema generalizado . . . . .	376
14.3	MEF - simetria e positividade da matriz de rigidez . . . . .	377
14.3.1	A solução do MEF é a melhor aproximação? . . . . .	379
14.4	Estimativas de erro <i>a-priori</i> no MEF . . . . .	381
14.4.1	Estimativa de erro <i>a-priori</i> no problema de MEF-1D . . . . .	382
14.4.2	Erro na interpolação em polinômio linear por partes . . . . .	383
14.4.3	Interpolação linear - erro na primeira derivada . . . . .	385
14.4.4	Interpolação quadrática . . . . .	385
14.4.5	MEF com polinômio de grau $p$ no problema barra . . . . .	386
14.5	Cálculo Variacional . . . . .	387
14.5.1	Variação e mínimo . . . . .	391
14.5.2	Operador delta . . . . .	392
14.5.3	Lema fundamental do cálculo variacional . . . . .	394
14.6	Panorama dos métodos de resíduos ponderados . . . . .	395
14.6.1	Métodos de aproximação . . . . .	396
14.6.2	Métodos de colocação e de Bubnov-Galerkin . . . . .	397
14.6.3	Formulações fracas e descontinuidade interelementar . . . . .	398
14.6.4	Métodos de elementos de contorno . . . . .	401
14.7	Princípios de mínimo e método de Rayleigh-Ritz . . . . .	403
14.7.1	Exemplo 14.2 - Método de Rayleigh-Ritz em problema 1D . . . . .	404
14.8	Multiplicadores de Lagrange e restrições no funcional . . . . .	405
14.8.1	Dedução do método de multiplicadores de Lagrange . . . . .	406
14.8.2	Funcionais Lagrangianos para problemas de Poisson e de elastostática . . . . .	408
14.8.3	Princípio variacional modificado arbitrário de função vetorial . . . . .	411
14.9	Restrições na forma fraca via penalização . . . . .	413
14.10	Exercícios . . . . .	414

<b>III</b>	<b>Análise mecânica</b>	<b>417</b>
<b>15</b>	<b>Modelo de placas</b>	<b>419</b>
15.1	Formulação de placas de Mindlin-Reissner . . . . .	419
15.1.1	Tensões resultantes . . . . .	423
15.1.2	Carregamentos e condições de contorno . . . . .	424
15.2	Princípio dos trabalhos virtuais em placas . . . . .	425
15.3	Elementos finitos de placas . . . . .	426
15.3.1	Mapeamento . . . . .	428
15.3.2	Cálculo das tensões . . . . .	429
15.4	Travamento ( <i>locking</i> ) . . . . .	430
15.5	Análise de cascas por elementos planos . . . . .	430
15.6	Exercícios . . . . .	437
<b>16</b>	<b>MEF para materiais compostos laminados</b>	<b>439</b>
16.1	Relação tensão-deformação para materiais elástico-lineares anisotrópicos . . . . .	440
16.1.1	Constantes de engenharia para materiais ortotrópicos . . . . .	441
16.1.2	Lei de Hooke para uma lâmina ortotrópica . . . . .	443
16.1.3	Rotação da relação tensão-deformação . . . . .	445
16.2	Análise de um laminado . . . . .	447
16.3	Análise de compostos por elementos finitos – 1ª ordem . . . . .	450
16.3.1	Flexão estática de placas compostas . . . . .	450
16.3.2	Matriz de rigidez e vetor força do elemento . . . . .	452
16.3.3	Cálculo das tensões . . . . .	454
16.3.4	Resultados para laminado simétrico . . . . .	456
16.3.5	Segundas derivadas das funções de forma . . . . .	458
16.4	Frequências naturais e carregamentos dinâmicos . . . . .	460
16.4.1	Frequências naturais de vibrações . . . . .	462
16.5	Exercícios . . . . .	462
<b>17</b>	<b>Vibrações em sistemas de 1 grau de liberdade</b>	<b>463</b>
17.1	Equação do movimento em grau de liberdade . . . . .	465
17.2	Vibrações livres de sistema não amortecido . . . . .	466
17.3	Vibração livre de sistema amortecido . . . . .	468
17.3.1	Amortecimento $\zeta < 1$ . . . . .	470
17.3.2	Caso geral para amortecimento $\zeta < 1$ . . . . .	472
17.4	Carregamento harmônico . . . . .	474
17.4.1	Solução geral para amortecimento $\zeta < 1$ . . . . .	476
17.4.2	Carregamento harmônico com ângulo de fase . . . . .	477
17.5	Resposta a carregamentos não periódicos . . . . .	479
17.5.1	Resposta impulsiva . . . . .	481
17.5.2	Carregamento arbitrário . . . . .	482
17.5.3	Exemplo 17.1 - Sistema amortecido sob carregamento exponencial . . . . .	483
17.5.4	Propriedades e cálculo numérico da integral de Duhamel . . . . .	484
17.6	Exercícios . . . . .	486
<b>18</b>	<b>Elementos finitos em dinâmica</b>	<b>489</b>
18.1	Princípio de D'Alembert . . . . .	491
18.2	Princípio do Trabalhos Virtuais em barras . . . . .	492
18.2.1	Matriz massa do elemento de barra . . . . .	493
18.3	Equações do movimento de Lagrange . . . . .	495
18.3.1	Exemplo 18.1 - Matrizes para modelos de 2 e 3 elementos . . . . .	496
18.4	Matriz massa em elementos sólidos elásticos . . . . .	497
18.5	Matriz massa em elementos de viga . . . . .	499

18.6	Aplicação de condições de contorno . . . . .	500
18.7	Exercícios . . . . .	502
<b>19</b>	<b>Método de sobreposição modal</b>	<b>503</b>
19.1	Vibrações livres não amortecidas . . . . .	503
19.2	Propriedades dos autovetores e autovalores . . . . .	506
19.2.1	Os autovalores do sistema dinâmico algébrico são reais? . . . . .	506
19.2.2	Ortogonalidade . . . . .	508
19.2.3	Normalização e Ortonormalidade . . . . .	509
19.2.4	Autovetores linearmente independentes . . . . .	510
19.3	Exemplos . . . . .	511
19.3.1	Exemplo 19.1 - Frequências naturais . . . . .	511
19.3.2	Exemplo 19.2 - Modos de vibração . . . . .	512
19.3.3	Exemplo 19.3 - Normalização . . . . .	513
19.3.4	Exemplo 19.4 - Solução analítica de vibrações axiais . . . . .	513
19.3.5	Exemplo 19.4a - Solução analítica de vibrações em flexão - vigas em balanço e biapoiada . . . . .	516
19.4	Excitação inicial - Sistema não-amortecido . . . . .	517
19.4.1	Exemplo 19.5 - Resposta para deslocamento inicial pelo MEF . . . . .	521
19.4.2	Exemplo 19.6 - Solução analítica para barra sob deslocamento inicial . . . . .	523
19.5	Método de sobreposição modal geral . . . . .	524
19.5.1	Exemplo 19.7 - Solução pelo MEF de barra sob carga variável no tempo . . . . .	526
19.5.2	<b>Resumo do método de sobreposição modal</b> . . . . .	527
19.6	Estimativa do amortecimento . . . . .	529
19.6.1	Um grau de liberdade . . . . .	529
19.6.2	Métodos experimentais . . . . .	530
19.6.3	Método analítico 1 para determinação de $\mathbf{C}$ - Rayleigh . . . . .	531
19.6.4	Método analítico 2 para determinação de $\mathbf{C}$ . . . . .	534
19.6.5	Exemplo 19.8 - Determinação experimental da matriz de amortecimento . . . . .	535
19.6.6	Exemplo 19.9 - Vibração amortecida de barra sob deslocamento inicial . . . . .	535
19.6.7	Exemplo 19.10 - Vibração forçada amortecida pelo MEF . . . . .	536
19.7	Exercícios . . . . .	538
<b>20</b>	<b>Redução matricial e resposta harmônica</b>	<b>541</b>
20.1	Redução de Guyan . . . . .	541
20.1.1	Determinação eficiente da matriz de transformação . . . . .	543
20.1.2	Comentários gerais . . . . .	544
20.2	Análise de resposta harmônica . . . . .	545
20.2.1	Resposta harmônica via redução modal . . . . .	546
20.2.2	Exemplo 19.1 - Análise harmônica por redução modal . . . . .	547
20.2.3	Exemplo 19.2 - Solução analítica - resposta harmônica não amortecida em barra . . . . .	549
20.2.4	Resposta harmônica via redução de Guyan . . . . .	550
20.2.5	Exemplo 19.3 - Análise harmônica por redução de Guyan . . . . .	553
<b>21</b>	<b>Métodos de integração direta</b>	<b>557</b>
21.1	Método de diferenças centrais . . . . .	559
21.1.1	Caso $\mathbf{C} = \beta\mathbf{M}$ . . . . .	560
21.1.2	Condições de contorno fixo . . . . .	561
21.2	Método de diagonalização de massa (“mass lumping”) . . . . .	562
21.3	Método implícitos . . . . .	563
21.3.1	Método de Houbolt . . . . .	563
21.3.2	Método $\theta$ de Wilson . . . . .	565
21.3.3	Método de Newmark . . . . .	567
21.4	Estabilidade e precisão . . . . .	568

21.4.1	Estabilidade do método de diferenças centrais . . . . .	570
21.4.2	Estabilidade de outros métodos . . . . .	573
21.5	Exercícios . . . . .	573
<b>22</b>	<b>Plasticidade clássica</b>	<b>575</b>
22.1	Modelo plástico unidimensional sem encruamento . . . . .	577
22.1.1	Modelo 1-D de plasticidade com encruamento . . . . .	580
22.1.2	Matriz elastoplástica . . . . .	582
22.1.3	Algoritmos de integração . . . . .	583
22.1.4	Forma incremental das equações de elastoplasticidade . . . . .	584
22.1.5	Algoritmos de retorno . . . . .	585
22.1.6	Fluxograma 22.1 - Algoritmo de retorno do problema 1-D com encruamento misto linear . . . . .	587
22.1.7	Exemplo 22.1 - Ciclo de tensões . . . . .	588
22.2	Plasticidade Clássica 3-D . . . . .	592
22.2.1	Tensores de segunda e de quarta ordem . . . . .	592
22.2.2	Modelo contínuo de plasticidade infinitesimal . . . . .	593
22.2.3	Detalhamento das condições de Kunh-Tucker e de consistência . . . . .	596
22.2.4	Módulo tangente elastoplástico e $\gamma$ . . . . .	597
22.2.5	Plasticidade $J_2$ - superfície de von Mises . . . . .	599
22.3	Algoritmo de integração . . . . .	604
22.3.1	Integração - Modelo $J_2$ . . . . .	605
22.3.2	Cálculo do parâmetro de consistência $\Delta\gamma$ . . . . .	609
22.3.3	Tensor tangente elastoplástico algorítmico . . . . .	612
22.4	Elementos finitos em plasticidade . . . . .	616
22.4.1	O método de Newton-Raphson (N-R) . . . . .	617
22.4.2	Método BFGS . . . . .	619
22.4.3	Exemplo 22.2 - Método de N-R completo, N-R modificado e BFGS em 1D . . . . .	621
22.4.4	Solução do problema elastoplástico de EF por N-R . . . . .	622
22.4.5	Fluxograma geral de MEF elastoplástico . . . . .	626
22.4.6	Fluxograma 22.3 - Processamento local - Algoritmo de retorno (von Mises) . . . . .	627
22.4.7	Exemplo 22.3 - Plastificação parcial de tubo de parede espessa . . . . .	628
22.5	Exercícios . . . . .	631
<b>23</b>	<b>Métodos numéricos para autovalores</b>	<b>633</b>
23.1	Propriedades das matrizes $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$ e dos autoproblemas . . . . .	633
23.2	Método da potência ou de Stodola . . . . .	634
23.3	Método de iteração progressiva . . . . .	638
23.3.1	Sistemas desvinculados e <i>shift</i> de autovalores . . . . .	639
23.4	Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt . . . . .	640
23.5	Método do determinante . . . . .	642
23.5.1	Cálculo do determinante . . . . .	642
23.5.2	Método determinante por secante para autovalor . . . . .	643
23.5.3	Método da bisseção e teste de Sturm . . . . .	646
23.6	Método da iteração subespacial . . . . .	648
23.6.1	Quociente de Rayleigh . . . . .	649
23.6.2	Método de Rayleigh-Ritz . . . . .	650
23.6.3	Método da iteração subespacial . . . . .	652
23.7	Método de Lanczos . . . . .	657
23.7.1	Problema reduzido e matriz tridiagonal . . . . .	660
23.8	Sistemas lineares com matriz quadrada ou retangular, singular ou quase singular . . . . .	665
23.8.1	Matriz com posto completo . . . . .	666
23.8.2	Matriz singular ou de posto deficiente . . . . .	667
23.8.3	Sistemas lineares com matriz retangular . . . . .	669

23.8.4 Decomposição singular - SVD ( <i>Singular value decomposition</i> ) . . . . .	669
23.9 Exercícios . . . . .	676
<b>Bibliografia</b>	<b>677</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>683</b>





# Prefácio

Tradicionalmente, o trabalho de engenharia no dimensionamento de componentes estruturais, e sua análise quanto à adequação a solicitações mecânicas, sempre foi baseado no uso de formulações algébricas desenvolvidas para componentes de geometria e carregamentos simples, como barras, vigas, alguns tipos de placas circulares e retangulares, e alguns tipos de cascas cilíndricas e esféricas. Mesmo nesses casos, os carregamentos deviam ser simples, do tipo concentrado ou uniforme na maioria dos casos. Entretanto, a partir da década de 1960, com o desenvolvimento dos computadores, desenvolveu-se uma nova classe de métodos de análise, que pode ser geralmente denominada *métodos numéricos*, que visava incorporar na análise uma quantidade cada vez maior de detalhes de geometria e carregamento, tornando-a progressivamente mais capaz de simular os processos e fenômenos presentes num problema real. O principal e mais versátil desses métodos se constitui no chamado *método de elementos finitos*.

Até o início dos anos 1990, entretanto, a aplicação do método era restrita apenas a universidades, grandes corporações e centros de pesquisa, devido ao alto volume de computação envolvido, ao alto preço e às limitações da capacidade dos computadores da época. Durante os anos 1990, com a disseminação dos computadores pessoais e seu correspondente aumento de capacidade de processamento, os softwares comerciais de elementos finitos anteriormente desenvolvidos para computadores de grande porte nas décadas anteriores foram sendo adaptados para os PC's e seu preço reduzido. Dessa forma, tanto os computadores quanto os programas de elementos finitos tornaram-se disponíveis ao uso de qualquer engenheiro em seu trabalho diário. Essa nova realidade, por um lado, tornou obsoletos diversos dos antigos métodos de análise disponíveis, e por outro lado, passou a exigir um tipo novo de qualificação ao engenheiro. Apenas a partir da década de 1990 as escolas de engenharia passaram a oferecer, de forma sistemática, disciplinas de formação em análise estrutural numérica. Por outro lado, as escolas que buscam uma atualização em seu currículo encontram séria dificuldade em obter material didático adequado. Em geral os livros existentes são compêndios volumosos, escritos em formato não didático, adequados a um público já especialista, escrito em língua estrangeira e sem exemplos e sem exercícios propostos que auxiliem no processo ensino-aprendizagem. Este livro visa atender a essas deficiências: procura-se usar uma linguagem o mais simples e clara possível e as deduções são feitas incluindo o maior número possíveis de etapas. A exposição de todos os conceitos é sempre acompanhada por exemplificação detalhada, que permite fácil acompanhamento pelo leitor.

O material do livro é agrupado em três grandes partes. A **primeira parte** consiste numa revisão de conceitos que normalmente os engenheiros em seus cursos de graduação veem nas disciplinas de *Resistência dos Materiais* ou *Mecânica dos Sólidos*, isto é, conceitos como o de tensão, deformação, equações de equilíbrio, transformação de tensões e critérios de falha. A razão da presença deste material, além de permitir fácil referência a partir do restante do texto, é a seguinte. Observa-se que o material da área de Resistência dos Materiais é, normalmente, apresentado aos alunos de maneira segmentada, baseada em análise de componentes simples, como barras e vigas, obscurecendo a forte correlação dos conceitos subjacentes. Assim, por exemplo, apesar de que os conceitos de tensão e tensor tensão tenha sido, provavelmente, apresentados e desenvolvidos, essa exposição se concentra geralmente a uma ou duas aulas de graduação. Em geral, durante todo o desenrolar das disciplinas de Resistência dos Materiais, o aluno lida apenas com uma única componente desse tensor, e mesmo esta, é dependente de apenas uma única coordenada. Assim, o objetivo da exposição desse conteúdo aqui consiste em prover uma visão mais abrangente do assunto e das formulações matemáticas,

iniciando o hábito de uma interpretação tridimensional das grandezas e dos fenômenos. Por exemplo, a transformação de tensões abandonará a restrição bidimensional e sua representação de círculo de Mohr, e será vista através da formulação tridimensional de transformação de tensões e de conceitos de autovalores e autovetores. Também, conceitos que serão essenciais nos capítulos seguintes, como mudança de base, notação indicial e regra do somatório são apresentados previamente na primeira parte do texto.

A **segunda parte** do texto apresenta a análise estrutural realizada através do método de elementos finitos. Aqui o método é introduzido paralelamente em duas formas distintas. Primeiramente nos Capítulos 5 e 6, o método é apresentado usando conceitos e ideias mecânicas bastante intuitivas com as quais um leitor normalmente é familiarizado: os comportamentos de barras e vigas sob flexão. Assim chega-se, de forma bastante natural, à estrutura algébrica básica do método, isto é, aos conceitos de matriz de rigidez, de vetores de deslocamentos nodais e de forças nodais. Nesta forma, o método tem todas as características daquilo que nas décadas de 1960 e 1970 chamava-se, em alguns círculos da engenharia estrutural, de “análise matricial de estruturas”. Sem dúvida que os procedimentos usados ali tem sua aplicabilidade restrita apenas àqueles tipos de problemas. São, em geral, impossíveis de serem estendidos a problemas planos ou tridimensionais como os de placas, cascas ou sólidos, ou à modelagem de outros fenômenos físicos. Dessa forma, ainda nessa parte do texto, o método é re-introduzido no Capítulo 7, utilizando agora procedimentos consistentes de mecânica do contínuo. Nesse capítulo, o problema de barras ainda é usado como pano de fundo, de forma que o leitor possa comparar resultados chaves com aqueles previamente obtidos no Capítulo 5. Entretanto, uma vez que o método foi bem apresentado, os procedimentos são prontamente estendidos a problemas mais complexos, como o de análise de tensões de corpos elásticos tridimensionais e de placas, nos capítulos seguintes. Adicionalmente, a modelagem de problemas de transferência de calor é apresentada nessa parte do texto, num capítulo que também pode ser usado como material inicial no estudo do Método de Elementos Finitos.

A **terceira parte** do texto faz aplicações do método geral delineado na parte dois. Assim, enquanto que a parte dois considera apenas o problema da resposta elástica estática do corpo, na parte três diferentes fenômenos são abordados, como análise dinâmica e plasticidade.

Ao final de cada capítulo, uma lista de exercícios é proposta como forma de fixar os conteúdos e desenvolver a autoconfiança. A maioria dos exemplos pode ser resolvida usando um software comercial como o Ansys<sup>®</sup> ou o Abaqus<sup>®</sup> dentre outros, além de manipuladores simbólicos como o Mathematica<sup>®</sup> ou Maple<sup>®</sup>. Adicionalmente, diversos problemas são propostos para o estudante adquirir destreza em programação dos algoritmos. O trabalho do engenheiro no projeto e análise de estruturas através de elementos finitos é sempre feito baseado em um programa já disponível, quer seja um código próprio ou um código comercial de grande porte. Os códigos comerciais possuem a vantagem de permitir análise de diversos tipos de fenômenos e, principalmente, possuem interfaceamento gráfico para manipulação de dados de geração de dados e visualização de resultados. É uma característica marcante do método a de necessitar quantidades muito grandes desses dados, de forma que os programas de elementos finitos possuem uma vasta quantidade de procedimentos e comandos que permitam sua operação. Essa quantidade de procedimentos implica sempre numa maior ou menor complexidade em sua operação e tempo de aprendizagem. Assim, o engenheiro que deseja qualificar-se como analista estrutural enfrenta múltiplas exigências em seu aprendizado: ele deve adquirir conhecimento teórico sobre o método, através de cursos como o descrito no presente texto, e simultaneamente, deve adquirir destreza na operação de um ou mais programas comerciais. Finalmente, no âmbito de pesquisa, é necessária a capacidade de programação.

## Origens históricas do método de elementos finitos

A origem do método de elementos finitos pode se tornar difícil de identificar, pois alguns trabalhos matemáticos, espalhados desde o século 18 até meados do 20, podem ser vistos como apresentando algumas das ideias do método. Existem diversas tentativas de escrever a história do método e, curiosamente, sob certos aspectos, elas apresentam diferenças no que são considerados os pontos mais importantes. Alguns artigos de levantamento históricos são os de Oden, 1990 [78] e o de Clough e Wilson, 2010 [24] que traça uma história até o início os anos 1970.

Em geral, a comunidade de engenharia e de matemática costuma marcar dois trabalhos como a origem “oficial” do método. O primeiro é um artigo de Courant, de 1943 [27] (e similarmente o de Polya em 1952 [84]), em cujo apêndice ele descreve uma aproximação por funções lineares por partes para um problema de Dirichlet usando triângulos. É interessante observar que o primeiro computador eletrônico, digital e programável, de uso público, o ENIAC, foi colocado em operação dois anos depois, em final de 1945, na Universidade da Pensilvânia. Os primeiros dois computadores da história, a bomba de Turing e o Colossus, haviam sido desenvolvido e construídos na Inglaterra durante a segunda guerra, porém foram construídos sob segredo de guerra, sendo o primeiro desmontado logo em seguida.

O segundo trabalho chave é o célebre artigo de Turner, Clough, Martin e Topp, de 1956, [103] em que uma aproximação local foi obtida de maneira consistente para as equações de elastoestática, já com o uso de algumas estratégias essenciais ao MEF. Esse trabalho ainda obtinha as equações elementares sem o uso de princípio variacional. O próprio nome, *métodos de elementos finitos*, foi cunhado apenas em 1960 pelo próprio Clough [23]. A década passou a ser ocupada por aplicações do método a todos os problemas com princípio variacional conhecido. Nesse período era considerado que o método era limitado apenas a problemas auto adjuntos (baseados em operadores simétricos).

Já no final dos anos 1960 tornou-se aparente que o método podia também ser aplicado a problemas com operadores não simétricos e com diversos tipos de não linearidade, sem nenhuma dificuldade formal. Assim, problemas de mecânica dos fluidos começaram a ser tratados pelo método, a partir das equações completas de Navier-Stokes [80][79]. Também na década de 1970 os desenvolvimentos matemáticos das décadas anteriores sobre equações diferenciais começaram a ser dirigidos ao MEF, e começaram a surgir os teoremas de convergência e estimativas de erro.

## Lista de Símbolos

$T$	- transposta de uma matriz quando super-índice.
$\mathcal{T}$	- térmico, quando super-índice.
$\forall$	- para qualquer.
$\bullet$	- barra indica grandeza num segundo sistema de coordenadas, - ou indica valor prescrito de uma variável no contorno, - ou indica modificação da grandeza $\cdot$ .
$(\cdot)_{,x}$	- diferenciação de uma função, $\partial(\bullet)/\partial x$ .
$(\cdot)', (\cdot)''$	- primeiras derivadas em $x$ .
$\hat{\cdot}, \delta(\cdot)$	- função peso, primeira variação.
$\Delta$	- variação finita de uma grandeza.
$a \equiv b$	- $a$ é definido por $b$ .
<i>sse</i>	- se e somente se.
$\partial\Omega_e \setminus \Gamma_f$	- parcela do conjunto $\partial\Omega_e$ não contido em $\Gamma_f$ .
<b>a</b> e <b>A</b>	- negritos em minúsculos e maiúsculos em geral indicam vetor e tensor respectiv.
{ }	- componentes de um arranjo unidimensional de valores ou funções. Tb. vetores.
[ ]	- componentes de um arranjo bidimensional de valores ou funções. Tb. matrizes.
$\Omega, \Gamma$	- domínio e contorno de um corpo.
$\Sigma$ e $\partial\Sigma$	- área de seção transversal (em EPT e EPD, por exemplo) e seu contorno.
$\cdot$	- produto escalar entre vetores (pg.7) e entre tensores (pg.12).
:	- produto interno de tensores, pg.12.
$\otimes$	- produto tensorial, pg 10.
$\times$	- produto vetorial.
$\delta_{ij}$	- operador delta de Kronecker.
$\delta(\mathbf{x}_p)$	- função generalizada delta de Dirac em $\mathbf{x}_p$ .
$e_{ijk}$	- símbolo de permutação, pg.9
$R, R^d$	- espaço dos números reais, e espaço de dimensão $d$ , onde $d = 1, 2$ ou $3$ .
<i>Kin</i>	- conjunto das funções cinematicamente admissíveis.
<i>Var</i>	- espaço das funções das variações.
$N_{nos}$	- número de nós de uma malha.
$N_{gln}$	- número de graus de liberdade por nó.
$N_{ne}$	- número de nós do elemento.
$N_{gle}$	- número de graus de liberdade do elemento.
$N_{el}$	- número de elementos no modelo.
<b>n</b>	- vetor normal unitário.
<b>t</b>	- vetor tensão num ponto, força por unidade de área, eq.(2.15).
<b>1</b>	- tensor identidade de segunda ordem.
<b>I</b>	- tensor identidade de quarta ordem.
<b>K, U, F<sup>a</sup>, R</b>	- matriz de rigidez global, vetor deslocamento nodal, nodais vetor força aplicada conhecida e vetor de reações nodais, eqs.(5.22), (10.13).
<b>B</b>	- matriz de deformações do elemento finito.
<b>x</b>	- vetor posição de um ponto, com coordenadas cartesianas $(x_1; x_2; x_3)$ ou $(x, y, z)$ .
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	- eixos locais em elementos de barra, viga e casca.