

Parte III

Análise mecânica

Capítulo 15

Modelo de placas

15.1 Formulação de placas de Mindlin-Reissner

Uma placa pode ser caracterizada como uma estrutura plana que possui uma dimensão muito pequena em relação às outras duas dimensões (Figura 15.1). Em estruturas mecânicas e civís surgem em tampas, nervuras, reforços, painéis, paredes de tanques e reservatórios, lages de prédios, e uma infinidade de outras situações. O seu comportamento mecânico é algo similar ao de vigas, no sentido que a placa estrutural suporta, tipicamente, esforços de flexão. Nesse capítulo será vista uma das teorias de placa, em forma diferencial, e em seguida é aplicado o método de elementos finitos para a obtenção de soluções aproximadas. Aqui será vista apenas a teoria para comportamento elástico-linear (pequenos deslocamentos e deformações) de materiais isotrópicos. As teorias e das aplicações do MEF para placas de materiais compostos podem ser vistas em Mendonça [72].

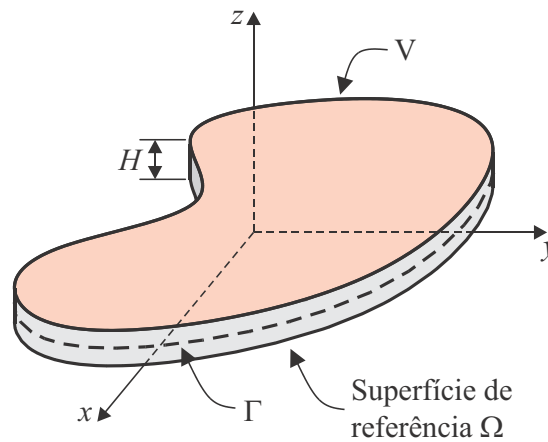


Figura 15.1: Elemento estrutural do tipo placa.

Utiliza-se um sistema cartesiano de referência (x, y, z) . Matematicamente, a placa define o domínio do problema, V , que é denotado da seguinte maneira [50]

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2} \right], (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (15.1)$$

sendo Ω a projeção do domínio V sobre a superfície de referência e H a espessura da placa. Dessa definição observa-se que os eixos x e y , e a origem do eixo z , são posicionados sobre a superfície de referência, que se localiza na posição intermediária da espessura.

O desenvolvimento de uma teoria de placa, com as características de uma teoria que permitisse obter aproximações para o comportamento do corpo tridimensional através de um modelo bidimensional foi desenvolvida por Sophie Germaine, uma matemática teórica francesa, durante a primeira parte do século 19. O modelo tornou-se famoso com os trabalhos de Kirchhoff e sua publicação em 1850, a quem foi atribuído o nome do modelo. Posteriormente as hipóteses foram estendidas a

casca delgadas por Love, gerando o modelo de Kirchhoff-Love para cascas.

O modelo bidimensional, é baseado nas seguintes hipóteses *ad-hoc*:

- A placa é considerada fina;
- As deflexões da placa são pequenas, comparadas com sua espessura;
- A tensão normal transversal é desprezível ($\sigma_z = 0$);
- Os segmentos normais à superfície de referência indeformada da placa permanecem normais à superfície de referência deformada e não sofrem variação de comprimento. Dessa forma a deformação normal transversal é nula ($\varepsilon_z = 0$).

Essas hipóteses limitam a aplicação da teoria somente à placas finas, uma vez que através da imposição da não rotação das normais em relação à rotação da superfície de referência, os efeitos da deformação transversal são negligenciados. Esta teoria é denominada **teoria clássica de placas**, **teoria de placa delgada** ou **teoria de placa de Kirchhoff**.

Um modelo mais sofisticado, proposto por Reissner em 1945 e 1947 e por Mindlin em 1951 [74], considera a influência da deformação cisalhante transversal, possibilitando a utilização desta teoria à placas moderadamente espessas. Esse modelo é baseado nas mesmas hipóteses de Kirchhoff, porém com a seguinte diferença:

- Os segmentos normais à superfície de referência indeformada da placa permanecem retas mas não necessariamente normais à superfície de referência deformada e, também, não sofrem variação de comprimento ($\varepsilon_z = 0$).

Esta teoria é conhecida como **teoria de Reissner-Mindlin** ou **teoria de placas semi-espessas**. Observe que as hipóteses das duas teorias são bastante similares às suas contrapartidas em vigas, nas teorias de Euler-Bernoulli de vigas delgadas e de Timoshenko para vigas semi-espessas.

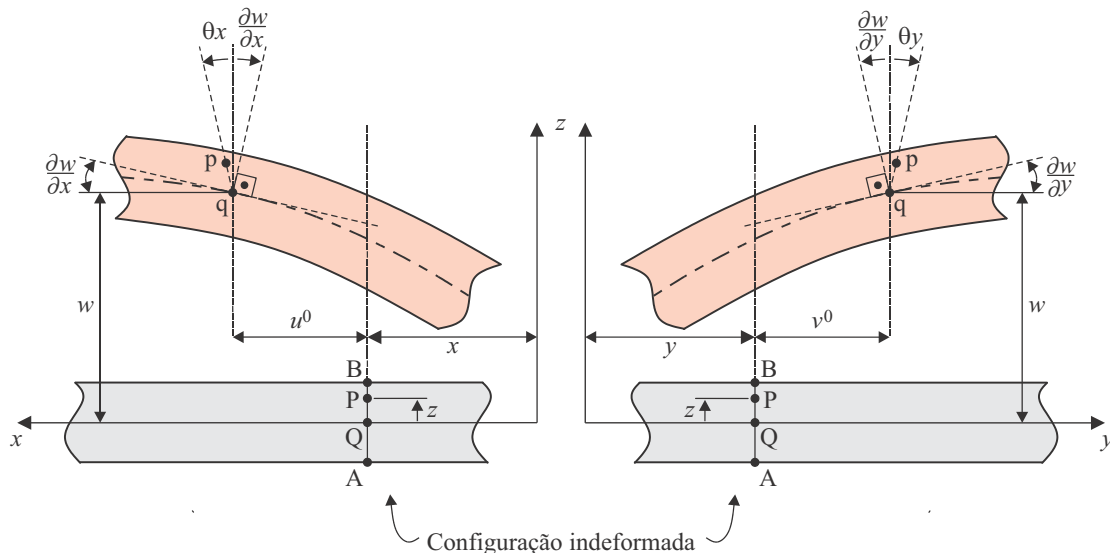


Figura 15.2: Deformação em modelo de placa de Reissner-Mindlin.

A Figura 15.2 ilustra as relações cinemáticas nos modelos de Kirchhoff e de Mindlin. Consideramos um ponto arbitrário P, de cota z . Com o carregamento aplicado, esse ponto desloca-se para a posição p. Seu deslocamento numa das duas direções coplanares, x , por exemplo, é $u_x(x, y, z)$. Essa componente é decomposta numa parcela $u^o(x, y)$, associada ao ponto Q na superfície de referência, de coordenadas (x, y) . Outra parcela de u_x , relativa u^o , é associada à rotação do segmento normal AB. Pela hipótese de Mindlin, a rotação desse segmento em torno do eixo y é $\theta_x(x, y)$. Então,

sejam relacionados às respectivas componentes de deformação de forma desacoplada. As relações constitutivas isotrópicas do material para o estado plano de tensões são tomadas de (4.32) e para o cisalhamento transversal são utilizadas as equações gerais (4.15):

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^f} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \\ \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_c} &= G \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^c} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (15.11)$$

ou ainda como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^f \boldsymbol{\varepsilon}_f = z \mathbf{C}^f \boldsymbol{\kappa} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{C}^c \boldsymbol{\gamma}, \quad (15.12)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ são as tensões devidas à flexão, coplanares e $\boldsymbol{\sigma}_c$ as tensões devidas ao cisalhamento transversal. \mathbf{C}^f é a matriz constitutiva do material em **estado plano de tensões**, (a mesma usada no Capítulo 8), representando agora a rigidez coplanar na flexão da placa e \mathbf{C}^c a matriz constitutiva do material associada à rigidez de cisalhamento transversal.

15.1.1 Tensões resultantes

Os **esforços internos de placa** (ou tensões resultantes) são definidos em termos das componentes de tensão por

$$\begin{cases} M_x = \int_{-H/2}^{H/2} z \sigma_{xx} dz, \\ M_y = \int_{-H/2}^{H/2} z \sigma_{yy} dz, \\ M_{xy} = \int_{-H/2}^{H/2} z \sigma_{xy} dz, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Q_{xz} = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{xz} dz \\ Q_{yz} = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{yz} dz \end{cases} \quad (15.13)$$

Nota-se que estes esforços são definidos por unidade de comprimento medido ao longo da superfície de referência, e variam apenas sobre ela, isto é, $M_x = M_x(x, y)$, $M_y = M_y(x, y)$ etc. M_x e M_y são **momentos fletores** e M_{xy} é um **momento torçor**. São momentos distribuídos por unidade de comprimento, com unidades de força, isto é, dado em [Nm/m]. Os **esforços cortantes** Q_{xz} e Q_{yz} são forças transversais por unidade de comprimento, com unidades de N/m. A convenção de sinais adotada para tensões resultantes da placa de Reissner-Mindlin, definidos acima, pode ser vista na Figura 15.4

As equações (15.13), em forma matricial, tomam a forma

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz, \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz, \quad (15.14)$$

ou ainda

$$\mathbf{M} = \int_{-H/2}^{H/2} z \boldsymbol{\sigma} dz \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_c = \int_{-H/2}^{H/2} \boldsymbol{\sigma}_c dz, \quad (15.15)$$

nas quais \mathbf{M} e \mathbf{Q}_c são respectivamente os momentos resultantes e os esforços cortantes resultantes. Adicionalmente aos momentos e cortantes, uma placa pode estar submetida a esforços coplanares,

em $\forall(x, y) \in \Gamma_f$

$$\boxed{Q_n = \check{Q}_n, \quad X_m = \check{X}_m, \quad Y_m = \check{Y}_m,} \quad (15.20)$$

onde

$$\boxed{Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y, \quad X_m = M_x n_x + M_{yx} n_y, \quad Y_m = M_{xy} n_x + M_y n_y.} \quad (15.21)$$

Os valores em barra são valores conhecidos, e Q_n , X_m e Y_m são esforços cortante e de momentos numa região curva de contorno onde \mathbf{n} é o vetor unitário com componentes (n_x, n_y) , como ilustrado na Figura 15.5.

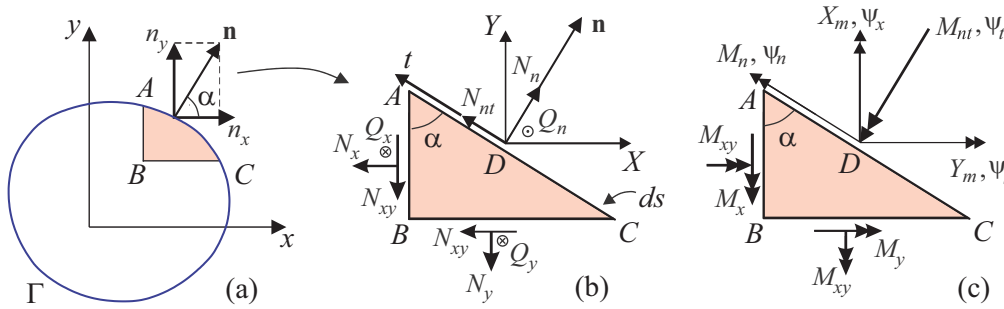


Figura 15.5: Ilustração dos esforços normais e cortantes no contorno da placa em (b) e de momentos em (c).

15.2 Princípio dos trabalhos virtuais em placas

Para formular o equilíbrio da placa sob carregamento externo aplica-se, inicialmente, o PTV em sua forma geral, como foi definido para um corpo de geometria arbitrária, na eq. (8.12). Separando a integração no volume em uma integração na superfície de referência Ω e outra na espessura, tem-se a equação associada ao PTV na forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{-H/2}^{H/2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_f(\hat{\mathbf{u}}_p) dz d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-H/2}^{H/2} \boldsymbol{\sigma}_c(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{u}}) dz d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [q\hat{w} + m_x\theta_x + m_y\theta_y] d\Omega + \int_{\Gamma} [Q_n\hat{w} + X_m\theta_x + Y_m\theta_y] d\Gamma \end{aligned} \quad (15.22)$$

Substituindo as tensões em termos das deformações com o uso da relação constitutiva eq. (15.12), obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{-H/2}^{H/2} z^2 \mathbf{C}^f \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{u}}) dz d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-H/2}^{H/2} \mathbf{C}^c \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{u}}) dz d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma, \end{aligned} \quad (15.23)$$

onde são definidos:

1. $\mathbf{u} = \{w(x, y), \theta_x(x, y), \theta_y(x, y)\}^T$, o vetor de deslocamentos,
2. $\mathbf{b} = \{q, m_x, m_y\}^T$, o vetor de forças e momentos na superfície de referência ;
3. $\mathbf{t} = \{Q_n, X_m, Y_m\}^T$, o vetor de forças e momentos no contorno e

4. $\hat{\mathbf{u}} = \{\hat{w}(x, y), \hat{\theta}_x(x, y), \hat{\theta}_y(x, y)\}^T$, as funções de deslocamento virtuais (funções peso).

Como todos os termos nos integrandos em (15.23) independem de z , exceto pelo termo em z^2 , a integração resulta em

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{D}_c\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma} \quad (15.24)$$

onde as matrizes \mathbf{D} e \mathbf{D}_c são aquelas definidas em (15.19) quando da definição dos esforços. A condição (15.24) deve ser satisfeita para quaisquer funções virtuais $\hat{w}(x, y)$, $\hat{\theta}_x(x, y)$, $\hat{\theta}_y(x, y)$ que sejam contínuas e satisfaçam a condição de contorno homogênea na parcela do contorno onde existem condições prescritas (Γ_u), isto é, as funções virtuais devem pertencer ao **conjunto das variações** Var , definido por

$$\boxed{Var = \{\hat{g}(\mathbf{x}) \in C^0(\Omega) \text{ tal que } \hat{g}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u\}} \quad (15.25)$$

Note então que, como é exigido que $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ em Γ_u , a integral de contorno à direita de (15.24) é não nula apenas na região Γ_f , onde $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$, isto é, \mathbf{t} é conhecido, igual aos valores impostos $\{\bar{Q}_n, \bar{X}_m, \bar{Y}_m\}^T$. (A parcela da integral em Γ_u é nula).

15.3 Elementos finitos de placas

Consideramos um elemento finito genérico e definido pelo domínio Ω^e . Para um ponto $(x, y) \in \Omega^e$ a função vetorial de deslocamentos é $\mathbf{u}^e(x, y)$, onde $\mathbf{u}^e \equiv \{w, \theta_x, \theta_y\}^T$. Essa função pode ser aproximada em termos de deslocamentos nodais \mathbf{U}^e , mediante a definição de uma base de funções de aproximação, da seguinte maneira

$$\mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y)\mathbf{U}^e \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{u}}^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y)\hat{\mathbf{U}}^e, \quad (15.26)$$

onde $\mathbf{N}^e(x, y)$ é uma matriz de funções de aproximação no elemento e \mathbf{U}^e e $\hat{\mathbf{U}}^e$ são os vetores de parâmetros nodais físicos e virtuais respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^e(x, y) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \psi_1 & \cdots & 0 & 0 & \psi_{N_{ne}} \\ \psi_1 & 0 & 0 & \cdots & \psi_{N_{ne}} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \cdots & & \psi_{N_{ne}} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{U}^e &= \{ \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_1 \quad \cdots \quad \theta_{xN_{ne}} \quad \theta_{yN_{ne}} \quad w_{N_{ne}} \}^T, \\ \hat{\mathbf{U}}^e &= \{ \hat{\theta}_{x1} \quad \hat{\theta}_{y1} \quad \hat{w}_1 \quad \cdots \quad \hat{\theta}_{xN_{ne}} \quad \hat{\theta}_{yN_{ne}} \quad \hat{w}_{N_{ne}} \}^T. \end{aligned} \quad (15.27)$$

N_{ne} é o número de nós do elemento). ψ_{no} , $no = 1, \dots, N_{ne}$, são as funções de aproximação locais do elemento.

Adicionalmente, os valores nodais de rotação nodais foram definidos de forma a que ambos, θ_{xno} e θ_{yno} num certo nó no , sejam orientados nas direções positivas dos eixos x e y , respectivamente. Dessa forma, $\theta_{xno} = -\theta_y$ e $\theta_{yno} = \theta_x$ como ilustrado no elemento e da Figura 15.3b.

Para o modelo completo, a aproximação dos deslocamentos é feita por $\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}(x, y)\mathbf{U}$, $\forall (x, y) \in \Omega$, onde \mathbf{U} contém todos os deslocamentos nodais da malha, e $\mathbf{N}(x, y)$ é formado pelas funções de aproximação globais φ_{no} , que por sua vez são formadas pelas funções locais ψ_{no} . Essa base de funções de aproximação globais deve possuir continuidade $C^0(\Omega)$, isto é, deve haver continuidade das funções globais φ_{no} nas interfaces entre elementos, mas não é necessário haver continuidade em suas derivadas, dado que os deslocamentos e rotações da placa de Reissner-Mindlin são aproximadas independentemente. Isto é diferente da teoria de Kirchhoff, que exige continuidade C^1 das funções

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^e &= \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_f^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}_f^e + \mathbf{B}_c^{eT} \mathbf{D}_c^e \mathbf{B}_c^e) \det \mathbf{J}^e \, dr ds, \\ \mathbf{F}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{b}^e \det \mathbf{J}^e \, dr ds + \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_f} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e \det \mathbf{J}_\Gamma^e \, dr ds.\end{aligned}\quad (15.38)$$

Essas integrais são avaliadas numericamente utilizando uma regra de integração numérica para cada elemento finito (ver seção 9). Fazendo a sobreposição dos elementos para modelar toda a estrutura,³ obtém-se a equação algébrica global de elementos finitos de placa de Reissner-Mindlin, isto é

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (15.39)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez global da estrutura, \mathbf{U} o vetor deslocamentos nodais generalizado e \mathbf{F} o vetor carregamento consistente generalizado, em total semelhança a todos os modelos já vistos nos capítulos anteriores.

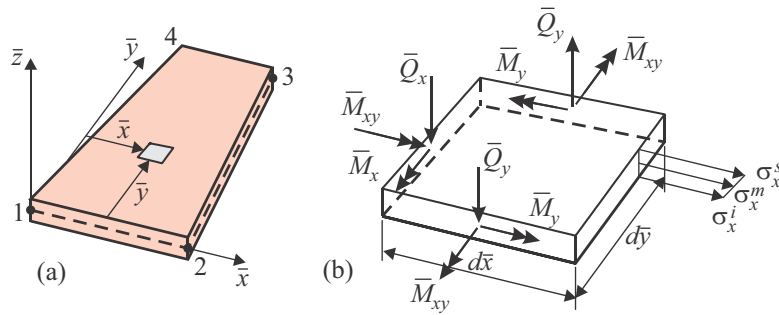


Figura 15.6: (a) Elemento de placa e (b) esforços e tensões nas direções locais do elemento, numa coordenada (\bar{x}, \bar{y}) .

15.3.2 Cálculo das tensões

1. As condições de contorno de deslocamento são impostas no sistema algébrico (15.39), (ver detalhes na seção 7.6, página 176), o que gera um sistema modificado $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$.
2. O sistema modificado é resolvido para os deslocamentos nodais \mathbf{U} via o processo de fatoração de Gauss ou pelo método dos gradientes conjugados.
3. Para cada elemento e , monta-se o vetor \mathbf{U}^e com os deslocamentos nodais desse elemento.
4. Calculam-se matrizes de deformação \mathbf{B}_f^e e \mathbf{B}_c^e para flexão e cisalhamento do elemento através das eqs. (15.30).
5. Calculam-se as curvaturas e as deformações cisalhantes transversais usando (15.28) e (15.29):

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_f^e \mathbf{U}^e \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_c^e \mathbf{U}^e.$$

6. Então os esforços e as tensões num elemento diferencial do elemento de placa são visualizados na Figura 15.6. Os esforços são estimados por:

$$\mathbf{M}_f^e = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_c^e = \mathbf{D}^c \boldsymbol{\gamma}. \quad (15.40)$$

³Ver detalhes sobre o **processo de sobreposição** de matrizes na seção 5.2.1, página 81.

7. As tensões vem de (15.12):

$$\boldsymbol{\sigma} = z\mathbf{C}^f\boldsymbol{\kappa} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{C}^c\boldsymbol{\gamma}. \quad (15.41)$$

As tensões coplanares $\boldsymbol{\sigma}$ devem ser calculadas em varias cotas z devido à flexão.

Os valores calculados nos itens 4 a 7 acima devem ser calculados em diversos pontos do elemento. É comum avaliar as tensões nos pontos de integração de Gauss, dado que, para alguns tipos de elementos, como aqueles baseados nas funções serendipity, na vizinhança destes pontos se encontram os pontos denominados de superconvergentes, isto é, pontos onde a solução aproximada apresenta melhor precisão dentro do elemento. O processo usual de cálculo é o seguinte é através de alguns métodos de **suavização e recuperação de tensões** como o de média nodal simples ou ponderada pela área e métodos baseados em mínimos quadrados. Esse métodos estão descritos na seção 8.9.

Observação: a realização das médias pressupõe que os sistemas de coordenadas em todos os elementos em torno do nó sendo processado seja o mesmo. Caso cada elemento seja definido por um sistema de coordenadas próprio, antes da realização das médias torna-se necessário transformar as componentes do tensor tensão para um sistema de coordenadas comum aos diversos elementos envolvidos.

15.4 Travamento (*locking*)

As formulações simples de elementos finitos de placa de Reissner-Mindlin, do tipo mostrado acima, são sujeitos ao fenômeno de *locking*, que se apresenta mais intenso quando se utiliza funções de aproximação de baixa ordem p [50]. Este fenômeno é caracterizado por uma excessiva rigidez do modelo numérico em relação ao comportamento real. Ocorre mais intensamente em elementos bilineares e biquadráticos, principalmente em malhas com elementos distorcidos. O efeito é manifestado conforme a espessura da placa se reduz [26].

Uma das estratégias para evitar o *locking*, consiste na técnica de **integração reduzida-seletiva** [50], [114], em que a parcela de cisalhamento transversal da matriz de rigidez (o segundo termo do integrando da rigidez em (15.38)) é **subintegrada**. Subintegração consiste em utilizar um número de pontos de integração inferior à quantidade normal para o dado grau de polinômio das funções de aproximação. A subintegração da energia cisalhante é bastante simples, uma vez que é desacoplada das demais parcelas, de forma que basta usar $\bar{n}\bar{p}$ em lugar de np pontos na integral de \mathbf{K}_c^e . Por exemplo, para funções $\psi_{no}(r, s)$ de grau $p = 2$, usa-se $\bar{n}\bar{p} = 2$ pontos em vez de 3. Mesmo para placas mais espessas este método leva a melhores resultados. Entretanto, a técnica de subintegração pode provocar o surgimento de modos espúrios de energia nula [26]. A subintegração de toda a matriz de rigidez pode torna-la singular, ou quase singular.

Outra estratégia comum consiste em utilizar elementos de alta ordem. Experimentos numéricos e diversos teoremas mostram que quanto maior o grau das funções de aproximação dos elementos, menor a presença do *locking*. O simples uso de elementos com grau $p = 3$, sem qualquer modificação do funcional, é praticamente satisfatório, enquanto que para $p \geq 4$ o elemento se torna isento do fenômeno para todos os efeitos práticos. Apresentamos no Capítulo 11 aspectos básicos sobre o fenômeno.

15.5 Análise de cascas por elementos planos

A formulação acima leva em conta apenas o efeito de flexão (e o cisalhamento decorrente), isto é, considera, basicamente, as forças transversais atuando na placa. As forças coplanares foram tratadas separadamente, no Capítulo 8, como um caso de elasticidade plana. Caso a estrutura consista efetivamente de uma placa plana, submetida simultaneamente a cargas transversais e coplanares, podem ser feitas duas análises, uma para cada tipo de solicitação, obtendo, por exemplo, os deslocamentos transversais $\{w(x, y), \theta_x(x, y), \theta_y(x, y)\}$, e os coplanares $\{u_x^o(x, y), u_y^o(x, y)\}$ separadamente. Os campos de tensões associados são em seguida simplesmente adicionados ponto a ponto.

no sistema local e rotacionados para o sistema global, e em seguida são sobrepostos na matriz de rigidez e vetor força global.

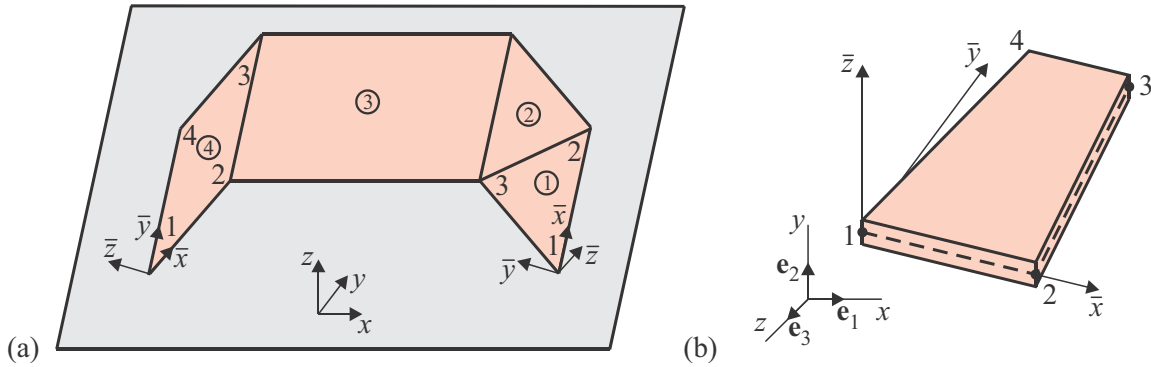


Figura 15.8: Sistemas local de um elemento de placa e global de um modelo de cascas.

Inicialmente consideramos o **campo de deslocamentos** de placa no sistema local de coordenadas do elemento, de tal forma a incorporar simultaneamente os movimentos de membrana e de flexão:

$$\begin{cases} \bar{u}_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{u}_x^o(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{z} \bar{\theta}_x(x, y), \\ \bar{u}_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{u}_y^o(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{z} \bar{\theta}_y(x, y), \\ \bar{u}_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (15.42)$$

onde \bar{u}_x^o e \bar{u}_y^o são deslocamentos de membrana, isto é, os deslocamentos de um ponto da superfície de referência nas direções coplanares à placa, e \bar{w} , $\bar{\theta}_x$ e $\bar{\theta}_y$ são deslocamento transversal à superfície de referência e as rotações da normal, exatamente como visto nas seções anteriores para a flexão de placa, em relação aos eixos locais \bar{x} \bar{y} \bar{z} , como visto na Figura 15.9. As componentes \bar{u}_x^o e \bar{u}_y^o descrevem exatamente o comportamento de estado plano de tensões visto no Capítulo 8. O que se tem aqui para casca são os dois comportamentos levados em conta simultaneamente na relação cinemática.

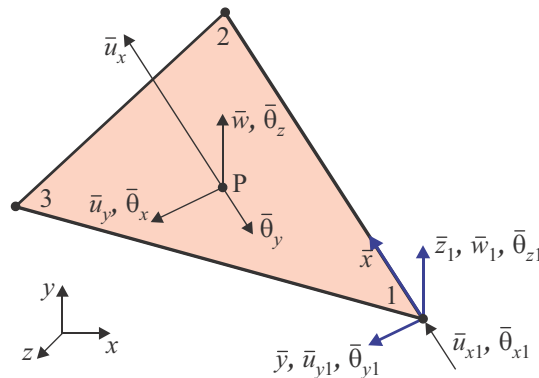


Figura 15.9: Componentes de deslocamento \bar{u}_x^o , \bar{u}_y^o , \bar{w} , $\bar{\theta}_x$ e $\bar{\theta}_y$ num ponto P arbitrário de coordenadas locais $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, e deslocamentos nodais no nó local 1, \bar{u}_{x1}^o , \bar{u}_{y1}^o , \bar{w}_1 , $\bar{\theta}_{x1}$, $\bar{\theta}_{y1}$.

A relação **deformação-deslocamento** fica

em introduzir nos termos nulos da diagonal de $\bar{\mathbf{K}}^e$ uma constante, que é arbitrariamente definida na ordem de $1/10000$ do valor do menor termo da diagonal da matriz do elemento [12][13].

Rotação das matrizes para o sistema global de coordenadas

Na Figura 15.8 tem-se alguns elementos triangulares e retangulares, com sua numeração nodal intrínseca denotada por 1,2,3, etc, definida sempre em forma sequencial, iniciando num nó de vértice e seguindo primeiramente pelos demais nós de vértice do elemento. Tipicamente, o sistema local é definido a partir das coordenadas nodais do elemento. O eixo \bar{x} é sempre definido pelo vetor unitário $\bar{\mathbf{e}}_1$ que tem origem no nó local 1 e aponta para o nó 2. O eixo \bar{y} é definido na direção do vetor unitário $\bar{\mathbf{e}}_2$ coplanar ao elemento, perpendicular a $\bar{\mathbf{e}}_1$, na direção indicada pelo nó 3. Finalmente, o eixo \bar{z} é na direção $\bar{\mathbf{e}}_3$ normal ao elemento. As coordenadas nodais globais dos nós do elemento, $\mathbf{x}_{no} = (x_{no}, y_{no}, z_{no})$, para $no = 1, \dots, N_{ne}$ são

$$\mathbf{x}_{no} = x_{no}\mathbf{e}_1 + y_{no}\mathbf{e}_2 + z_{no}\mathbf{e}_3, \quad (15.56)$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$ são os vetores unitários da base global. O cálculo das componentes desses vetores unitários em relação aos vetores da base global é feita pela seguinte sequência de operações,

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|}, & \mathbf{v} &= \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, \\ \bar{\mathbf{e}}_3 &= \frac{\bar{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{v}}{\|\bar{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{v}\|}, & \bar{\mathbf{e}}_2 &= \bar{\mathbf{e}}_3 \times \bar{\mathbf{e}}_1. \end{aligned}} \quad (15.57)$$

Fazendo essas operações usando \mathbf{x}_{no} de (15.56), ao final dos cálculos se tem os vetores da base local na forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1 &= R_{11}\mathbf{e}_1 + R_{12}\mathbf{e}_2 + R_{13}\mathbf{e}_3, \\ \bar{\mathbf{e}}_2 &= R_{21}\mathbf{e}_1 + R_{22}\mathbf{e}_2 + R_{23}\mathbf{e}_3, \\ \bar{\mathbf{e}}_3 &= R_{31}\mathbf{e}_1 + R_{32}\mathbf{e}_2 + R_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (15.58)$$

Por outro lado, a matriz de rotação ortogonal entre as duas bases é, por definição, R_{ij} são os cossenos diretores dados por $R_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j$. Assim tem-se

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}. \quad (15.59)$$

Toda a dedução da seção anterior foi feita usando um sistema de coordenadas locais, coplanar ao próprio elemento, $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$. Buscaremos aqui fazer a transformação do sistema (15.55) para o sistema global xyz usado para descrever a estrutura. A transformação vetorial entre ambos os sistemas é feito exatamente como no tratamento dado aos elementos finitos de vigas no espaço, na seção 6.9. Assim, a matriz de rotação entre os dois sistemas, envolvendo simultaneamente todos os 6 graus de liberdade de todos os nós do elemento é feito por uma matriz \mathbf{R}^e que tem o mesmo formato visto nas eqs.(6.93), página 144, de forma que a relação entre os valores nodais dos deslocamentos e forças nos dois sistemas é feita por

$$\bar{\mathbf{U}}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{F}^e, \quad (15.60)$$

onde $\bar{\mathbf{U}}^e$ e \mathbf{U}^e agora são os deslocamentos nodais nas direções locais e globais, isto é,

$$\mathbf{U}^e = \left\{ u_{x1}^o \quad u_{x1}^o \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad \cdots \quad u_{xN_{ne}}^o \quad u_{yN_{ne}}^o \quad w_{N_{ne}} \quad \theta_{xN_{ne}} \quad \theta_{yN_{ne}} \quad \theta_{zN_{ne}} \right\}^T, \quad (15.61)$$

sendo que a disposição de $\bar{\mathbf{U}}^e$, $\bar{\mathbf{F}}^e$ e \mathbf{F}^e são análogas, gerando vetores de dimensão $N_{gle} = 6 \times N_{ne}$. Claramente, \mathbf{R}^e tem dimensões $N_{gle} \times N_{gle}$.

