

Capítulo 11

Teoria de placas

Seja um sólido limitado por duas superfícies separadas por uma distância h , denominada *espessura*. O lugar geométrico dos pontos médios da espessura é a *superfície média*. Se o sólido tem função estrutural e h é pequeno em relação às dimensões da superfície média, o sólido é dito uma *estrutura de superfície*. As estruturas de superfície são denominadas *placas* ou *casca*s, dependendo se a superfície média é plana ou curva, respectivamente (veja Figura 11.1).

Assim como as vigas, as placas podem ser estudadas satisfatoriamente usando teorias simplificadas. O fato de uma dimensão, a espessura, ser bem menor do que as dimensões da superfície média permite descrever o comportamento das placas, tridimensionais por natureza, por meio de teorias bidimensionais. Este capítulo apresenta duas teorias de placas.

A primeira teoria apresentada, a mais simples de todas, é conhecida como *teoria clássica de placas* ou, simplesmente, *teoria de placas de Kirchhoff*, por ter sido firmemente fundamentada por Kirchhoff (1850). É uma extensão da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. A segunda teoria apresentada difere da primeira por considerar a deformação de cisalhamento transversal. Existem várias teorias que consideram essa deformação. A que apresentamos, certamente a mais simples dentre elas, é às vezes conhecida como *teoria de placas de Reissner¹-Mindlin²*. É uma extensão da teoria de vigas de Timoshenko. A teoria fundamenta-se em contribuições dadas principalmente por Reissner (1945) e Mindlin (1951). Szilard (2004) traz um relato histórico sobre essas duas teorias.

11.1 Relações deformação-deslocamento

Assim como na Seção 8.1, vamos denominar u_x, u_y, u_z as componentes do campo de deslocamento no sistema xyz e $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}/2, \gamma_{xz}/2, \gamma_{yz}/2$ as componentes independentes do tensor deformação. Vamos também considerar que os gradientes do deslocamento sejam pequenos em módulo comparados à unidade de maneira que as relações (8.1) possam ser empregadas. Particularizemos essas relações para placas, da mesma forma como fizemos na Seção 8.1 para vigas, utilizando a hipótese de Kirchhoff

¹Max Erich Reissner, matemático e engenheiro alemão nascido em Aachen em 1913, falecido em San Diego em 1996.

²Raymond David Mindlin, engenheiro civil norte-americano nascido em Nova Iorque em 1906, falecido em Hanover (Estados Unidos) em 1987.

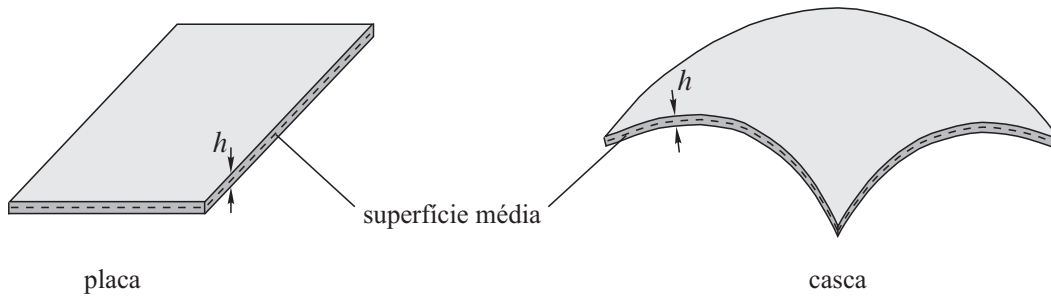


Figura 11.1 Estruturas de superfície.

ou de Reissner-Mindlin.

Kirchhoff Seja a placa da Figura 11.2a com a superfície média situada no plano xy . A hipótese de Kirchhoff admite que um segmento de reta normal à superfície média antes da deformação permanece, após a deformação:

- (a) reto;
- (b) normal à superfície deformada;
- (c) com o mesmo comprimento.

Um ponto A sobre a superfície média desloca-se com a deformação para a e um ponto B , sobre a mesma normal à superfície média indeformada que passa por A , desloca-se para b . A Figura 11.2a destaca a translação e a rotação sofrida pelo segmento AB , que se mantém reto conforme a suposição (a) de Kirchhoff. Os ângulos indicados são medidos em relação ao eixo \bar{z} paralelo a z . O segmento, que na posição indeformada tem comprimento z , após a deformação rotaciona de um ângulo $|\boldsymbol{\beta}|$ mas mantém o mesmo comprimento z , conforme a suposição (c). A projeção da rotação nos planos xz é denotada por β_x e no plano yz por β_y .

Considerando que a rotação seja pequena, pois as relações deformação-deslocamento linearizadas (8.1) assim supõem, podemos expressar matematicamente a rotação pelo vetor $\boldsymbol{\beta} = -\beta_y \mathbf{e}_x + \beta_x \mathbf{e}_y$. O ponto B , que dista $z\mathbf{e}_z$ do ponto A , sofre o mesmo deslocamento $\mathbf{u}_A = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$ do ponto A acrescido da parcela $\boldsymbol{\beta} \times z\mathbf{e}_z$ que provém da rotação:

$$\mathbf{u}_B(x, y, z) = \mathbf{u}_A(x, y) + \boldsymbol{\beta}(x, y) \times z\mathbf{e}_z. \quad (11.1)$$

Desenvolvendo (11.1) e expressando o resultado em termos das componentes de \mathbf{u}_B , obtemos

$$u_x(x, y, z) = u(x, y) + z\beta_x(x, y) \quad u_y(x, y, z) = v(x, y) + z\beta_y(x, y) \quad u_z(x, y, z) = w(x, y). \quad (11.2)$$

Admitindo que o segmento AB se mantenha normal à superfície média, conforme a suposição (b) (veja Figura 11.2b), então $\beta_x \approx -\partial w / \partial x$ e $\beta_y \approx -\partial w / \partial y$. O campo de deslocamento fica assim reduzido a

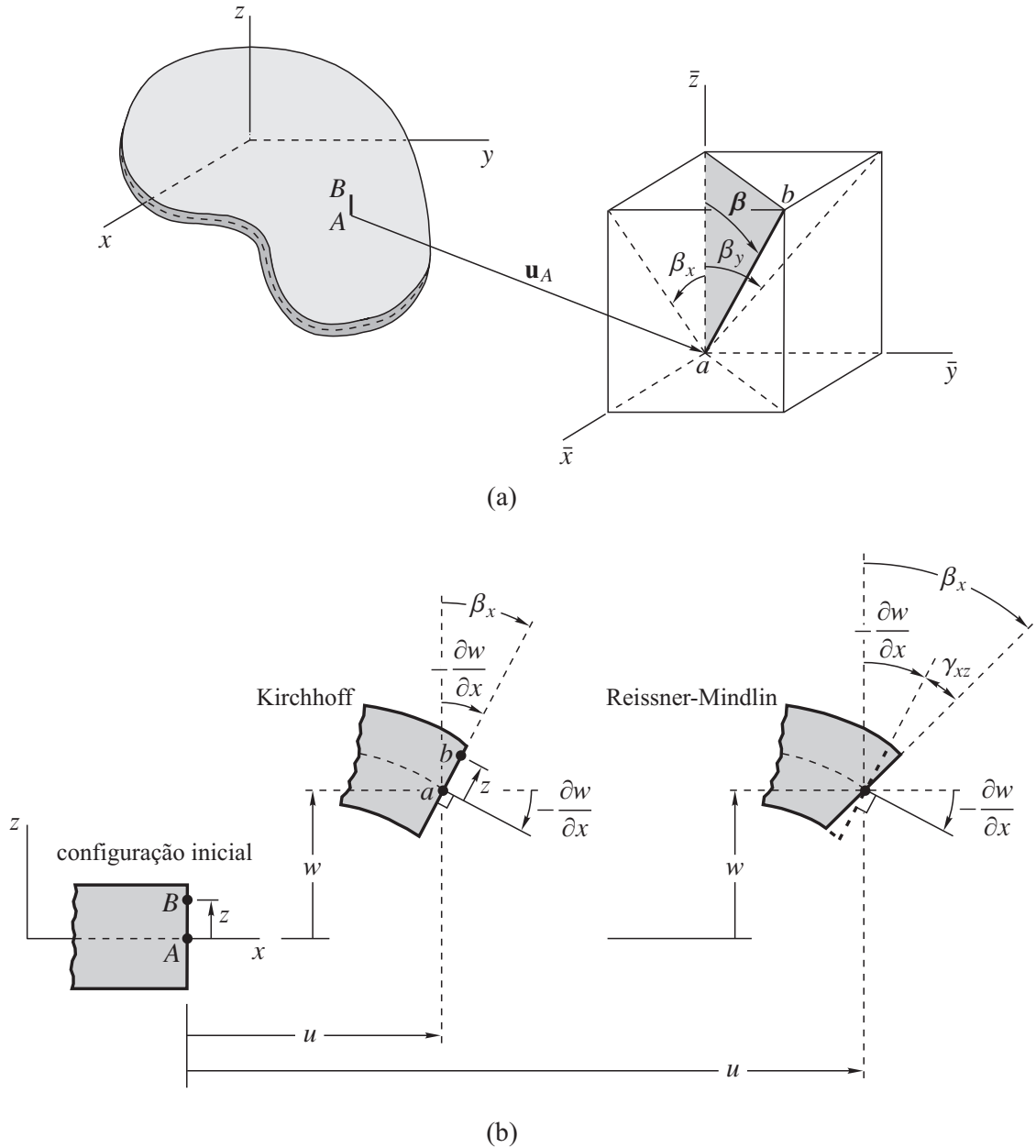


Figura 11.2 (a) Com a deformação, um segmento de reta AB normal à superfície média da placa, inicialmente paralelo a z , translada e rotaciona até a posição ab (os eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} são paralelos aos eixos x , y e z , respectivamente); (b) projeção do segmento AB no plano xz na configuração inicial e na configuração atual, após a placa deformar-se sob pequenas rotações e sob a hipótese de Kirchhoff ou de Reissner-Mindlin.

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{11.3}$$

que é de fácil interpretação geométrica usando a projeção do movimento nos planos xz (veja Figura 11.2b) e yz .

Substituindo (11.3) em (8.1),

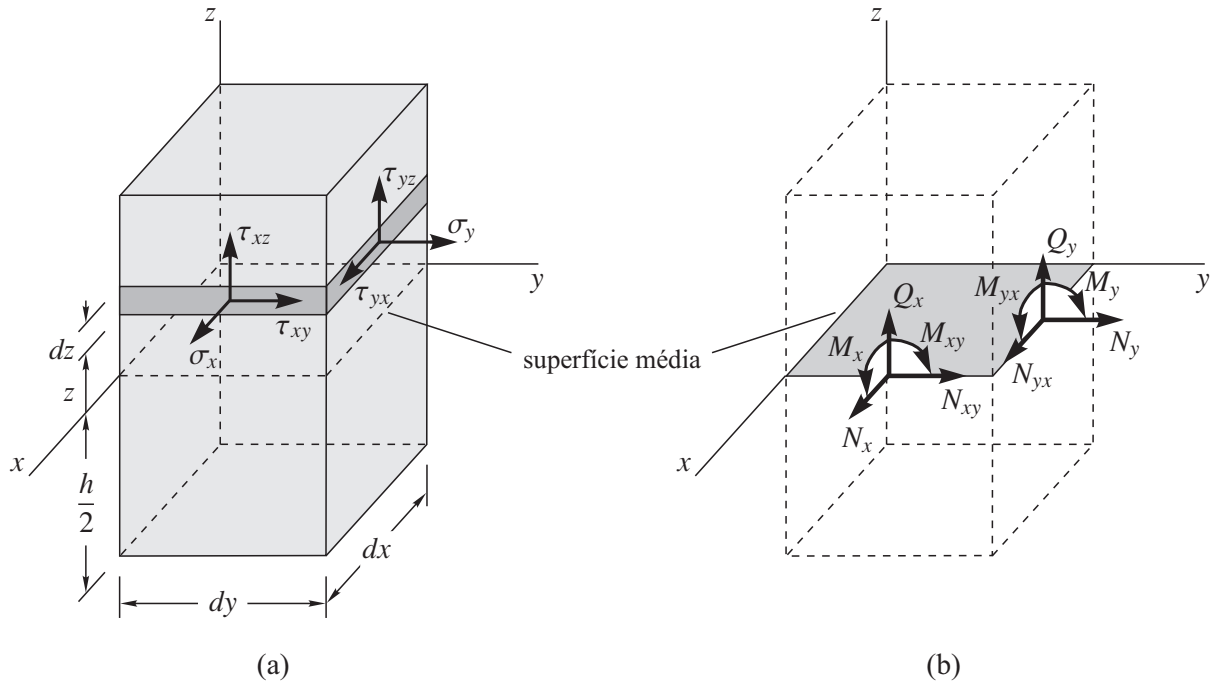


Figura 11.3 Elemento de placa: (a) tensões; (b) esforços (tensões generalizadas).

A Figura 11.3a mostra as tensões que atuam num elemento de placa e a Figura 11.3b mostra os esforços (tensões generalizadas) equivalentes que atuam na superfície média. As forças de membrana N_x , N_y (normais) e $N_{xy} = N_{yx}$ (de cisalhamento), os momentos M_x , M_y (fletores) e $M_{xy} = M_{yx}$ (torçores), e as forças cortantes Q_x , Q_y são definidos por unidade de comprimento da superfície média. As relações $N_{xy} = N_{yx}$ e $M_{xy} = M_{yx}$ decorrem de $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Perceba que δW_i , com base no campo de deslocamento adotado, não identifica em (11.12) os momentos M_{xz} e M_{yz} em torno do eixo z . Esses momentos são, de fato, nulos e por isso não deveriam mesmo ter sido mostrados na Figura 11.3b. Uma forma de justificar essa ausência é considerando que as tensões, a menos de um infinitésimo de ordem superior, têm distribuição uniforme ao longo da largura de cada face do elemento de placa da Figura 11.3a. O momento M_{xz} devido a σ_x e M_{yz} devido a σ_y seriam, portanto, nulos (seriam também nulas as contribuições de τ_{xz} e τ_{yz} em M_{xy} e M_{yx} , respectivamente).

Vamos supor que o carregamento externo que atua sobre a placa seja constituído pela força de volume $[b_x \ b_y \ b_z]$ e por forças de superfície distribuídas na face inferior $[q_{1x} \ q_{1y} \ q_{1z}]$, na face superior $[q_{2x} \ q_{2y} \ q_{2z}]$ e nas bordas $[t_n \ t_{ns} \ t_{nz}]$. A Figura 11.4a destaca uma porção da borda da placa, definida pelo eixo normal n . O eixo tangencial s é escolhido de modo que o sistema nsz seja dextrogiro. O trabalho virtual realizado pelo carregamento é dado por

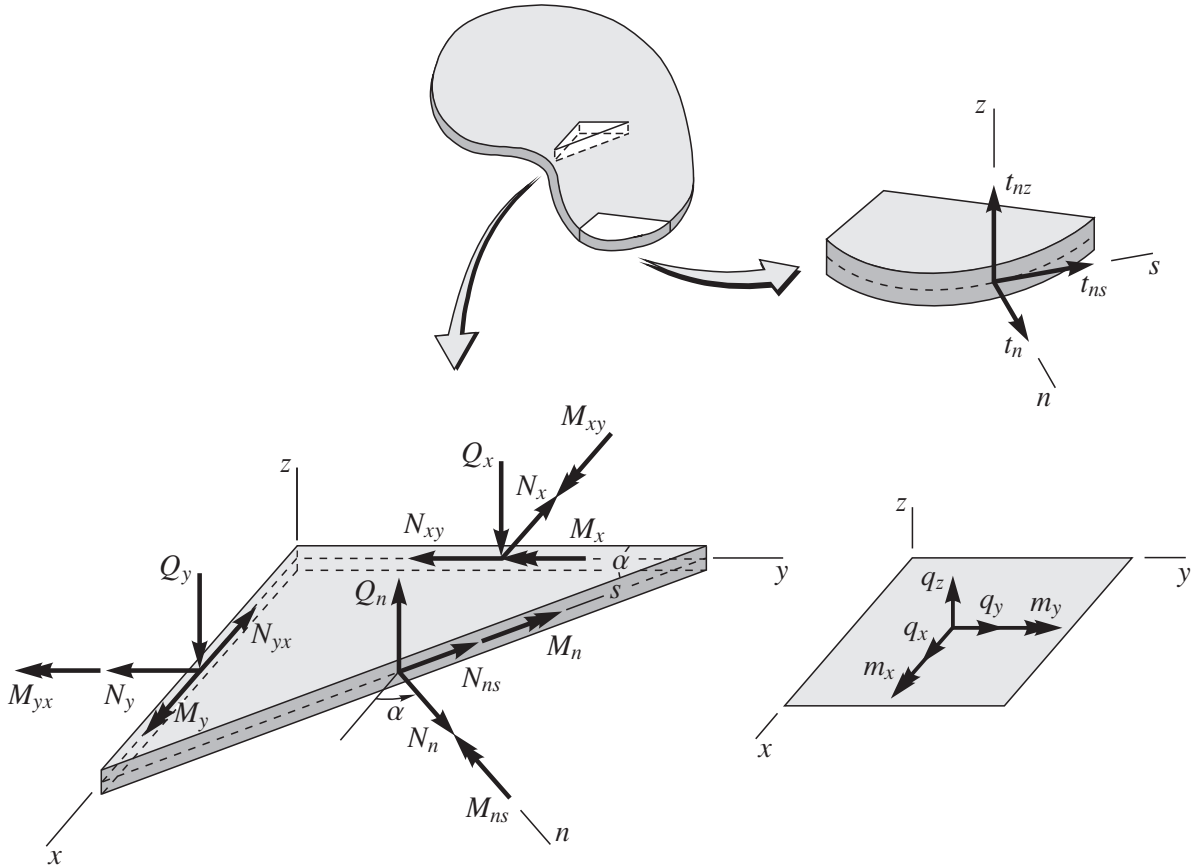


Figura 11.4 Forças de superfície t_n , t_{ns} , t_{nz} que atuam na borda da placa; esforços \mathbf{N} , \mathbf{Q} , \mathbf{M} ; forças q_x , q_y , q_z e momentos m_x , m_y por unidade de área da superfície média.

$$\begin{aligned}
 \delta W_e = & \iiint (b_x \delta u_x + b_y \delta u_y + b_z \delta u_z) dx dy dz \\
 & + \iint \left[q_{1x} \delta u_x(x, y, -\frac{h}{2}) + q_{1y} \delta u_y(x, y, -\frac{h}{2}) + q_{1z} \delta u_z(x, y, -\frac{h}{2}) \right. \\
 & \quad \left. + q_{2x} \delta u_x(x, y, \frac{h}{2}) + q_{2y} \delta u_y(x, y, \frac{h}{2}) + q_{2z} \delta u_z(x, y, \frac{h}{2}) \right] dx dy \\
 & + \int_{\Gamma_t} \int_{-h/2}^{h/2} (t_n \delta u_n + t_{ns} \delta u_s + t_{nz} \delta u_z) dz ds, \tag{11.13}
 \end{aligned}$$

onde Γ_t denota o contorno da superfície média que intercepta a borda com carregamento externo aplicado, e δu_n e δu_s são as componentes do deslocamento virtual nas direções de n e s , respectivamente.

Com base em (11.6),

$$\begin{aligned}
 \delta u_x = \delta u + z \delta \beta_x & & \delta u_y = \delta v + z \delta \beta_y & & \delta u_z = \delta w \\
 \delta u_n = \delta u_{0n} + z \delta \beta_n & & \delta u_s = \delta u_{0s} + z \delta \beta_s & & \tag{11.14}
 \end{aligned}$$

onde $\delta u_{0n}(x, y) = \delta u_n(x, y, 0)$ e $\delta u_{0s}(x, y) = \delta u_s(x, y, 0)$. Substituindo (11.14) em (11.13) e, em seguida, integrando em z de $-h/2$ a $h/2$,

$$\begin{aligned}
 \delta W_e = & \iint (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w - m_x \delta \beta_y + m_y \delta \beta_x) dx dy \\
 & + \int_{\Gamma_t} (\bar{N}_n \delta u_{0n} + \bar{N}_{ns} \delta u_{0s} + \bar{Q}_n \delta w + \bar{M}_n \delta \beta_n + \bar{M}_{ns} \delta \beta_s) ds \tag{11.15}
 \end{aligned}$$

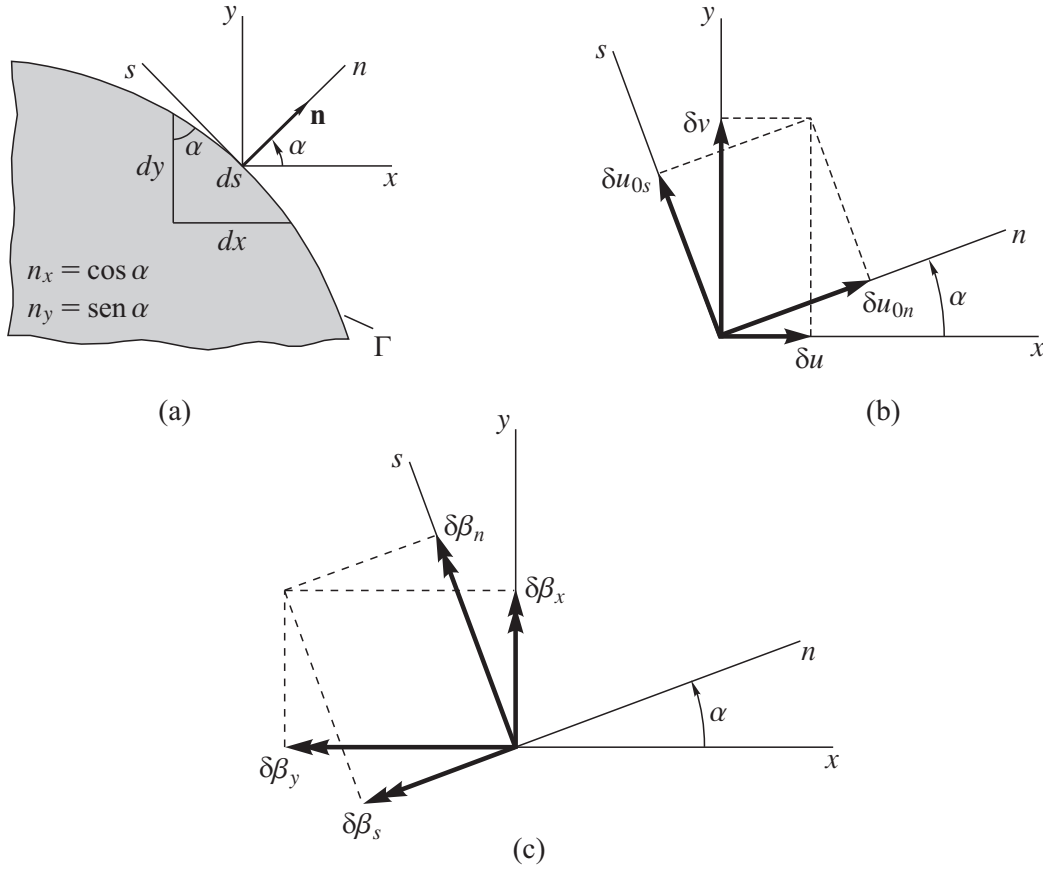


Figura 11.5 (a) Eixos xy e ns num contorno curvo; (b) componentes do deslocamento virtual da superfície média ao longo dos eixos x , y , n e s ; (c) componentes da rotação virtual da normal à superfície média em torno dos eixos x , y , n e s .

vetor unitário \mathbf{n} . Procedendo a integração para os demais termos em (11.18), a expressão reduz-se a

$$\begin{aligned}
 & \iint [(N_{x,x} + N_{xy,y} + q_x) \delta u + (N_{xy,x} + N_{y,y} + q_y) \delta v + (Q_{x,x} + Q_{y,y} + q_z) \delta w \\
 & \quad + (M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + m_y) \delta \beta_x + (M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y - m_x) \delta \beta_y] dx dy \\
 & - \int_{\Gamma} (N_x \delta u + N_{xy} \delta v + Q_x \delta w + M_x \delta \beta_x + M_{xy} \delta \beta_y) n_x ds \\
 & - \int_{\Gamma} (N_{xy} \delta u + N_y \delta v + Q_y \delta w + M_{xy} \delta \beta_x + M_y \delta \beta_y) n_y ds \\
 & + \int_{\Gamma_t} (\bar{N}_n \delta u_{0n} + \bar{N}_{ns} \delta u_{0s} + \bar{Q}_n \delta w + \bar{M}_n \delta \beta_n + \bar{M}_{ns} \delta \beta_s) ds = 0. \tag{11.20}
 \end{aligned}$$

As integrais de contorno podem ser simplificadas tendo em vista as relações (veja Figuras 11.5b,c):

$$\begin{aligned}
 \delta u &= \delta u_{0n} \cos \alpha - \delta u_{0s} \sin \alpha & \delta v &= \delta u_{0n} \sin \alpha + \delta u_{0s} \cos \alpha \\
 \delta \beta_x &= \delta \beta_n \cos \alpha - \delta \beta_s \sin \alpha & \delta \beta_y &= \delta \beta_n \sin \alpha + \delta \beta_s \cos \alpha. \tag{11.21}
 \end{aligned}$$

A substituição de (11.21) nas integrais de contorno em (11.20), considerando que os deslocamentos virtuais são nulos na região Γ_u do contorno onde os deslocamentos são conhecidos ($\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$), conduz a

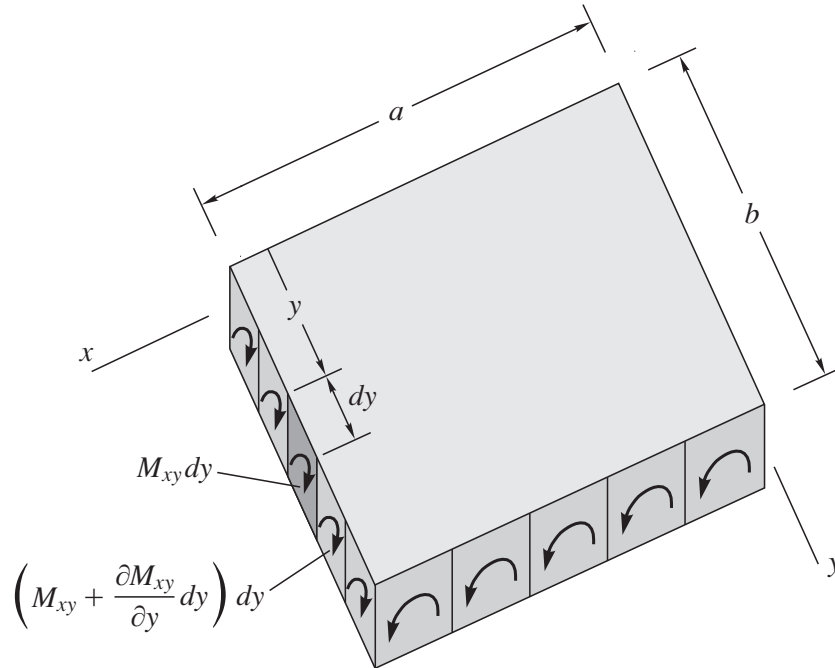


Figura 11.6 Bordas sob momento torçor.

se o momento torçor, digamos, $M_{xy}dy$ que atua num elemento da borda $x = a$ de comprimento dy e produzido pela tensão de cisalhamento horizontal τ_{xy} , fosse substituído por duas forças verticais M_{xy} separadas de dy (veja Figura 11.7). Tal substituição não alteraria o valor do momento torçor e provocaria apenas uma mudança localizada na distribuição das tensões numa região muito próxima à borda da placa, como nos assegura o princípio de Saint-Venant. Procedendo com essa substituição ao longo de todos os elementos dy da borda $x = a$, vemos que a distribuição do momento torçor M_{xy} é estaticamente equivalente a uma força cortante distribuída $\partial M_{xy}/\partial y$ e a duas forças M_{xy} concentradas nas extremidades da borda. Num canto da placa a força M_{xy} de uma borda adiciona-se à força M_{yx} da borda perpendicular, resultando numa força de canto com intensidade $M_{xy} + M_{yx} = 2M_{xy}$ (veja Figura 11.8). Portanto, a força cortante efetiva na borda $x = a$ é definida como sendo

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (11.50)$$

Analogamente,

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (11.51)$$

é a força cortante efetiva na borda $y = b$. Para uma borda genérica com direção normal n , a força cortante efetiva é dada por (11.45).

Comentários 11.2:

- Consideremos uma placa simplesmente apoiada sob uma carga $q_z = -q_0$ uniformemente distribuída. O aparecimento das forças concentradas $2M_{xy}$ ou, mais precisamente, das reações dirigidas de cima para baixo nos cantos da placa (veja expressão (11.103)) pode ser fisicamente percebido pela tendência que essa placa apoiada nas bordas, mas não ancorada nelas, teria de

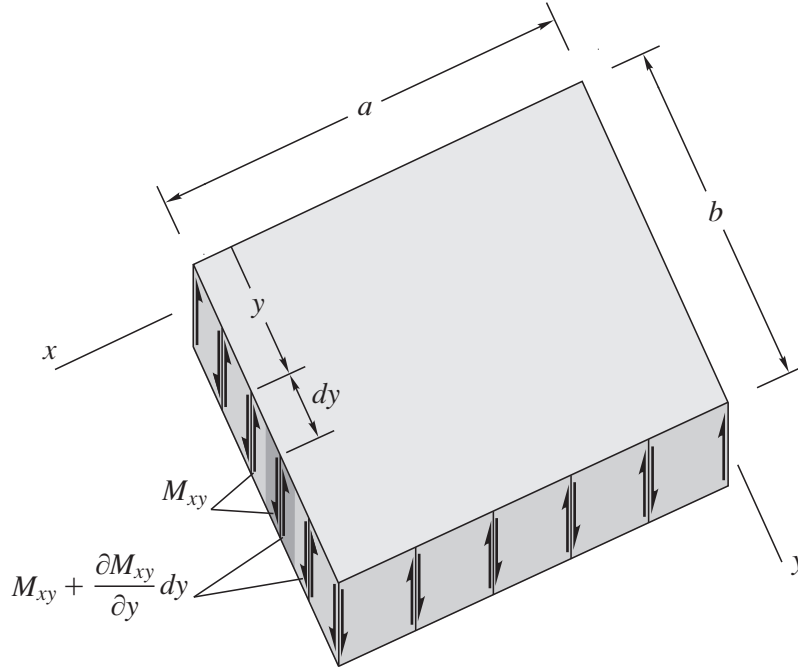


Figura 11.7 Forças verticais estaticamente equivalentes a M_{xy} .

levantar-se nos cantos. As forças $2M_{xy}$ aparecem exatamente para impedir esse levantamento (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959).

- Quando especificamos a força cortante efetiva V_n numa borda, devemos ficar atentos se é também necessário especificarmos M_{ns} nas suas extremidades. Ilustremos a situação por meio da placa retangular indicada na Figura 11.9. Nas bordas livres AB e BD , as condições (11.49) aplicam-se. Existe “singularidade” no ponto extremo A da borda AB e no ponto extremo D da borda BD , no sentido de que as duas condições de canto $w = 0$ e $M_{xy} = 0$ são conhecidas simultaneamente em ambos os pontos. Nesses casos, recomenda-se deixar a condição essencial prevalecer. Ou seja, $w = 0$ é imposto no ponto A pela borda engastada AC e no ponto D pela borda simplesmente apoiada CD . A condição de canto $M_{xy} = 0$ deve ser imposta, no entanto, às bordas AB e BD em seus pontos extremos B . Vale a pena lembrar que essa condição é natural quando o problema é formulado pelo princípio dos deslocamentos virtuais.

- É de se esperar que as forças verticais indicada na Figura 11.8 sejam autoequilibradas:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} ds + 2 M_{ns}|_{\text{cantos}} = 0. \quad (11.52)$$

Assim, do equilíbrio de translação na direção de z ,

$$\int_{\Gamma} V_n ds + 2 M_{ns}|_{\text{cantos}} + \iint q_z dx dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma} Q_n ds + \iint q_z dx dy = 0. \quad (11.53)$$

- A força cortante e o momento torçor numa placa de Reissner-Mindlin podem apresentar rápida variação numa estreita faixa, de largura aproximadamente igual à espessura da placa, próxima às bordas (Kant e Hinton, 1983; Hinton e Huang, 1986). Essa rápida variação, conhecida por *camada limite* e muito familiar aos que lidam com escoamento de fluidos viscosos, não ocorre

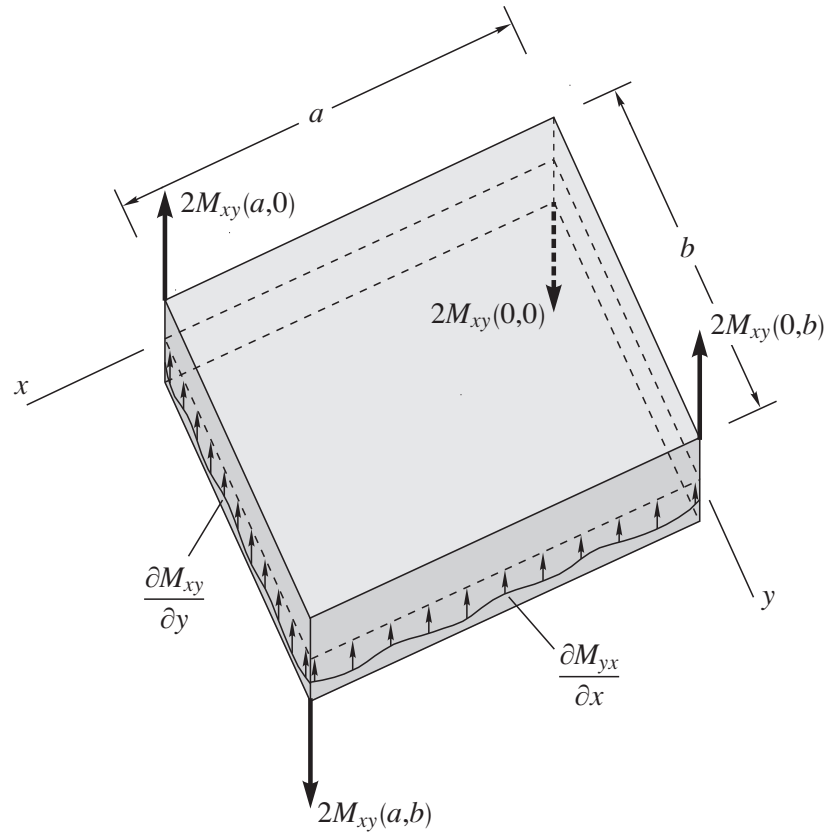


Figura 11.8 Forças verticais distribuídas e concentradas estaticamente equivalentes à distribuição de M_{xy} .

numa placa de Kirchhoff. Por ser também detectada num modelo tridimensional da placa (Rao *et al.*, 1992), a ocorrência da camada na teoria de Reissner-Mindlin mostra ser algo fisicamente realista. A camada limite é nula nas proximidades de uma borda reta simplesmente apoiada “hard” ou engastada “soft”, mas intensa nas proximidades de uma borda simplesmente apoiada “soft” ou livre. Para as demais condições de contorno, a camada limite tem comportamento intermediário (Arnold e Falk, 1989; Häggblad e Bathe, 1990). Quanto mais intensa for a camada limite, mais os resultados previstos pela teoria de Reissner-Mindlin para a força cortante e momento torçor diferenciam-se daqueles da teoria de Kirchhoff na região da camada quando $h \rightarrow 0$ (veja Problema 11.12).

- Antecipamos que não haverá equações constitutivas envolvendo as forças cortantes Q_x e Q_y na teoria de Kirchhoff porque não são tensões generalizadas nessa teoria. Essas forças podem ser avaliadas usando as duas últimas equações de equilíbrio (11.29):

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + m_y \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - m_x. \quad (11.54)$$

11.3 Equações constitutivas

Para um material homogêneo, ortotrópico e hiperelástico linear, com os eixos principais do material coincidindo com os do sistema xyz adotado para a placa, as equações constitutivas são dadas em

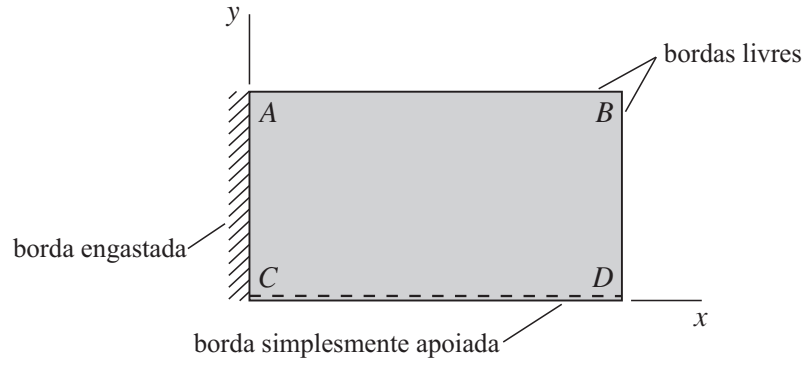


Figura 11.9 Placa de Kirchhoff na qual a condição de canto $M_{xy} = 0$ deve ser imposta às bordas AB e BD em seus pontos extremos B .

(4.47). Devemos nessas equações trocar os índices $1 \rightarrow x$, $2 \rightarrow y$ e $3 \rightarrow z$ nas componentes da tensão e deformação.

Reissner-Mindlin Supor que ϵ_z é nula ($\delta\epsilon_z = 0$) elimina de δW_i a componente σ_z e, conseqüentemente, das equações de equilíbrio no domínio. Por coerência, σ_z deveria também ser eliminada das equações constitutivas (4.47). Poderia ser argumentado de que uma eliminação consistente deveria usar a terceira equação (4.47), com $\epsilon_z = 0$, para escrever σ_z em função de σ_x e σ_y , substituindo o resultado nas duas primeiras equações. No entanto, se assim procedermos a contribuição de σ_z deixaria de ser desprezível em relação à contribuição de σ_x e σ_y para placas com pequenas espessuras, contrariando as evidências experimentais. Eliminar σ_z pela introdução direta do valor $\sigma_z = 0$ nas duas primeiras equações (4.47) conduz a um modelo constitutivo mais simples e mais satisfatório:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (11.55)$$

Invertendo essas relações,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_b} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_s} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (11.56)$$

onde

$$\mathbf{Q}_b = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \quad Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{E_1} Q_{11}$$

$$Q_{12} = \nu_{21} Q_{11} \quad Q_{66} = G_{12} \quad Q_{44} = G_{23} \quad Q_{55} = G_{13}. \quad (11.57)$$

Veja Problema 11.2 para uma obtenção alternativa de (11.56).

Kirchhoff Com a hipótese de Kirchhoff, \mathbf{Q} e γ deixam de ser tensões e deformações generalizadas e, assim, $\mathbf{Q} = K\mathbf{A}_s\gamma$ deve ser eliminado de (11.60):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}. \quad (11.64)$$

Apesar da importância de \mathbf{Q} no equilíbrio de uma placa de Kirchhoff, seu efeito na deformação é ignorada.

11.4 Equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos

As relações deformação-deslocamento e as equações constitutivas podem ser substituídas nas equações de equilíbrio, em ambas as teorias, por meio da eliminação das deformações e tensões generalizadas.

Kirchhoff Substituindo as relações deformação-deslocamento (11.5) nas equações constitutivas (11.64),

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (11.65)$$

As equações de equilíbrio, em termos dos deslocamentos, são obtidas substituindo (11.65) em (11.39):

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + q_x &= 0 \\ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + q_y &= 0 \\ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q_z + \frac{\partial m_x}{\partial y} - \frac{\partial m_y}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (11.66)$$

É um sistema de três equações diferenciais parciais de segunda ordem em u e v e de quarta ordem em w , em ambas as direções x e y . Numa placa retangular, por exemplo, é necessário para a solução que especifiquemos quatro condições de contorno por borda como já era esperado. As duas primeiras equações, que descrevem o comportamento da placa como membrana, são desacopladas da última, que descreve o comportamento à flexão.

Nos exemplos tratados neste capítulo, vamos admitir que a placa seja retangular, sujeita somente à carga distribuída $q_z = q(x, y)$ e que as condições de contorno sejam tais que $u(x, y) = v(x, y) = 0$.

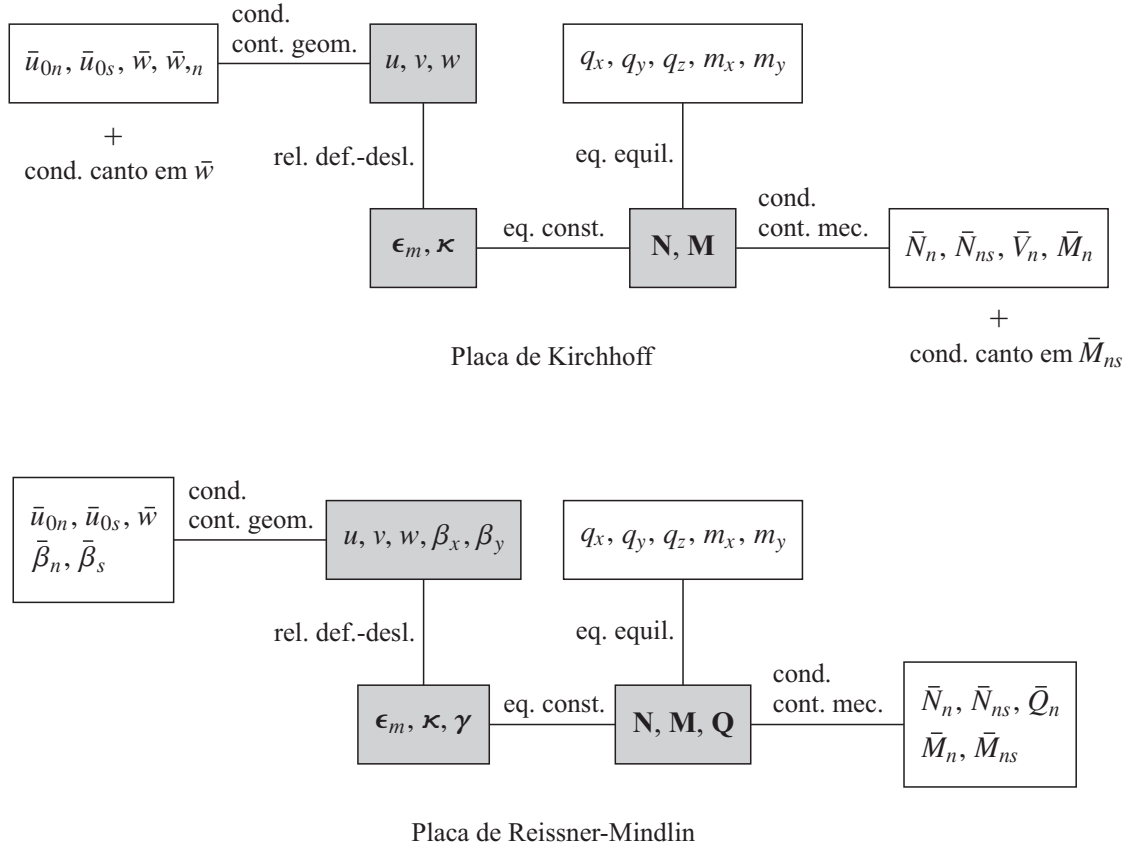


Figura 11.10 Inter-relações entre as quantidades incógnitas (em cinza) e as quantidades conhecidas numa placa de Kirchhoff ou de Reissner-Mindlin.

É um sistema de cinco equações diferenciais parciais de segunda ordem em u, v, w, β_x e β_y em ambas as direções x e y . Numa placa retangular, por exemplo, é necessário para a solução que especifiquemos cinco condições de contorno por borda. As duas primeiras equações, que descrevem o comportamento da placa como membrana, são desacopladas das três últimas, que descrevem o comportamento à flexão.

Nos exemplos tratados neste capítulo, vamos admitir que a placa seja retangular, sujeita à carga distribuída $q_z = q(x, y)$ e com condições de contorno tais que $u(x, y) = v(x, y) = 0$. Nessa situação, a placa estará somente sob flexão descrita por

$$\begin{aligned}
 & K A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K A_{55} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + K A_{44} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + q = 0 \\
 & K A_{55} \frac{\partial w}{\partial x} + K A_{55} \beta_x - D_{11} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} - D_{66} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} - (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} = 0 \\
 & K A_{44} \frac{\partial w}{\partial y} - (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + K A_{44} \beta_y - D_{66} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} = 0. \quad (11.73)
 \end{aligned}$$

Se o material for isotrópico,

$$D_{11} = D_{22} = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad D_{12} = \nu D \quad D_{66} = \frac{1-\nu}{2} D \quad A_{44} = A_{55} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}. \quad (11.74)$$

A Figura 11.10 sintetiza as inter-relações entre as quantidades incógnitas e as quantidades conhecidas numa placa de Kirchhoff ou de Reissner-Mindlin. A Tabela 11.1 traz um resumo das equações dessas placas.

Tabela 11.1 Equações das teorias de placas.**Kirchhoff**

6 relações deformação-deslocamento (11.5)

3 equações de equilíbrio (11.39)

6 equações constitutivas (11.64)

total: 15

incógnitas: $u, v, w, \epsilon_x^m, \epsilon_y^m, \gamma_{xy}^m, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + m_y \\ Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - m_x \end{aligned} \right\} \text{não são quantidades independentes}$$

↓

3 equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos (11.66)

incógnitas: u, v, w **Reissner-Mindlin**

8 relações deformação-deslocamento (11.7) e (11.8)

5 equações de equilíbrio (11.29)

8 equações constitutivas (11.60)

total: 21

incógnitas: $u, v, w, \beta_x, \beta_y, \epsilon_x^m, \epsilon_y^m, \gamma_{xy}^m, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$

↓

5 equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos (11.72)

incógnitas: $u, v, w, \beta_x, \beta_y$ **11.5 Pós-processamento**

Resolvidas as equações, levando-se em conta as condições de contorno, as informações da placa como um sólido tridimensional podem ser recuperadas da seguinte maneira.

Reissner-Mindlin O deslocamento e a deformação num ponto qualquer da placa são dados por (11.6) e (11.7), respectivamente. Para a determinação de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ e τ_{yz} usamos as equações constitutivas (11.56):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{Q}_b (\boldsymbol{\epsilon}_m + z\boldsymbol{\kappa}) \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = K\mathbf{Q}_s\boldsymbol{\gamma} \quad (11.75)$$

No segundo caso, o trabalho passa a ser

$$\begin{aligned}
 \delta W &= - \iiint (\tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dx dy dz = - \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\tau_{xz} \frac{\delta \tau_{xz}}{Q_{55}} + \tau_{yz} \frac{\delta \tau_{yz}}{Q_{44}} \right) dz \right] dx dy \\
 &= - \iint \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{Q_x \delta Q_x}{Q_{55}} + \frac{Q_y \delta Q_y}{Q_{44}} \right) \left\{ \frac{3}{2h} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \right\}^2 dz \right\} dx dy \\
 &= - \frac{6}{5h} \iint \left(\frac{Q_x \delta Q_x}{Q_{55}} + \frac{Q_y \delta Q_y}{Q_{44}} \right) dx dy.
 \end{aligned} \tag{11.85}$$

Se K for escolhido de maneira que (11.84) e (11.85) sejam iguais, então

$$\frac{1}{hK} = \frac{6}{5h} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{5}{6}. \tag{11.86}$$

Kirchhoff O deslocamento e a deformação num ponto qualquer da placa são dados por (11.3) e (11.4), respectivamente. As tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} continuam sendo dadas por (11.75) (ou (11.76)). Como não há relações constitutivas envolvendo τ_{xz} e τ_{yz} na teoria de Kirchhoff, resta-nos recorrer às expressões (11.81) e (11.82) oriundas do equilíbrio para determinar essas componentes.

Ainda considerando a placa como um sólido tridimensional, o equilíbrio de translação na direção de z (veja a terceira equação (5.6)) fornece

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) = - \frac{3}{2h} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \tag{11.87}$$

onde introduzimos as relações (11.81) e (11.82) e desprezamos a força de volume. Integrando em z e fazendo uso da terceira das equações (11.29),

$$\sigma_z = \frac{3q}{2h} \left(z - 4 \frac{z^3}{3h^2} \right) + g(x, y). \tag{11.88}$$

A condição $\sigma_z = 0$ em $z = -h/2$ (ou $\sigma_z = q$ em $z = h/2$) resulta em $g(x, y) = q/2$. Portanto,

$$\sigma_z = \frac{q}{2} \left[1 + 3 \frac{z}{h} - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]. \tag{11.89}$$

Note que o conhecimento de σ_z independe da solução do problema e a expressão é igualmente válida para ambas as teorias de Reissner-Mindlin e de Kirchhoff.

11.6 Métodos de solução

A determinação da solução exata de (11.67) ou (11.73) para placas com geometria ou condições de contorno irregulares é, em geral, uma tarefa difícil, se não impossível. Daí, soluções aproximadas por métodos como o dos elementos finitos serem mais do que bem-vindas. Mostramos, no entanto, mesmo com a limitação de só ser possível em casos bem específicos, como obter: (a) soluções exatas na forma de séries trigonométricas infinitas (as célebres soluções de Navier e de Lévy⁵); (b) soluções aproximadas pelo método de Ritz.

⁵Maurice Lévy, matemático e engenheiro francês nascido em Ribeauvillé em 1838, falecido em Paris em 1910.

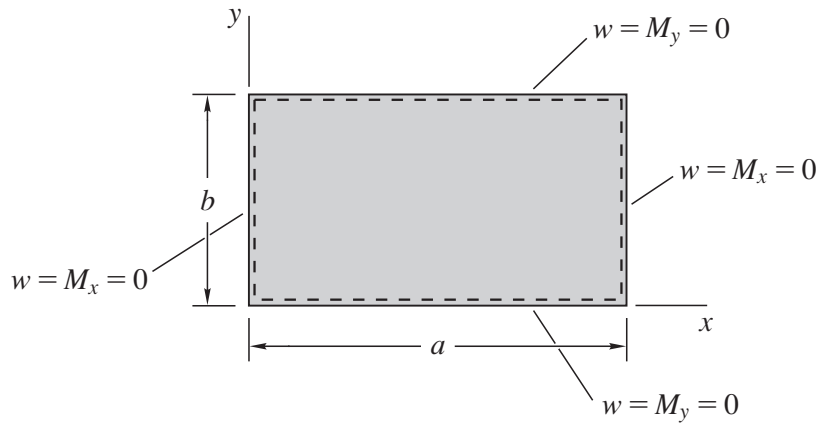


Figura 11.11 Placa de Kirchhoff retangular simplesmente apoiada.

Método de Navier

O método aplica-se a placas retangulares simplesmente apoiadas, com a ressalva de serem as condições de contorno “hard” $w = M_n = \beta_s = 0$, e não “soft” $w = M_n = M_{ns} = 0$, quando se tratar da teoria de Reissner-Mindlin.

Kirchhoff Seja a placa retangular simplesmente apoiada da Figura 11.11 sujeita a uma carga distribuída $q(x, y)$. As condições de contorno a serem satisfeitas na flexão são (veja Problema 11.6)

$$w = M_x = 0 \quad \text{em } x = 0, x = a \quad w = M_y = 0 \quad \text{em } y = 0, y = b. \quad (11.90)$$

A aplicação do *método de Navier* para obtenção da solução de (11.67) para placas retangulares simplesmente apoiadas resume-se em três passos:

- escreva a deflexão $w(x, y)$ na forma de uma série trigonométrica que satisfaça todas as condições de contorno;
- substitua essa série em (11.67) e, nesse momento, tenha a indicação da série trigonométrica a ser adotada para o carregamento $q(x, y)$ (série de Fourier com os coeficientes determinados segundo (A.31));
- determine os coeficientes incógnitos da série adotada para $w(x, y)$ impondo que (11.67) seja satisfeita em todos os pontos do domínio $0 < x < a$ e $0 < y < b$.

É a impossibilidade de aplicar o primeiro ou o último passo que faz o método de Navier ser de uso restrito. Veja que antecipamos o seu emprego na solução do Problema 5.7.

Num primeiro passo, podemos verificar diretamente que as condições de contorno em w são satisfeitas pela série trigonométrica

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad (11.91)$$

onde

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b} \quad (11.92)$$

Tabela 11.2 Solução de Navier para $\bar{w} = 100wE_2h^3/q_0a^4$ e $\bar{M} = 10M_x/q_0a^2$ no centro de uma placa de Kirchhoff isotrópica ($\nu = 0,3$) e de uma outra ortotrópica ($E_1 = 25E_2$, $G_{12} = 0,5E_2$, $\nu_{12} = 0,25$), ambas quadradas, simplesmente apoiadas, sob carga uniformemente distribuída. Os valores “exatos” são dados por \bar{w}_k e \bar{M}_k .

m, n	Isotrópica		Ortotrópica	
	\bar{w}/\bar{w}_k	\bar{M}/\bar{M}_k	\bar{w}/\bar{w}_k	\bar{M}/\bar{M}_k
1	1,024	1,115	1,075	1,111
1, 3	0,998	0,979	0,992	0,989
1, 3, 5	1,000	1,006	1,002	1,003
\bar{w}_k, \bar{M}_k	4,436	0,479	0,650	1,311

A equação (11.99) mostra que os coeficientes W_{mn} não nulos têm índices m e n ímpares. Assim,

$$w(x, y) = \frac{16q_0a^4}{\pi^6D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn(m^2+n^2)^2} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y$$

e, com base em (11.100),

$$M_x(x, y) = \frac{16q_0a^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m^2 + \nu n^2}{mn(m^2+n^2)^2} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y.$$

Os valores no centro da placa são dados por

$$\begin{aligned} w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) &= \frac{16q_0a^4}{\pi^6D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn(m^2+n^2)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \\ &= \frac{16q_0a^4}{\pi^6D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)/2-1}}{mn(m^2+n^2)^2} \\ M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) &= \frac{16q_0a^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(m^2 + \nu n^2) (-1)^{(m+n)/2-1}}{mn(m^2+n^2)^2}. \end{aligned}$$

A Tabela 11.2 mostra os valores adimensionais

$$\bar{w} = \frac{100wEh^3}{q_0a^4} \quad \bar{M} = \frac{10M_x}{q_0a^2}$$

da deflexão e do momento fletor no centro da placa retendo um termo ($m, n = 1$), quatro termos ($m, n = 1, 3$) e nove termos ($m, n = 1, 3, 5$). Os valores “exatos” \bar{w}_k e \bar{M}_k dessas quantidades (solução com $m, n = 1, 3, \dots, 21$) estão na última linha da tabela. A convergência mais lenta do momento fletor se deve ao fato de ele ser obtido por meio de derivações de um deslocamento $w(x, y)$ que é aproximado (veja comentários no final do Exemplo 9.5 e, mais especificamente, no final do Exemplo A.5). ■

Exemplo 11.4 Refaça o Exemplo 11.3 supondo que a placa seja do material ortotrópico descrito no Exemplo 11.2.

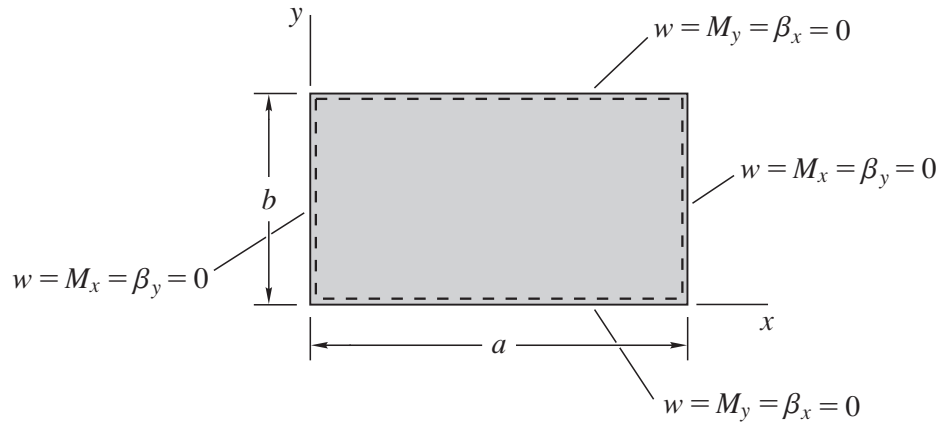


Figura 11.12 Placa de Reissner-Mindlin retangular simplesmente apoiada “hard” (a condição de contorno “soft” $w = M_n = M_{ns} = 0$, que ainda caracterizaria uma borda simplesmente apoiada, inviabiliza a aplicação do método de Navier).

Considerando que $D_{11} = 25D_{22}$, $D_{12} = 0, 25D_{22}$, $D_{66} = 0, 49875D_{22}$ e procedendo como no exemplo anterior,

$$w(x, y) = \frac{16q_0a^4}{\pi^6 D_{22}} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn(25m^4 + 2, 495m^2n^2 + n^4)} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y$$

$$M_x(x, y) = \frac{16q_0a^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{25m^2 + 0, 25n^2}{mn(25m^4 + 2, 495m^2n^2 + n^4)} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y.$$

Os valores

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{16q_0a^4}{\pi^6 D_{22}} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn(25m^4 + 2, 495m^2n^2 + n^4)} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

$$= \frac{16q_0a^4}{\pi^6 D_{22}} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)/2-1}}{mn(25m^4 + 2, 495m^2n^2 + n^4)}$$

$$M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{16q_0a^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(25m^2 + 0, 25n^2) (-1)^{(m+n)/2-1}}{mn(25m^4 + 2, 495m^2n^2 + n^4)}$$

no centro da placa, adimensionalizados como no Exemplo 11.3, são apresentados na Tabela 11.2 retendo um, quatro e nove termos na série. ■

Reissner-Mindlin O uso do método de Navier na teoria de Reissner-Mindlin só é possível se todas as bordas simplesmente apoiadas forem “hard” $w = M_n = \beta_s = 0$, ou seja, nenhuma borda poderá ser caracterizada pela condição alternativa “soft” $w = M_n = M_{ns} = 0$. Apliquemos o método à placa retangular simplesmente apoiada da Figura 11.12, sujeita a uma carga distribuída $q(x, y)$ e com condições de contorno (veja Problema 11.6)

$$w = M_x = \beta_y = 0 \quad \text{em } x = 0, x = a \quad w = M_y = \beta_x = 0 \quad \text{em } y = 0, y = b. \quad (11.104)$$

Vale ressaltar que as condições de contorno (11.90) e (11.104) equivalem-se, no sentido de que impor $\beta_y = 0$ em $x = 0, x = a$ e $\beta_x = 0$ em $y = 0, y = b$ na teoria de Reissner-Mindlin corresponde

Tabela 11.4 Solução de Navier para $\bar{w} = 100wE_2h^3/q_0a^4$ e $\bar{M} = 10M_x/q_0a^2$ no centro de placas de Reissner-Mindlin ($K = 5/6$) isotrópicas ($\nu = 0,3$) e ortotrópicas ($E_1 = 25E_2$ $G_{12} = G_{13} = 0,5E_2$ $G_{23} = 0,2E_2$ $\nu_{12} = 0,25$), quadradas, simplesmente apoiadas “hard”, sob carga uniformemente distribuída. Os valores \bar{w}_k e \bar{M}_k referem-se a placas de Kirchhoff.

a/h	Isotrópica		Ortotrópica	
	\bar{w}/\bar{w}_k	\bar{M}/\bar{M}_k	\bar{w}/\bar{w}_k	\bar{M}/\bar{M}_k
5	1,207	1,000	2,794	0,925
10	1,052	1,000	1,465	0,979
20	1,013	1,000	1,117	0,995
50	1,002	1,000	1,018	0,999
100	1,000	1,000	1,005	1,000
1000	1,000	1,000	1,000	1,000
\bar{w}_k, \bar{M}_k	4,436	0,479	0,650	1,311

- (b) a diferença entre as deflexões previstas pelas teorias de Reissner-Mindlin e de Kirchhoff diminui com o aumento de a/h . A teoria de Kirchhoff, que considera a deformação de cisalhamento transversal como sendo nula, constitui-se num limite para a teoria de Reissner-Mindlin quando placas com a/h elevado são analisadas;
- (c) o valor baixo de G_{23} da placa ortotrópica realça a influência da deformação de cisalhamento transversal no aumento da deflexão. Para $a/h = 10$, a teoria de Reissner-Mindlin prevê uma deflexão no centro da placa em torno de 5% maior para material isotrópico e 47% maior para o material ortotrópico adotado, se comparada com a teoria de Kirchhoff.

Não é fácil definir, precisamente, as condições a partir das quais a teoria de Kirchhoff deixa de ser válida. Vários fatores podem influenciar nessa definição: a relação a/h , as propriedades do material, o tipo de carregamento e as condições de contorno. Além das placas espessas ou não isotrópicas com baixo módulo de cisalhamento transversal, como é normalmente o caso das placas laminadas, a importância das deformações de cisalhamento transversal aumenta nas proximidades de cargas concentradas. No caso de placas homogêneas isotrópicas, alguns textos recomendam o uso da teoria de Kirchhoff quando $a/h > 10$, enquanto outros recomendam $a/h > 20$.

Método de Lévy

O método aplica-se a placas retangulares com duas bordas paralelas simplesmente apoiadas. Enfatizamos que tais bordas devem ser “hard” numa placa de Reissner-Mindlin. Veja que o emprego do método de Lévy é antecipado na solução do Exemplo 5.3.

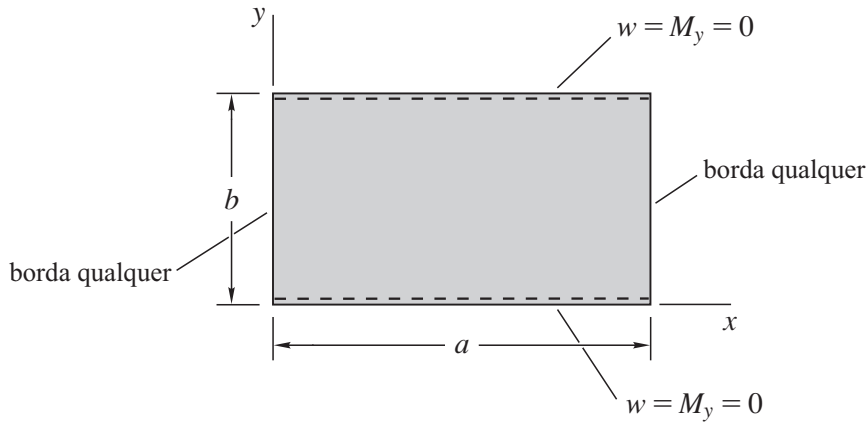


Figura 11.13 Placa de Kirchhoff retangular com as bordas $y = 0$ e $y = b$ simplesmente apoiadas.

Kirchhoff O método de Lévy para obtenção da solução de (11.67) difere do método de Navier porque a expansão trigonométrica da deflexão $w(x, y)$ se dá numa só direção. Como decorrência, a aplicação do método restringe-se a placas retangulares com duas bordas paralelas simplesmente apoiadas podendo as outras duas serem quaisquer. A substituição da expansão de $w(x, y)$ em (11.67) indicará a expansão, também numa só direção, a ser adotada para a carga $q(x, y)$.

Seja a placa retangular da Figura 11.13 sujeita a uma carga $q_z = q(x, y)$. Expressemos a solução de (11.67) na forma

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \operatorname{sen} \beta_n y, \quad (11.114)$$

a qual satisfaz as condições de contorno

$$w = M_y = 0 \quad \text{em } y = 0, y = b \quad (11.115)$$

lembrando que $\beta_n = n\pi/b$. A função $W_n(x)$ deverá ser tal que $w(x, y)$ satisfaça também as condições de contorno nas bordas $x = 0$ e $x = a$, além de satisfazer a equação diferencial propriamente dita. Substituindo (11.114) em (11.67),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[D_{11} \frac{d^4 W_n}{dx^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \beta_n^2 \frac{d^2 W_n}{dx^2} + D_{22} \beta_n^4 W_n \right] \operatorname{sen} \beta_n y = q. \quad (11.116)$$

A equação (11.116) sugere, para a sua solução, que a carga seja expandida na direção de y em série de Fourier na forma

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) \operatorname{sen} \beta_n y \quad (11.117)$$

onde

$$Q_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b q(x, y) \operatorname{sen} \beta_n y \, dy. \quad (11.118)$$

Para uma carga uniformemente distribuída $q(x, y) = q_0$, por exemplo,

$$Q_n = \begin{cases} \frac{4q_0}{\pi n} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (11.119)$$

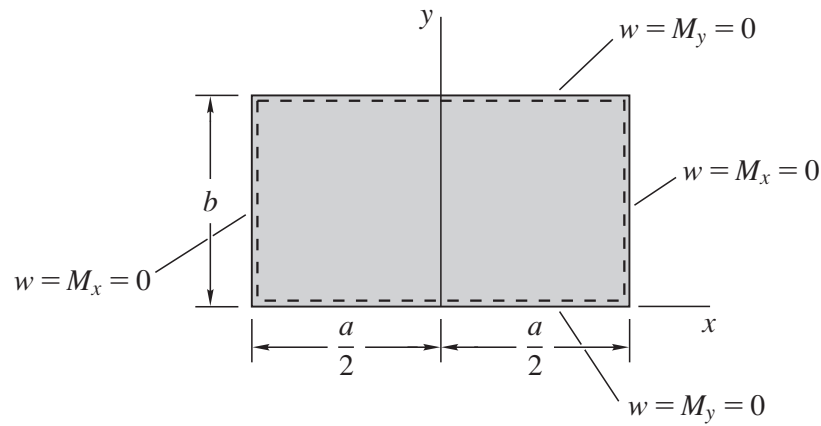


Figura 11.14 Exemplo 11.9: placa de Kirchhoff retangular simplesmente apoiada e sistema de coordenadas adotado para simplificar o uso do método de Lévy.

Considerando que $D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D$ para o material isotrópico, a equação (11.121) escreve-se

$$\frac{d^4 W_n}{dx^4} - 2\beta_n^2 \frac{d^2 W_n}{dx^2} + \beta_n^4 W_n = \frac{Q_n}{D}.$$

A solução particular é

$$W_{np} = \frac{Q_n}{D\beta_n^4}$$

pois Q_n é constante para uma carga aplicada uniformemente distribuída (veja equação (11.119)). Como o material isotrópico pertence ao Caso 2,

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (W_{nh} + W_{np}) \operatorname{sen} \beta_n y \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n + B_n x) \operatorname{senh} \beta_n x + (C_n + D_n x) \operatorname{cosh} \beta_n x + \frac{Q_n}{D\beta_n^4} \right] \operatorname{sen} \beta_n y. \end{aligned}$$

O emprego do sistema de coordenadas indicado na Figura 11.14 permite simplificar a determinação das constantes. A geometria da placa (incluindo as condições de contorno), as propriedades constitutivas e o carregamento são simétricos em relação a $x = 0$ (simetria em torno do eixo y ou simetria em x). Portanto, a deflexão w apresentará também a mesma simetria, ou seja, $w(x, y) = w(-x, y)$. Visto que só funções pares de x devem ser mantidas na solução, então $A_n = D_n = 0$:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n x \operatorname{senh} \beta_n x + C_n \operatorname{cosh} \beta_n x + \frac{Q_n}{D\beta_n^4} \right) \operatorname{sen} \beta_n y.$$

As constantes B_n e C_n são obtidas impondo

$$w = M_x = 0 \quad \text{em } x = \frac{a}{2} \text{ (ou } x = -\frac{a}{2}\text{)}.$$

A deflexão $w = 0$ ao longo das bordas $x = \pm a/2$ implica $\partial w / \partial y = \partial^2 w / \partial y^2 = 0$ nas mesmas bordas. O uso das equações constitutivas (11.65) permite reescrever as condições de contorno como sendo

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } x = \frac{a}{2} \text{ (ou } x = -\frac{a}{2}\text{)}.$$

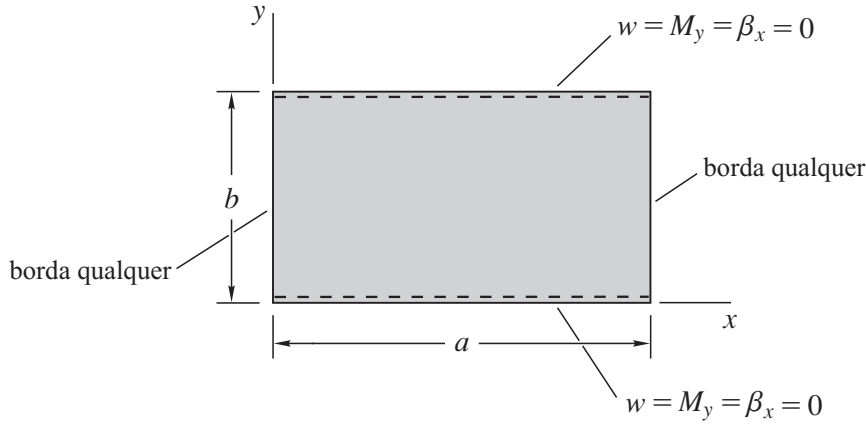


Figura 11.15 Placa de Reissner-Mindlin retangular com as bordas $y = 0$ e b simplesmente apoiadas “hard”.

Seja a placa retangular da Figura 11.15 sujeita a uma carga distribuída $q(x, y)$. Expressemos a solução de (11.73) na forma

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \operatorname{sen} \beta_n y & \beta_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \operatorname{sen} \beta_n y \\ \beta_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cos \beta_n y, \end{aligned} \quad (11.136)$$

a qual satisfaz as condições de contorno

$$w = M_y = \beta_x = 0 \quad \text{em } y = 0, y = b. \quad (11.137)$$

As funções $W_n(x)$, $X_n(x)$ e $Y_n(x)$ deverão ser tais que $w(x, y)$, $\beta_x(x, y)$ e $\beta_y(x, y)$ satisfaçam também as condições de contorno nas bordas $x = 0$ e $x = a$, além de satisfazerem a equação diferencial propriamente dita.

Substituindo (11.136) em (11.73),

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(K A_{55} \frac{d^2 W_n}{dx^2} - K A_{44} \beta_n^2 W_n + K A_{55} \frac{dX_n}{dx} - K A_{44} \beta_n Y_n \right) \operatorname{sen} \beta_n y = -q \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left[K A_{55} \frac{dW_n}{dx} + (K A_{55} + D_{66} \beta_n^2) X_n - D_{11} \frac{d^2 X_n}{dx^2} + (D_{12} + D_{66}) \beta_n \frac{dY_n}{dx} \right] \operatorname{sen} \beta_n y = 0 \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left[K A_{44} \beta_n W_n - (D_{12} + D_{66}) \beta_n \frac{dX_n}{dx} + (K A_{44} + D_{22} \beta_n^2) Y_n - D_{66} \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right] \cos \beta_n y = 0. \end{aligned} \quad (11.138)$$

A primeira das equações sugere que a carga seja expandida na direção de y em série de Fourier na forma (11.117):

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(K A_{55} \frac{d^2 W_n}{dx^2} - K A_{44} \beta_n^2 W_n + K A_{55} \frac{dX_n}{dx} - K A_{44} \beta_n Y_n + Q_n \right) \operatorname{sen} \beta_n y = 0 \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left[K A_{55} \frac{dW_n}{dx} + (K A_{55} + D_{66} \beta_n^2) X_n - D_{11} \frac{d^2 X_n}{dx^2} + (D_{12} + D_{66}) \beta_n \frac{dY_n}{dx} \right] \operatorname{sen} \beta_n y = 0 \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left[K A_{44} \beta_n W_n - (D_{12} + D_{66}) \beta_n \frac{dX_n}{dx} + (K A_{44} + D_{22} \beta_n^2) Y_n - D_{66} \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right] \cos \beta_n y = 0. \end{aligned} \quad (11.139)$$

Tabela 11.6 Solução de Lévy para $\bar{w} = 100wE_2h^3/q_0a^4$ e $\bar{M} = 10M_x/q_0a^2$ no centro de placas de Reissner-Mindlin ($K = 5/6$) isotrópicas ($\nu = 0,3$) e ortotrópicas ($E_1 = 25E_2$ $G_{12} = G_{13} = 0,5E_2$ $G_{23} = 0,2E_2$ $\nu_{12} = 0,25$) quadradas, simplesmente apoiadas “hard”, sob carga uniformemente distribuída. Os valores \bar{w}_k e \bar{M}_k referem-se a placas de Kirchhoff.

a/h	n	Isotrópica		Ortotrópica	
		\bar{w}/\bar{w}_k	\bar{M}/\bar{M}_k	\bar{w}/\bar{w}_k	\bar{M}/\bar{M}_k
5	1	1,230	1,027	2,997	0,982
	1, 3	1,204	0,996	2,760	0,918
	1, 3, ..., 21	1,207	1,000	2,794	0,925
10	1	1,066	1,027	1,569	1,043
	1, 3	1,051	0,996	1,451	0,973
	1, 3, ..., 21	1,052	1,000	1,465	0,979
20	1	1,025	1,027	1,197	1,064
	1, 3	1,012	0,996	1,109	0,989
	1, 3, ..., 21	1,013	1,000	1,117	0,995
50	1	1,014	1,027	1,091	1,070
	1, 3	1,001	0,996	1,011	0,994
	1, 3, ..., 21	1,002	1,000	1,018	0,999
100	1	1,012	1,027	1,075	1,072
	1, 3	1,000	0,996	0,997	0,994
	1, 3, ..., 21	1,000	1,000	1,005	1,000
1000	1	1,012	1,027	1,071	1,072
	1, 3	0,999	0,996	0,992	0,995
	1, 3, ..., 21	1,000	1,000	1,000	1,000
\bar{w}_k, \bar{M}_k		4,436	0,479	0,650	1,311

Método de Ritz

Se uma placa de Kirchhoff sofre apenas flexão provocada por um carregamento $q_z = q(x, y)$ e por cargas distribuídas nas bordas, o princípio dos deslocamentos virtuais (11.17) reduz-se a

$$-\iint \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M} dx dy + \iint q \delta w dx dy + \int_{\Gamma_t} (\bar{Q}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n} - \bar{M}_{ns} \delta w_{,s}) ds = 0. \quad (11.147)$$

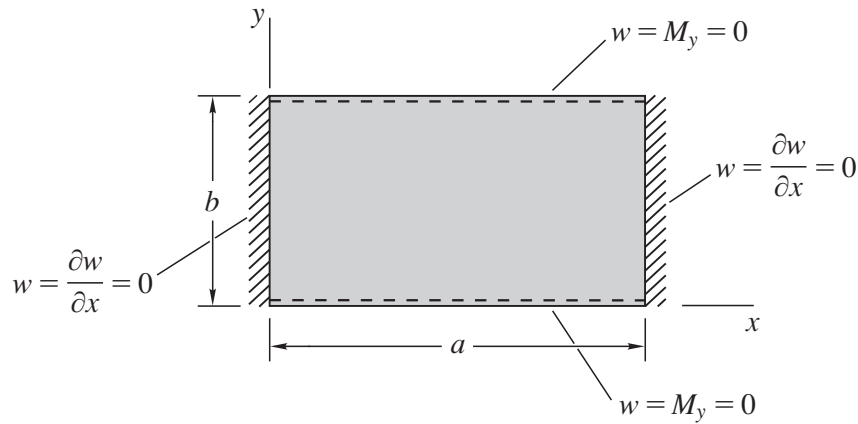


Figura 11.16 Exemplo 11.13: placa de Kirchhoff retangular com as bordas $x = 0, a$ engastadas e $y = 0, b$ simplesmente apoiadas.

já está contida em (11.149). Como a placa é retangular, é conveniente expressar a aproximação na forma

$$w_n(x, y) = F(x)G(y)$$

separando as variáveis x e y . As quatro condições de contorno a serem satisfeitas na direção de x indicam que o polinômio algébrico $F(x)$ mais simples é

$$F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4.$$

Das condições

$$F(0) = 0 \quad \frac{dF(0)}{dx} = 0 \quad F(a) = 0 \quad \frac{dF(a)}{dx} = 0,$$

eliminamos A_0, A_1, A_2 e A_3 para obter

$$F(x) = A_4 (a^2x^2 - 2ax^3 + x^4) = a^4A_4 \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)^4 \right].$$

De maneira análoga, as duas condições de contorno a serem satisfeitas na direção de y indicam que o polinômio algébrico $G(y)$ mais simples é

$$G(y) = B_0 + B_1y + B_2y^2.$$

Das condições

$$G(0) = 0 \quad G(b) = 0,$$

eliminamos B_0 e B_1 para obter

$$G(y) = -B_2 (by - y^2) = -b^2B_2 \left[\frac{y}{b} - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right].$$

Assim, a primeira aproximação é expressa como

$$w_1(x, y) = FG = c_1 \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)^4 \right] \left[\frac{y}{b} - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right]$$

onde $c_1 = -a^4b^2A_4B_2$. Segundo a notação adotada em (11.150), $w_1(x, y)$ apresenta

$$\phi_0 = 0 \quad \phi_1 = \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)^4 \right] \left[\frac{y}{b} - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right].$$

A expressão geral de $w_n(x, y)$ é dada no Problema 11.13.

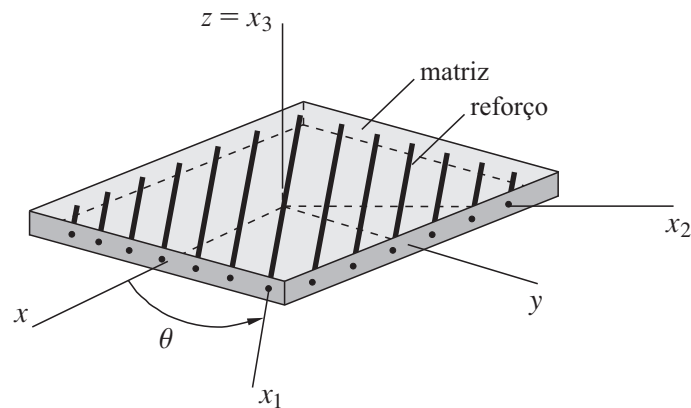


Figura 11.17 Lâmina com fibras unidirecionais e sistema de eixos principais do material $x_1x_2x_3$.

11.7 Placas laminadas

Uma *placa laminada* resulta do empilhamento de duas ou mais *lâminas* (*camadas*) de materiais com propriedades mecânicas criteriosamente escolhidas, com o propósito de se conseguir uma relação rigidez/peso elevada para a placa como um todo. O material e a espessura podem mudar de lâmina para lâmina. Cada lâmina é normalmente constituída de um *material compósito* que combina dois outros materiais que juntos apresentam desempenho superior ao dos materiais constituintes agindo isoladamente. Um desses materiais que constitui o compósito é denominado *matriz* e o outro, de mais alta resistência, é denominado *reforço*. A Figura 11.17 mostra uma lâmina com reforço de fibras unidirecionais. A matriz é responsável por manter o reforço na posição desejada e por transferir as tensões no meio pela aderência que existe entre a matriz e o reforço. Um dos materiais compósitos mais empregados na indústria é o grafite-epóxi (matriz: resina epóxi; reforço: grafite).

A falha do material pode levar uma estrutura à ruína. No caso de uma placa laminada, a falha pode ocorrer no reforço, na matriz, na interface entre reforço e matriz, ou nas interfaces entre lâminas. Avaliações dessa natureza são devidamente abordadas em textos específicos (Dávila e Camanho, 2003; Knops, 2008; Mendonça, 2019).

A Tabela 11.7 apresenta valores ilustrativos para as constantes de engenharia do grafite-epóxi, vidro-epóxi e boro-epóxi, quando reforçados numa única direção (direção na qual o módulo de Young E_1 é avaliado). Outros valores podem ser encontrados para esses mesmos materiais, principalmente em se tratando do grafite-epóxi. O alumínio é incluído na tabela apenas como referência.

A Figura 11.18a mostra uma placa laminada referida a um sistema cartesiano ortogonal xyz , com o plano xy situado na superfície média, formada por N lâminas de espessura constante e perfeitamente solidárias. O procedimento natural e direto de se propor modelos para descrever o comportamento de placas laminadas é admitir que as componentes u_x , u_y e u_z do deslocamento tenham variação definida ao longo da espessura de cada camada, mantendo a continuidade dessas componentes (continuidade C^0) nas interfaces laminares (Reddy, 2004). Se uma variação linear por camada for adotada para u_x , por exemplo, $N + 1$ funções $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, \dots , $u_{N+1}(x, y)$ incógnitas seriam necessárias para defi-

Tabela 11.7 Valores ilustrativos das constantes de engenharia para alguns materiais.

Constantes	Grafite-epóxi	Vidro-epóxi	Boro-epóxi	Alumínio
E_1	155,0 GPa	50,0 GPa	206,8 GPa	72,4 GPa
E_2	12,1 GPa	15,2 GPa	20,7 GPa	72,4 GPa
E_3	12,1 GPa	15,2 GPa	20,7 GPa	72,4 GPa
ν_{12}	0,25	0,25	0,25	0,3
ν_{13}	0,25	0,25	0,25	0,3
ν_{23}	0,46	0,43	0,30	0,3
G_{12}	4,4 GPa	4,7 GPa	6,9 GPa	27,8* GPa
G_{13}	4,4 GPa	4,7 GPa	6,9 GPa	27,8* GPa
G_{23}	3,2 GPa	3,3 GPa	4,1 GPa	27,8* GPa

$$*G = E/2(1 + \nu)$$

nir u_x (veja Figura 11.18b). São modelos de custo computacional elevado, que aumenta rapidamente com o aumento do número de camadas, se comparado com a teoria de Kirchhoff ou de Reissner-Mindlin que adotam uma única lei de variação para u_x , u_y e u_z em toda a espessura da placa (u_x , u_y variam linearmente e u_z é constante, como indicam as expressões (11.3) e (11.6)). Na teoria de Reissner-Mindlin, por exemplo, apenas duas funções $u(x, y)$ e $\beta_x(x, y)$ precisam ser conhecidas na superfície média da placa para se conhecer a componente u_x (veja Figura 11.18b). A teoria que decorre da adoção de um campo de deslocamento com variação definida por camada tem, de uma certa forma, natureza tridimensional, pois a simples divisão de camadas em subcamadas conduz a um refinamento do modelo na direção de z .

A teoria de Kirchhoff ou de Reissner-Mindlin podem ser facilmente empregadas para descrever o comportamento de uma placa laminada, desde que as equações constitutivas sejam, antes, corretamente estabelecidas como mostraremos a seguir. O baixo módulo de Young do material utilizado como matriz faz o laminado ter um baixo módulo de cisalhamento transversal (Daniel e Ishai, 1994). Recomendamos cautela antes de se desprezar o efeito do cisalhamento transversal nessas placas. Apesar de ser um modelo relativamente simples para placas laminadas, talvez a teoria de Reissner-Mindlin possa ser apontada como a melhor opção de se obter resultados de natureza global, tais como deflexão, carga de flambagem e frequência fundamental de vibração livre, de um laminado fino à moderadamente espesso, se a precisão, custo computacional e simplicidade algébrica forem decisivos na escolha.

Equações constitutivas

Vamos admitir que as N lâminas que constituem a placa da Figura 11.18 sejam de material homogêneo, ortotrópico e hiperelástico linear.

Reissner-Mindlin Para uma lâmina genérica k , mostrada em destaque na Figura 11.17 com reforço

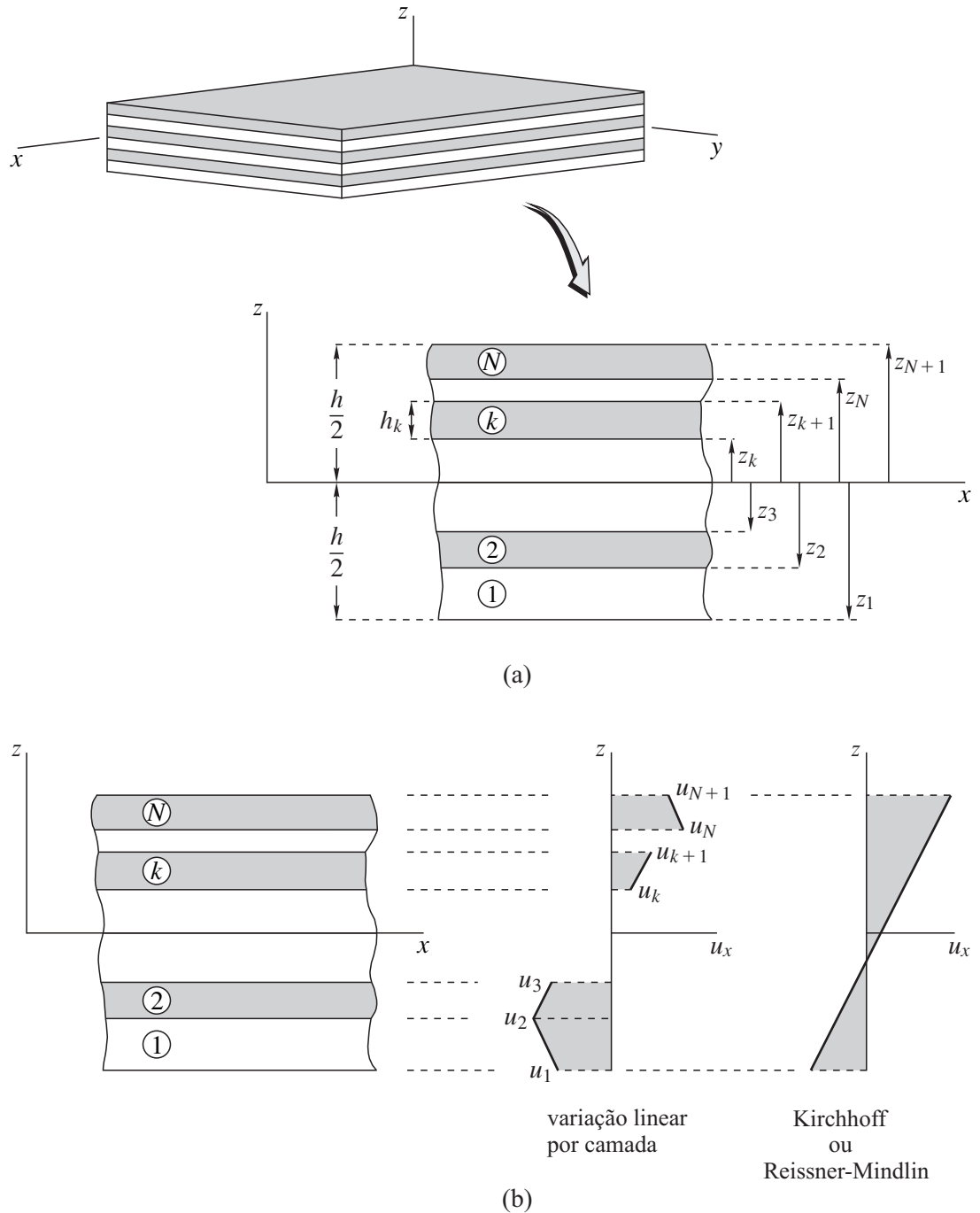


Figura 11.18 (a) Placa laminada; (b) variação linear em z da componente u_x por camada e segundo a teoria de Kirchhoff ou de Reissner-Mindlin.

unidirecional e sistema de eixos do material $x_1x_2x_3$, temos com base em (11.56) que

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \mathbf{Q}_b^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} = \mathbf{Q}_s^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)}. \quad (11.153)$$

O comportamento mecânico da lâmina na direção das fibras, ou seja, na direção de x_1 , é dominado pelas propriedades das fibras, enquanto o comportamento na direção transversal às fibras, ou seja, na direção de x_2 e x_3 , é dominado pelas propriedades da matriz (veja Tabela 11.7). O comportamento mecânico da placa no plano xy , por sua vez, dependerá da orientação das fibras.

O sistema $x_1x_2x_3$ é obtido do sistema xyz , comum a todas as lâminas, por uma rotação θ do

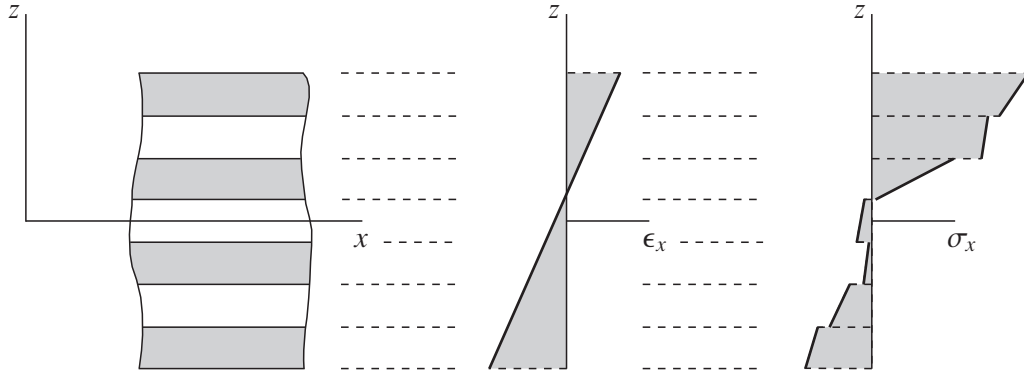


Figura 11.19 Variação típica das componentes ϵ_x e σ_x ao longo da espessura de uma placa laminada de Reissner-Mindlin (ou de Kirchhoff).

A Figura 11.19 ilustra uma variação típica das componentes $\epsilon_x = \epsilon_x^m + z\kappa_x$ e σ_x ao longo da espessura de uma placa laminada de Reissner-Mindlin (ou de Kirchhoff). Embora as componentes (11.7) da deformação na teoria de Reissner-Mindlin (ou de Kirchhoff) sejam contínuas ao longo da espessura, as componentes da tensão (11.156) não são, em geral, contínuas pois a mudança de material ou do ângulo de laminação de uma camada para outra faz os coeficientes \bar{Q}_{ij} serem descontínuos entre camadas. Dentro de uma mesma camada \bar{Q}_{ij} são constantes. A variação linear de σ_x numa camada, por exemplo, é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \bar{Q}_{11}\epsilon_x + \bar{Q}_{12}\epsilon_y + \bar{Q}_{16}\gamma_{xy} = \bar{Q}_{11}(\epsilon_x^m + z\kappa_x) + \bar{Q}_{12}(\epsilon_y^m + z\kappa_y) + \bar{Q}_{16}(\gamma_{xy}^m + z\kappa_{xy}) \\ &= \bar{Q}_{11}\epsilon_x^m + \bar{Q}_{12}\epsilon_y^m + \bar{Q}_{16}\gamma_{xy}^m + z(\bar{Q}_{11}\kappa_x + \bar{Q}_{12}\kappa_y + \bar{Q}_{16}\kappa_{xy}). \end{aligned} \quad (11.159)$$

Como consequência da descontinuidade das tensões, as integrações em (11.58) devem ser efetuadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_b^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^m + z\kappa_x \\ \epsilon_y^m + z\kappa_y \\ \gamma_{xy}^m + z\kappa_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^m \\ \epsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_b^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^m + z\kappa_x \\ \epsilon_y^m + z\kappa_y \\ \gamma_{xy}^m + z\kappa_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\ &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^m \\ \epsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} &\approx \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} K \bar{\mathbf{Q}}_s^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} dz = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (11.160)$$

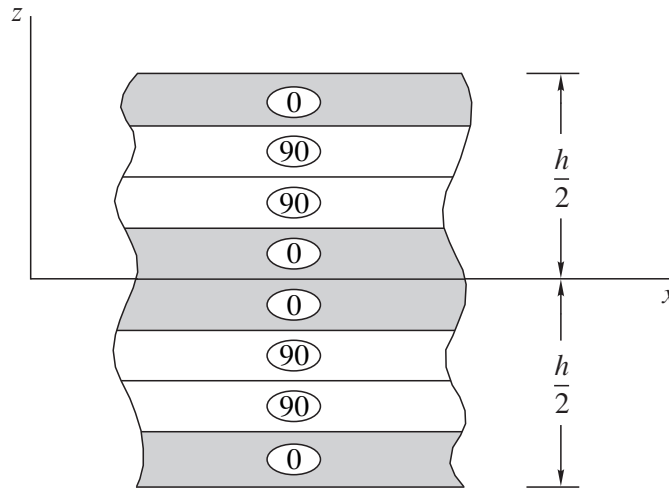


Figura 11.20 Laminado simétrico cross-ply $[0 / 90_2 / 0]_s$.

um laminado constituído não só de pares de lâminas idênticas com orientação α e $-\alpha$, como também de um número qualquer de lâminas com orientação 0° ou 90° , independentemente do material ou espessura, será também balanceado conforme (11.166). Um laminado antissimétrico seria, por exemplo, um laminado balanceado.

- *Cross-Ply*: possui todas as lâminas orientadas a 0° ou 90° . Considerando (11.166), vemos que neste laminado $A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = A_{45} = 0$. A Figura 11.20 mostra o laminado simétrico cross-ply $[0 / 90 / 90 / 0 / 0 / 90 / 90 / 0] = [0 / 90_2 / 0]_s$. Um laminado *cross-ply regular* tem lâminas de mesma espessura e material, com orientação alternando entre 0° e 90° . Esse laminado com um número par de camadas é antissimétrico e com um número ímpar de camadas é simétrico.
- *Angle-Ply*: possui todas as lâminas com orientação α e $-\alpha$, onde $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Um laminado *angle-ply regular* tem lâminas de mesma espessura e material, com orientação alternando entre α e $-\alpha$. Esse laminado com um número par de camadas é antissimétrico e com um número ímpar de camadas é simétrico.
- *Especialmente Ortotrópico*: possui as relações constitutivas na forma (11.62), ou seja, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = A_{45} = 0$. Um laminado simétrico cross-ply é especialmente ortotrópico. Um laminado simétrico balanceado não é, via de regra, especialmente ortotrópico porque pode ainda apresentar D_{16} e D_{26} não nulos.

Sejam os laminados simétricos cross-ply $[0 / 90]_s$ e $[90 / 0]_s$ da Figura 11.21 constituídos por quatro lâminas de mesma espessura e material, dispostas em diferentes orientações. Os laminados deformam-se igualmente se forem submetidos a uma mesma força N (os coeficientes A_{ij} são os mesmos para ambos). No entanto, se a força N for trocada por um momento M , o laminado $[0 / 90]_s$ encurva-se menos por ser mais rígido (os coeficientes D_{ij} associados a essa flexão são maiores para esse laminado porque as camadas com orientação 0° estão mais distante da superfície média). Isso

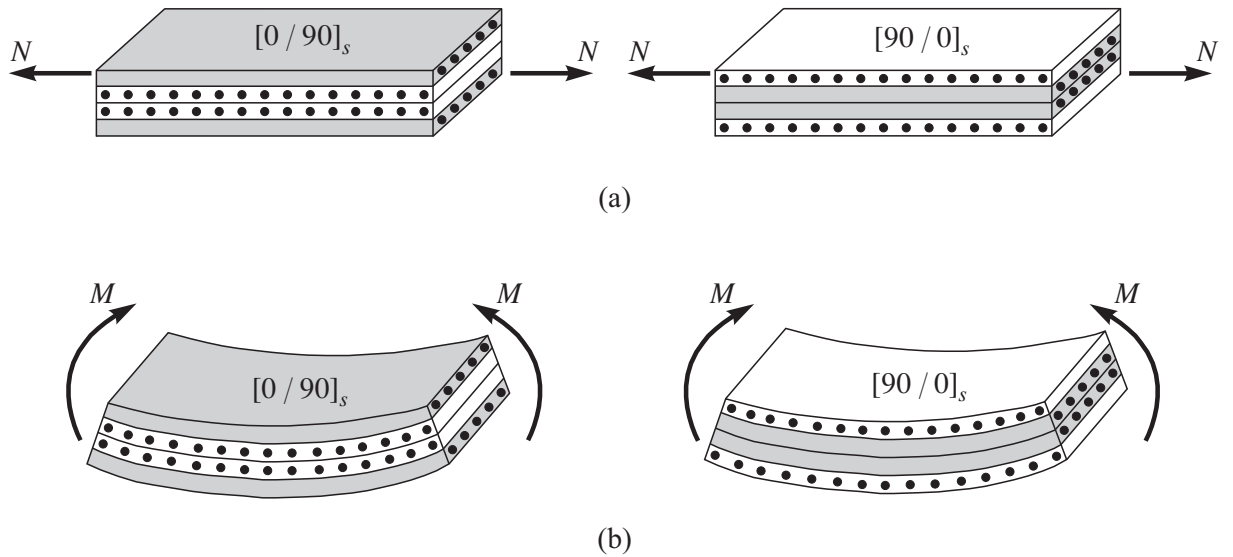


Figura 11.21 Laminados $[0 / 90]_s$ e $[90 / 0]_s$ sob a mesma carga: (a) uniaxial; (b) momento.

ilustra que se pode alterar e otimizar a resposta de um laminado frente a um dado carregamento variando apenas a orientação do reforço em cada lâmina.

Exemplo 11.14 Uma placa laminada possui três camadas de mesma espessura 0,15 mm. A camada central é de alumínio,

$$E = 70 \text{ GPa} \quad G = 26 \text{ GPa},$$

e as outras duas é de um grafite-epóxi com

$$E_1 = 155 \text{ GPa} \quad E_2 = 12,1 \text{ GPa} \quad G_{12} = G_{13} = 4,4 \text{ GPa} \quad G_{23} = 3,2 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0,25$$

e eixo x_1 orientado a 90° . Determine as matrizes constitutivas **A**, **B**, **D** e **A_s** dessa placa.

Para o grafite-epóxi, escrevemos

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \Rightarrow \nu_{21} = 0,020.$$

De (11.57),

$$\mathbf{Q}_b = \begin{bmatrix} 155,760 & 3,040 & 0 \\ 3,040 & 12,159 & 0 \\ 0 & 0 & 4,400 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad \mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} 3,2 & 0 \\ 0 & 4,4 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

Como as duas lâminas de grafite-epóxi têm eixo x_1 definido por $\theta = 90^\circ$, ambas as lâminas apresentam, segundo (11.155) e (11.157),

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_b = \mathbf{T}_b^T \mathbf{Q}_b \mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} 12,159 & 3,040 & 0 \\ 3,040 & 155,760 & 0 \\ 0 & 0 & 4,400 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_s = \mathbf{T}_s^T \mathbf{Q}_s \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 4,4 & 0 \\ 0 & 3,2 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

Tabela 11.8 Solução de Navier para $\bar{w} = 100wE_2h^3/q_0a^4$ e $\bar{M} = 10M_x/q_0a^2$ no centro de placas laminadas de Reissner-Mindlin ($K = 5/6$) composta por três camadas de mesma espessura 0,15 mm. A camada central é de alumínio ($E = 70$ GPa $G = 26$ GPa) e as outras duas é de grafite-epóxi ($E_1 = 155$ GPa $E_2 = 12,1$ GPa $G_{12} = G_{13} = 4,4$ GPa $G_{23} = 3,2$ GPa $\nu_{12} = 0,25$) com o eixo x_1 orientado a 90° . As placas são quadradas, simplesmente apoiadas, sob carga uniformemente distribuída. Os resultados foram obtidos com $m, n = 1, 3, \dots, 21$ e os valores \bar{w}_k e \bar{M}_k referem-se a placas de Kirchhoff.

a/h	\bar{w}/\bar{w}_k	\bar{M}/\bar{M}_k
5	1,468	1,342
10	1,120	1,094
20	1,031	1,026
50	1,005	1,009
100	1,002	1,000
1000	1,000	1,000
\bar{w}_k, \bar{M}_k	1,180	0,117

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Do primeiro sistema de equações,

$$U_{mn} = V_{mn} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = v(x, y) = 0$$

pois

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}$$

é supostamente não singular para qualquer par m e n . A solução do segundo sistema é dado em (11.111):

$$W_{mn} = \frac{b_1}{b_0} Q_{mn} \quad X_{mn} = \frac{b_2}{b_0} Q_{mn} \quad Y_{mn} = \frac{b_3}{b_0} Q_{mn}$$

onde

$$b_0 = s_{33}b_1 + s_{34}b_2 + s_{35}b_3 \quad b_1 = s_{44}s_{55} - s_{45}^2 \quad b_2 = s_{35}s_{45} - s_{34}s_{55} \quad b_3 = s_{34}s_{45} - s_{35}s_{44}$$

e

$$Q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{\pi^2 mn} & m, n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m, n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

conforme (11.96). Os coeficientes W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn} não nulos têm índices $m, n = 1, 3, 5, \dots$. A Tabela 11.8 contém os valores adimensionais

Capítulo 12

Geometria diferencial

A literatura sobre a teoria de cascas pode ser dividida, em linhas gerais, em dois grupos. Um que desenvolve a teoria para uma casca genérica, deixando a particularização para formas geométricas específicas como um detalhe posterior; outro que adota um caminho mais simples, e também mais restrito, ao desenvolver a teoria já direcionada para uma casca de forma geométrica conhecida (cilíndrica, esférica, etc.). Ambos os grupos usam conceitos de geometria diferencial, mas o primeiro deles, cujo procedimento será por nós adotado, exige detalhes a mais sobre o assunto. Em poucas palavras, a geometria diferencial é a aplicação do cálculo vetorial à geometria.

12.1 Curvas

Na análise vetorial, uma curva é definida como sendo o lugar geométrico dos pontos cujo vetor posição \mathbf{r} , relativo a uma dada origem, é função de um único parâmetro α . Considere a curva da Figura 12.1, na qual A_0 é um ponto fixo. Escolhendo o comprimento de arco $s = A_0A$ como sendo o parâmetro α , a curva é definida pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{e}_x + y(s)\mathbf{e}_y + z(s)\mathbf{e}_z \quad (12.1)$$

onde x , y e z são as coordenadas cartesianas ortogonais do ponto genérico A .

Vetor tangente

A mudança de \mathbf{r} ao longo da curva é dada pelo *vetor tangente*

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{ds}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{ds}\mathbf{e}_z, \quad (12.2)$$

orientado segundo o sentido crescente de s . Considerando que o vetor $\Delta\mathbf{r}/\Delta s$ é paralelo à secante $\Delta\mathbf{r}$, a Figura 12.1 mostra que o vetor

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} \quad (12.3)$$

não só é tangente à curva no ponto A como também possui comprimento unitário, pois no limite os comprimentos de $\Delta\mathbf{r}$ e Δs se confundem.

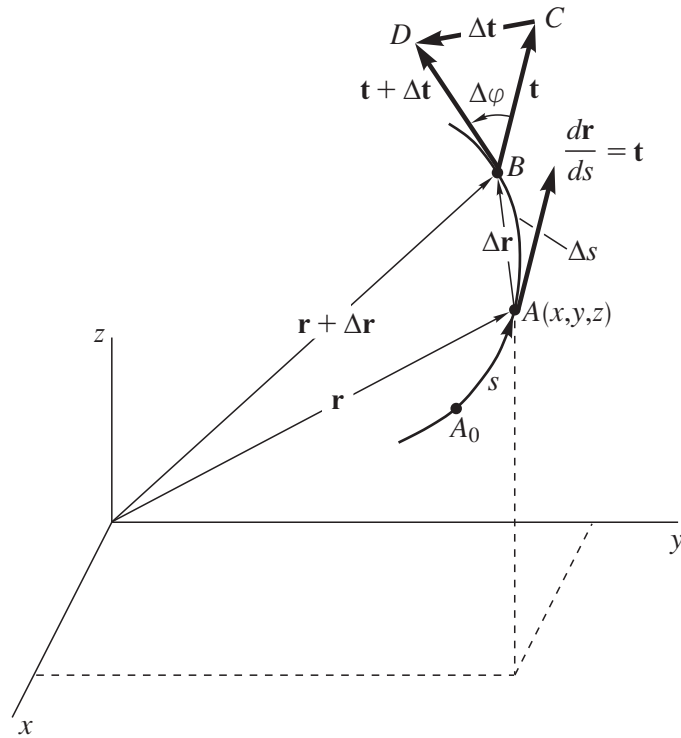


Figura 12.2 Mudança do vetor tangente unitário.

Ou seja, dt/ds é nulo ou perpendicular a \mathbf{t} . Se $dt/ds = 0$, então \mathbf{t} tem sempre a mesma direção (\mathbf{t} independe de s porque a curva é, na verdade, uma reta). Se a direção de \mathbf{t} varia, então dt/ds é perpendicular a \mathbf{t} . Em suma, o vetor curvatura, se não nulo, é perpendicular a \mathbf{t} e aponta para o lado côncavo da curva.

Existe, evidentemente, uma infinidade de retas perpendiculares a \mathbf{t} para cada ponto da curva. A reta que tem a mesma direção do vetor dt/ds é, por definição, a *normal principal* à curva no ponto considerado. Se \mathbf{N} é um vetor unitário na mesma direção e sentido de dt/ds ,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{N}. \quad (12.10)$$

A quantidade $1/R \geq 0$ é a *curvatura* da curva no ponto e seu inverso R é o *raio de curvatura*.

Torção

A Figura 12.3 mostra o *plano osculador* que contém \mathbf{t} e \mathbf{N} no ponto A . A circunferência definida por três pontos da curva quando estes tendem para o ponto A está contida no plano osculador, tem centro sobre a normal principal e raio R .

O *vetor binormal*

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{N} \quad (12.11)$$

é perpendicular ao plano osculador. Ao se deslocar sobre a curva, o sistema formado pelos vetores unitários mutuamente ortogonais \mathbf{t} , \mathbf{N} e \mathbf{b} pode rotacionar em torno do vetor tangente \mathbf{t} . Essa rotação é quantificada pelo *vetor torção* $d\mathbf{b}/ds$,

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{N} \times \mathbf{N} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}, \quad (12.12)$$

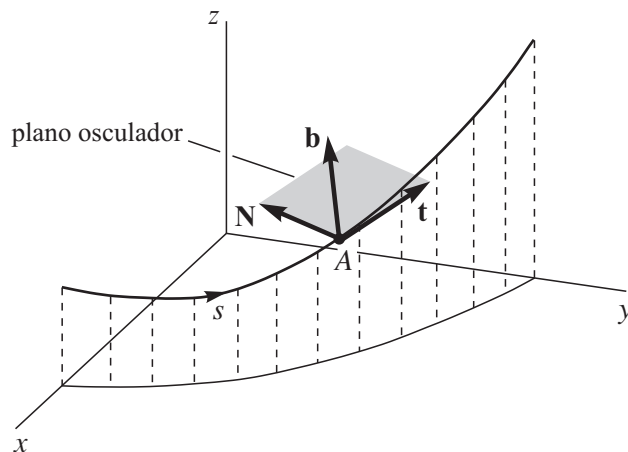


Figura 12.3 Plano osculador à curva no ponto A e os vetores unitários mutuamente ortogonais \mathbf{t} , \mathbf{N} e \mathbf{b} .

que é um vetor perpendicular a \mathbf{t} e também perpendicular a \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = 2\mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0. \quad (12.13)$$

Ou seja, os vetores torção e curvatura (ou \mathbf{N}) são paralelos. Se definirmos

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\mathbf{N}, \quad (12.14)$$

a *torção* $1/\tau$ da curva num ponto será positiva se o plano osculador rotacionar, com o aumento de s , no sentido de \mathbf{N} para \mathbf{b} (τ é o *raio de torção*).

Enquanto a curvatura $1/R$ dá uma ideia do quanto a curva difere de um andamento retilíneo nas proximidades de um ponto, a torção $1/\tau$ dá uma ideia do quanto a curva difere de um andamento plano (do quanto torce para fora de um plano). Uma reta tem curvatura nula e uma curva plana tem torção nula.

12.2 Superfícies

Na análise vetorial, uma superfície é definida como sendo o lugar geométrico dos pontos cujo vetor posição \mathbf{r} , relativo a uma dada origem, é função de dois parâmetros independentes α_1 e α_2 :

$$\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) = x(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_x + y(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_y + z(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_z. \quad (12.15)$$

Qualquer relação entre os parâmetros, digamos $g(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, define com (12.15) uma curva sobre a superfície visto que \mathbf{r} passa a ser função de um único parâmetro independente. Em particular, se atribuirmos a α_1 um valor constante α_1^0 , então $\mathbf{r}(\alpha_1^0, \alpha_2)$ definirá uma curva designada na Figura 12.4 por $\alpha_1 = \alpha_1^0$. Analogamente, $\alpha_1 = \alpha_1^1$ definirá uma outra curva $\mathbf{r}(\alpha_1^1, \alpha_2)$. A figura mostra um conjunto de curvas obtidas fixando-se o parâmetro α_1 em diferentes valores e um segundo conjunto de curvas, que se cruzam com as do primeiro, obtidas fixando-se dessa vez o parâmetro α_2 . As curvas dadas por (12.15) e pela equação adicional $\alpha_1 = \text{constante}$ ou $\alpha_2 = \text{constante}$ são denominadas *curvas*

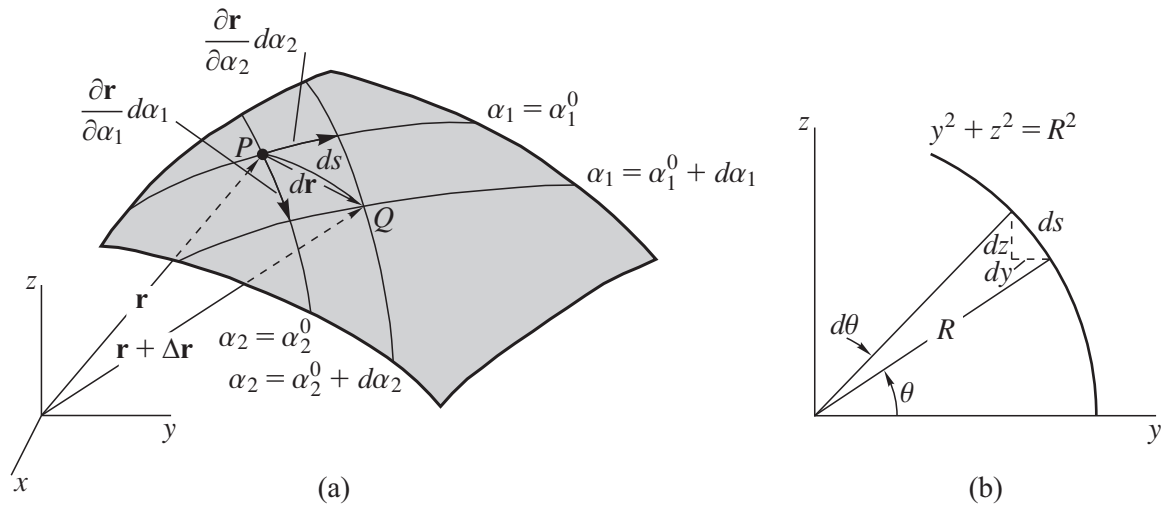


Figura 12.5 (a) Comprimento ds sobre a superfície (a rigor, o vetor $d\mathbf{r}$ é tangente à superfície em P). Os vetores $(\partial\mathbf{r}/\partial\alpha_1)d\alpha_1$ e $(\partial\mathbf{r}/\partial\alpha_2)d\alpha_2$ têm comprimentos $ds_1 = A_1d\alpha_1$ e $ds_2 = A_2d\alpha_2$, respectivamente; (b) Exemplo 12.1: comprimento ds sobre um arco circular.

parâmetros de Lamé são fatores de escala que relacionam mudanças infinitesimais nas coordenadas curvilíneas com comprimentos infinitesimais sobre a superfície.

Os vetores unitários tangentes à superfície na direção das curvas coordenadas α_1 e α_2 , e o vetor unitário normal à superfície são dados por

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_1} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_2} \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2. \quad (12.20)$$

Diferentemente do que ocorre num sistema de coordenadas retilíneas, esses vetores unitários não são constantes pois variam de direção de ponto para ponto na superfície (veja Figura 12.6). Localmente, num ponto fixo, os vetores definem a base de um sistema cartesiano ortogonal. Substituindo (12.20) em (12.16), obtemos

$$d\mathbf{r} = A_1d\alpha_1\mathbf{e}_1 + A_2d\alpha_2\mathbf{e}_2 = ds_1\mathbf{e}_1 + ds_2\mathbf{e}_2. \quad (12.21)$$

Exemplo 12.1 Considere o arco circular de raio R no plano yz mostrado na Figura 12.5b.

Se a coordenada curvilínea escolhida for o ângulo θ , então

$$ds = R d\theta$$

e o parâmetro de Lamé é R (conversor de $d\theta$ em ds).

Se a coordenada curvilínea escolhida for z , então

$$ds^2 = dy^2 + dz^2.$$

Da equação $y^2 + z^2 = R^2$,

$$2y dy = -2z dz$$

ou

$$dy^2 = \frac{z^2}{y^2} dz^2.$$

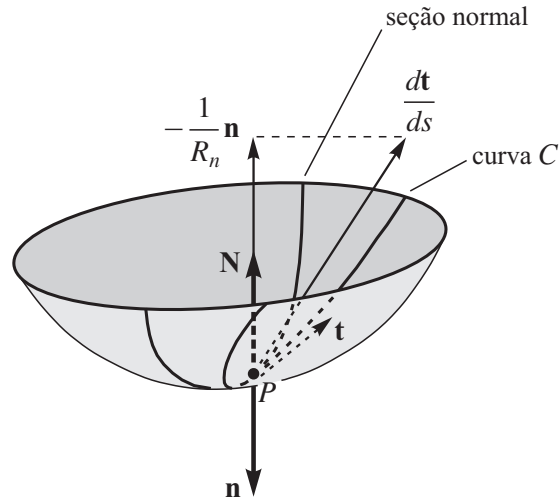


Figura 12.7 A seção normal e a curva C passam no ponto P com o mesmo vetor tangente \mathbf{t} ($d\mathbf{t}/ds$ é o vetor curvatura da curva C no ponto P).

Esta expressão, que nos dá a componente do vetor curvatura de C no ponto P na direção da normal à superfície, também representa a curvatura $1/R_n$ da seção normal, como será mostrado logo mais. A substituição de (12.16) e

$$d\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \quad (12.23)$$

em (12.22) conduz a

$$\frac{1}{R_n} = \frac{L (d\alpha_1)^2 + 2M d\alpha_1 d\alpha_2 + N (d\alpha_2)^2}{A_1^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 (d\alpha_2)^2}. \quad (12.24)$$

Veja que os parâmetros

$$L = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \quad M = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \quad N = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \quad (12.25)$$

também se escrevem na forma

$$L = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_1^2} \quad M = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \quad N = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_2^2} \quad (12.26)$$

ao derivar $\mathbf{n} \cdot \partial \mathbf{r} / \partial \alpha_1 = \mathbf{n} \cdot \partial \mathbf{r} / \partial \alpha_2 = 0$ em relação a α_1 e α_2 .

A curvatura normal $1/R_n$ ($= -d\mathbf{t}/ds \cdot \mathbf{n}$) é o quociente entre a *segunda forma quadrática* $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n}$ e a *primeira forma quadrática* $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$. Considerando que A_1 , A_2 , L , M e N são funções de α_1 e α_2 , e portanto constantes no ponto P , o lado direito da igualdade (12.24) só depende da direção $d\alpha_1/d\alpha_2$ de \mathbf{t} . Ou seja, qualquer curva sobre a superfície que passa em P tangente a \mathbf{t} tem no ponto o vetor curvatura com a mesma componente na direção de \mathbf{n} . No caso particular da seção normal, a componente é sua própria curvatura $1/R_n$. É esta generalidade geométrica que motiva adotar $1/R_n$ como uma medida de curvatura para a superfície em P na direção de \mathbf{t} .

Uma curvatura normal positiva, calculada de (12.24), significará que \mathbf{n} da superfície e \mathbf{N} da seção normal têm sentidos opostos. A Figura 12.8 ilustra bem a situação. É o numerador (segunda forma quadrática) de (12.24) que dita o sinal da curvatura, pois o denominador (primeira forma quadrática)

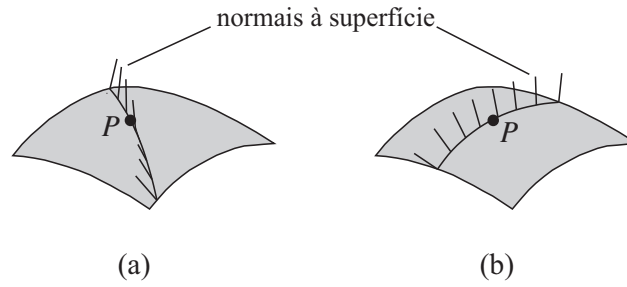


Figura 12.9 A torção da superfície no ponto P na direção indicada é: (a) não nula; (b) nula.

O movimento nos rotaciona, a não ser que a superfície seja localmente plana. Se a rotação tem uma componente que nos gira em torno da direção do movimento (veja Figura 12.9a), dizemos que a superfície apresenta torção nessa direção. Caso contrário, a torção é nula e nosso movimento se dá numa *direção principal* (veja Figura 12.9b). Essa explicação também elucidada por que as normais a uma superfície em pontos infinitamente próximos só se encontram para pontos alinhados com uma direção principal (direção com torção nula).

Tensor curvatura

A representação do vetor tangente \mathbf{t} por suas componentes no sistema $\alpha_1\alpha_2$,

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{ds} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_2} \frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{A_1 d\alpha_1}{ds} \mathbf{e}_1 + \frac{A_2 d\alpha_2}{ds} \mathbf{e}_2, \quad (12.31)$$

permite expressá-lo na forma matricial

$$\mathbf{t} = \left[\frac{A_1 d\alpha_1}{ds} \quad \frac{A_2 d\alpha_2}{ds} \right]^T \quad (12.32)$$

e reescrever (12.24) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_n} &= \frac{L}{A_1^2} \left(\frac{A_1 d\alpha_1}{ds} \right)^2 + 2 \frac{M}{A_1 A_2} \frac{A_1 d\alpha_1}{ds} \frac{A_2 d\alpha_2}{ds} + \frac{N}{A_2^2} \left(\frac{A_2 d\alpha_2}{ds} \right)^2 \\ &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{A_1 d\alpha_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} \right) \frac{A_1 d\alpha_1}{ds} \frac{A_2 d\alpha_2}{ds} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{A_2 d\alpha_2}{ds} \right)^2 = \mathbf{t}^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{t} \end{aligned} \quad (12.33)$$

onde

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_{12}} \\ \frac{1}{R_{21}} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad \frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_{21}}. \quad (12.34)$$

Imaginemos um segundo sistema ortogonal $\alpha'_1\alpha'_2$, como indicado na Figura 12.10, obtido do sistema $\alpha_1\alpha_2$ por uma rotação θ em torno da normal à superfície. A representação do vetor tangente no novo sistema é

$$\mathbf{t}' = \mathbf{L} \mathbf{t} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (12.35)$$

Como o lado esquerdo da igualdade (12.33) permanece inalterado quando se passa de um sistema para outro, então

$$\frac{1}{R_n} = \mathbf{t}'^T \boldsymbol{\kappa}' \mathbf{t}' = (\mathbf{L} \mathbf{t})^T \boldsymbol{\kappa}' \mathbf{L} \mathbf{t} = \mathbf{t}^T \underbrace{\mathbf{L}^T \boldsymbol{\kappa}' \mathbf{L}}_{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{t}. \quad (12.36)$$

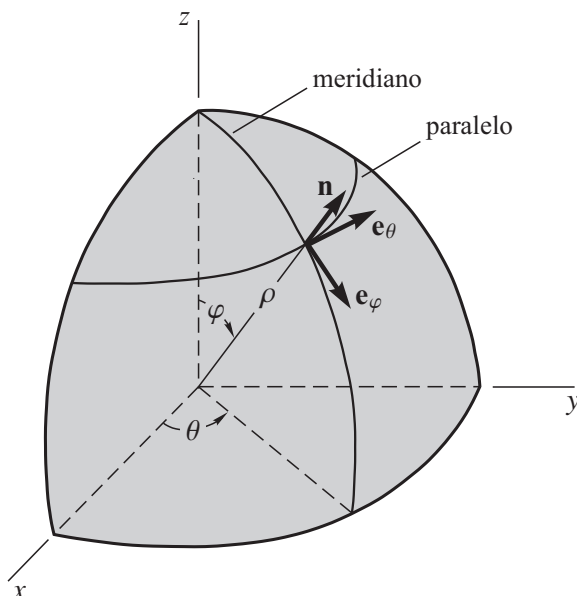


Figura 12.11 Exemplo 12.2: superfície esférica.

- (c) Se $1/R_I \neq 1/R_{II}$, as duas direções principais no ponto são únicas e mutuamente ortogonais. Se $1/R_I = 1/R_{II}$, qualquer direção é uma direção principal, ou seja, a superfície não apresenta torção (as superfícies plana e esférica são as duas únicas superfícies com esta propriedade).
- (d) A torção máxima ocorre numa direção a 45° das direções principais.
- (e) Os dois invariantes do tensor são

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \frac{1}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_{12}^2}. \quad (12.39)$$

- O primeiro invariante é chamado de *curvatura média* (mesmo sem o fator $1/2$) e corresponde à soma da diagonal de κ . O segundo invariante é a *curvatura gaussiana*,¹ representado pelo determinante da matriz. Esta curvatura quando positiva, negativa ou nula define se a superfície é *elíptica*, *hiperbólica* ou *parabólica*, respectivamente, no ponto considerado.

Uma curva sobre a superfície cuja tangente em cada ponto coincide com uma direção principal é conhecida como *linha de curvatura*. As linhas de curvatura formam, assim, uma rede ortogonal sobre a superfície ao longo das quais não há torção. Se α_1 e α_2 forem escolhidos de modo que as curvas coordenadas coincidam com as linhas de curvatura, então o sistema $\alpha_1 \alpha_2$ será ortogonal ($F = 0$) com $M = 0$. As curvaturas normais (12.27) nesse novo sistema são as próprias curvaturas principais da superfície.

Exemplo 12.2 A superfície esférica da Figura 12.11 é definida por

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = \rho \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_x + \rho \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_y + \rho \cos \varphi \mathbf{e}_z,$$

¹Carl Friedrich Gauss, astrônomo, matemático e físico alemão nascido em Braunschweig em 1777, falecido em Göttingen em 1855.

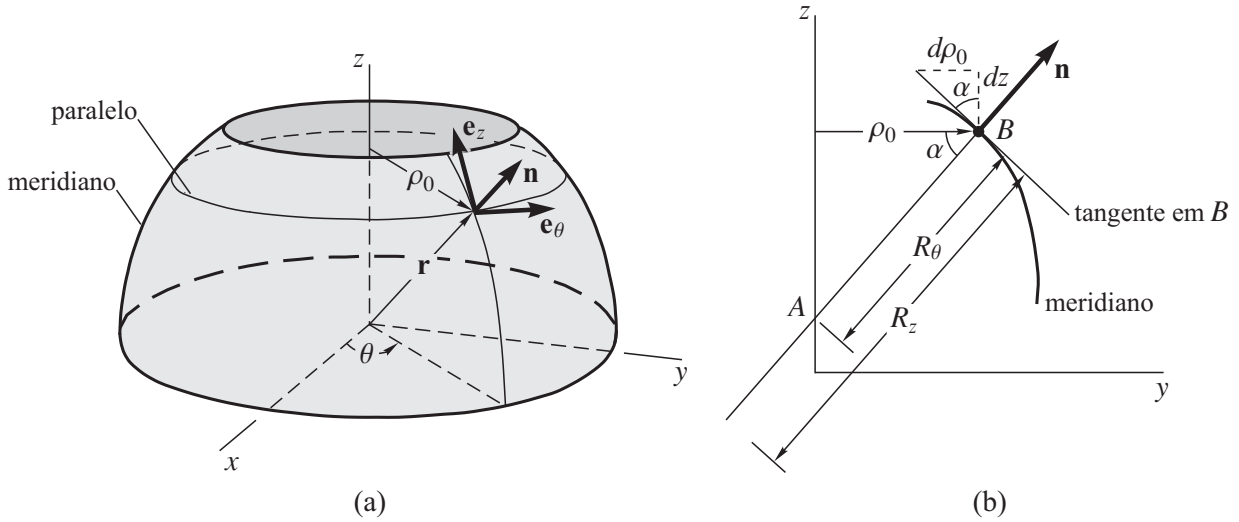


Figura 12.12 Exemplo 12.3: (a) superfície de revolução; (b) meridiano.

A superfície esférica do Exemplo 12.2 é um caso particular de uma superfície de revolução. Usando as derivadas

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\rho_0 \sin \theta \mathbf{e}_x + \rho_0 \cos \theta \mathbf{e}_y \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{d\rho_0}{dz} \cos \theta \mathbf{e}_x + \frac{d\rho_0}{dz} \sin \theta \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z,$$

vemos que as coordenadas θ e z são ortogonais, pois

$$F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0,$$

e que

$$A_\theta^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \rho_0^2 \quad A_z^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 1 + \left(\frac{d\rho_0}{dz} \right)^2.$$

Os vetores unitários, indicados na figura, escrevem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{A_\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &= \frac{1}{A_z} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{1 + (d\rho_0/dz)^2}} \left(\frac{d\rho_0}{dz} \cos \theta \mathbf{e}_x + \frac{d\rho_0}{dz} \sin \theta \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \right) \\ \mathbf{n} &= \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_z = \frac{1}{\sqrt{1 + (d\rho_0/dz)^2}} \left(\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y - \frac{d\rho_0}{dz} \mathbf{e}_z \right). \end{aligned}$$

A substituição de \mathbf{n} e das derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2} &= -\rho_0 \cos \theta \mathbf{e}_x - \rho_0 \sin \theta \mathbf{e}_y & \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta \partial z} &= -\frac{d\rho_0}{dz} \sin \theta \mathbf{e}_x + \frac{d\rho_0}{dz} \cos \theta \mathbf{e}_y \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial z^2} &= \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \cos \theta \mathbf{e}_x + \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \sin \theta \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

em (12.26) conduz a

$$L = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + (d\rho_0/dz)^2}} \quad M = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta \partial z} = 0 \quad N = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial z^2} = -\frac{d^2 \rho_0 / dz^2}{\sqrt{1 + (d\rho_0/dz)^2}}.$$

Como as curvas coordenadas coincidem com as linhas de curvaturas ($F = M = 0$), as curvaturas principais

$$\frac{1}{R_\theta} = \frac{L}{A_\theta^2} = \frac{1}{\rho_0 \sqrt{1 + (d\rho_0/dz)^2}} \quad \frac{1}{R_z} = \frac{N}{A_z^2} = -\frac{d^2 \rho_0 / dz^2}{[1 + (d\rho_0/dz)^2]^{3/2}}$$