Capítulo 4

Deformações e tensões

Nesse capítulo definimos mais uma grandeza fundamental em mecânica dos sólidos, a **deformação**, que se juntará às demais grandezas já estudadas, as **forças externas**, os **esforços** internos, e as **tensões**. O conceito de deformação é embasado em uma outra grandeza fundamental, o campo de **deslocamento,** o que geram **relações deformação-deslocamento**, também denominada relação cinemática. A segunda parte do capítulo trata da relação entre deformações e tensões, as chamadas **relações constitutivas, ou relações tensão-deformação.**

4.1 Ideias básicas de deslocamento e deformação

Considere uma barra reta de seção uniforme, de comprimento L_o, como na Figura 4.1a, engastada na extremidade A. Se aplicamos uma força axial trativa, a barra se deforma e passa a um comprimento L como na figura (b). Existem pelo menos duas formas de equacionar o fenômeno cinemático: através dos conceitos de **campo de deslocamentos** e do **campo de deformação**.

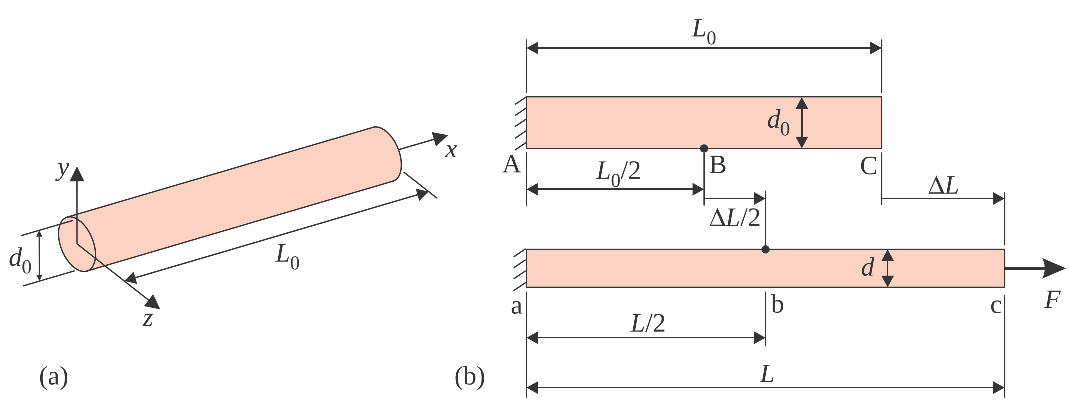


Figura 4.1: Elongamento de uma barra, de um comprimento inicial L_o para um comprimento final L.

Se consideramos a barra fixa pela extremidade A, é visível que cada ponto do material sofreu uma certa quantidade de deslocamento axial (na direção x). Por exemplo, o deslocamento em A é nulo, e a extremidade C deslocou-se ΔL para a posição c. Se considerarmos que a **deformação** seja **uniforme**, temos então que os deslocamentos são proporcionais à coordenada inicial x do ponto. Assim, o ponto central B de coordenada inicial $L_o/2$ sofre deslocamento $\Delta L/2$. Se prosseguimos com a hipótese de proporcionalidade, uma simples "regra de três" mostra que o **deslocamento axial** $u(x)$ numa seção qualquer localizada inicialmente numa coordenada x é dada pela função

$$u(x) = \frac{\Delta L}{L_o} x. \tag{4.1}$$

Quando uma barra como a ilustrada é tracionada, além da variação de comprimento existe também

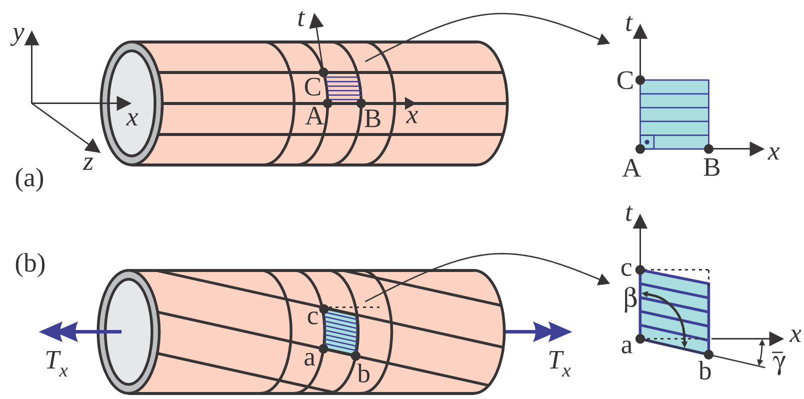


Figura 4.2: Deformação angular num elemento de material num tubo torcionado.

identificar uma porção de material qualquer em sua configuração indeformada, situada numa posição P, definida por suas coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = \{x; y; z\}$. Quando aplicamos o carregamento, cada partícula de material se move, i.e., muda de posição no espaço. O material inicialmente na posição P move-se para a posição p de coordenadas $\overline{\mathbf{x}} = \{\overline{x}; \overline{y}; \overline{z}\}$.

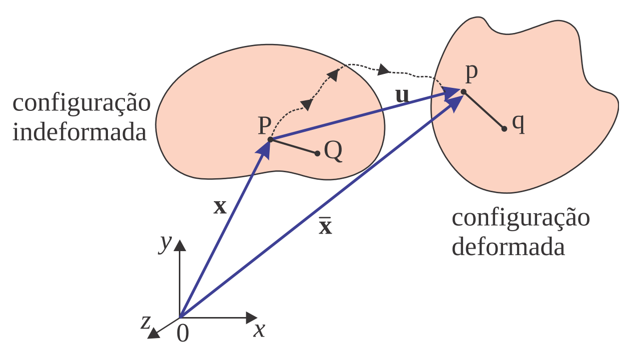


Figura 4.3: Configuração inicial e deformada de um corpo genérico.

Podemos identificar o **vetor deslocamento** $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ como o vetor que define a diferença entre a posição final e a inicial de uma porção de material inicialmente localizado na posição $\mathbf{x}$, i.e.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}. \tag{4.4}$$

Esse vetor é representado por suas componentes cartesianas,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{c} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{array} \right\}. \tag{4.5}$$

i.e., u, v e w são as componentes do movimento do ponto nas direções x, y e z respectivamente. Note que isto não significa uma suposição de que o ponto deslocou-se ao longo de uma linha reta entre as posições $\mathbf{x}$ e $\overline{\mathbf{x}}$. Ao contrário, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ indica apenas as posições inicial e final do movimento. Na Figura 4.3 a trajetória entre os dois instantes é representada pela linha tracejada unindo P a p.

A função vetorial (4.5), ou suas três funções escalares correspondentes, constituem o **campo de deslocamento** do corpo. A partir desse campo, define-se um **campo de deformações** como segue.

Primeiramente, consideramos um ponto A no corpo em sua configuração indeformada, de coordenadas $\mathbf{x}$, e a partir desse ponto identificamos um elemento volumétrico de dimensões finitesimais $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, com faces paralelas aos eixos cartesianos. Na Figura 4.4a temos uma vista do plano xy, com o elemento indeformado formando um retângulo ABCD. Em seguida aplicamos um

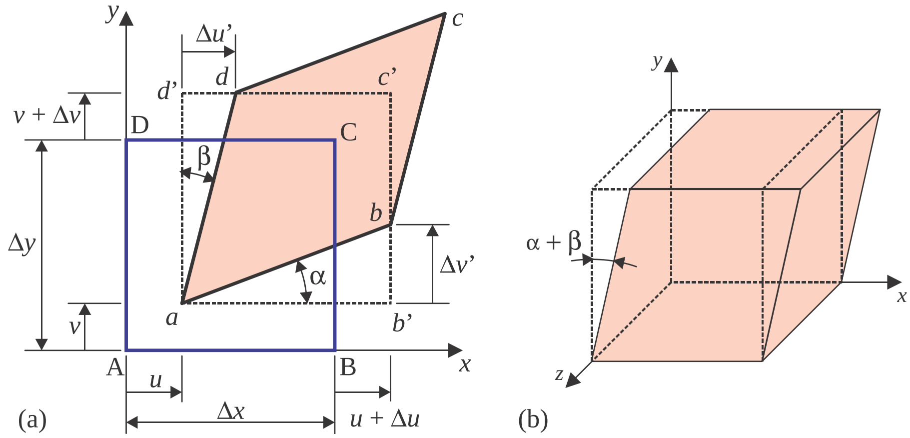


Figura 4.4: (a) Incrementos de deslocamentos de um elemento finitesimal contido no plano xy; (b) Vista 3-D da deformação cisalhante no plano xy, com o elemento tombado sobre o plano xz.

carregamento ao corpo e o material no retângulo deforma-se e os pontos tomam as posições $abcd$ como ilustrado. O ponto A sofre deslocamentos u e v nas direções x e y. Na direção x, o ponto B desloca-se num valor diferente de A, i.e., $u_B = u + \Delta u$. Na direção y, o ponto B também desloca-se diferentemente de A, i.e., $v_B = v + \Delta v'$, o que forma o ângulo α. Para o segmento AD a interpretação é análoga: $u_D = u + \Delta u'$ e $v_D = v + \Delta v$. A Figura 4.4b ilustra a deformação cisalhante no plano xy. (O elemento foi tombado para facilitar a visualização.)

Temos aqui a descrição de uma **teoria simplificada**, **linearizada**, cuja primeira premissa é a de que as **rotações são pequenas**. Esse "pequeno" significa que os ângulos α e β estão naquela faixa em que

$$\text{sen}\ \alpha \approx \text{tg}\ \alpha \approx \alpha \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha \approx 1. \tag{4.6}$$

Quantitativamente, podemos arbitrar um limite, por exemplo $\alpha \lesssim 0,08727$ rad (cerca de 5^o), o que **produz** sen $\alpha = 0,08716$ e tg $\alpha = 0,08749$, i.e., os desvios relativos são de ordem de 0,1 %.

Os incrementos de deslocamentos no elemento podem ser usados para identificar medidas de deformação. Primeiramente, tomemos o segmento horizontal AB ao longo de x, de comprimento inicial Δx. Observando a Figura 4.4, é visível que o comprimento final do segmento, ab, é diferente da projeção ab'. Entretanto, para α pequeno, consideraremos que $ab \simeq ab'$. Assim, a medida de **deformação normal de engenharia** sofrida pelo segmento AB é dada por (4.2), que aqui toma a forma

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{ab' - AB}{AB} = \frac{(u + \Delta u) - u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{4.7}$$

Para o segmento vertical AD, a deformação de engenharia é

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{ad' - AD}{AD} = \frac{(v + \Delta v) - v}{\Delta y} = \frac{\Delta v}{\Delta y}. \tag{4.8}$$

Os índices "x" e "y" em $\bar{\varepsilon}$ ajudam a indicar a direção do segmento a que se refere a deformação. Finalmente, a deformação cisalhante de engenharia vem de (4.3), que nesse caso é

$$\bar{\gamma} = \alpha + \beta. \tag{4.9}$$

Observando os triângulos associados a α e β na Figura 4.4a, temos que a deformação cisalhante sofrida pelo elemento volumétrico é

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\Delta v'}{\Delta x} + \frac{\Delta u'}{\Delta y}. \tag{4.10}$$

As medidas (4.7)-(4.10) são valores válidos na região macroscópica ABCD. Entretanto, buscamos valores que descrevam a deformação num ponto, o ponto A de coordenadas $\mathbf{x}$. Para isso, fazemos os limites para $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$. Assim as equações acima resultam em

$$\varepsilon_x(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.11}$$

ε_x e ε_y são deformações normais específicas e γ_{xy} é a deformação cisalhantes associada ao plano xy.

Todas as considerações feitas de (4.6)-(4.11) podem ser repetidas para os planos xz e yz, no ponto $\mathbf{x}$. Isso resulta no conjunto completo das **seis componentes de deformação** no ponto:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \varepsilon_x(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}. \end{array}} \tag{4.12}$$

Essas são as relações cinemáticas (ou relações deformação-deslocamento) lineares. Elas são válidas para qualquer corpo, qualquer geometria, carregamento, tipos de apoios e qualquer tipo de material sólido. São limitadas apenas pelas hipóteses de linearidade usadas em sua dedução, i.e., a geometria, o material, o carregamento, devem ser tais que as componentes sejam pequenas.

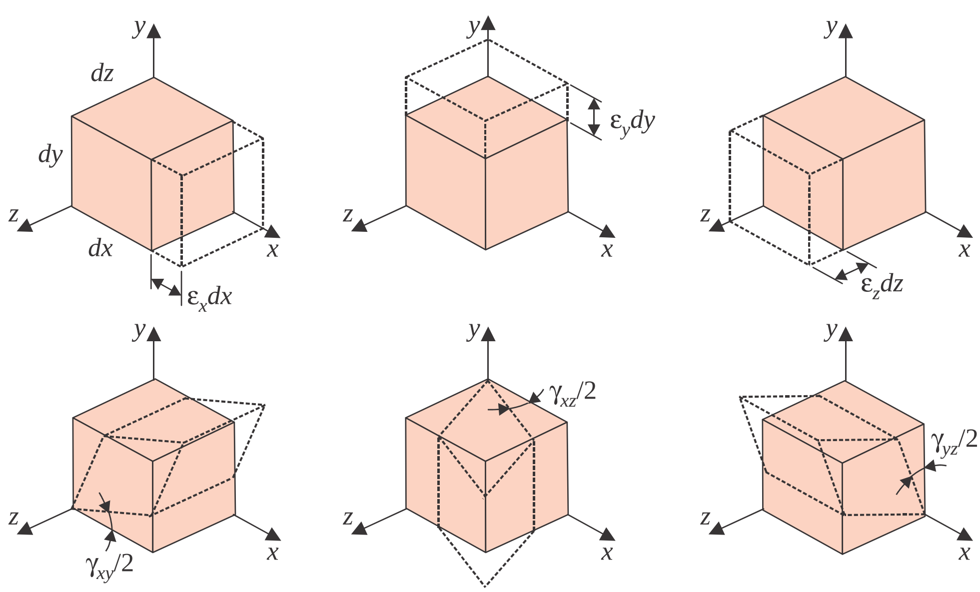


Figura 4.5: As seis componentes de deformação associadas aos eixos xyz.

Cada uma das componentes de deformação é representada individualmente na Figura 4.5. Será provado que essas deformações são as componentes de um **tensor deformação**. A matriz das componentes desse tensor em relação ao sistema cartesiano xyz é

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

onde os termos fora da diagonal principal são **deformações cisalhantes tensoriais**, dadas por $\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$, $\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz}/2$, $\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}/2$, e os termos na diagonal são as deformações específicas normais no ponto de coordenadas $\mathbf{x}$. As propriedades matemáticas desse tensor são idênticas às do tensor tensão, e serão exploradas no capítulo 5.

4.3 Efeito de Poisson

Considere uma barra reta sob tração como na Figura 4.6, com comprimento inicial L_0. Um primeiro efeito da aplicação da força axial é o aumento do comprimento para L. Um segundo efeito observado é uma redução do diâmetro, de d_o para d, i.e., uma variação Δd no diâmetro. Esse é o chamado **efeito de Poisson:** qualitativamente, sabe-se que se tracionamos a barra, ela contrai-se na direção transversal e, reversamente, uma compressão axial gera uma expansão diametral.

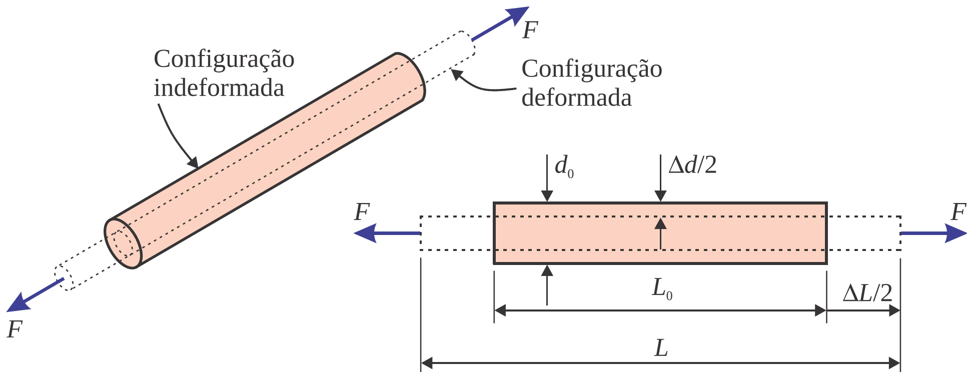


Figura 4.6: Efeito de Poisson numa barra tracionada.

Podemos definir as duas componentes de deformação específica na barra:

$$\varepsilon_{axial} = \frac{\Delta L}{L_o} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_{trans} = \frac{\Delta d}{d_o}. \tag{4.14}$$

Em 1828 o cientista francês S. D. Poisson identificou o fenômeno e propôs a hipótese de que, no regime elástico-linear de um material isotrópico-homogêneo, a relação entre essas deformações seria uma constante para o dado material, i.e., a relação $\varepsilon_{trans}/\varepsilon_{axial}$ é uma propriedade de material. Essa constante é definida como o **coeficiente de Poisson**, dado por

$$\nu := -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{axial}}. \tag{4.15}$$

Alguns aspectos podem ser apontados sobre essa relação:

(a) ν é sempre um valor positivo para materiais isotrópico-homogêneos, i.e., $\nu > 0$.

(b) O sinal "$-$" é incluído na fórmula porque se busca uma propriedade positiva, porém num ensaio uniaxial, sempre ε_{trans} e ε_{axial} têm sinais distintos, i.e., sempre uma das duas deformações será negativa num ensaio.

(c) No regime elástico em **todos** os materiais homogêneos-isotrópicos, se tem que

$$0 < \nu < 0,5. \tag{4.16}$$

Note que não é possível, nessa classe de materiais, termos $\nu = 0$ ou $\nu = 0,5$. Valores aparentes de coeficiente de Poisson nulos ou negativos ocorrem em diversos materiais, como alguns tipos de materiais porosos. Em qualquer caso, são sempre em materiais heterogêneos e anisotrópicos.

(d) Em materiais tradicionais de engenharia, ν situa-se tipicamente na faixa

$$0,2 \lesssim \nu \lesssim 0,33. \tag{4.17}$$

(e) Por exemplo, alguns valores típicos são

$$
\begin{array}{ll}
\bullet \text{ Aços Carbono} & \rightarrow \nu = 0,292, \\
\bullet \text{ Alumínios} & \rightarrow \nu = 0,334, \\
\bullet \text{ Aço inoxidável} & \rightarrow \nu = 0,305, \\
\bullet \text{ Vidro-fibras} & \rightarrow \nu = 0,25.
\end{array}
\tag{4.18}
$$

Valores para outros materiais são vistos no apêndice.

(f) Uma observação superficial a uma figura como 4.6 frequentemente gera a ilusão que a redução na seção transversal ocorre numa proporção tal que compense o elongamento axial de forma a manter o volume do corpo constante. Isso não é correto. **No regime elástico o volume varia com a deformação**. Isso será mostrado mais a frente através de um exemplo.

(g) Prova-se que o coeficiente de Poisson $\nu = 0,5$ representa uma deformação a volume constante. **Isso ocorre em processos de escoamento puro do** material.

Exemplo 4.1 Efeito de Poisson e deformação volumétrica específica

Considere a barra da Figura 4.7 sob uma força axial $F = 100$ kN, fabricado em aço com coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, módulo de elasticidade $E = 207$ GPa e tensão limite de escoamento $\sigma_E = 300$ MPa. As dimensões iniciais da barra são $L_o = 1200$ mm, $b_o = 30$ mm, $h_o = 15$ mm. Determine: (a) as componentes de deformação; (b) as variações nas dimensões da barra; (c) a variação volumétrica percentual sofrida pela barra em decorrência do carregamento.

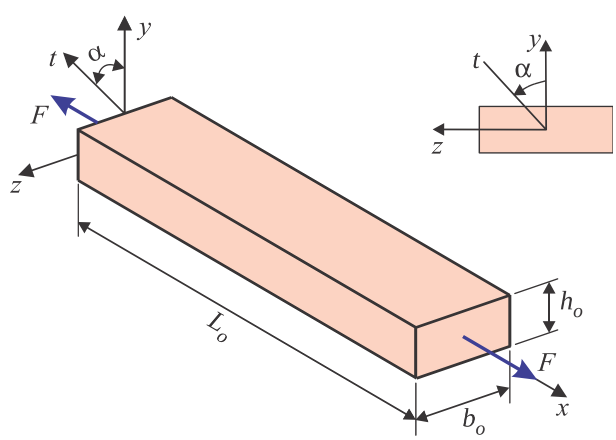


Figura 4.7: Barra do Exemplo 4.1.

Solução:

O esforço normal na barra é uniforme, $N = F$ =100 kN. A tensão normal média em qualquer ponto é

$$\sigma_x = \frac{N}{A_o} = \frac{F}{b_o h_o} = \frac{100 \cdot 10^3}{30 \times 15} = 222,2 \text{ MPa}.$$

As demais componentes de tensão são nulas. Como $\sigma_x < \sigma_E$, a tensão aplicada é menor que a tensão de início de escoamento do material, i.e., a barra encontra-se na faixa elástica-linear do material. Então podemos prosseguir nos cálculos. Da lei de Hooke uniaxial, eq(4.43), a **deformação axial** ε_x é

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{222,2 \text{ MPa}}{207 \cdot 10^3 \text{ MPa}} = 1,07 \cdot 10^{-3}. \tag{4.19}$$

$$\boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z} \tag{4.26}$$

Observação 1: No exemplo se tem $\varepsilon_V = 4,26 \cdot 10^{-4}$, i.e., o tracionamento na barra gerou uma variação volumétrica de 0,0426 %. De fato, esse efeito observado no exemplo ocorre em **qualquer outra situação que envolva peças submetidas a um estado de deformações suficientemente pequenas** para poderem ser analisadas pela presente teoria de cinemática linear. Então, quando as deformações são menores que 0,01, por exemplo, a soma das componentes normais tem a mesma ordem de grandeza do limite, ∼0,03, enquanto seu produto é de várias ordens superiores, $\sim 10^{-6}$, que pode ser ignorado em presença da soma, ∼0,03.

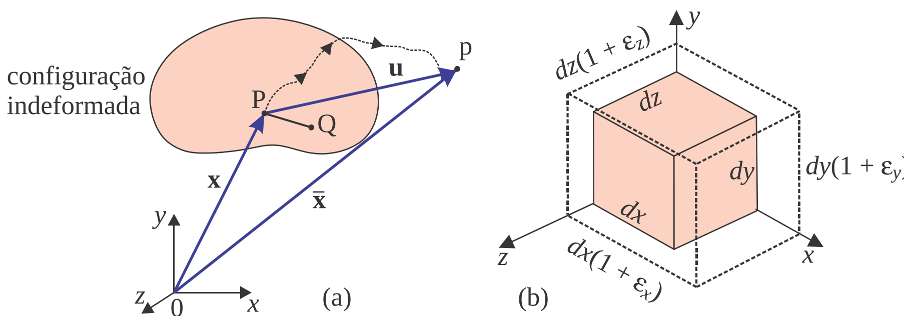


Figura 4.8: Em (a), um corpo arbitrário em sua configuração indeformada, e um ponto P na coordenada **x**. Em (b), o elemento diferencial em **x** em sua configuração deformada.

Observação 2: a dedução de (4.26) foi feita usando o volume finitesimal do exemplo, i.e., as dimensões L_o, h_o e b_o. De fato, a dedução pode ser repetida para um ponto do corpo de dimensões diferenciais $dV_o = dx \times dy \times dz$. Um elemento desse tipo é ilustrado na Figura 4.8, em que se tem as componentes normais de deformação atuando sobre o elemento diferencial. As dimensões do volume deformado são $dx(1+\varepsilon_x)$, $dy(1+\varepsilon_y)$ e $dz(1+\varepsilon_z)$. Nesse caso, a dedução mostrada em (4.24) se repete da mesma forma, apenas que adaptada para um volume inicial diferencial dV_o que se deforma em um volume dV:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V \quad &: = \frac{dV - dV_o}{dV_o} = \frac{dV}{dV_o} - 1, \\ &= \frac{dV_o(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)}{dV_o} - 1, \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z \simeq \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \end{aligned} \tag{4.27}$$

No exemplo, a deformação volumétrica calculada se aplicava à barra como um todo. Entretanto, num problema arbitrário, em que as deformações possuem um gradiente, i.e., seus valores variam de ponto a ponto, se tem que $\varepsilon_x = \varepsilon_x(\mathbf{x})$, $\varepsilon_y = \varepsilon_y(\mathbf{x})$,$\varepsilon_z = \varepsilon_z(\mathbf{x})$, então a deformação volumétrica também varia ponto a ponto, i.e., $\varepsilon_V = \varepsilon_V(\mathbf{x})$. Assim, diferentes regiões do corpo desenvolvem diferentes deformações volumétricas específicas.

Observação 3: a dedução da deformação volumétrica em (4.27) foi feita apenas com as componentes normais de deformação. Isso é feito pela consideração que, no regime de pequenas deformações, as **deformações cisalhantes** não causam mudança de volume, **se passam a volume constante**. O cisalhamento causa apenas distorção geométrica, enquanto as deformações normais mudam o volume, sem distorções na geometria.

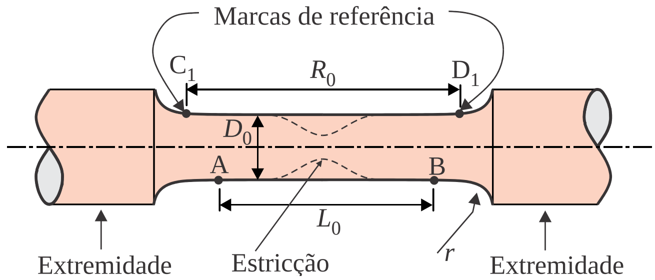


Figura 4.9: Corpo de prova cilíndrico padronizado na norma ASTM-8M-97. $R_o = 75$ mm, $L_o = 62,5 \pm 0,1$ mm, $D_o = 12,5 \pm 0,2$ mm, $r = 10$ mm. Outras dimensões, devem ser vistas na norma.

4.4 Casos clássicos de campos cinemáticos

As relações deformação-deslocamentos (4.12) podem ser usadas para identificar o campo de deformações associado a um campo de deslocamento conhecido. Consideremos um corpo hexaédrico regular, com dimensões $a \times b \times c$ nas direções cartesianas. Esse formato do corpo foi escolhido apenas por conveniência para simplificar a visualização das ilustrações. Consideremos alguns campos de deslocamentos típicos.

Elongamento simples

Este tipo de deformação é definido pelo seguinte campo de deslocamentos

$$u(\mathbf{x}) = kx, \qquad v(\mathbf{x}) = -vky, \qquad w(\mathbf{x}) = -vkz, \tag{4.28}$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ é o vetor posição no corpo. k é uma constante real e v o coeficiente de Poisson. Esse campo de deslocamento é ilustrado na Figura 4.10 para um valor real positivo de k.

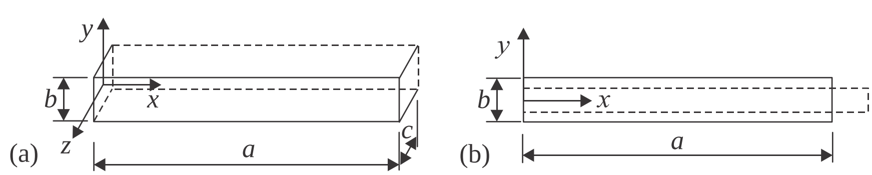


Figura 4.10: (a) Corpo prismático em forma de barra e (b) visualização do campo de deslocamento.

As deformações são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial x} = k, \qquad \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \frac{\partial v}{\partial y} = -vk, \qquad \varepsilon_z(\mathbf{x}) = \frac{\partial w}{\partial z} = -vk, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) &= \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Então, o tensor deformação em todos os pontos do corpo é

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -vk & 0 \\ 0 & 0 & -vk \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Cisalhamento plano puro

Este é definido pelo campo de deslocamentos

$$u(\mathbf{x}) = ky, \qquad v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) = 0. \tag{4.31}$$

que é ilustrado na Figura 4.11. As deformações são dadas por

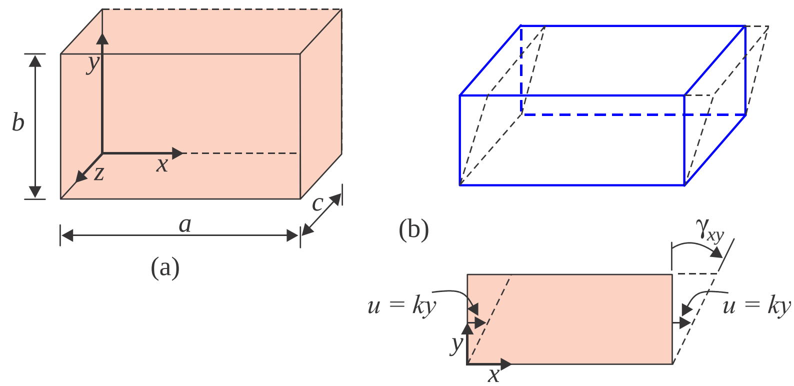


Figura 4.11: Bloco prismático e visualização do campo de cisalhamento plano.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x(\mathbf{x}) &= \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \varepsilon_z(\mathbf{x}) = 0, \\
\gamma_{xy}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = k, \qquad \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

E o tensor deformação correspondente é

$$
\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.33}
$$

uma vez que $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \gamma_{xy}/2 = k/2$. A deformação de engenharia γ_{xy} é ilustrada na Figura 4.11b. **Por exemplo**, se o corpo tiver dimensões $a \times b \times c = 40 \times 30 \times 20$ mm^3, e se a deformação for controlada por $k = 0{,}002$, o campo de deslocamento é $u(\mathbf{x}) = 0{,}002y$ e $v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) = 0$, e o deslocamento máximo ao longo de x é $u_{\max} = u(x, b, z) = 0{,}060$ mm. O ângulo de deformação cisalhante de engenharia no plano xy é $\gamma_{xy}(\mathbf{x}) = 0{,}002$ rad.

Flexão plana

Considere o seguinte campo de deslocamentos:

$u(\mathbf{x}) = -2kxy, \qquad v(\mathbf{x}) = kx^2, \qquad w(\mathbf{x}) = 0.$

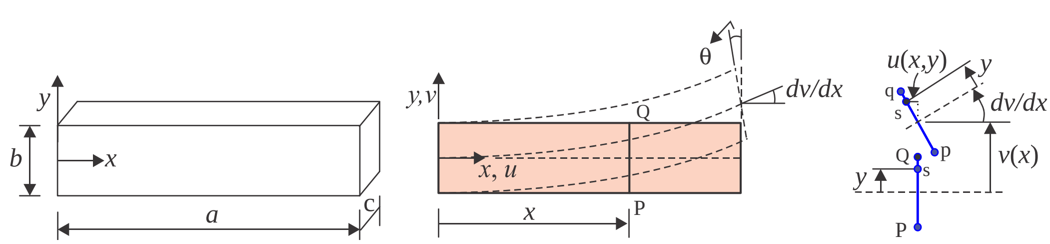


Figura 4.12: Bloco em forma de barra e deslocamentos de flexão plana.

A Figura 4.12 ilustra uma barra longa de seção retangular. Se ela for submetida ao campo de deslocamentos descrito, sua configuração deformada será como na figura (b). Um segmento PQ perpendicular ao eixo x desloca-se como um corpo rígido, sofrendo translação v e rotação θ, mantendo-se reta, assumindo a posição pq. O deslocamento transversal $v(x)$ só depende de x. A rotação θ é igual à tangente da linha axial flexionada, i.e., $\theta = \partial v/\partial x = 2kx$. Então, o deslocamento de um ponto S sobre a linha PQ, de coordenada y, desloca-se axialmente por $u(x, y, z) = -\theta y$, i.e., $u(x, y, z) = -2kxy$.

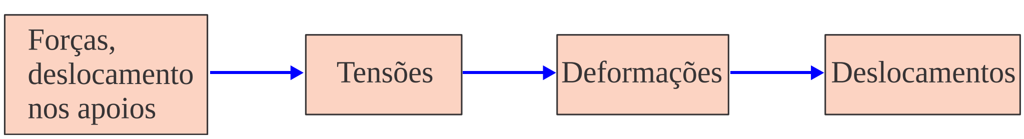
$$
\begin{aligned}
\dot{u}(\mathbf{x},t) &= -2\omega q \cos(\omega t)\ xy, \qquad \dot{v}(\mathbf{x},t) = q\omega \cos(\omega t)\ x^2, \qquad \dot{w}(\mathbf{x},t) = 0, \text{ e} \\
\ddot{u}(\mathbf{x},t) &= 2\omega^2 q \operatorname{sen}(\omega t)\ xy, \qquad \ddot{v}(\mathbf{x},t) = -q\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)\ x^2, \qquad \ddot{w}(\mathbf{x},t) = 0.
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

As acelerações dão origem às forças de inércia na barra.

Uma vez que o campo de deslocamentos varia no tempo, todos os demais campos, de deformação e de tensões, também variam de maneira coerente. Por exemplo, as deformações se tornam

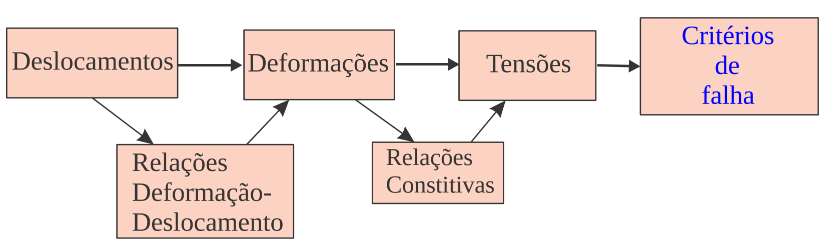
$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial u}{\partial x} = -2q \operatorname{sen}(\omega t)\, y, \qquad \varepsilon_y(\mathbf{x},t) = \varepsilon_z(\mathbf{x},t) = 0, \\
\gamma_{xy}(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \gamma_{xz}(\mathbf{x},t) = \gamma_{yz}(\mathbf{x},t) = 0.
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

Observações. Note que, sempre que se tenha um campo de deslocamento dado, o processo de obtenção das deformações é **direto**, i.e., basta efetuar as diferenciações nas relações deformação-deslocamentos. Então, para qualquer função que se possa escrever para um campo de deslocamento, existirá um **único** campo de deformações, facilmente obtenível. Entretanto, na mecânica dos sólidos, a situação quase universal é a inversa: o campo de deslocamentos é consequência dos campos de deformação e de tensão, e estes são associados ao carregamento e às condições de vinculação. Isto pode ser visto no seguinte diagrama:



(4.41)

Uma vez que é bastante complexa essa sequência de operações, existe uma grande quantidade de métodos sofisticados que busca inverter a sequência de cálculo. O mais poderoso e versátil desses métodos, o Método de Elementos Finitos, consegue justamente isso, i.e., consegue obter primeiro uma aproximação dos deslocamentos. Assim, as demais entidades podem ser obtidas de maneira direta, i.e.:



(4.42)

Com o campo de tensões se pode avaliar a segurança do componente quanto a todos os modos de falha dependentes do campo de tensões. Para os modos de falha dependentes dos deslocamentos, como as falhas por baixa rigidez, a avaliação já é feita diretamente do campo de deslocamentos obtido inicialmente.

4.5 Ensaio de tração - diagrama tensão-deformação

O chamado ensaio de tração é a forma mais básica e utilizada para a determinação experimental de propriedades mecânicas de materiais da engenharia. O procedimento consiste em, primeiramente, construir **corpos de provas** do material que se deseja testar. Duas formas são mais comuns aos corpos de prova, os **cilíndricos** e os de **seção retangular**. A Figura 4.9 mostra as dimensões normalizadas do corpo de provas cilíndrico conforme a norma ASTM[2] para teste de materiais

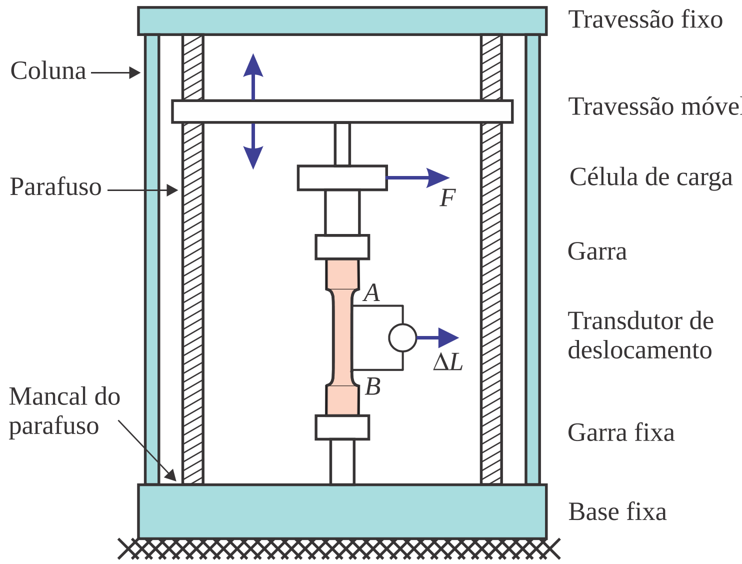


Figura 4.14: Esboço geral de ensaio de tração numa máquina padrão.

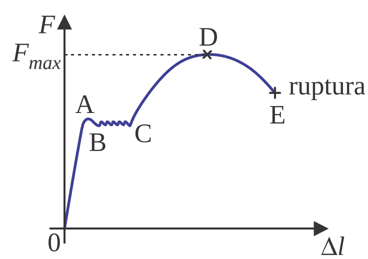


Figura 4.15: Diagrama força x variação de comprimento no ensaio de tração, típico de um aço doce.

aplicada torna-se permanente no corpo de provas, mesmo que a carga seja removida. Essa região termina quando se atinge a máxima carga que o material é capaz de suportar, $F_{\max}$.

- Trecho DE - Região de **estricção** no corpo de prova. Quando a carga atinge $F_{\max}$, qualquer tentativa de incrementar a carga levaria à ruptura do corpo. Entretanto, por um controle de deslocamento do travessão da máquina de ensaio, a carga pode ser gradualmente reduzida de forma a permitir um acréscimo lento da deformação. Entretanto, nessa região, a deformação não mais é uniforme sobre a extensão útil do corpo de provas (segmento AB na Figura 4.9. Em vez disso, ela passa a concentrar-se numa região de pequena extensão, formando uma **zona de estricção**, como indicado nas linhas tracejadas da Figura 4.9. Nessa zona, o estado de tensões é variável de ponto a ponto, e é triaxial. O ponto E do diagrama 4.15 indica o ponto de fratura do corpo de provas em duas partes.

Deve-se observar que **um diagrama $F \times \Delta L$ depende não apenas do material mas também da geometria do corpo de provas, do comprimento útil L_o e da área inicial da seção transversal A_o**. Essas influências podem ser eliminadas, até certo ponto, normalizando o diagrama $F \times \Delta L$ da seguinte forma:

1. Dividindo ΔL por L_o, o que define a deformação de engenharia: $\varepsilon = \Delta L / L_o$;

2. Dividindo a força F por A_o, o que define a tensão normal média de engenharia na região útil da barra: $\sigma = F / A_o$.

de um material. Entretanto deve-se notar que sempre resultarão modificações permanentes na microestrutura do material, não importando quão pequena seja a deformação. A consideração de que o material possui uma faixa elástica é feita de forma aproximativa, quando as diferenças geradas na microestrutura são tão pequenas a não poderem ser observadas com equipamentos simples nas condições rotineiras de medição dos ensaios padronizados típicos.

Para metais, o comportamento elástico ocorre sempre que a tensão aplicada durante o carregamento, σ, tenha sido inferior a um certo valor limite, denominado **tensão limite de escoamento**, σ_E. Então, se durante o carregamento trativo

$$\sigma \leqslant \sigma_E, \tag{4.44}$$

teremos comportamento elástico. Nota: o diagrama 4.17 apresenta também a curva $\sigma \times \varepsilon$ para compressão. Para aços, essa curva é bastante semelhante à curva de tração, enquanto materiais frágeis como o concreto e o ferro fundido (Figuras 4.20 e 4.21) apresentam curvas bastantes distintas no primeiro e no terceiro quadrantes.

Em materiais que possuem uma região linear no gráfico $\sigma \times \varepsilon$, como os aços, o limite plástico praticamente coincide com o **limite de proporcionalidade** (o final do trecho reto do diagrama), e são frequentemente tomados como um único ponto no diagrama. Entretanto, o comportamento elástico é observado mesmo em materiais cujo comportamento é completamente não-linear, como as borrachas (elastômeros), por exemplo.

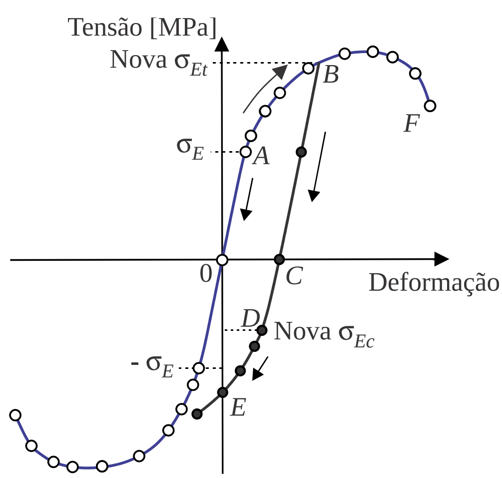


Figura 4.17: Reversão de carga e efeito Baushinger.

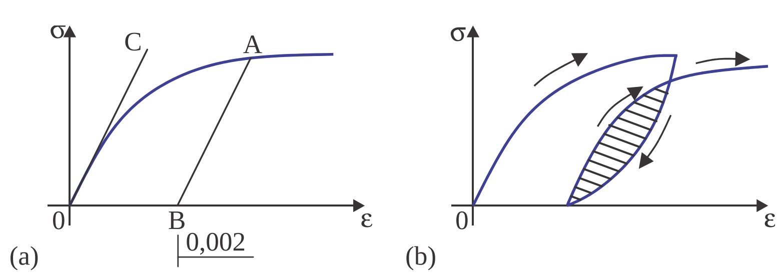


Figura 4.18: (a) Método da deformação 0,2 % para determinação da tensão de escoamento do material; (b) Laço de histerese.

Comportamento plástico

Quando o carregamento no material metálico é tal que

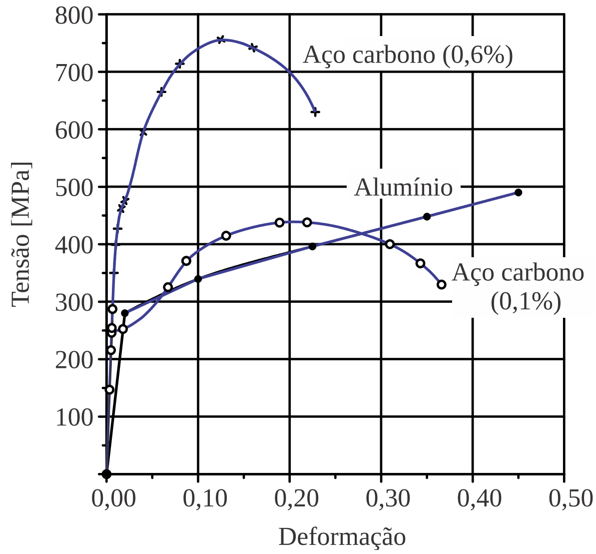


Figura 4.19: Diagramas tensão-deformação de engenharia típicos para aços de baixo e alto teor de carbono e para alumínio. (Os valores de deformação até o limite linear foram multiplicados por 5 para melhor visualização.)

$$\sigma > \sigma_E, \tag{4.45}$$

o descarregamento se processa ao longo da linha BC da Figura 4.17. Assim, quando a tensão cai a zero, o material mantém uma **deformação residual**, de valor $\overrightarrow{OC}$. Note que, após remover toda a tração, podemos continuar a solicitar o material em compressão, seguindo no diagrama ao longo da linha $\overrightarrow{CD}$. Se a compressão progredir, eventualmente chegaremos a uma situação de deformação nula, no ponto E, porém aí a tensão será não nula, de valor $\overrightarrow{OE}$.

O processo de plastificação (ou escoamento do metal), se caracteriza então pelo desenvolvimento de alterações permanentes na estrutura atômica do material.

Tensão limite de escoamento inferior e superior

Quando se observa o diagrama 4.16 notam-se dois níveis característicos de tensão, indicados por σ_{Ei} e σ_{Es}, as chamadas tensão de escoamento inferior e superior. Essa forma de diagrama, com o patamar horizontal de escoamento estendendo-se até deformações da ordem de $\varepsilon \approx 0,03$, é característico dos aços de baixa resistência, chamados **aços doces**, que são aços com conteúdo de carbono baixos, da ordem de 0,2 % ou menos. Aços de mais alta resistência, como os aços carbono de 0,06 %, apresentam curva suave, como ilustrada na Figura 4.19.

4.5.3 Tensão de ruptura, de fratura e elongamento máximo

O ponto máximo do diagrama $\sigma \times \varepsilon$ de engenharia indica a **tensão limite de ruptura** do material, σ_R, que é associada à força máxima no ensaio de tração. A tensão no final da curva indica a tensão de fratura σ_F. A deformação máxima de engenharia, ε_F, é denominada **elongamento máximo** do material, e é obtida no ensaio por

$$\boxed{\varepsilon_F = \frac{\Delta R_{\max}}{R_o}} \tag{4.46}$$

$\Delta R_{\max} = R - R_o$ é a variação de comprimento do corpo de prova rompido. É obtido após a ruptura, tornando as duas partes resultantes do corpo de provas rompido, e medindo a distância final entre os pontos C e D marcados na superfície do corpo de provas, e comparando à distância inicial R_o

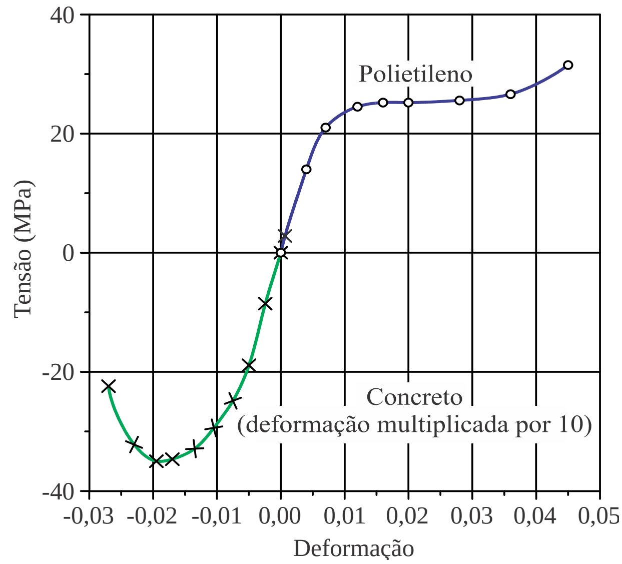


Figura 4.20: Curvas tensão-deformação de engenharia típicas para polietileno e para concreto (preparado com 36 litros de água por saco de 50 kg de cimento, ensaiado com 28 dias de idade). Os valores de deformação para o concreto foram multiplicados por 10 para melhor visualização.

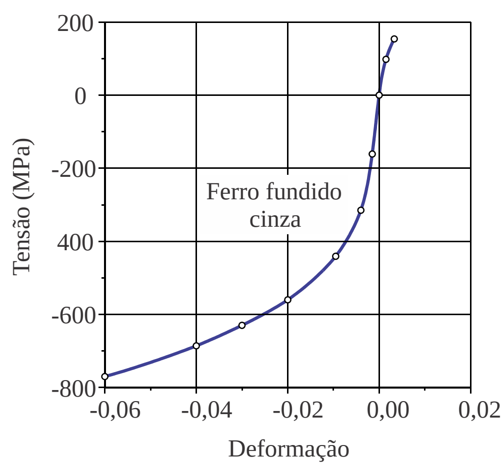


Figura 4.21: Diagrama tensão-deformação de engenharia típico para o ferro fundido cinzento.

4.5.4 Materiais frágeis e dúcteis

De forma não muito rigorosa, materiais são ditos **dúcteis** se são capazes de desenvolver deformações relativamente grandes até a ruptura final. Do lado oposto, os **materiais frágeis** atingem sua tensão final de ruptura com pequenas deformações.

Observando os diagramas 4.19, 4.20 e 4.21, se tem uma visão mais clara desse conceito. Um aço de baixo carbono, (0,1 % de C), desenvolve uma larga faixa de deformações plásticas, enquanto o aço de alto carbono, mais resistente, deforma-se menos até a fratura. Então pode-se dizer que o segundo material é mais frágil que o primeiro.

Materiais de engenharia tipicamente **frágeis** são, por exemplo, os seguintes:

- ▷ concreto
- ▷ ferro fundido
- ▷ aços de alta resistência
- ▷ alguns polímeros
- ▷ rochas
- ▷ vidro
- ▷ cerâmicas

Materiais dúcteis típicos são:

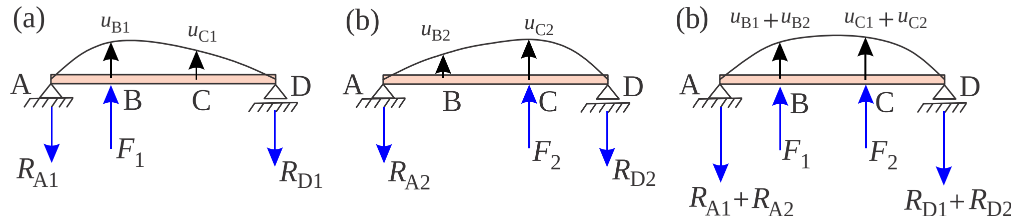


Figura 4.22: Ilustração do princípio de sobreposição dos efeitos em um problema de flexão de vigas.

Observe que esse princípio depende apenas da linearidade do problema - não é restrito a problemas de flexão de vigas como na presente ilustração, mas a todo problema de formulação matemática.

Que esse princípio funciona apenas em problemas lineares pode ser visto rapidamente com um exemplo simples. Considere-se inicialmente um problema linear, como uma equação de uma variável, $f(x) = ax$. Então o dado de entrada, o "carregamento", é x, e a solução é o valor resultante, $f(x)$. Assim, tem-se que:

- Problema 1: $f(x_1) = ax_1$;
- Problema 2: $f(x_2) = ax_2$;
- Problema 3: $f(x_2 + x_1) = ax_1 + ax_2$. Então, $f(x_2 + x_1) = f(x_1) + f(x_2)$, o que confirma o princípio.

Agora consideremos o problema não linear mais simples possível, $f(x) = ax^2$. Agora temos:

- Problema 1: $f(x_1) = ax_1^2$;
- Problema 2: $f(x_2) = ax_2^2$;
- Problema 3: $f(x_2 + x_1) = a\left(x_1 + x_2\right)^2 = ax_1^2 + ax_2^2 + 2ax_1x_2$. Então, $f(x_2 + x_1) = f(x_1) + f(x_2) + 2ax_1x_2$, o que é diferente de $f(x_1) + f(x_2)$, e o princípio não é aplicável.

4.7 Relação tensão-deformação triaxial - Lei de Hooke

No Capítulo 3 definimos o vetor tensão e suas componentes, que formam o **tensor tensão**. Independentemente, no presente capítulo, definimos as componentes do **tensor deformação** e suas relações com o gradiente do vetor deslocamento. Temos então duas entidades, tensão e deformação. Ambas definidas de forma independente uma da outra. De fato, cada uma, é definida de forma puramente abstrata, matemática. Nenhuma delas tem relação com o comportamento de um dado material. Por exemplo, se tomamos uma barra de 100 mm de comprimento, e aplicamos uma variação de comprimento de $0,1$ mm, pode-se calcular uma deformação média de 0,1%. Nota-se que isso é apenas uma relação geométrica entre dimensões antes e depois de aplicado o campo de deslocamento. Não há nenhuma relação física com o carregamento aplicado ou com as características do material. Da mesma forma, se uma força de 20 kN for aplicada axialmente numa barra de seção transversal de área 100 mm^2, se tem uma tensão média de 200 MPa. Isso seria assim tanto para uma barra de aço quanto de papelão. Esse valor não leva em conta as características do material, e não implica que, de fato, seria possível essa tensão ser aplicada.

Dessa forma, na ciência geral denominada **Mecânica do Contínuo**, dentro da qual se insere a **mecânica dos sólidos** e a **mecânica dos fluidos**, existe um terceiro grupo de relações gerais além das equações de equilíbrio e das relações cinemáticas: são as denominadas **relações constitutivas**. Essas são relações entre o campo de tensão e o de deformação, i.e., entre os tensores tensão e deformação. Podem ser representadas por relações do tipo

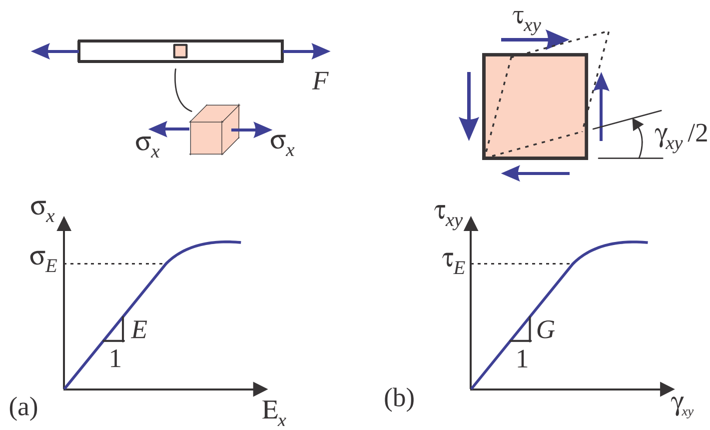


Figura 4.23: Ensaios uniaxiais de tração e cisalhamento.

de tensão e deformação. Entretanto, as situações reais de peças em engenharia envolvem estados triaxiais de tensão e deformação. Assim, o grande desafio é definir relações entre as componentes de ambos os tensores, i.e., entre

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \text{sim.} & & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \text{sim.} & & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

num dado ponto de um corpo. A forma como tensões e deformações se relacionam depende de uma grande quantidade de aspectos e condições como:

- **material**;
- **velocidade** de carga, se lenta, oscilante, de impacto ou outra;
- **temperatura** de trabalho;
- **faixa de deformação**, se "pequenas", "médias" ou "grandes" deformações;
- **tipos de comportamento**: elástico, plástico, viscoelasticidade, viscoplasticidade, etc.
- **tipo do material**, se homogêneo ou heterogêneo (composto, poroso, granulado como concreto, ...), se isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico.

Para cada uma dessas situações, ou combinação de situações, a relação constitutiva é expressa de forma apropriada: via equações algébricas, via equações diferenciais envolvendo taxas de deformação e de tensão, ou via equações integrais. Como estamos apresentando um primeiro curso em mecânica dos sólidos, trataremos do caso mais simples e tradicional em engenharia, que, de resto, mostra-se adequado ao tratamento da quase totalidade das estruturas mecânicas e civis tratadas rotineiramente. A relação constitutiva desenvolvida a seguir terá validade apenas dentro das seguintes condições:

- materiais homogêneos;
- materiais isotrópicos;
- materiais que possuem faixa linear nos diagramas $\sigma \times \varepsilon$ e $\tau \times \gamma$;
- materiais que possuem uma faixa elástica no diagramas $\sigma \times \varepsilon$ e $\tau \times \gamma$;

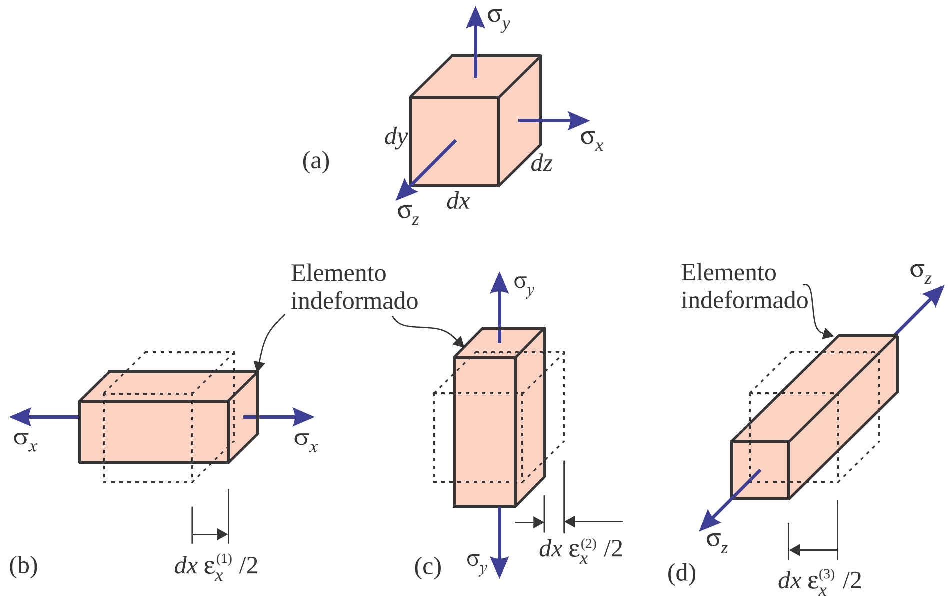


Figura 4.24: Parcela de deformação ϵ_x proveniente das tensões σ_x, σ_y e σ_z.

efeitos. Isso significa que a variação de comprimento do elemento na direção x é a soma das variações obtidas quando as tensões eram aplicadas uma por vez, i.e., somando (4.53), (4.55) e (4.56) temos

$$\varepsilon_x \ dx = \varepsilon_x^{(1)} \ dx + \varepsilon_x^{(2)} \ dx + \varepsilon_x^{(3)} \ dx,$$

i.e.,

$$\left\| \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \ \sigma_y - \ \frac{\nu}{E} \ \sigma_z . \right. \tag{4.57}$$

Note que, implicitamente, estamos usando o resultado de uma observação experimental:

> Em materiais isotrópicos, tensões cisalhantes não provocam deformações normais, da mesma forma que tensões normais não provocam deformações cisalhantes.

A equação (4.57) produz então a deformação em x proveniente da aplicação simultânea das três tensões normais. De forma semelhantes, as deformações ε_y e ε_z podem ser obtidas, gerando mais duas equações constitutivas.

Para as tensões e deformações cisalhantes, usamos uma outra observação experimental:

> Num material isotrópico, a tensão cisalhante num plano, por exemplo τ_{xy}, provoca apenas deformações cisalhantes no mesmo plano, no caso γ_{xy}, i.e., $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. (4.58)

Então, γ_{xy} se relaciona apenas a τ_{xy}, γ_{xz} a τ_{xz} e γ_{yz} a τ_{yz}. O relacionamento entre tensão e deformação na faixa elástico-linear do material é dada pela equação (4.17):

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \text{e} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \tag{4.59}$$

Com isso, coletando (4.57) e (4.59), temos o conjunto completo de equações tensão-deformação para o material elástico-linear:

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc}\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0\\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0\\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0\\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0\\ & & & & \frac{1}{G} & 0\\ \text{sim.} & & & & & \frac{1}{G}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\\ \tau_{xy}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\alpha\Delta T\\ \alpha\Delta T\\ \alpha\Delta T\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\} \tag{4.68}$$

Isso pode ser compactado na forma simbólica

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^t. \tag{4.69}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^t = \{\alpha\Delta T, \alpha\Delta T, \alpha\Delta T, 0, 0, 0\}^T$ é o vetor de deformações térmicas. A forma inversa pode ser obtida pela inversa da matriz de flexibilidade:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^t\right). \tag{4.70}$$

Exemplo 4.1.1 – bloco sob compressão

Considere um bloco ortogonal de material elástico linear, de dimensões $A \times B \times C$ nas direções cartesianas, respectivamente. Ele é montado numa cavidade que consideraremos infinitamente rígida, como na Figura 4.25. O bloco é ajustado à cavidade de forma a manter contato em 5 de suas faces, podendo se deformar sem atrito. Na face superior, uma pressão p é aplicada na direção x. Qual o valor das tensões transversais σ_y e σ_y em termos de p?

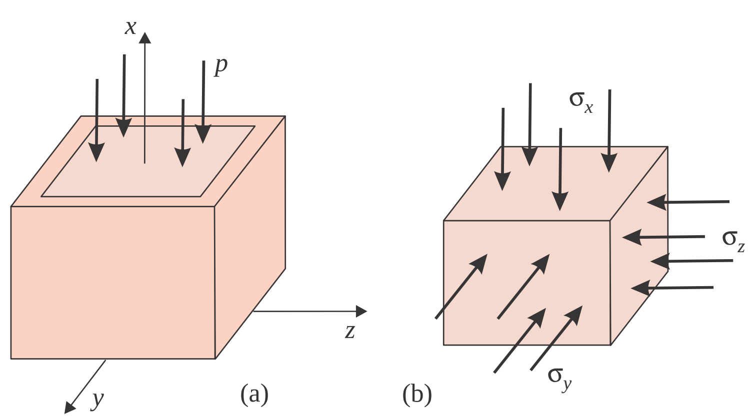


Figura 4.25: Bloco sob compressão ajustado numa cavidade absolutamente rígida.

Solução:

O estado de deformação do bloco é uniaxial, com apenas a componente vertical ε_x não nula. As tensões são determinadas pela Lei de Hooke triaxial (4.63), que resulta em todas as tensões cisalhantes nulas, e as tensões normais dadas por

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (2G+\lambda)\varepsilon_x,\\ \sigma_y &= \sigma_z = \lambda\varepsilon_x.\end{aligned} \tag{4.71}$$

Como $\sigma_x = -p$, temos na primeira equação a deformação axial

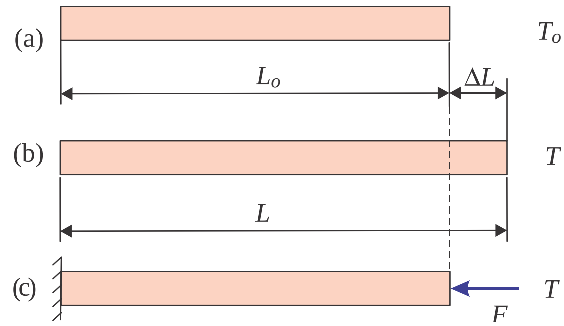


Figura 4.27: (a) Barra indeformada, (b) sob o efeito térmico, desvinculada, (c) com as extremidades fixas.

$$\begin{aligned} \Delta L &= L_0\varepsilon_x^t = 3.000 \times 11,7 \cdot 10^{-4} = 3,51 \text{ mm}, \\ \Delta b &= b_0\varepsilon_y^t = 10 \times 11,7 \cdot 10^{-4} = 11,7 \cdot 10^{-3}\text{mm}, \\ \Delta h &= h_0\varepsilon_z^t = 10 \times 11,7 \cdot 10^{-4} = 11,7 \cdot 10^{-3}\text{mm}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

(b) A situação em que a barra se encontra biengastada sob o efeito térmico pode ser simulada considerando como ponto de partida a solução do item (a) acima. O comprimento final ali é $L = L_0 + \Delta L = 3.003,51$ mm. Consideramos que, se aplicarmos uma força F de valor adequado nas extremidades, compressiva, essa força vai reduzir o comprimento a partir de $3.003,51$ mm até que a barra retorne ao seu comprimento original. Com isso, a barra desvinculada assume a configuração de uma barra biengastada, em que a tendência de dilatação do ΔT é compensada pela força F, pelo menos axialmente. A força F é interna, e é aplicada pelos apoios para reprimir a tendência de deslocamento axial. Os cálculos são os seguintes.

Para o caso da barra, podemos considerar que uma força axial F gere uma distribuição uniforme de tensões e de deformações dados por

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}. \tag{4.77}$$

Usando a lei de Hooke uniaxial, $\sigma_x = E\varepsilon_x$, temos a **relação entre a força e o elongamento** ΔL:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E\varepsilon_x, \\ \frac{F}{A} &= E\frac{\Delta L}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta L = \frac{FL}{EA}} \end{aligned} \tag{4.78}$$

Então, a força necessária para anular o ΔL gerado termicamente no item (a) é

$$-\Delta L = \frac{FL}{EA} \qquad \Rightarrow \qquad -3,51 = \frac{F \; 3.003,51}{200.000 \times 100}, \tag{4.79}$$

o que resulta em $F = -23.373$ N. Essa força é sustentada pelos apoios, e gera uma tensão $\sigma_x = F/A = -233,73$ MPa.

Exemplo 4.3 – Barra sob tração e temperatura

Considere uma barra de aço está engastada numa extremidade, sob a ação de uma força F na outra extremidade, como na Figura 4.28, e sob a ação de um incremento de temperatura ΔT. Qual a variação do comprimento da barra? Obtenha expressões analíticas e aplique os valores: $A = 100$ mm^2, $L_0 = 3$ m, $F = 1$ kN, $\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6}/°$C, $\Delta T = 100$ °C.

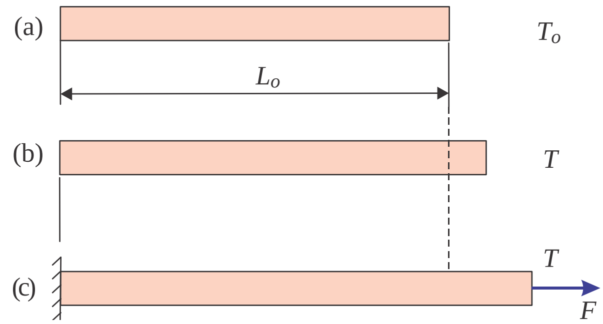


Figura 4.28: Barra sob a ação de carga concentrada e incremento de temperatura.

Solução:

Temos duas parcelas de deformação axial, uma devida à força aplicada, que gera uma tensão σ_x, e outra devida ao incremento de temperatura, como indicado na Figura 4.28:

$$\varepsilon_{xF} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_x^t = \alpha \Delta T. \tag{4.80}$$

Então, a deformação total fica

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T} \tag{4.81}$$

Para o caso de barras, podemos considerar a tensão e a deformação axial uniformemente distribuídas, de forma que

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}. \tag{4.82}$$

Usando (4.81), temos a **relação entre a força, a temperatura e o elongamento** ΔL:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T, \\ \frac{\Delta L}{L_0} &= \frac{F}{EA} + \alpha \Delta T \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta L = \frac{F L_0}{EA} + \alpha \Delta T L_0} \end{aligned} \tag{4.83}$$

Nota-se que o primeiro termo à direita da igualdade, F/EA, é o mesmo do elongamento d barra no caso não térmico. O segundo termo incorpora mais uma parcela de elongamento devido ao incremento de temperatura. Para os numéricos do exemplo,

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{F L_0}{EA} + \alpha \Delta T L_0, \\ &= \frac{10^3 \times 3.000}{200 \cdot 10^3 \times 100} + 11,7 \cdot 10^{-6} \times 100 \times 10^3, \\ &= 0,15 + 3,51 = 3,66 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{4.84}$$

A deformação axial final vem de (4.83), ou mais simplesmente de $\varepsilon_x = \Delta L / L_0 =$ 0,366 %.

4.7.2 Experimentação das propriedades elásticas

As relações (4.62) são definidas por apenas **três constantes de material**, E, G e ν, em lugar das 21 da forma (4.52). Entretanto, prova-se que **apenas duas dessas constantes são independentes** num material homogêneo, isotrópico elástico linear. Existe uma relação fixa entre elas, dada por

Exemplo 4.4 – Determinação experimental de propriedades elásticas

Considere um ensaio de tração para determinar as propriedades elásticas de uma certa liga de aço. O corpo de prova é do tipo cilíndrico padrão como na figura 4.9, com comprimento útil $L_o = 62,5$ mm, diâmetro inicial $D_o = 12,5$ mm. As medições indicaram que, para uma carga axial $F = 40$ kN, a variação no comprimento útil foi $\Delta L = 0,101$ mm e houve uma redução no diâmetro de $\Delta D = -5,94$ μm. Determine os módulos de elasticidade E e G, e o coeficiente de Poisson ν.
Solução:

Nesse problema usamos diretamente as equações (4.86) e (4.87). A tensão axial σ_x e as deformações axial ε_x e transversal ε_{trans} são

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_x = \dfrac{F}{A} = \dfrac{40 \cdot 10^3}{\pi\ D_o^2/4} = \dfrac{40 \cdot 10^3}{122,7} = 326 \text{ MPa}, \\ \varepsilon_x = \dfrac{\Delta L}{L_o} = \dfrac{0,101}{62,5} = 1,62 \cdot 10^{-3}, \\ \varepsilon_{trans} = \dfrac{\Delta D}{D_o} = \dfrac{-5,94 \cdot 10^{-3}}{12,5} = -4,75 \cdot 10^{-4}. \end{array} \right.$$

As propriedades elásticas vêm de (4.87):

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{326 \text{ MPa}}{1,62 \cdot 10^{-3}} = 201 \text{ GPa}, \\ \nu &= -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_x} = -\frac{-4,75 \cdot 10^{-4}}{1,62 \cdot 10^{-3}} = 0,293, \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{201}{2(1+0,293)} = 77,7 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Observe que a validade desses valores depende de que um descarregamento seja realizado no ensaio, de forma a verificar se o material, sob aquele nível de tensão ($\sigma_x = 326$ MPa), encontra-se em sua faixa elástico-linear. Além disso, como em qualquer experimentação, é necessária a realização de diversos ensaios nas mesmas condições devido à dispersão estatística de valores. Usualmente, pelo menos três corpos de provas devem ser testados.

Exemplo 4.5 – Caso de Estado Plano de Tensões.

Considere uma placa de aço retangular de dimensões $a \times b \times h$ nas direções x, y, z, submetida a forças estáticas coplanares q_x e q_y, em (N/m^2), uniformemente distribuídas sobre suas bordas, como na Figura 4.29. Num certo ponto foram colocados dois extensômetros, A e B, para medirem as deformações nas direções x e y, respectivamente. Os valores obtidos foram $\varepsilon_x = 5,0 \cdot 10^{-4}$ e $\varepsilon_y = 1,0 \cdot 10^{-4}$. Determine: (a) as tensões σ_x e σ_y, e os carregamentos q_x e q_y; (b) a deformação transversal ε_z na placa. O aço usado tem $E = 204$ GPa e $\nu = 0,25$.

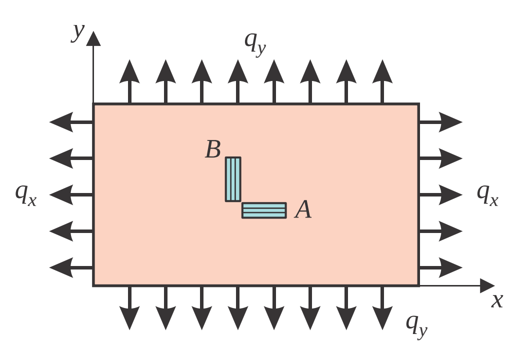


Figura 4.29: Placa bi tracionada do Exemplo 4.5.

Figura 4.30: Vistas de uma torre de transmissão elétrica típica.

barras da estrutura como um todo podem ser determinados, por exemplo, pelo método das seções, no caso de uma estrutura simples, como detalhado no Capítulo 2. Para estruturas mais complexas, se pode usar métodos de energia, como no Capítulo 14, ou o Método de Elementos Finitos, como no Capítulo 15. Em geral, o processo de análise de uma estrutura de barras segue, aproximadamente, os passos ilustrados no diagrama da Figura 4.31.

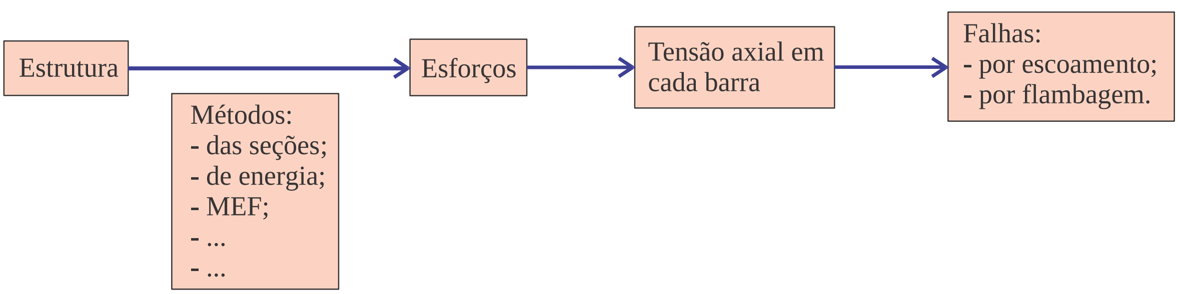


Figura 4.31: Fluxograma aproximado para análise de uma estrutura de barras.

Um tipo ainda mais simples que uma barra do tipo que constitui estruturas como as torres de transmissão ilustradas acima, são os cabos de aço, que suportam apenas esforços trativos. A Figura 4.32 ilustra um cabo usado como pendural de sustentação do viaduto central da Ponte Hercílio Luz em Florianópolis. Também a análise de cabos se insere no escopo da formulação vista nessa seção.

Consideremos um segmento de barra reta, com **área de seção transversal** dada por uma função de x, $A = A(x)$, como na Figura 4.33a. Para um problema tridimensional, as forças de corpo nas equações diferenciais de equilíbrio, (4.98), tem as componentes f_{cx}, f_{cy} e f_{cz} em unidades [N/m^3]. No problema de barra, buscamos uma idealização em que todo o carregamento seja axial. Assim, começamos por limitar o carregamento apenas à componente axial da força de corpo, f_{cx}. Também, buscamos uma situação em que todos os campos (deslocamentos, tensões, deformações), sejam uniformes ao longo de cada seção, i.e., todos os campos devem depender apenas da coordenada axial x. Assim, admite-se na formulação de barra apenas forças de corpo uniformes em cada seção, de forma que $f_{cx} = f_{cx}(x)$. Nesse caso, é usual definir uma carga distribuída por unidade de comprimento, dada por

$$p_x(x) = A(x) f_{cx}(x). \tag{4.103}$$

Esse é um **carregamento distribuído** p_x na direção axial, de força por unidade de comprimento axial. O valor da carga é uma função conhecida $p_x = p_x(x)$ como na figura 4.33b. Adicionalmente,

Figura 4.32: Detalhe do cabo de aço de um pendural de sustentação do vão central da Ponte Hercílio Luz, em Florianópolis.

sabe-se que cada seção transversal suporta um certo valor de **esforço normal** N_x, i.e., temos a função $N_x = N_x(x)$ do esforço como na Figura 4.33c.

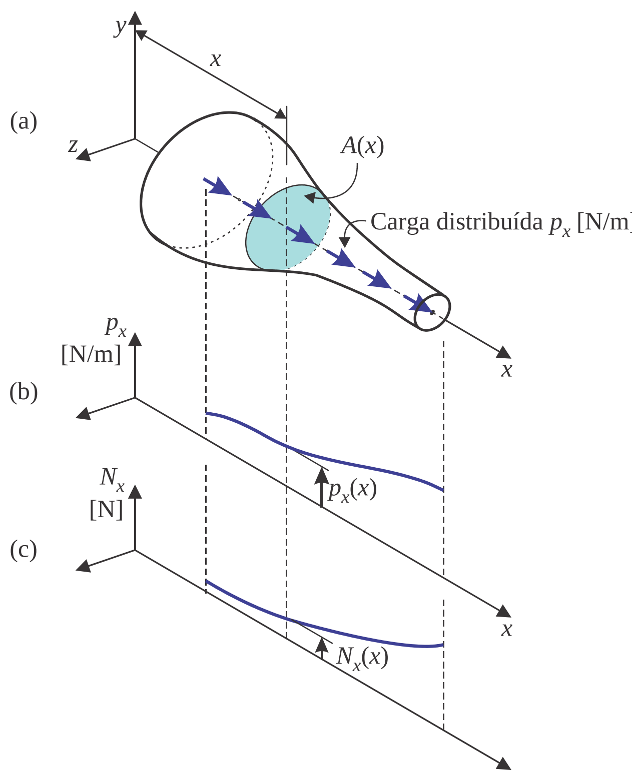


Figura 4.33: Segmento de barra de seção variável, sob carga axial distribuída q_x.

Desejamos obter uma relação que nos dê o deslocamento axial de uma seção x na direção axial, $u = u(x)$, em termos de funções conhecidas: $p_x(x)$, do módulo de elasticidade do material E e das condições de vinculação da barra. Isso será feito usando os três grandes conjuntos de equações gerais da mecânica dos sólidos. Primeiramente consideramos as três equações diferenciais de equilíbrio estático, eqs.(4.98), para acelerações nulas. Consideramos que no problema de barras retas sob carga axial, todas as componentes de tensão são nulas, exceto σ_x, i.e.,

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \tag{4.104}$$

Além disso, considera-se que σ_x seja uniforme em cada seção, de forma que $\sigma_x = \sigma_x(x)$. Assim, das três equações de equilíbrio (4.98), as duas últimas se tornam identicamente nulas, e a primeira reduz-se a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + f_{cx} = 0. \tag{4.105}$$

Uma vez que todos os termos dependem apenas de x, podemos integra-los sobre a área da seção transversal:

$$\int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA + \int_A f_{cx} dA = 0. \tag{4.106}$$

A integral à esquerda pode ser trocada de ordem com a derivada, resultando

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_A \sigma_x \; dA + f_{cx}\int_A dA = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial N_x}{\partial x} = -p_x(x)} \tag{4.107}$$

Como a carga p_x é suposta conhecida, o esforço $N_x(x)$ pode ser determinado em qualquer seção. Essa é a forma da equação de equilíbrio da barra em sua forma diferencial, em termos do carregamento local e do gradiente do esforço normal.

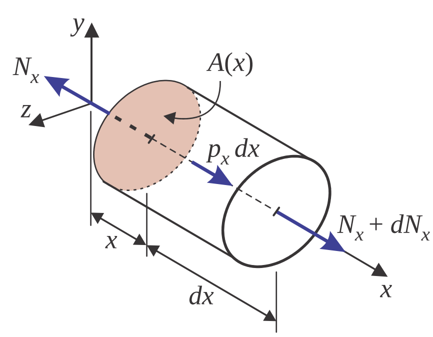


Figura 4.34: Segmento de barra de comprimento diferencial dx.

2a dedução. Uma outra forma de deduzir (4.107) é a seguinte. Primeiro nos concentraremos não na barra inteira, mas num pequeno segmento de comprimento diferencial dx, localizado na seção de coordenadas x, como na Figura 4.34, que mostra um diagrama de corpo livre. A força externa atuando no segmento é $p_x dx$, e nas seções transversais atuam N_x e $(N_x + dN_x)$ como indicado. Então, a **equação de equilíbrio** de forças na direção axial é

$$\sum F_x \rightarrow \qquad -N_x + (N_x + dN_x) + p_x dx = 0,$$

o que gera (4.107).

A hipótese que as tensões se distribuem uniformemente em cada seção significa que a tensão em cada ponto é igual ao valor médio

$$\sigma_x(x) = \frac{N_x(x)}{A(x)}. \tag{4.108}$$

Sendo as demais componentes nulas. Em seguida, consideramos as seis **relações deformações-deslocamentos** (4.12). As **hipóteses simplificativas** do modelo indicam **que cada seção transversal da barra permanece plana e se desloca apenas axialmente**. Então, a componente de deformação axial u é uma função apenas de x, i.e., $u = u(x)$. Como consequência, a componente axial da deformação se se torna

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du}{dx}, \tag{4.109}$$

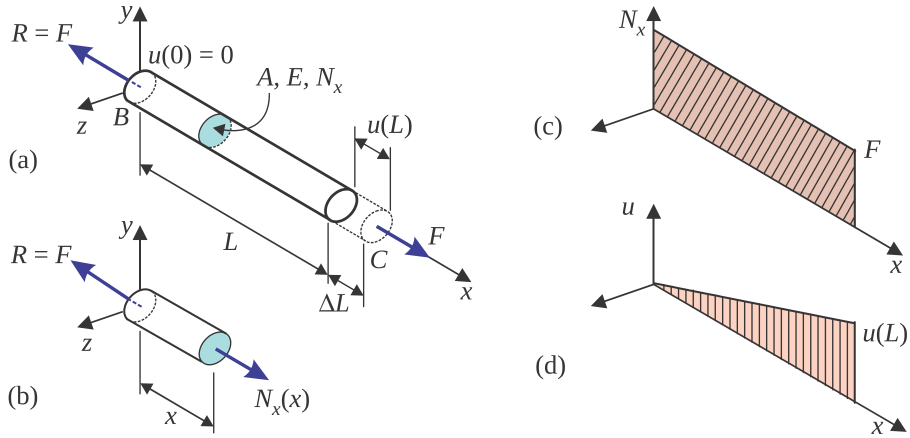


Figura 4.35: (a) Barra uniforme; (b) Diagrama de corpo livre; (c) Diagrama de esforços normais; (d) Diagrama de deslocamento axial.

A **reação** no apoio é obtida pela condição de equilíbrio global $\sum F_x = 0$, i.e., $R - F = 0$, tal que a reação é $R = F$, como na Figura 4.35a.
O **esforço normal** em cada seção é obtido pelo método das seções, como na Figura 4.35b. Por equilíbrio, $N_x(x) = F,\ \forall x \in (0; L)$. O diagrama de esforço normal é uniforme como na figura (c).
O **deslocamento** numa seção arbitrária, $u(x)$, vem de (4.117). Como a barra está fixa na extremidade, a condição de contorno é $u(0) = 0$. Como N_x, E e A independem de x, eles podem ser postos fora da integral resultando

$$u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0} = \frac{F}{EA}\int_{\overline{x}=0}^{x} d\overline{x} \quad \rightarrow \quad \boxed{u(x) = \frac{Fx}{EA}, \qquad \forall x \in [0; L]} \tag{4.122}$$

Trata-se então de uma variação linear em x, como ilustrado na Figura 4.35d. A deformação é uniforme, $\varepsilon_x := du/dx = F/EA$. A variação total do comprimento da barra é obtida para $x = L$:

$$\boxed{\Delta L = u(L) = \frac{FL}{EA}} \tag{4.123}$$

Dedução alternativa

Em lugar de obter a expressão para o esforço normal e usarmos (4.117), podemos integrar (4.115). Como a carga no problema é concentrada na extremidade C (Figura 4.35a), a carga distribuída é nula, $q_x(x) = 0,\ \forall x \in [0; L]$. Então, integrando (4.115) duas vezes temos

$$\frac{du}{dx} = C_1 \quad \text{e} \quad u(x) = C_1 x + C_2, \tag{4.124}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração a serem determinadas pelas **condições de contorno do problema**, que são:

$$\left\| \begin{array}{ll} u(0) = 0, & \text{na extremidade do apoio B,} \\ N_x(L) = F, & \text{na extremidade carregada C.} \end{array} \right. \tag{4.125}$$

A segunda condição pode ser posta em termos do deslocamento, substituindo $N_x = EAdu/dx$ de (4.113). Então as duas **condições de contorno do problema diferencial** ficam

$$\left\| \begin{array}{l} u(0) = 0, \\ EA\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=L} = F. \end{array} \right. \tag{4.126}$$

A primeira condição, $u(0) = 0$ em (4.124) resulta $C_2 = 0$, e a segunda condição produz $EAC_1 = F$, i.e., $C_1 = F/EA$. Usando as constantes a (4.124) temos a solução do problema, $u(x) = Fx/EA$, que é a mesma já obtida pelo outro método em (4.122).

Exemplo 4.6.1 – Elongamento de barras em paralelo

Considere uma plataforma AB inicialmente horizontal, suportada por barras verticais 1 e 2, como ilustrado na Figura 4.36. A barra AB suporta uma força F a uma distância a do ponto A. Considere que as barras 1 e 2 possuem as seguintes características: L_1, A_1, E_1 e σ_{E1}, e L_2, A_2, E_2 e σ_{E2} respectivamente, para comprimento, seção transversal, módulo de elasticidade e tensão de início de escoamento. Considere a plataforma AB absolutamente rígida. (a) Identifique a posição a da força que faz com que o sistema se deforme mantendo a plataforma AB na horizontal. (b) Qual o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento? Considere os valores numéricos: $L_1 = L_2 = L = 1$ m, $E_1 = 200$ GPa, $E_2 = 70$ GPa, $A_1 = 5$ mm^2, $A_2 = 15$ mm^2, $\sigma_{E1} = \sigma_{E2} = \sigma_E = 350$ MPa, $D = 1,5$ m, $F = 1$ kN. Considere que as barras verticais são suficientemente longas para que se possa ignorar os efeitos dos momentos fletores devidos à junção rígida entre a plataforma e as barras. Então, a análise pode ser feita como se as uniões fossem rotuladas.

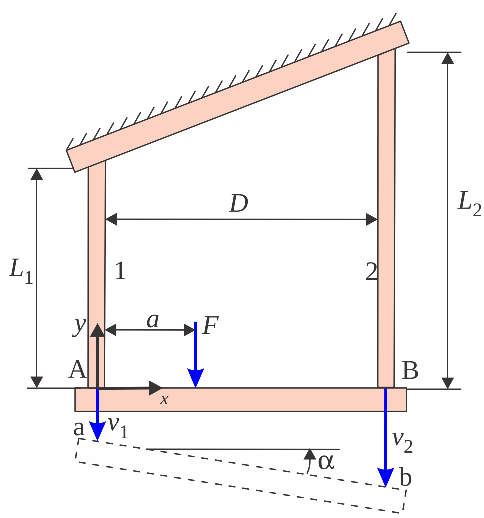


Figura 4.36: Barra horizontal AB suspensa por duas barras verticais 1 e 2.

Solução:

O problema é isostático, como pode ser visto no diagrama de corpo livre da Figura 4.37. As condições de equilíbrio global são

$$\begin{aligned} \sum F_y &\rightarrow \quad R_1 + R_2 = F, \\ \sum M_z^A &\rightarrow \quad R_2 D = Fa. \qquad \Rightarrow \quad R_1 = F(1 - a/D) \quad \text{e} \quad R_2 = Fa/D. \end{aligned} \tag{4.127}$$

As condições de compatibilidade geométricas da configuração deformada é a relação entre os elongamentos v_1 e v_2 das barras. A relação imposta é:

$$v_1 = v_2. \tag{4.128}$$

Os esforços normais nas barras são obtidas pelo método das seções, que resultam $N_1 = R_1$ e $N_2 = R_2$. A relação entre os elongamentos e as reações é

$$v_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} \qquad \text{e} \qquad v_2 = \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2}. \tag{4.129}$$

deformações cisalhantes em (4.119):

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(x,y,z) &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ &= 0+\frac{\partial C_1(x,z)}{\partial x}=0 \qquad \rightarrow C_1(x,z)=C_1(z).\end{aligned} \tag{4.135}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}(x,y,z) &= \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\\ &= 0+\frac{\partial C_2(x,y)}{\partial x}=0 \qquad \rightarrow C_2(x,y)=C_2(y).\end{aligned} \tag{4.136}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{yz}(x,y,z) &= \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0,\\ &= \frac{dC_1(z)}{dz}+\frac{dC_2(y)}{dy}=0 \qquad \rightarrow C_1=const.,\ C_2=const.\end{aligned} \tag{4.137}$$

Então a solução é o campo de deslocamentos (4.133) na forma

$$\boxed{v(y)=-v\frac{N_x}{EA}y+C_1 \qquad \text{e} \qquad w(z)=-v\frac{N_x}{EA}z+C_2} \tag{4.138}$$

As constantes C_1 e C_2 devem ser identificadas pelas condições de contorno da barra. Por exemplo, se a barra for vinculada com um ponto fixado, por exemplo $v(0)=w(0)=0$, se teria $C_1=C_2=0$.

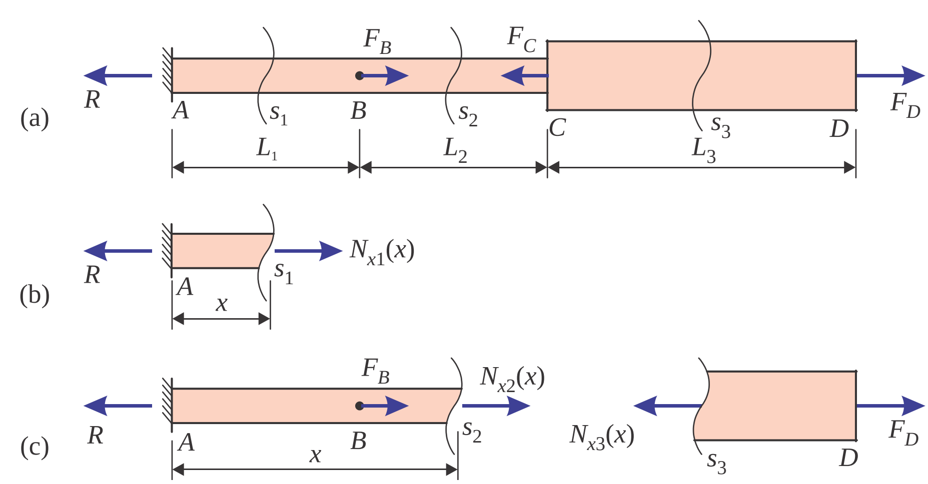


Figura 4.38: Dados e diagramas de corpo livre do Exemplo 4.7. Forças em kN.

Exemplo 4.8 – Variação de comprimento de barra escalonada

Considere uma barra escalonada como na Figura 4.38a, com três segmentos, AB, BC e CD, de comprimentos $L_1 = L_2 = 100$ mm e $L_3 = 150$ mm. As áreas de seção transversal são $A_1 = A_2 = 800$ mm^2 e $A_3 = 1200$ mm^2 respectivamente. As forças axiais são concentradas, aplicadas nas seções B, C e D, de valores F_B =20kN, F_C = 30 kN e F_D = 55 kN. O material é alumínio, com E = 70 GPa. Determinar o deslocamento das seções C, D e E.

Solução:

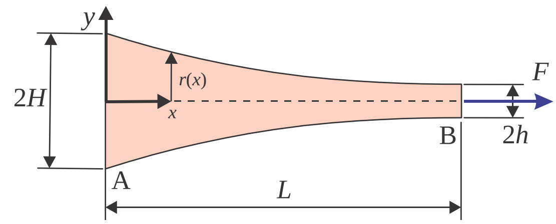


Figura 4.40: Barra de seção retangular variável sob tração.

normal, que em qualquer seção é $N_x = F$. A meia altura da seção, $r(x)$, numa seção de coordenada x, é obtida da função ae^{cx} a partir dos dados geométricos dados. As constantes a e c são obtidas de forma a satisfazerem as condições $r(0) = H$ e $r(L) = h$. Isso produz $a = H$ e $c = (1/L)\ln(h/H)$. Então, a função a meia altura fica

$$r(x) = H \text{ Exp}\left(\frac{x}{L}\ln(h/H)\right), \quad \forall x \in [0; L]. \tag{4.142}$$

A área da seção transversal é $A(x) = 2br(x)$. O deslocamento numa seção arbitrária x é dado por (4.116)

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + \int_{\bar{x}=0}^{x} \frac{N_x(\bar{x})}{EA(\bar{x})}\, d\bar{x} = \frac{F}{2HEb}\int_{\bar{x}=0}^{x} \frac{d\bar{x}}{e^{c\bar{x}}}, \\ u(x) &= \frac{F(1-e^{-c\bar{x}})}{2HEbc}. \end{aligned} \tag{4.143}$$

O elongamento total é

$$\Delta L = u(L) = \frac{FL(1-e^{-cL})}{2HEb\ln(h/H)}. \tag{4.144}$$

Usando os valores numéricos do exemplo, temos $c = -2,31 \cdot 10^{-3}$/mm, $a = 10$ mm, obtemos $\Delta L = 0,155$ mm. A deformação axial e a tensão normal variam por

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du}{dx} = \frac{Fe^{-c\bar{x}}}{2HEb} \qquad \text{e} \qquad \sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x) = \frac{Fe^{-c\bar{x}}}{2Hb}. \tag{4.145}$$

Como a seção transversal diminui com x, a deformação máxima ocorre na seção B, em $x = L$:

$$\varepsilon_{x\,\max} = \frac{Fe^{-cL}}{2HEb} = \frac{5.000e^{-cL}}{2 \times 10 \times 70.000 \times 10} = 7,14 \cdot 10^{-4}. \tag{4.146}$$

Então, a tensão normal máxima também ocorre na seção B: $\sigma_{x\,\max} = \sigma_x(Lx) = E\varepsilon_{x\,\max} = 70.000 \times 7,14 \cdot 10^{-4} = 50$ MPa. A constante de mola da barra é dada por $k = F/\Delta L = 5.000/0{,}155 = 32{,}3$ kN/mm.

Exemplo 4.10 – Elongamento de barra sob carga distribuída

Consideremos uma barra de comprimento L, de seção uniforme, montada num furo executado num outro corpo, como ilustrado na Figura 4.41. A montagem é tal que existe contato com entre ambas as superfícies. Uma força axial F é aplicada na extremidade livre A. Essa força é resistida por uma força de atrito distribuída sobre toda a superfície lateral da barra. Estimar o deslocamento sofrido pela extremidade A. Usar as hipóteses que a força de atrito p_x, em N/m, seja uniforme em toda a extensão. Usar os valores $F = 1$ kN, $L = 200$ mm, $E = 207$ GPa, $v = 0,25$, e seção transversal circular de diâmetro uniforme $d = 10$ mm.
Solução:

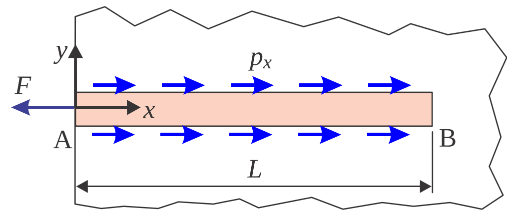


Figura 4.41: Barra inserida em contato com meio contínuo, sob atrito lateral.

O campo de deslocamento da barra pode ser obtido de (4.116), $EAdu/dx = N_x(x)$. Então, primeiramente precisamos obter a expressão do esforço normal N_x. Antes disso, é necessário obter uma relação entre F e p_x. Essa relação é o equilíbrio global da barra:

$$F - p_x L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_x = \frac{F}{L}. \tag{4.147}$$

O esforço pode ser obtido pelo método das seções, com um corte s numa coordenada x, como na Figura 4.42. Então, o equilíbrio resulta em

$$F - p_x x - N_x(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_x(x) = F - p_x x. \tag{4.148}$$

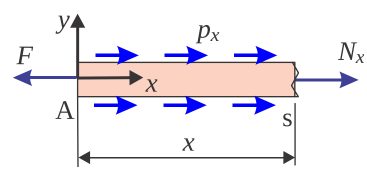


Figura 4.42: Diagrama de corpo livre para o Exemplo10.

A equação diferencial de equilíbrio (4.116) gera

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + \int_{\bar{x}=0}^{x} \frac{N_x(\bar{x})}{EA}\, d\bar{x} = \int_{\bar{x}=0}^{x} \frac{(F - p_x\bar{x})}{EA}\, d\bar{x}, \\ \Rightarrow & \qquad u(x) = u(0) + \frac{Fx}{EA}\left(1 - \frac{x}{2L}\right). \end{aligned} \tag{4.149}$$

O deslocamento na seção A, $u_A = u(0)$, é desconhecido, mas consideramos que seja nulo em B, i.e.,

$$\underbrace{u(L)}_{0} = \underbrace{u(0)}_{u_A} + \frac{FL}{EA}\left(1 - \frac{L}{2L}\right) \qquad \Rightarrow \qquad u_A = -\frac{FL}{2EA}. \tag{4.150}$$

Levando de volta a (4.149), temos a função de deslocamento axial na barra:

$$u(x) = \frac{F}{EA}\left(x - \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{2}\right), \qquad \forall x \in (0; L). \tag{4.151}$$

A variação da deformação e da tensão axial média são obtidas da relação deformação-deslocamento e da lei de Hooke uniaxial:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du}{dx} = \frac{F(1-x)}{EA} \qquad \text{e} \qquad \sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x) = \frac{F(1-x)}{A}. \tag{4.152}$$

Substituindo os valores numéricos do exemplo obtemos $p_x = 5$ N/mm, $u_A = -6,15\ \mu$m, $\sigma_{xA} = 12,7$ MPa. σ_{xA} é a tensão na seção A. É o valor máximo na barra, como pode ser visto nos diagramas da Figura 4.43. Nota-se que a região crítica é a seção de aplicação da força, a seção

A, independentemente do comprimento da barra. Uma situação distinta, porém de alguma forma análoga, ocorre em uniões parafusadas, em que a tendência de falha é sempre no primeiro filete de rosca próximo à cabeça do parafuso.

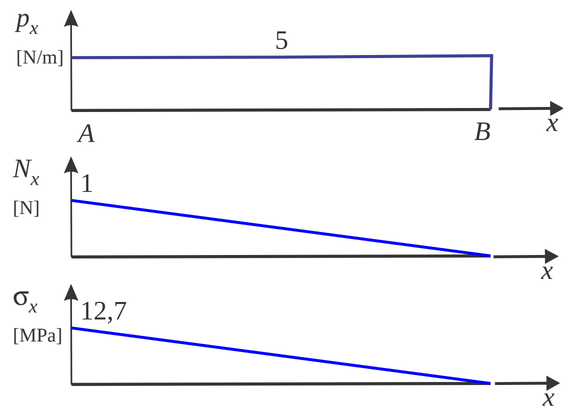


Figura 4.43: Diagramas de força distribuída, esforços normal e de tensão na barra do Exemplo 10.

Exemplo 4.11 – Treliça simples de duas barras

A treliça mostrada na Figura 4.44a tem duas barras e está submetida a uma força horizontal no nó A, de valor $F = 30$ kN. Calcular as componentes de deslocamento horizontal e vertical da rótula A. Os dados são: $b = 1,5$ m, $L = 8$ m, $E = 210.000$ MPa e a área da seção transversal das barras é $A = 2.500$ mm^2.

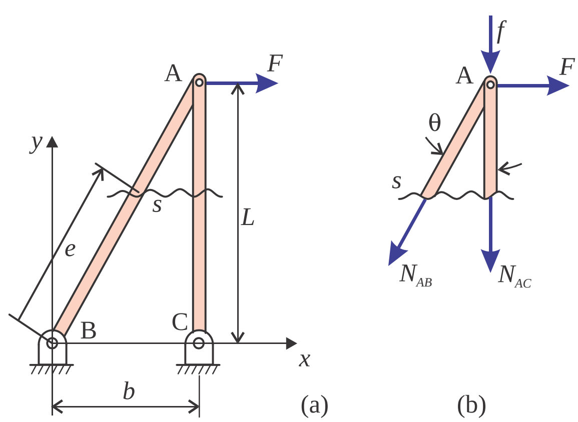


Figura 4.44: Dados do Exemplo 11 e indicação dos esforços.

Solução:
O problema é isostático, e os **esforços** nas barras podem ser obtidos com a ajuda do diagrama de corpo livre mostrado na Figura 4.44b. Eles são dados por:

$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \quad \Longrightarrow N_{AB} \operatorname{sen} \theta - F = 0, \\
\sum F_y &= 0 \quad \Longrightarrow N_{AC} + N_{AB} \cos \theta = 0,
\end{aligned}
\tag{4.153}
$$

cuja solução é:

$$
N_{AB} = \frac{Fl}{b} = 16,26 \text{ kN} \quad \text{e} \quad N_{AC} = -\frac{FL}{b} = -16,0 \text{ kN}. \tag{4.154}
$$

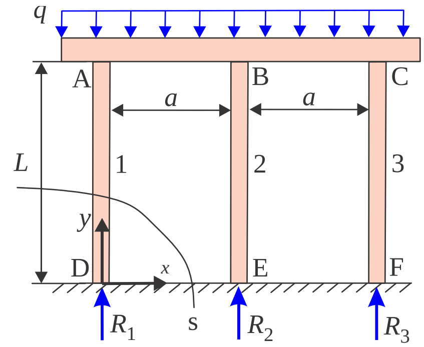


Figura 4.48: Estrutura hiperestática do Exemplo 13.

Esse é um problema hiperestático, como pode ser visto pelo número de reações na Figura 4.48. As equações globais de equilíbrio são

$$\begin{aligned} \sum F_y &\quad \rightarrow \quad R_1 + R_2 + R_3 = F, \\ \sum M_z^A &\quad \rightarrow \quad R2a + R_3 2a = Fa, \end{aligned} \tag{4.167}$$

onde $F = 2qa$ é força resultante da carga distribuída. Como são três reações e apenas duas equações de equilíbrio não triviais, precisamos de uma equação adicional, que será construída para garantir a compatibilidade geométrica na configuração deformada. Essa relação de compatibilidade, no presente caso, é a condição que as reações devem ser tais que as deformações em cada coluna permitam a barra ABC deslocar-se verticalmente, porem mantendo-se reta, como ilustrado na Figura 4.49.

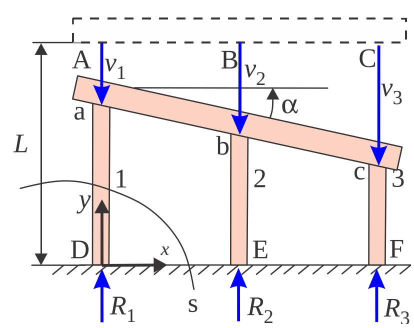


Figura 4.49: Deslocamentos nas barras e configuração deformada.

Essa condição pode ser representada, para pequenos deslocamentos e rotações, por

$$\alpha = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{v_3 - v_1}{2a}. \tag{4.168}$$

Os esforços internos em cada coluna podem ser obtidos pelo método das seções. Por exemplo, fazendo um corte s_1 na coluna 1, como na Figura 4.49a, temos o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 4.49b. Por equilíbrio temos $N_1 = R_1$. De forma similar, $N_2 = R_2$ e $N_3 = R_3$.

Podemos usar o valor absoluto dos elongamentos em cada coluna, pois no problema sabemos que o deslocamento das extremidades A, B e C serão no sentido negativo de y. Então, os valores absolutos dos elongamentos são dados em termos dos esforços por

$$v_1 = \frac{|N_1|\, L}{E_1 A_1}, \qquad v_2 = \frac{|N_2|\, L}{E_2 A_2}, \qquad v_3 = \frac{|N_3|\, L}{E_3 A_3}. \tag{4.169}$$

Isto significa que

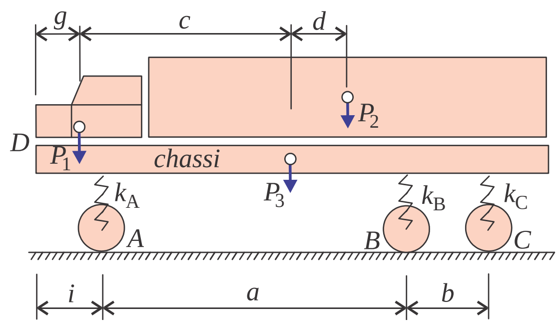


Figura 4.50: Modelo estilizado de caminhão de três eixos.

Consideramos o diagrama de corpo livre do chassi na Figura 4.51, com a indicação das reações nas rodas, R_A, R_B e R_C. O deslocamento dos pontos do chassi em contato com cada uma das molas são v_A, v_B e v_C. Nota-se que esses deslocamentos são convencionados positivos se forem para baixo. Essas são as seis incógnitas do problema, que é hiperestático. As seis equações governantes do problema são:

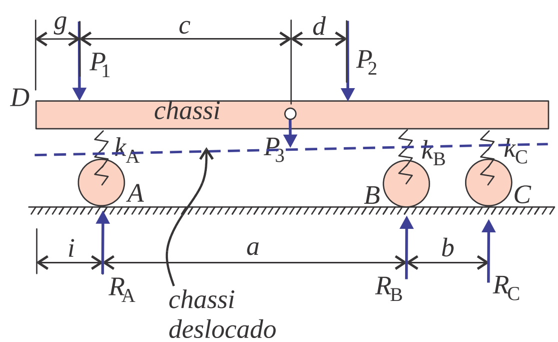


Figura 4.51: Diagrama de corpo livre do chassi.

1. Equilíbrio de forças verticais:
$$R_A + R_B + R_C = P_T; \tag{4.177}$$
onde $P_T = P_1 + P_2 + P_3$ é a carga total aplicada.

2. Equilíbrio de momentos em relação ao ponto D na extremidade esquerda do chassi:
$$R_A i + R_B(i + a) + R_C(i + a + b) = \underbrace{P_1 g + P_2(g + c + d) + P_3(g + c)}_{m}; \tag{4.178}$$

3. Compatibilidade geométrica, com a condição que o chassi é indeformavel (permanece reto). Sua inclinação α é tal que:
$$\tan\alpha = \frac{v_B - v_A,}{a} = \frac{v_C - v_A,}{a}; \tag{4.179}$$

4. Relações constitutivas, em que as relações força × deflexão em cada mola são:
$$R_A = k_A v_A, \qquad R_B = k_B v_B, \qquad R_C = k_C v_C; \tag{4.180}$$

Esse sistema de seis equações pode ser resolvido de forma mais facil reescrevendo as equações num sistema algébrico na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & i+a & i+a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b}{a+b} & 1 & \frac{-a}{a+b} \\ 1 & 0 & 0 & -k_A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k_B & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -k_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \\ v_A \\ v_B \\ v_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_T \\ m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{4.181}$$

A solução do sistema algébrico gera diretamente a solução do problema. Para os dois enunciados se obtém:

- Caso sem carga útil, se tem $\alpha = -0,170°$ e (em kN e mm):

$$R_A = 10,5, R_B = 3,37,\ R_C = 2,11, \qquad v_A = 19,7,\ v_B = 7,89\ ,\ v_C = 4,93.$$

- Caso com carga útil, se tem $\alpha = 0,0483°$ e (em kN e mm):

$$R_A = 14,1, R_B = 15,4,\ R_C = 16,5, \qquad v_A = 9,21,\ v_B = 12,6\ ,\ v_C = 13,4.$$

Exemplo 4.14 – Barra bimetal - problema hiperestático

Consideremos uma barra constituída por três camadas de seção retangular, como na Figura 4.52 duas externas de alumínio e uma interna de aço. Elas são engastadas numa extremidade e unidas entre si na outra, de forma que, quando o conjunto é submetido a uma força axial F, as três camadas se elongam no mesmo valor. (a) Determine uma relação analítica entre F e o elongamento da barra. (b) Determine o valor da força F_E que leva a barra ao início do escoamento, e identifique em qual camada ela ocorreria. (c) Determine as tensões em cada camada para F_E. Construa um diagrama tensão-deformação para ambas as camadas. Use os valores: $L = 1$ m, $E_{aco} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_{Eaco} = 350$ MPa, $\sigma_{Eal} = 250$ MPa, $A_{aco} = 100$ mm^2, $A_{al} = 40$ mm^2.

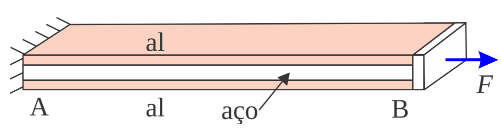


Figura 4.52: Barra bimetal - deformação axial elastoplástica.

Solução:
(a) Esse é um problema hiperelástico, como pode ser visto pelas duas reações no diagrama de corpo livre mostrado na Figura 4.53a. A equação global de equilíbrio é

$$\sum F_x \ \rightarrow \ 2R_{al} + R_{aco} = F. \tag{4.182}$$

Como etapa da solução de problemas hiperestáticos, removemos o apoio em uma das camadas, por exemplo na parte de aço. Assim, temos a reação na parte de alumínio:

$$R_{al} = \frac{F - R_{aco}}{2}. \tag{4.183}$$

Os esforços em cada camada são obtidos do diagrama de corpo livre mostrado na Figura 4.53b:

$$N_{aco} = R_{aco} \qquad \text{e} \qquad N_{al} = R_{al}. \tag{4.184}$$

As variações de comprimento de cada camada são:

Para os valores numéricos do exemplo, obtemos

$$c = \frac{2E_{al}A_{al}}{E_{aco}A_{aco}} = \frac{2 \times 70 \times 40}{200 \times 100} = 0,280, \qquad c_{aco} = 44.800 \text{ N} \quad \text{e} \quad c_{al} = 91.400 \text{ N}. \tag{4.193}$$

Logo, o valor que leva ao início da plastificação na barra é $F_E = 44,8$ kN, sendo que a camada de aço começa a escoar antes das de alumínio. Nessa carga, cada camada suporta os esforços internos:

$$R_{aco} = \frac{F_E}{1+c} = 35 \text{ kN} \qquad \text{e} \qquad R_{al} = \frac{F_E - R_{aco}}{2} = 4,9 \text{ kN}. \tag{4.194}$$

(c) As tensões são $\sigma_{xaco} = 350$ MPa e $\sigma_{xal} = 122{,}5$ MPa. Nota-se que a parte de aço suporta a maior parte da carga, devido ao seu maior módulo de elasticidade em relação ao alumínio, e à sua maior área de seção transversal.

As deformações em cada camada são idênticas,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xaco} &= \frac{\sigma_{xaco}}{E_{aco}} = \frac{350}{200.000} = 0,175\ \%, \\ \varepsilon_{xal} &= \frac{\sigma_{xal}}{E_{al}} = \frac{122,5}{70.000} = 0,175\ \%, \end{aligned} \tag{4.195}$$

tanto quanto os elongamentos: $\delta_{aco} = \delta_{al} = L\varepsilon_{xaco} = 1,75$ mm. Nota-se que essa deformação é pequena o suficiente para justificar o uso das teoria cinemática usada (teoria de pequenas deformações).

As deformações de início de escoamento para cada material são

$$\varepsilon_{Eaco} = \frac{\sigma_{Eaco}}{E_{aco}} = 0,175\ \% \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_{Eal} = \frac{\sigma_{Eal}}{E_{al}} = 0,0,357\ \%. \tag{4.196}$$

A Figura 4.54 mostra o diagrama tensão-deformação de ambos os materiais e tensões para a força $F_E = 44,8$ kN aplicada na barra, que inicia a plastificação na camada de aço.

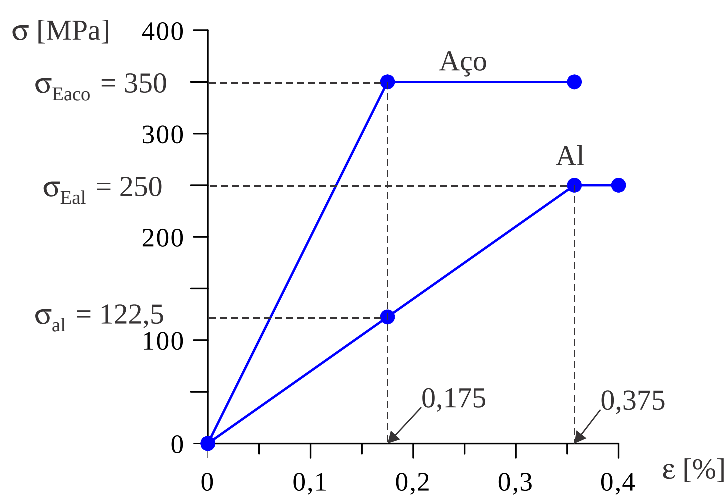


Figura 4.54: Diagrama tensão-deformação de ambos os materiais e tensões para a força $F_E = 44,8$ kN no Exemplo 14.

Exemplo 4.15 – Barra bimetal - problema não linear elastoplástico

Considere a barra bimetal de aço-alumínio do Exemplo 14, mostrada na Figura 4.52. Considere os diagramas tensão-deformação de cada material, idealizados com **materiais elastoplásticos ideais**, como na Figura 4.54, i.e., idealizações em que se desconsidera o encruamento do material após o início do escoamento. Determine a deformação da barra, seu elongamento e as tensões em cada camada, para uma força axial $F = 50$ kN. Note que essa força é superior à força $F_E = 44,8$ kN que inicia a plastificação na camada de aço, deixando ainda a camada de alumínio elástica. Elabore o diagrama força-deslocamento da barra.

Solução:

Uma vez que a força aplicada é superior àquela de início do escoamento na camada de aço, o problema como um todo se torna **não linear**. Problemas não lineares, como regra geral, não podem ser resolvidos em uma única etapa; em vez disso, usam-se *métodos incrementais* e, frequentemente, *iterativos*. No presente problema, devido à sua simplicidade, não precisaremos utilizar iterações, mas apenas separando a carga total $F = 50$ kN em incrementos menores, definidos de tal forma, que a solução seja linear em cada incremento. Isso será detalhado a seguir.

Incremento 2.Quando observamos os resultados do Exemplo 14, vemos que, para $F = F_E = 44,8$ kN, a camada de aço inicia o escoamento, porém as de alumínio ainda estão elásticas. Como estamos usando modelos de materiais considerados sem encruamento, se aumentarmos a carga em um incremento ΔF acima de F_E, a camada de aço não poderá aumentar sua tensão, que permanece igual a $\sigma_{Eaco} = 350$ MPa. Então, a parcela de força suportada pela camada de aço permanece constante, igual a $R_{aco} = 35$ MPa, com deformação do conjunto $\varepsilon_{Eaco} = \varepsilon_{Eal} = 0,175$ % e elongamento $\delta_{aco} = \delta_{al} = 1,75$ mm. Então, o diagrama força-deslocamento possui o primeiro trecho definido, uma reta da origem ao ponto 1, de coordenadas $(F_1; \delta_1)$ = (44.8 kN;1,75 mm), mostrado na Figura 4.55.

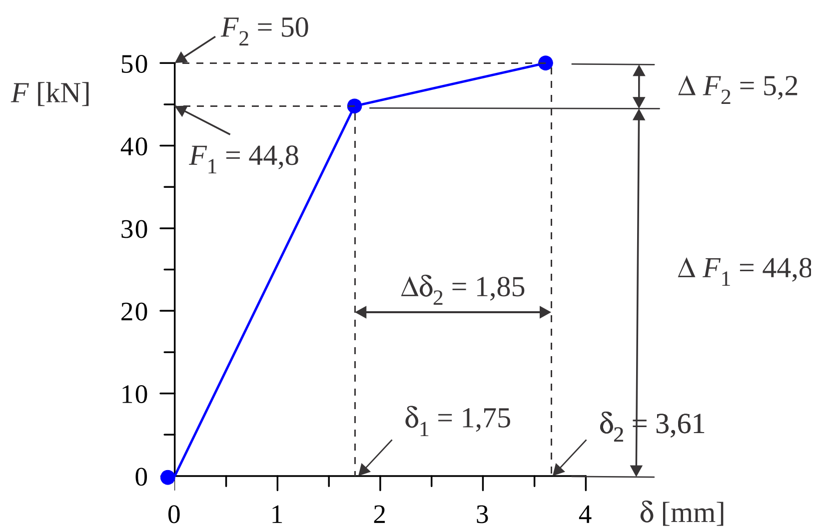


Figura 4.55: Diagrama força-deslocamento do Exemplo 15.

Incremento 2. Buscamos em seguida o segundo trecho do carregamento, do ponto 1 ao 2, de coordenadas $(F_2; \delta_2)$, sendo $F_2 = F = 50$ kN. Assim, o segundo incremento de Exemplo força é $\Delta F_2 = F_2 - F_1 = 50 - 44.8 = 5,2$ kN, e buscamos $\Delta\delta_2 = \delta_2 - \delta_1$. Esse incremento deve ser linear.

O incremento ΔF_2 deve ser suportado completamente pelas duas camadas de alumínio, gerando incrementos de tensão e de deformação dados por

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{al} &= \frac{\Delta F_2}{2A_{al}} = \frac{5.200}{2 \times 40} = 65 \text{ MPa}, \\ \Delta\varepsilon_{al} &= \frac{\Delta\sigma_{al}}{E_{al}} = 9,286 \cdot 10^{-4} \qquad \text{e} \qquad \Delta\delta_{al} = L\Delta\varepsilon_{al} = 1,857 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{4.197}$$

Os incrementos de deformação e do elongamento para a camada de aço são os mesmos da camada de alumínio. Então, para a barra como um todo, temos: $(\Delta F_2; \Delta\delta_2)$ = (5,2 kN; 1,857 mm). Os valores das coordenadas do ponto 2 são

$$\begin{aligned}\Delta b^t &= \varepsilon_z^t b_0 = 3,51 \cdot 10^{-4} \times 10 = 3,51 \cdot 10^{-3} \text{ mm},\\ \Delta h^t &= \varepsilon_y^t h_0 = 3,51 \cdot 10^{-4} \times 20 = 7,02 \cdot 10^{-3} \text{ mm}.\end{aligned} \tag{4.204}$$

Na segunda parte do problema, adicionamos os efeitos da força axial $R = -14$ kN. Como o problema é linear, podemos determinar os efeitos de R independentemente da temperatura. A variação na seção transversal depende apenas do efeito de Poisson, para R compressivo:

$$\varepsilon_y^R = \varepsilon_z^R = -v\varepsilon_x^R = -0,25 \times 3,51 \cdot 10^{-4} = 8,78 \cdot 10^{-5}. \tag{4.205}$$

Então, a variação da seção transversal puramente devida a R é

$$\Delta b^R = \varepsilon_z^R b_0 = 8,78 \cdot 10^{-4} \text{ mm}, \quad \text{e} \quad \Delta h^R = \varepsilon_y^R h_0 = 17,6 \cdot 10^{-4} \text{ mm}. \tag{4.206}$$

Com a **sobreposição dos efeitos** de temperatura e de R, temos as variações na seção transversal

$$\begin{aligned}\Delta b &= \Delta b^R + \Delta b^t = 8,78 \cdot 10^{-4} + 3,51 \cdot 10^{-3} = 4,39 \cdot 10^{-3} \text{ mm},\\ \Delta h &= \Delta h^R + \Delta h^t = 17,6 \cdot 10^{-4} + 7,02 \cdot 10^{-3} = 8,78 \cdot 10^{-3} \text{ mm}.\end{aligned} \tag{4.207}$$

4.10 Princípio de Saint-Venant e concentração de tensões

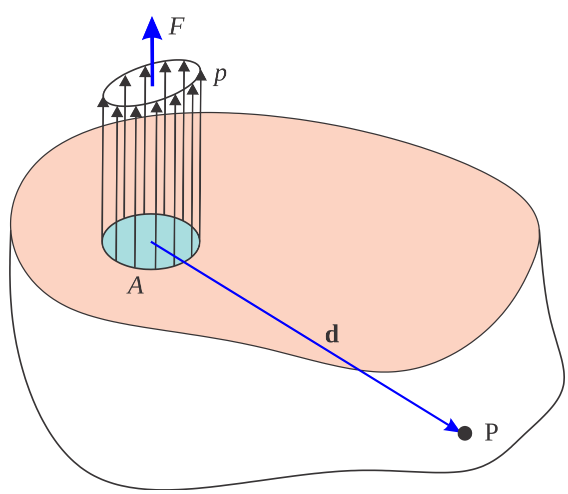


Figura 4.58: Ilustração do Princípio de St.-Venant. Carga distribuída p sobre a área A e sua resultante F.

Consideremos um corpo de geometria arbitrária, e uma carga distribuída p aplicada de forma distribuída sobre uma região de superfície de área A. Essa carga gera um estado de tensões em todos os pontos do corpo. Consideremos um ponto P situado a uma certa distância do centro da área A definido pelo vetor distância $\mathbf{d}$. O que se observa experimentalmente em soluções exatas do problema, mostra que

> o estado de tensões num ponto P se torna progressivamente mais insensível à forma como a carga p se distribui sobre a área A, conforme a distância $|\mathbf{d}|$ cresce, desde que a resultante F da carga seja a mesma, $F = \int_A p \, dA$.

Esse é o **Princípio de Saint-Venant** para estados de tensões em corpos sólidos. Por exemplo, a carga uniforme p sobre a área A pode ser aplicada em diversas formas como na Figura 4.59 com a mesma resultante, $F = pA$. Nesse caso, o estado de tensões em pontos distantes de A no corpo serão aproximadamente os mesmos, para distâncias $|\mathbf{d}|$ suficientemente grandes. A diferença de valores cai assintoticamente com a distância.

Em termos práticos, diferenças no estado de tensões da ordem de 1% são obtidas para distâncias $|\mathbf{d}| > 10\sqrt{A}$. Praticamente, todas as análises de tensões realizadas em engenharia levam esse princípio em conta, de alguma forma, mesmo que não seja explicitamente mencionado.

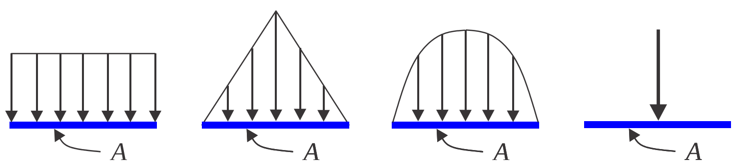


Figura 4.59: Diferentes formas que a carga distribuída pode assumir, com a mesma resultante.

4.10.1 Concentradores de tensão

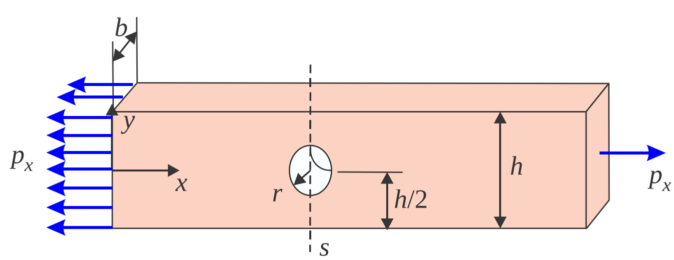


Figura 4.60: Barra de seção retangular com um furo centrado, sob tração.

Em todos os exemplos mostrados no livro até esse ponto, consideramos apenas elementos estruturais simples, como barras retas sob carga axial. Esses são os poucos casos em que o estado de tensão é tão simples que pode ser obtido por uma fórmula elementar do tipo $\sigma = F/A$, i.e., a tensão em cada ponto da barra é muito bem aproximada pelo valor médio da tensão na seção transversal.

Entretanto, na quase totalidade das geometrias de componentes estruturais, o estado de tensões não é uniforme ao longo de um dado segmento, o que inviabiliza o cálculo da tensão através de expressões simples. Consideremos o exemplo de uma barra de seção retangular com um furo centrado, sob tração, como na Figura 4.60. Podemos considerar que o carregamento seja p_x uniformemente distribuído nas extremidades, com resultante $R = p_x A$, onde $A = bh$ é a chamada **área plena**. Numa região da barra distante do furo, o estado de tensões é bem aproximado pelo valor médio $\bar{\sigma} = R/A \simeq p_x$. Entretanto, em pontos próximos ao furo, os valores de tensão são distintos ponto a ponto. Na seção transversal que contém o centro do furo, podemos fazer um corte s e construir um diagrama de corpo livre do lado esquerdo, como na Figura 4.61. Podemos calcular uma tensão média na **seção líquida** de área $A_0 = b(h - d)$, usando a resultante das forças internas $N_x = R$:

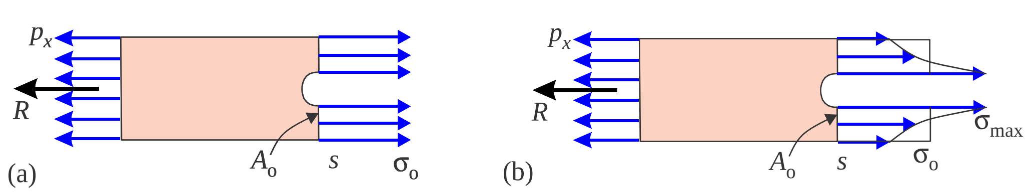


Figura 4.61: (a) tensões médias na seção transversal que passa pelo centro do furo; (b) distribuição real de tensões, com gradiente.

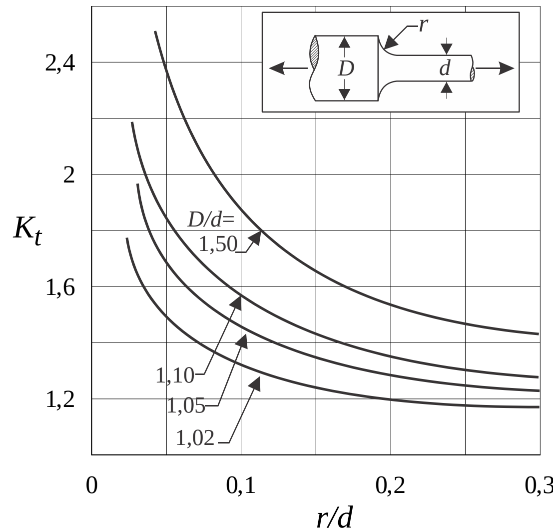


Figura 4.62: Curvas de fatores de concentração de tensões para barra escalonada de seção circular sob tração.

A tensão nominal σ_0 é geralmente simples de ser calculada. Os capítulos seguintes do presente texto mostra o cálculo de σ_0 para os casos típicos de flexão e torção de eixos.

Uma vez obtido $\sigma_{\max}$, este pode ser usado para testar a segurança quanto a diversos modos de falha. Por exemplo, a **falha por início de escoamento** da barra tracionada da Figura 4.62 tem todo seu material na faixa elástica linear sob o carregamento aplicado se

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_0 < \sigma_E. \tag{4.213}$$

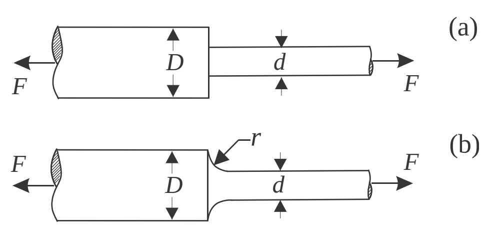


Figura 4.63: Barra escalonada de seção circular sob tração, sem e com entalhe de transição suave de raio r.

Irregularidades geométricas usuais em elementos estruturais, como furos circulares ou elípticos, ranhuras de lubrificação, raios de concordância em eixos escalonados e outros, são conhecidos em geral pelo termo **entalhe**. Em todos os casos, o entalhe possui um raio geométrico característico. O nível de concentração de tensões é maior quanto menor for o entalhe. Por exemplo, consideremos o eixo escalonado da Figura 4.63a, de seção circular. Na figura (a), o esboço mostra uma mudança brusca de diâmetros, entre D e d. Na realidade, **jamais esse tipo de construção é projetado ou construído**. Em vez disso, é usado um **raio de concordância** r na transição. O valor desse raio é escolhido no projeto, de forma a definir um K_t o menor possível. Por exemplo, usando o gráfico de K_t da Figura Kt7 do Apêndice, nota-se que, se

$$\begin{aligned}
d &= 10 \text{ mm}, \quad D = 15 \text{ mm}, r = 1 \text{ mm} \quad \Rightarrow \frac{D}{d} = 1,5, \frac{r}{d} = 0,1 \quad \Rightarrow K_t \simeq 1,87. \\
d &= 10 \text{ mm}, \quad D = 15 \text{ mm}, r = 2 \text{ mm} \quad \Rightarrow \frac{D}{d} = 1,5, \frac{r}{d} = 0,2 \quad \Rightarrow K_t \simeq 1,53.
\end{aligned} \tag{4.214}$$

Nota-se que para valores fixos dos diâmetros, D e d, o aumento no raio de concordância r de 1 mm

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{\max}}{K_t} = \frac{200}{1,87} = 107 \text{ MPa}. \tag{4.220}$$

A tensão nominal se refere à área de seção transversal mínima, i.e.,

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} \qquad \rightarrow \qquad 107 = \frac{10.000 \text{ N}}{\pi d^2/4} \qquad \rightarrow \qquad d = 10,9 \text{ mm}. \tag{4.221}$$

Entretanto, esse valor de d é associado a um valor de K_t distinto daquele utilizado. Para o conjunto de dimensões $d = 10,9$ mm, $D = 15$ mm e $r = 1$ mm, obtemos os valores adimensionais

$$\frac{D}{d} = 1,38 \qquad \text{e} \qquad \frac{r}{d} = 0,092.$$

Os valores disponíveis nos gráficos de K_t geralmente não possuem resolução suficiente para permitir a identificação dos efeitos de pequenas variações dimensionais como no atual exemplo. No presente caso, as curvas apenas permitem estimar que o valor pouco se altera com o novo valor de d, de forma que podemos manter $K_t \simeq 1,87$ nos cálculos, o que gera a estimativa de $d = 10,9$ mm.

4.11 Exercícios

4.1 Considere os dados do Exemplo 14, página 151. Obtenha as reações, as tensões e o elongamento da barra para uma força $F = 22,4$ kN.

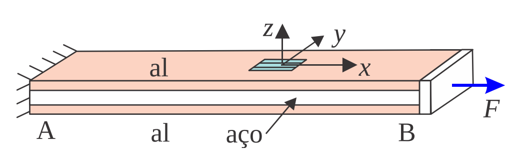
4.2 Considere os dados do Exemplo 14, página 151, porém com as áreas de seção transversal de aço e de alumínio idênticas, i.e., $A_{aco} = 100$ mm^2 e $A_{al} = 50$ mm^2 em cada camada. Quais as reações, tensões e o elongamento da barra para uma força axial $F = 22,4$ kN?

4.3 (a) Para os dados do Exemplo 14, obtenha as reações, as tensões e o elongamento da barra para uma força axial $F = 15$ kN. Use $A_{aco} = 100$ mm^2 e $A_{al} = 20$ mm^2 em cada camada. (b) Qual a força que inicia a plastificação na barra?

4.4 Considere os dados do Exemplo 14, página 151. (a) Qual a relação entre as áreas de seção transversal das camadas de aço com a de alumínio, para que as parcelas de força suportadas por cada material sejam iguais? Usar as propriedades de material do Exemplo 14. (b) Caso $A_{aco} = 100$ mm^2, qual seria A_{al}? (c) Quais as reações se $F = 10$ kN?

4.5 Refaça o Exercício 4 acima, substituindo a barra de aço por uma de cobre, usando os valores $E_{cu} = 120$ MPa, $\sigma_{Ecu} = 200$ MPa, $E_{al} = 70$ MPa, $\sigma_{Eal} = 250$ MPa. (a) Caso $A_{cu} = 100$ mm^2, qual seria A_{al}? (c) Qual a força que inicia a plastificação na barra?

4.6 Considere a barra bimetal de três lâminas mostrada na Figura. Na superfície externa de uma face de alumínio foi colado um extensômetro de resistência alinhado na direção axial. Uma força axial F foi aplicada na barra e foi medida uma deformação axial $\varepsilon = 0,15$ %. Determine o valor da força aplicada, as tensões em cada material e verifique se ambos os materiais estão elásticos sob essa força. $E_{aco} = 200$ MPa, $\sigma_{Eaco} = 350$ MPa, $A_{aco} = 100$ mm^2, $E_{al} = 70$ MPa, $\sigma_{Eal} = 250$ MPa,$A_{al} = 40$ mm^2 em cada camada.



4.7 Considere o enunciado do Exemplo 6.1, página 137. (a) Determine a posição a da força F para que a plataforma AB sofra se desloque de forma a manter um ângulo $\alpha = 1/3000$ rad com os deslocamentos dos pontos A e B tais que $v_2 > v_2$. (b) Determine o elongamento das barras. (c) Determine o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento. Use $L_1 = L_2 = 1$ m, $A_1 = 5$ mm^2, $A_2 = 15$ mm^2, $E_1 = 200$ GPa, $E_2 = 70$ GPa, $\sigma_{E1} = \sigma_{E2} = 350$ MPa,

Capítulo 5

Transformação de tensões e deformações

Nesse capítulo trataremos dos procedimentos de transformação de componentes tensoriais, como as componentes de tensões e deformações, em presença de rotação de sistema de coordenadas cartesianas. A transformação de tensões é fundamental na representação dos critérios de falha de material, que é tratado no próximo capítulo.

5.1 Aspectos qualitativos de transformação de tensões

Alguns aspectos concernentes às tensões e suas componentes podem ser melhor entendidas através de uma analogia com os vetores e suas componentes. Lembremos que um vetor é basicamente uma entidade abstrata, cuja melhor representação é realmente a flecha, como aquela ilustrada na Figura 5.1a, ligando os pontos O a P. Além disso, exigimos que a forma com que um vetor soma-se a outro vetor seja aquela forma conhecida, a regra do trapézio. Note que, embora não tenhamos uma maneira de representar diretamente o vetor, podemos representá-lo em suas componentes relativas a um certo conjunto de outros vetores, denominado **base**. Usaremos aqui o sistema cartesiano de coordenadas, $Oxyz$, com a base de vetores unitários ortonormais $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Então, um vetor $\mathbf{v}$ pode ser representado por suas componentes cartesianas como

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}. \tag{5.1}$$

Quando a base sendo usada for subentendida, as direções **i-j-k**, é possível representar o vetor indicando apenas suas componentes, isto é,

$$\{v^x\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right\}. \tag{5.2}$$

Note que $\{v^x\}$ é apenas um arranjo, uma matriz, com as componentes. $\mathbf{v}$ é o vetor, a entidade abstrata. Sem dúvida, $\mathbf{v}$ pode ser representado por infinitos conjuntos de componentes. Por exemplo, para um novo conjunto de eixos, $Ox^{‘}y^{‘}z^{‘}$ (Figura 5.1a), as componentes passam a ser $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$, isto é,

$$\mathbf{v} = v_{x'}\mathbf{i}^{'} + v_{y'}\mathbf{j}^{'} + v_{k^{‘}}\mathbf{k}^{'}, \qquad \text{ou} \qquad \{v^{x'}\} = \left\{ \begin{array}{c} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{array} \right\}, \tag{5.3}$$

onde $\mathbf{i}^{'}$-$\mathbf{j}^{'}$-$\mathbf{k}^{'}$ são os vetores unitários nas novas direções.

Quando consideramos um **tensor tensão**, podemos identificar uma certa analogia com os vetores. Também o tensor é uma entidade abstrata, $\boldsymbol{\sigma}$, que pode ser representado apenas por suas componentes em relação a um certo sistema de coordenadas. A Figura 5.1b ilustra as componentes num ponto arbitrário de um corpo, em relação a um sistema $Oxyz$, num **estado triaxial de tensões**. Como visto no Capítulo 3, são necessárias 9 componentes para representar um tensor, da mesma forma que a representação de um vetor exige 3 componentes.

Uma parte importante dos problemas considerados nesse texto refere-se ao **estado plano de tensões (EPT)**, cujas componentes no plano O-x-y são vistas na Figura 5.1c. A figura (d) mostra a projeção plana do EPT.

O problema geral de transformação de componentes tensoriais pode ser enunciado da seguinte forma:

(a) Considere um sistema cartesiano de coordenadas, $Oxyz$, e um segundo sistema ortogonal, $Ox^{`}y^{`}z^{`}$, obtido por uma rotação do sistema $Oxyz$.

(b) Para um vetor, consideremos conhecidas suas componentes $\{v^x\} = \{v_x; v_y; v_z\}^T$ em relação ao sistema $Oxyz$, e buscamos as componentes $\{v^{x'}\} = \{v_{x'}; v_{y'}; v_{z'}\}^T$ em relação aos novos eixos $Ox'y'z'$.

(c) Para um tensor, consideremos conhecidas as componentes

$$[\sigma^x] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

em relação ao sistema $Oxyz$, e buscamos as componentes

$$[\sigma^{x'}] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix}$$

em relação ao sistema $Ox'y'z'$.

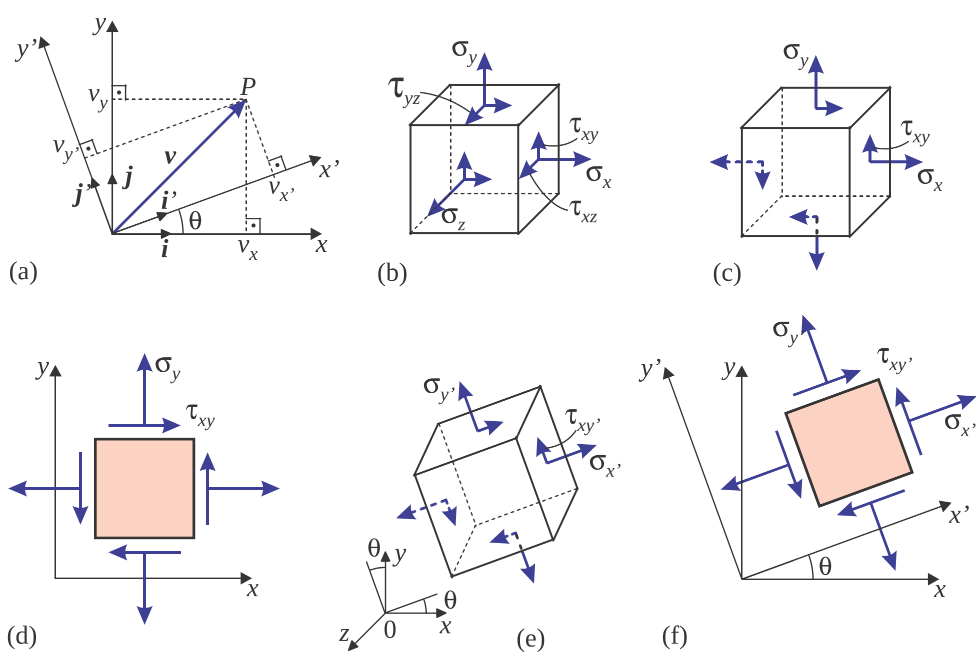


Figura 5.1: (a) Transformação plana de vetores; (b) Estado triaxial de tensões num ponto; (c) e (d) Estado plano de tensões; (e) e (f) Rotação plana das tensões.

Frequentemente trataremos de um estado plano de tensões sob **rotação plana** do sistema de eixos, isto é, os eixos $Ox'y'z'$ são obtidos por uma rotação de ângulo θ dos eixos x e y em torno

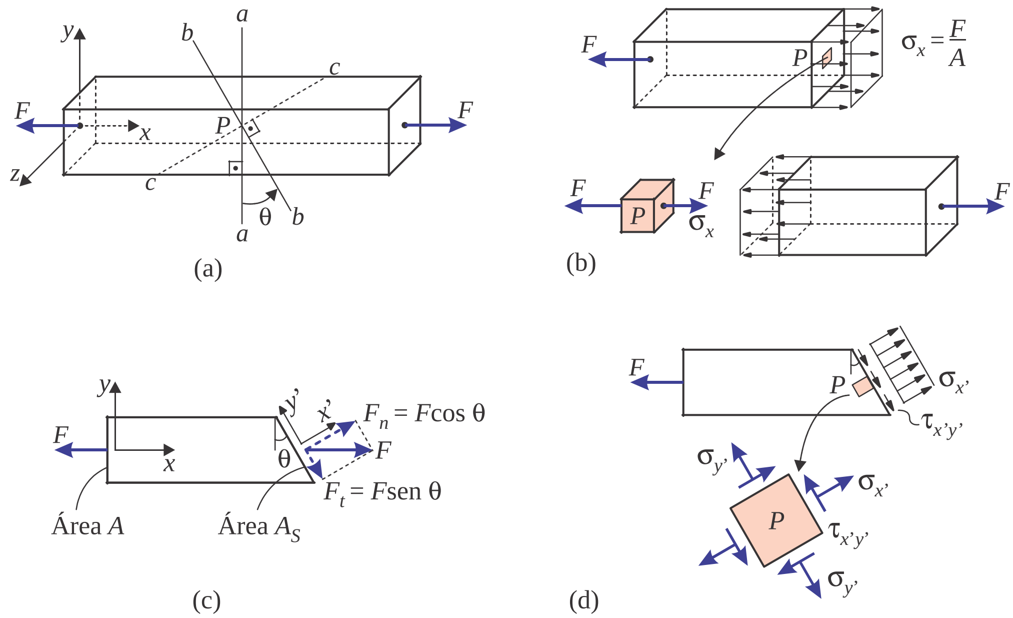


Figura 5.2: (a) Barra tracionada; (b) Corte normal ao eixo x; (c) Forças numa superfície normal ao eixo x‘; (d) Tensões na superfície normal ao eixo x‘.

5.2 Transformação plana do EPT

No exemplo ilustrativo da Figura 5.2 tínhamos uma peça, um corpo de dimensão finitas, adequado para tratar apenas de tensões uniformes. Entretanto as tensões são, por natureza, grandezas associadas a cada ponto do corpo. Dessa forma, buscaremos aqui encontrar expressões gerais para transformação de estados planos de tensão em presença de rotação plana do sistema de coordenadas. Buscamos expressões que tenham validade geral, irrespectivamente à forma do corpo ou seu carregamento ou condição de contorno. Isso porque a operação de transformação será feita num elemento infinitesimal. Antes de tratarmos do caso de transformação de componentes de tensão, consideremos um exemplo em que as componentes de tensão são tratadas indiretamente através das forças locais obtidas pelo produto de cada componente pela área onde ela atua. As operações realizadas nessa seção são baseadas na seguinte constatação:

> As tensões são componentes de um tensor. Entretanto, as componentes de tensões que atuam numa dada área infinitesimal, formam as componentes de um vetor e, dessa forma, podem ser manipuladas na forma usual dos vetores.

(5.9)

Essa afirmação pode ser entendida melhor através do exemplo a seguir.

Exemplo 5.1 - Forças e tensões num plano inclinado

Consideremos um ponto num corpo em que as componentes de tensão em relação a um sistema de eixos $0xyz$ seja $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa e $\tau_{xy} = -25$ MPa, com as demais componentes nulas. Buscamos identificar as forças diferenciais que atuam na face do elemento diferencial de volume ortogonal ao eixo cartesiano x'. Esse eixo pertence ao sistema cartesiano $0x'y'z'$, sendo z' paralelo a z. Ambos os sistemas de eixos diferem apenas por uma rotação em torno de z definida pelo ângulo $\theta = 30°$. Com as forças diferenciais, buscamos identificar as componentes de tensão nas superfícies ortogonais ao novo sistema de eixos. A relação entre esses eixos e tensões é visualizada na Figura 5.3.

Solução:

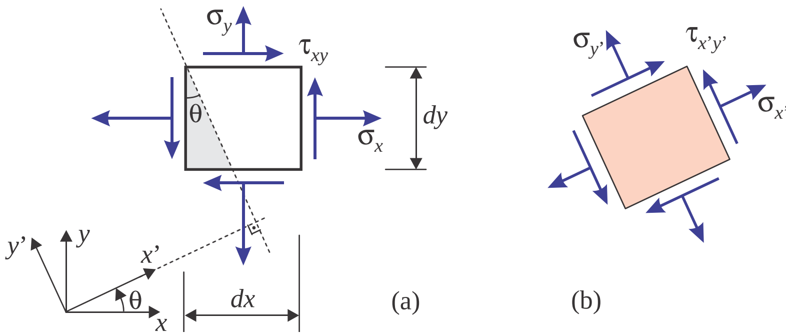


Figura 5.3: Componentes de tensão no Exemplo 1, em dois sistemas de coordenadas.

O elemento diferencial na Figura 5.3 está em equilíbrio sob o conjunto de forças desenvolvidas pelas componentes de tensão aplicadas. Então, cada parte do elemento diferencial também está em equilíbrio. Se buscamos as forças que atuam numa superfície de normal orientada em x', podemos fazer um corte perpendicular a esse eixo e gerar o volume em formato de cunha mostrado na Figura 5.4a, que mostra a lateral da cunha no plano xy, tendo espessura dz. As tensões nas faces inferior e esquerda são as mesmas do elemento quadrilateral, i.e. σ_x, σ_y e τ_{xy}. Na face inclinada de normal x', as componentes normal e tangente são designadas por $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$. Desejamos obter $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ em termos de σ_x, σ_y e τ_{xy} e do ângulo θ. Novamente deve ficar claro que não é possível combinar componentes de tensão como se fosse de vetores, por exemplo, não há sentido em somar as componentes x, como $\tau_{xy} - \sigma_x$. Isso porque cada uma dessas componentes atua em uma área distinta. Entretanto, se cada uma dessas componentes for multiplicada pela área onde atua, as forças resultantes podem ser somadas como vetores. Essas forças são ilustradas na Figura 5.4b. Os índices foram escolhidos tal que o primeiro indica a orientação da face e o segundo índice indica a direção da força. Por exemplo, F_{yx} é a força na direção x aplicada na superfície de normal y.

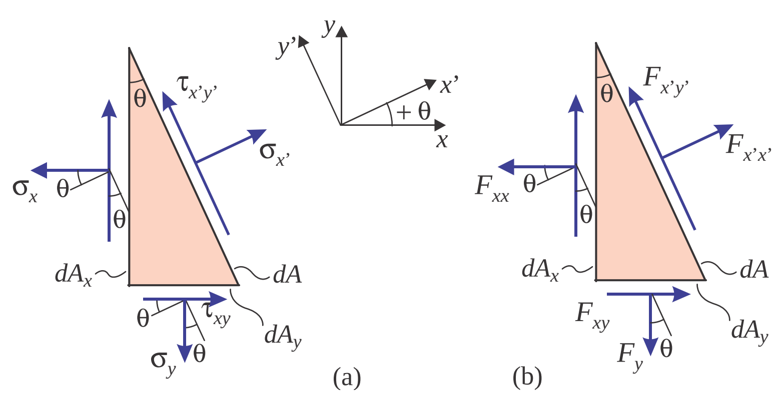


Figura 5.4: (a) Componentes de tensão e de (b) forças diferenciais nas superfícies de uma cunha do Exemplo 1.

Podemos designar a área inclinada na cunha da Figura 5.4 por dA. É um valor diferencial, não quantificável. As áreas nas superfícies vertical e horizontal são dadas por

$$dA_x = dA\cos\theta \qquad \text{e} \qquad dA_y = dA \text{ sen } \theta. \tag{5.10}$$

As componentes das forças diferenciais aplicadas na cunha são

$$\begin{array}{lll} F_{xx} = \sigma_x dA_x, & F_{yx} = |\tau_{xy}|\, dA_y, & F_{x'x'} = \sigma_{x'x'} dA, \\ F_{xy} = |\tau_{xy}|\, dA_x, & F_{yy} = |\sigma_y|\, dA_y, & F_{x'y'} = \tau_{x'y'} dA. \end{array} \tag{5.11}$$

Substituindo os valores de σ_x, σ_y e τ_{xy} e do ângulo θ obtemos as forças

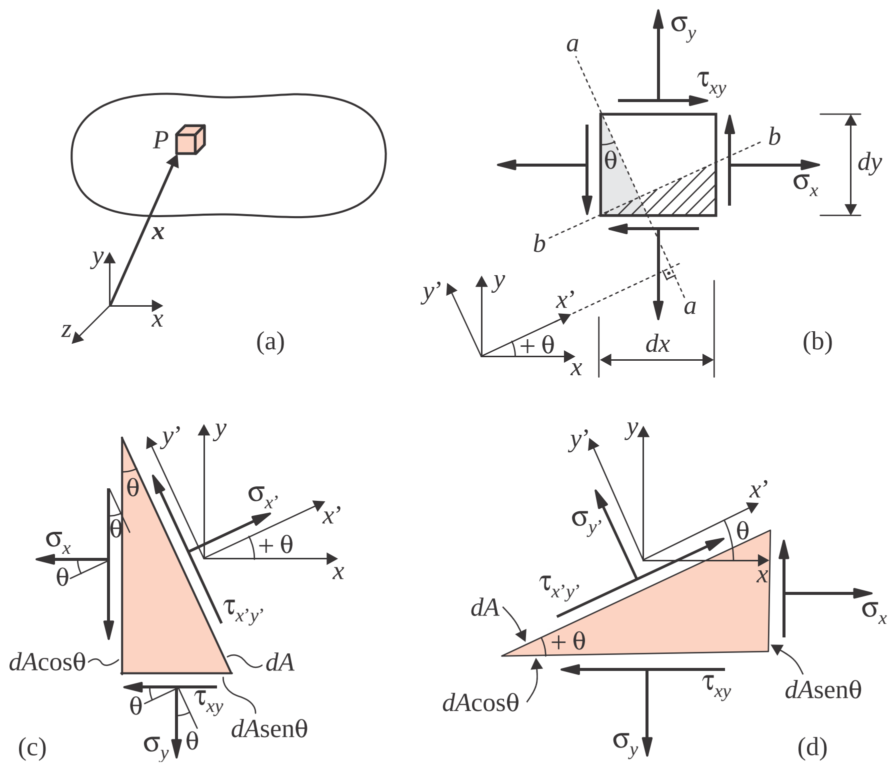


Figura 5.5: (a) Elemento diferencial no ponto P do corpo; (b) Tensões planas no elemento diferencial; (c) (d) Cortes nos elementos diferenciais $a - a$ e $b - b$.

$$
\begin{aligned}
\sum F_{x'} \quad \rightarrow \quad \sigma_{x'} dA &= (\sigma_x dA \cos\theta)\cos\theta + (\sigma_y dA \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta \\
&\quad + (\tau_{xy} dA \cos\theta) \text{ sen } \theta + (\tau_{xy} dA \text{ sen } \theta)\cos\theta, \\
\sum F_{y'} \quad \rightarrow \quad \tau_{x'y'} dA &= -(\sigma_x dA \cos\theta) \text{ sen } \theta + (\sigma_y dA \text{ sen } \theta) \cos\theta \\
&\quad + (\tau_{xy} dA \cos\theta) \cos\theta - (\tau_{xy} dA \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta,
\end{aligned}
$$

Simplificando temos

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \text{ sen}^2\ \theta + 2\tau_{xy} \text{ sen } \theta \cos\theta, \\
\tau_{x'y'} &= (\sigma_y - \sigma_x) \text{ sen } \theta \cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \text{ sen}^2\theta).
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

Finalmente, o elemento diferencial original (Figura 5.5b) pode ser cortado por um plano $b - b$, definindo uma superfície inclinada perpendicular ao eixo y', como na figura (d). Nessa superfície atuam $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$. Como já tínhamos obtido $\tau_{x'y'}$ do outro corte, equação $(5.16)_2$, basta uma equação de equilíbrio, na direção y', para determinar $\sigma_{y'}$. Isso resulta uma terceira equação que, juntando a (5.16) define o **conjunto de equações de transformação plana de tensões**:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \text{ sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \text{ sen}\theta\cos\theta, \\
&\sigma_{y'} = \sigma_x \text{ sen}^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy} \text{ sen}\theta\cos\theta, \\
&\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \text{ sen } \theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \text{ sen}^2\theta),
\end{aligned}
} \tag{5.17}
$$

Frequentemente os cálculos são realizados mais facilmente quando representamos essas equações em forma matricial:

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{x'}\\ \sigma_{y'}\\ \tau_{x'y'}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc}\cos^2(-30^o) & \text{sen}^2(-30^o) & 2\ \text{sen}(-30^o)\cos(-30^o)\\ \text{sen}^2(-30^o) & \cos^2(-30^o) & -2\ \text{sen}(-30^o)\cos(-30^o)\\ -\text{sen}(-30^o)\cos(-30^o) & \text{sen}(-30^o)\cos(-30^o) & \cos^2(30^o)-\text{sen}^2(30^o)\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}20\\ -50\\ -25\end{array}\right\}.$$

A matriz de rotação $\mathbf{T}$ torna-se

$$\mathbf{T}=\left[\begin{array}{ccc}0,75 & 0,25 & -0,866\\ 0,25 & 0,75 & 0,866\\ 0,433 & -0,433 & 0,5\end{array}\right].$$

E as tensões nas direções $Ox'y'$ são $\{\sigma^{x'}\}=\{24,15;-54,15;17,81\}^T$ MPa. Essas componentes são representadas no elemento diferencial na Figura 5.6b. A Figura 5.7 mostra os resultados para as tensões $\{\sigma^{x'}\}$ para todo ângulo de rotação em torno de z, conforme a eq.(5.18). O gráfico plota entre 0^o e 360^o, e mostra que as curvas são periódicas de período 180^o. De fato, esse período é uma característica geral das equações de transformação (5.18).

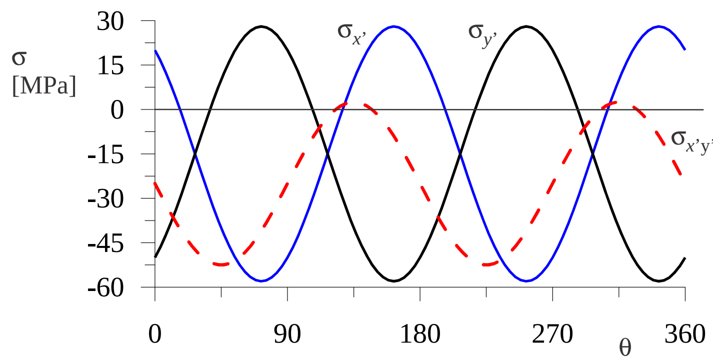


Figura 5.7: Tensões planas $\{\sigma^{x'}\}$ para todo ângulo de rotação em torno de z para os dados do Exemplo 2: $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa e $\tau_{xy} = -25$ MPa.

5.3 Tensões principais e cisalhamento máximo no plano

As equações (5.17) ou (5.18) são adequadas para o cálculo direto, porém, para as deduções que seguem é mais vantajoso converte-las a uma outra forma. Isso é feito usando as conhecidas identidades trigonométricas

$$2\text{sen}\ \theta\cos\theta=\text{sen}\ 2\theta,\qquad \text{sen}^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta),\qquad \cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta).\tag{5.20}$$

Com isso, (5.17) toma a forma

$$\boxed{\begin{array}{rl}\sigma_{x'}= & \left(\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)+\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta+\tau_{xy}\ \text{sen}\ 2\theta,\\ \sigma_{y'}= & \left(\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)-\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta-\tau_{xy}\ \text{sen}\ 2\theta,\\ \tau_{x'y'}= & \qquad\qquad\quad -\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\text{sen}\ 2\theta+\tau_{xy}\ \cos\ 2\theta.\end{array}}\tag{5.21}$$

Se consideramos a tensão normal $\sigma_{x'}$, notamos que para $\theta=0 \twoheadrightarrow \sigma_{x'}=\sigma_x$. As funções sen 2θ e $\cos 2\theta$ são limitadas a ±1, conforme θ varia de 0^o a 180^o. **Então $\sigma_{x'}$ tem seus valores limitados, de um mínimo até um máximo**, como ilustrado na Figura 5.7 para o estado de tensões do variam de 0 a 2π. Entretanto, a função arco tangente é capaz de identificar apenas ângulos entre $-\pi/2$ e $\pi/2$, i.é., não consegue identificar ângulos no segundo e terceiro quadrantes. De fato, ângulos no terceiro e no primeiro quadrantes possuem o mesmo valor de tangente, da mesma forma que ângulos nos quadrantes dois e quatro. Dados dois valores de τ_{xy} e d, eles podem ser representados como um ponto no plano cartesiano associado a um raio a partir da origem, como o ponto A na Figura 5.9. Ali está também representado o ângulo associado $2\theta_1$. Se o ponto estiver em A ou B (no primeiro ou no terceiro quadrantes), i.e., se $\tau_{xy} > 0$ e $d > 0$ ou $\tau_{xy} < 0$ e $d < 0$, se obtém $\text{atan}(\tau_{xy}/d) = 2\theta_1$. Se o ponto estiver em C ou D, no segundo ou no quarto quadrantes, i.e., $\tau_{xy} > 0$ e $d < 0$ ou $\tau_{xy} < 0$ e $d > 0$, se obterá $\text{atan}(2\theta_1) = -2\theta_1$.

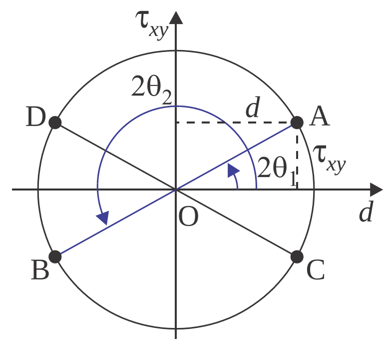


Figura 5.9: Ponto A de coordenadas (τ_{xy}; d) e ponto B de coordenadas ($-\tau_{xy}$; -d).

Em diversas situações, é útil identificar o ângulo na faixa $-\pi$ e π, correspondente ao quadrante correto em que o ponto se localiza no plano. Isso pode ser conseguido de diversas formas, e apresentamos uma delas a seguir. O cálculo é feito em quatro casos, dependendo de qual quadrante o ponto se localiza. Primeiramente é feito o cálculo direto $2\theta = \text{atan}\tau_{xy}/d$. Em seguida realizam-se correções para determinar $2\bar{\theta}$:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{1.} & \text{Se } d \neq 0 \rightarrow & 2\theta = \text{atan}\tau_{xy}/d \\ \text{2. Quadrante 1:} & \text{se } \tau_{xy} > 0 \text{ e } d > 0 \rightarrow & 2\bar{\theta} = 2\theta, \\ \text{3. Quadrante 4:} & \text{se } \tau_{xy} < 0 \text{ e } d > 0 \rightarrow & 2\bar{\theta} = 2\theta, \\ \text{4. Quadrante 2:} & \text{se } \tau_{xy} > 0 \text{ e } d < 0 \rightarrow & 2\bar{\theta} = 2\theta + \pi, \\ \text{5. Quadrante 3:} & \text{se } \tau_{xy} < 0 \text{ e } d < 0 \rightarrow & 2\bar{\theta} = 2\theta + \pi. \end{array}} \tag{5.26}$$

Caso $d = 0$, se $\tau_{xy} > 0$ se tem $2\bar{\theta} = \pi/2$ e se $\tau_{xy} < 0$ se tem $2\bar{\theta} = -\pi/2$.

5.3.2 Tensões cisalhantes máximas

Buscaremos agora as direções em que a tensão cisalhante seja extrema, mínima ou máxima no plano Oxy. isso é feito derivando $(5.21)_3$ em relação a θ e igualando a zero:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta - 2\tau_{xy} \text{ sen } 2\theta = 0. \tag{5.27}$$

As raízes β que satisfazem à segunda igualdade são dadas por

$$\boxed{\text{tg } 2\beta = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}} \tag{5.28}$$

Novamente, existem dois ângulos, β_1 e β_2, que satisfazem (5.28), defasados de 90^o. Esses dois ângulos definem dois eixos ortogonais, a e b em cujas faces as tensões cisalhantes são máxima e mínima, respectivamente, dentre todos os eixos no plano xy.

Comparando com (5.23), vemos que tg $2\overline{\theta} = -1/\text{tg } 2\beta$. De trigonometria temos que, se tg $\alpha = 1/\text{tg } \delta$, então α e δ são defasados de 90^o. Então, $\overline{\theta}$ e β são defasados de $\pm 45^o$, isto é, as direções principais e as direções de máximo e mínimo cisalhamento são defasados de múltiplos de $\pm 45^o$.

Uma vez que se tenha calculado os ângulos das direções principais, $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_1$, que definem os eixos principais 1 e 2, da máxima e mínima tensão normal respectivamente, os ângulos que definem os dois eixos a e b onde a tensão cisalhante e máxima e mínima no plano xy, podem ser calculadas mais facilmente que com o uso de (5.28), bastando fazer:

$$\boxed{2\beta_1 = 2\overline{\theta}_1 - \frac{\pi}{2}, \qquad 2\beta_2 = 2\beta_1 + \pi.} \tag{5.29}$$

Usando diretamente (5.28) também se obterão as mesmas duas raízes, porém possivelmente o ângulos β_1 e β_2 obtidos indiquem os eixos de tensão cisalhante mínima e máxima, respectivamente. Já com o uso de (5.29) se terá sempre que β_1 indicará o plano de máximo (positivo) e β_2 o plano de mínimo (negativo), se $\overline{\theta}_1$ tiver sido obtido para indicar a máxima tensão normal.

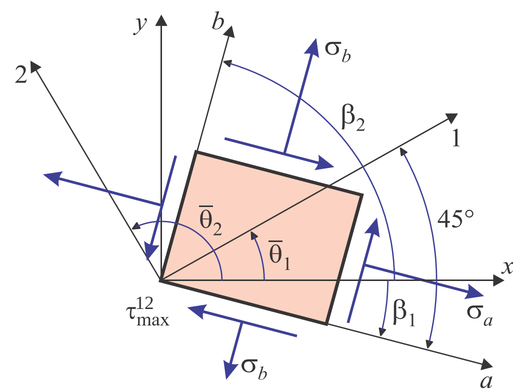


Figura 5.10: Direções $Oxyz$, $012z$ e $0abz$, tensões principais e tensões cisalhantes máximas no plano xy, $\tau^{12}_{\max}$.

A Figura 5.10 ilustra a disposição relativa das direções principais $O12$z no plano $Oxyz$, e as direções Oabz de cisalhamento máximo, $\tau^{12}_{\max}$, definidos pelos ângulos β_1 e β_2. O valor $\tau^{12}_{\max}$ é obtido numericamente levando β_1 a $(5.21)_3$:

$$\boxed{\tau^{12}_{\max} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{sen}\,2\beta_1 + \tau_{xy}\cos 2\beta_1.} \tag{5.30}$$

Tomando os valores de β_1 e β_2 obtidos por (5.29) e aplicando-os em $(5.21)_3$, obtém-se dois valores de mesmo módulo e sinais contrários, i.e., $\tau^{12}_{\max} \geq 0$ e $\tau^{12}_{\max} = -\tau^{12}_{\max}$. O primeiro indica a tensão nas duas faces normais no eixo a (Figura 5.10) e o segundo dá o valor nas faces normais ao eixo b.

Observação: Posteriormente, na equação (5.43), indicaremos uma expressão fechada para $\tau^{12}_{\max}$, diretamente em termos de σ_x, σ_y e τ_{xy}.

Observação: O supra-índice 12 em $\tau^{12}_{\max}$ indica que esse valor é a máxima tensão cisalhante apenas para todas as transformações realizadas por rotação plana em torno do eixo z, i.e., no plano xy (que é o mesmo plano ab ou 12). Posteriormente, outros dois valores de tensão cisalhante máximas serão obtidos, para transformações em dois outros planos ortogonais a 12.

Exemplo 5.2 - Determinação das tensões extremas no plano Oxy.

Para o estado de tensões do Exemplo 5.1, determine as tensões extremas no plano Oxy.

Solução:

As componentes de tensão conhecidas são em relação aos eixos $Oxyz$: $\{\sigma^x\} = \{20; -50; -25\}$ MPa.
As direções principais e direções de cisalhamento máximo no plano Oxy vem de (5.23) e (5.28):

$$\text{tg } 2\overline{\theta} = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)/2} = \frac{-25}{[20-(-50)]/2} = \frac{-25}{35} = -0,7143 \quad \rightarrow \begin{cases} \overline{\theta}_1 = -17,77^o, \\ \overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_1 + 90^o \\ \quad = +72,23^o. \end{cases}$$

$$2\beta_1 = 2\overline{\theta}_1 + \frac{\pi}{2} = 2(-17,77^o) - 90^o = -62,77^o \quad \rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -62,77^o, \\ \beta_2 = \beta_1 + 90^o = 27,23^o.. \end{cases} \tag{5.31}$$

Essas direções são vistas na Figura 5.11a. Note que para o cálculo de $2\overline{\theta}$, o ponto $(\tau_{xy};d)$, com $d = (\sigma_x - \sigma_y)/2$, se encontra no quarto quadrante e para o cálculo de 2β, o ponto $(-d;\tau_{xy})$ encontra-se no terceiro quadrante. O cálculo de β_1 foi feito a partir de $\overline{\theta}_1$: $2\beta_1 = 2\overline{\theta}_1 - \pi/2$, de forma a gerar uma tríade levógera de eixos $0abz$. Entretanto, uma outra tríade levógera, que designamos por $0a'b'z'$, pode ser obtida seguindo as regras em (5.26), calculando atan(1/0,7143) $= 54,46°$, como se estivesse no primeiro quadrante e em seguida fazendo a correção para o terceiro quadrante: $2\beta_1' = 54,46° + 180° = 234°$, o que resulta em $\beta_1' = 117,2°$. Em seguida, $\beta_2' = \beta_1' + 90^o = 207^o$. Ambas as tríades definem as mesmas direções, apenas com os eixos a' e b' são os eixos a e b respectivamente, refletidos em torno da origem 0, como na Figura 5.11. **No restante do texto usaremos sempre o cálculo de β_1 através da eq. (5.29)**.

Os valores extremos das tensões no plano Oxy vem de $(5.21)_1$ e $(5.21)_3$, ou (5.24) e (5.30):

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \left(\frac{20+(-50)}{2}\right) + \left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\cos\,(2(-17,77^o)) + (-25)\,\text{sen}\,(2(-17,77^o)),\\
\sigma_2 &= \left(\frac{20+(-50)}{2}\right) + \left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\cos\,(2\times 72,23^o) + (-25)\,\text{sen}\,(2\times 72,23^o),\\
\tau^{12}(\beta_1) &= -\left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\,\text{sen}\,(2\times(-62,77^o)) + (-25)\cos(2\times(-62,77^o)) = 43,01,\\
\tau^{12}(\beta_2) &= -\left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\,\text{sen}\,(2\times 27,23^o) + (-25)\cos(2\times 27,23^o) = -43,01.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Logo, $\sigma_1 = 28,01$ MPa, $\sigma_2 = -58,01$ MPa, $\tau^{12}_{\max} = \tau^{12}(\beta_2) = 43,01$ MPa.

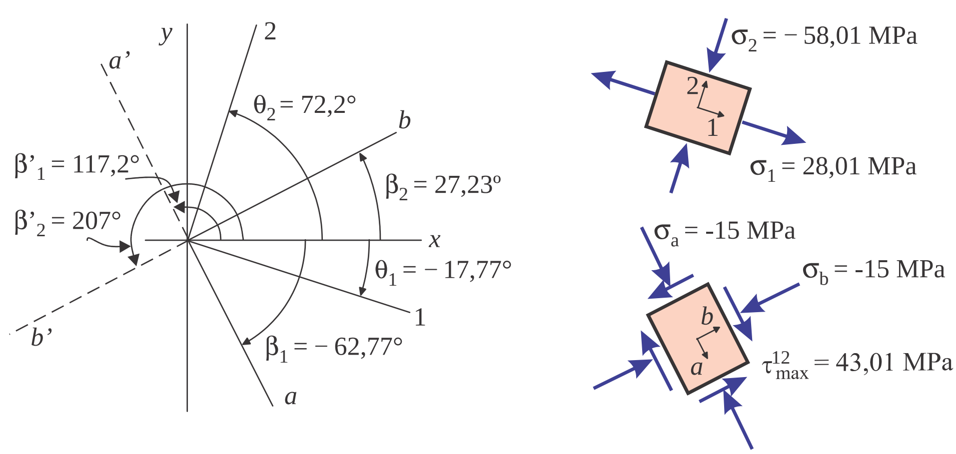


Figura 5.11: Resultados do Exemplo 5.2. O eixo z é perpendicular para cima do plano.

Observe que sempre os dois valores de tensão cisalhante, $\tau^{12}(\beta_1)$ e $\tau^{12}(\beta_2)$, terão valores absolutos idênticos. Esses valores, assim como as direções principais 1 e 2, e as direções a e b definidas por β_1 e β_2, são vistos na Figura 5.11.

Observe que nas direções dos eixos a e b, em que o cisalhamento é máximo no plano, as tensões normais não são nulas. Elas podem ser facilmente obtidas usando as eqs.$(5.21)_1$ aplicada em β_1 e β_2:

$$\sigma_a = \left(\frac{20+(-50)}{2}\right) + \left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\cos\,(2\times(-62,77^o)) + (-25)\text{ sen }(2\times(-62,77^o)),$$
$$\sigma_b = \left(\frac{20+(-50)}{2}\right) + \left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\cos\,(2\times 27,23^o) + (-25)\text{ sen }(2\times 27,23^o),$$

que resultam em $\sigma_a = \sigma_b = -15,0$ MPa. **Nota-se que esses valores são sempre idênticos**.

O fluxograma para o cálculo das tensões extremas e os ângulos de orientação dos eixos correspondentes e o seguinte

1. Cálculo das tensões principais	
1.1 Eixo principal 1	
a. Se $d \neq 0 \;\rightarrow\; 2\theta = \text{atan}\tau_{xy}/d$	onde $d = (\sigma_x - \sigma_y)/2$
a1. se $\tau_{xy} > 0$ e $d > 0 \rightarrow$ Quadrante 1:	$2\bar{\theta}_1 = 2\theta$
a2. se $\tau_{xy} < 0$ e $d > 0 \rightarrow$ Quadrante 4:	$2\bar{\theta}_1 = 2\theta$
a3. se $\tau_{xy} > 0$ e $d < 0 \rightarrow$ Quadrante 2:	$2\bar{\theta}_1 = 2\theta + \pi$
a4. se $\tau_{xy} < 0$ e $d < 0 \rightarrow$ Quadrante 3:	$2\bar{\theta}_1 = 2\theta + \pi$
b1. Se $d = 0$ e $\tau_{xy} > 0 \rightarrow$	$2\bar{\theta}_1 = \pi/2$
b2. Se $d = 0$ e $\tau_{xy} < 0 \rightarrow$	$2\bar{\theta}_1 = -\pi/2$
b3. Se $d = 0$ e $\tau_{xy} = 0 \rightarrow$	$\bar{\theta}_1 = 0$
1.2 Eixo principal 2	$2\bar{\theta}_2 = 2\bar{\theta}_1 + \pi$
1.3 Tensão principal máxima	$\sigma_1 = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
Tensão principal mínima	$\sigma_2 = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
2. Eixos a e b de cisalhamento máximo:	$2\beta_1 = 2\bar{\theta}_1 - \frac{\pi}{2}$
	$2\beta_2 = 2\beta_1 + \pi$
2.1 Tensões cisalh. máx. e mín. no plano xy	$\left.\begin{array}{l}\tau_{\text{max}}^{12}\\ \tau_{\text{min}}^{12}\end{array}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

(5.33)

As expressões mostradas para as tensões principais e cisalhante máxima no plano xy serão ainda deduzidas na próxima seção. Todos os ângulos obtidos são positivos se forem anti-horários medidos a partir do eixo x, em torno do eixo z. Os ângulos obtidos serão tais que $\bar{\theta}_1$ corresponde ao eixo principal 1, tal que σ_1 é a máxima tensão, enquanto $\bar{\theta}_2$ é associado à tensão mínima σ_2 e ao eixo principal 1. As tríades $012z$ obtidas com esses ângulos são levógeras. Da mesma forma, os ângulos β_1 e β_2 definem os eixos a e b, e a tensão cisalhante máxima e mínima no plano xy. A tríade $0abz$ é levógera.

5.4 Círculo de Mohr para rotação plana de EPT

Quando observamos as três equações (5.21), observamos que, de fato, necessitamos apenas de duas, a primeira e a terceira. Note que a segunda expressão, de $\sigma_{y'}$, produz a tensão normal à face orientada na direção y'. Mas a primeira equação produz $\sigma_{x'}$ para uma face orientada na direção x', em qualquer ângulo θ. A única diferença entre os eixos x' e y' é que x' é orientado de θ a partir de x, enquanto y' é orientado em $\theta + 90^o$ a partir de x. Então, se usarmos a primeira equação (5.21) com $\theta + 90^o$ em lugar de θ, também obteremos $\sigma_{y'}$. Então reescreveremos a primeira e terceira das equações (5.21) como

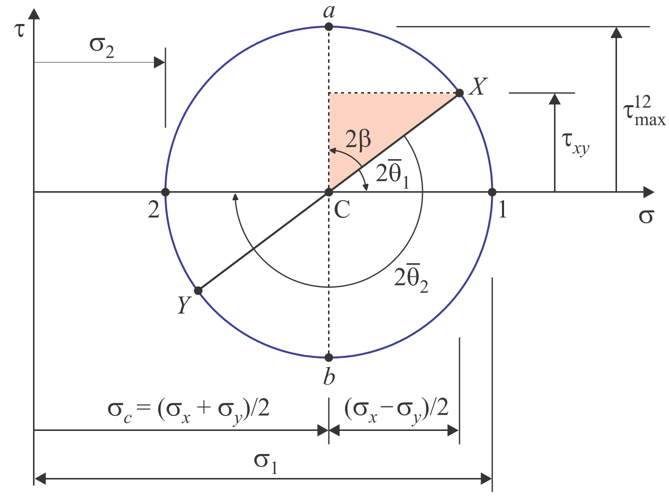


Figura 5.15: Direção da tensão cisalhante máxima no plano xy.

> Duas características das equações (5.34) são:
> - Os ângulos físicos de rotação entre dois eixos, no círculo de Mohr são duplicados, i.e., uma rotação física θ torna-se 2θ;
> - No círculo os ângulos são representados com orientação invertida da orientação real, i.e., uma rotação física θ anti-horária é representada no círculo como horária.

(5.45)

A duplicação do ângulo é claramente vista no 2θ que aparece nas equações (5.34). Esses dois efeitos podem ser ilustrados considerando os dois pares de eixos do círculo de Mohr da Figura 5.13, Oxy e $Ox'y'$, representados pelos pontos XY e $X'Y'$. Ali, o eixo x' está representado por uma rotação **anti-horária** 2α a partir do eixo x. Fisicamente, o eixo x' é obtido por uma rotação **horária** de α a partir de eixo x, como visto na Figura 5.16.

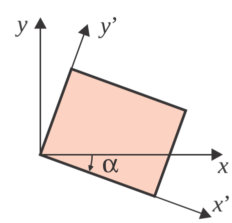


Figura 5.16: Ângulo α de definição de x', associado ao círculo de Mohr da Figura 5.13.

5.5 Processo de construção do círculo de Mohr plano

As etapas de construção do círculo de Mohr são as seguintes:

Etapa 1 - Conhecidas as componentes de tensões planas em relação a um sistema qualquer de eixos, σ_x, σ_y e τ_{xy}, plotar no plano $\sigma - \tau$ dois pontos de coordenadas: $X = (\sigma_x; \tau_{xy})$ e $Y = (\sigma_y; -\tau_{xy})$.

Etapa 2 - Localizar o centro do círculo em $\sigma_c = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ e traçar o círculo de Mohr passando por X e Y.

Etapa 3 - Localizar os pontos extremos do círculo: as tensões principais σ_1 e σ_2 e o cisalhamento máximo no plano, τ_{max}^{12}, como na Figura 5.15, e os eixos associados, $O12$ e Oab.

Etapa 4 - Se o desenho for feito em escala [2], os valores de σ_1 e σ_2 e τ_{max}^{12} podem ser diretamente

[2] Esse era o procedimento tradicional desde o final do século 19 até os anos 1970. Com o advento das calculadoras

obtidos simplesmente medindo com uma régua as coordenadas dos pontos. Os ângulos entre os eixos 1 e x e a e x, ($\overline{\theta}_1$ e β_1), são igualmente medidos com transferidor e tem suas orientações invertidas para definir as orientações físicas dos eixos. Entretanto, é mais simples obter os valores das equações do fluxograma da eq.(5.33).

Exemplo 5.3 - Aplicação de círculo de Mohr em EPT.

Para o estado de tensões do Exemplo 5.2, $\{\sigma^x\} = \{20; -50; -25\}^T$ MPa, construa o círculo de Mohr e indique as tensões extremas.

Solução:
Seguimos as etapas indicadas no início da seção.
Etapa 1 - As coordenadas dos pontos que representam os eixos x e y são $X = (\sigma_x; \tau_{xy}) = (20; -25)$ MPa e $Y = (\sigma_y; -\tau_{xy}) = (-50; 25)$ MPa.
Etapa 2 - O centro do círculo fica em $\sigma_c = (\sigma_x + \sigma_y)/2 = (20 + (-50))/2 = -15$ MPa. Temos os pontos X, Y, e C no plano $\sigma - \tau$, como na Figura 5.17, o que permite desenhar a linha reta diagonal e traçar o círculo.

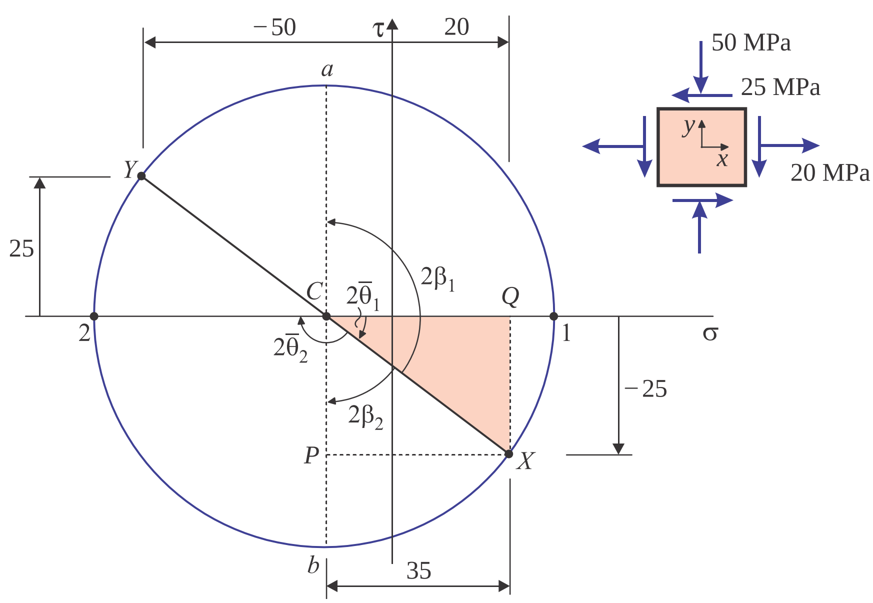


Figura 5.17: Círculo de Mohr do Exemplo 5 .3. Tensões em MPa.

Os pontos correspondentes aos eixos 1.2, a e b são facilmente identificáveis. Os valores podem ser mais facilmente obtidos pelas equações do fluxograma da eq.(5.33). As tensões principais vem de (5.44):

$$\sigma_{1,2} = \underbrace{\left(\frac{20 + (-50)}{2}\right)}_{\sigma_c} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{20 - (-50)}{2}\right)^2 + (-25)^2}}_{R} = -15 \pm 43,01 \text{ MPa.} \tag{5.46}$$

Como, de (5.43), $\tau^{12}_{\max} = R$, temos que $\tau^{12}_{\max} = 43,01$ MPa, $\sigma_1 = 28,01$ MPa e $\sigma_2 = -58,01$ MPa, como já tinha sido obtido no Exemplo 5.2, equações (5.32).

Os ângulos $\overline{\theta}$ e β são obtidos diretamente do círculo de Mohr, usando relações trigonométricas. Assim, o triângulo sombreado na Figura 5.17 produz

eletrônicas e computadores, os valores numéricos são mais facilmente obtidos pelas equações, e o círculo é apenas esboçado, a mão livre, para permitir ao engenheiro uma interpretação visual do processo.

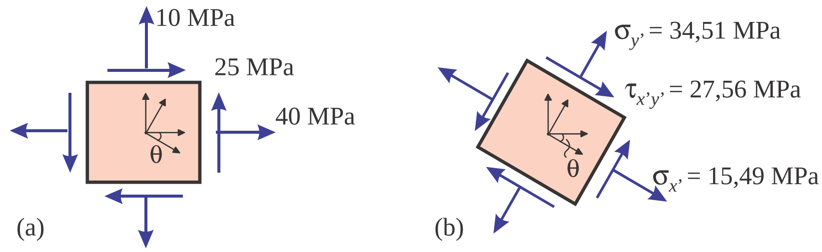


Figura 5.18: (a) Dados do Exemplo 5.4; (b) tensões no sistema $Ox'y'$.

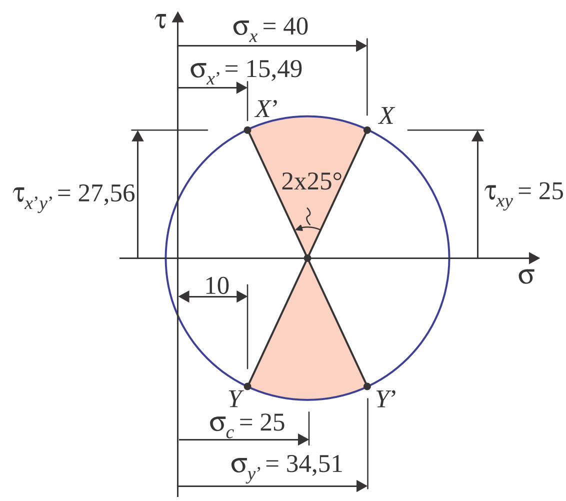


Figura 5.19: Círculo de Mohr para a transformação do Exemplo 5.4 - (tensões em MPa).

O novo sistema de eixos é definido tal que o eixo x' é gerado por uma **rotação horária (em torno de** z) a partir de x (Figura 5.18a). Logo, o eixo x' será representado no círculo por uma **rotação anti-horária** do eixo CX no valor $2\theta = 2 \cdot 25^o = 50^o$. Isso define a linha tracejada CX' na Figura 5.19. Extrapolando a linha CX' temos a linha CY'.

Os valores das tensões no elemento diferencial nas faces normais a x' e y' podem ser obtidos medindo diretamente na figura (se feita em escala), as coordenadas dos pontos X' e Y'. Entretanto, valores numéricos desse tipo podem ser mais facilmente obtidos pelas equações de transformação, equações (5.17), (5.18) ou (5.21). Usando (5.18) com $\theta = -25^o$, temos

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{x'}\\ \sigma_{y'}\\ \tau_{x'y'}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc}\cos^2 25^o & \mathrm{sen}^2 25^o & 2\,\mathrm{sen}25^o\cos 25^o\\ \mathrm{sen}^2 25^o & \cos^2 25^o & -2\,\mathrm{sen}25^o\cos 25^o\\ -\,\mathrm{sen}25^o\cos 25^o & \mathrm{sen}25^o\cos 25^o & (\cos^2 25^o - \mathrm{sen}^2 25^o)\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}40\\ 10\\ 25\end{array}\right\}\mathrm{MPa},$$

Cuja solução é: $\sigma_{x'} = 15,49$ MPa, $\sigma_{y'} = 34,51$ MPa e $\tau_{x'y'} = 27,56$ MPa. Essas tensões são representadas no elemento diferencial na Figura 5.18b.

5.6 Tensões principais num estado triaxial de tensões

Todo o desenvolvimento apresentado nas seções anteriores concentra-se na transformação de estados planos de tensão (EPT) sob rotação plana do sistema de eixos coordenados em torno do eixo z. Nessa seção é apresentada, de forma sucinta, os resultados da teoria de mecânica do continuo para a determinação de tensões principais no caso geral de um estado triaxial de tensões.

Dada a matriz $[\sigma]$ das componentes de tensão em relação a um certo sistema de coordenadas

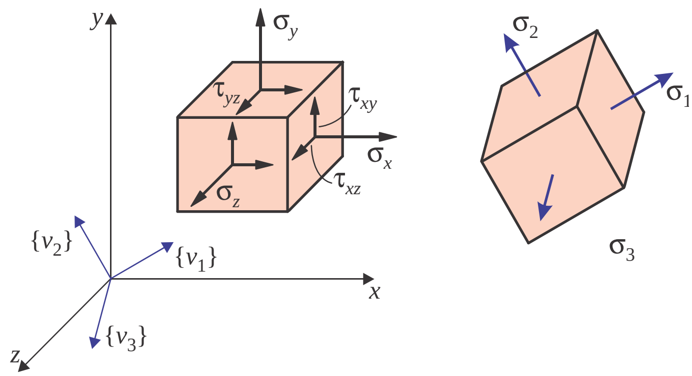


Figura 5.20: Tensões e direções principais no espaço 3D.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & 30 & -10 \\ 30 & 40 & 0 \\ -10 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \tag{5.57}$$

Determine as tensões e direções principais.

Solução:
As tensões principais são os autovalores de $[\sigma]$, dados por (5.51):

$$\det \begin{bmatrix} 20-\sigma_j & 30 & -10 \\ 30 & 40-\sigma_j & 0 \\ -10 & 0 & -10-\sigma_j \end{bmatrix} = 0. \tag{5.58}$$

O polinômio característico é $p(\sigma_j) \doteq \det([\sigma] - \sigma_j [I])$, que em forma expandida fica

$$p(\sigma_j) = (20-\sigma_j)(40-\sigma_j)(-10-\sigma_j) - (40-\sigma_j)(-10)^2 - (-10-\sigma_j)30^2 = 0,$$

que pode ser simplificada para $\sigma_j^3 - 50\sigma_j^2 - 800\sigma_j + 3.000 = 0$. As raízes são $\sigma_1 = 62,10$ MPa, $\sigma_2 = 3,164$ MPa e $\sigma_3 = -15,27$ MPa.

As **direções principais** são dadas pelos vetores solução de (5.54). Por exemplo, a direção principal 1 é a direção do vetor $\{v_1\}$, que é solução do problema

$$([\sigma] - \sigma_1[I])\{v_1\} = \{0\},$$

que expandida fica

$$\begin{bmatrix} 20-62,10 & 30 & -10 \\ 30 & 40-62,10 & 0 \\ -10 & 0 & -10-62,10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{5.59}$$

i.e.,

$$\begin{bmatrix} -42,10 & 30 & -10 \\ 30 & -22,10 & 0 \\ -10 & 0 & -72,10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{5.60}$$

Podemos obter a solução por operações de linha da fatoração de Gauss. Multiplicando a terceira equação por $-4,21$ e por $+3$ e somando à primeira e segunda equação, respectivamente, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 30 & 293,5 \\ 0 & -22,10 & -216,3 \\ -10 & 0 & -72,10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.61}$$

Então, ou o primeiro parêntese é nulo ou o segundo o é. Caso o primeiro parêntese seja nulo, $\sigma_z - \sigma_j = 0$, com o que se tem a primeira das três raízes σ_j. Fazendo $j = 3$, por exemplo, tem-se o valor da tensão principal σ_3:

$$\boxed{\sigma_3 = \sigma_z} \tag{5.67}$$

As outras duas tensões principais são as duas raízes σ_j (σ_1 e σ_2) do polinômio de segundo grau em (5.66),

$$(\sigma_x - \sigma_j)(\sigma_y - \sigma_j) - \tau_{xy}^2 = 0,$$

que pode ser expandido para

$$\sigma_j^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_j + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0.$$

Usando a fórmula para as raízes tem-se

$$\sigma_j = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)}\right]$$

Expandindo e reordenando os termos chega-se a

$$\boxed{\sigma_j = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{para } j = 1, 2.} \tag{5.68}$$

Esta é a mesma expressão anteriormente deduzida para obter σ_1 e σ_2 em estado plano de tensões, equações (5.44). Então, se o tensor é como em (5.64), o fato de σ_z ser nulo ou não, não interfere nos valores de σ_1 e σ_2. Como $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, fica provado em (5.67) que σ_z é uma das três tensões principais, quer seja nulo ou não.

Isso tem uma consequência importante, que é a seguinte:

> sempre existem três tensões principais em qualquer estado de tensões (uniaxial, biaxial ou triaxial), mesmo que uma ou duas possam ser nulas, ou uma, duas ou três possam ser idênticas.
> Sempre existe uma tríade de eixos principais, 1,2 e 3, como Figura 5.20, mesmo que alguma das tensões principais seja nula.

(5.69)

Por exemplo, em todo o equacionamento e exemplos vistos nas seções anteriores, além das tensões principais σ_1 e σ_2 obtidas, também existe $\sigma_3 = 0$.

Para um estado plano de tensões no plano xy, **como em (5.64), a direção principal correspondente, o eixo 3, coincide com o eixo** z, como pode ser visto resolvendo para o autovetor $\{v_3\}$ da matriz de estado plano de tensão (5.64). Para isso resolvemos o problema algébrico $(5.54)_3$

$$([\sigma] - \sigma_3[I])\,\{v_3\} = \{0\}. \tag{5.70}$$

Para $\sigma_3 = \sigma_z$, se tem a forma aberta

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_z & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.71}$$

A solução é que v_{3z} pode ser qualquer valor real, por exemplo $v_{3z} = c$. e v_{3x} e v_{3y} devem ser resolvidos da submatriz remanescente

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_z & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.72}$$

A submatriz é não singular, pois os únicos autovalores que a tornam singular são σ_1 e σ_2. Isso pode ser visto notando que o determinante dessa matriz gera exatamente o segundo polinômio característico em (5.66). Então, de álgebra se sabe que a única solução possível é $v_{3x} = v_{3y} = 0$. Então, o autovetor que define a direção principal 3 é

$$\{v_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{Bmatrix}. \tag{5.73}$$

Essa forma mostra porque não podemos usar $c = 0$, mesmo no caso $\sigma_3 = 0$. Em geral se toma $c = 1$ para ter o vetor normalizado.

5.6.2 Rotação das tensões principais

Consideremos as três tensões principais e suas direções, como no elemento volumétrico da Figura 5.22a. As três tensões principais podem ser representadas no plano $\sigma - \tau$ do círculo de Mohr, como na Figura 5.22b. Podemos rotacionar os eixos 1 e 2 em torno do eixo 3, por um ângulo θ_3 como na Figura 5.22b. As tensões nas novas direções, r e s, são obtidas pelas equações (5.17), com x'e y'substituídos por R e S, e σ_x, σ_y e τ_{xy} substituídos por σ_1, σ_2 e 0 respectivamente. As tensões σ_r, σ_s e τ_{rs} são representados no plano $\sigma - \tau$ pelos pontos R e S do círculo vistos na Figura 5.22b. Em geral, os pontos R e S descrevem o círculo de Mohr ilustrado conforme θ_3 varia de 0^o a 180^o.

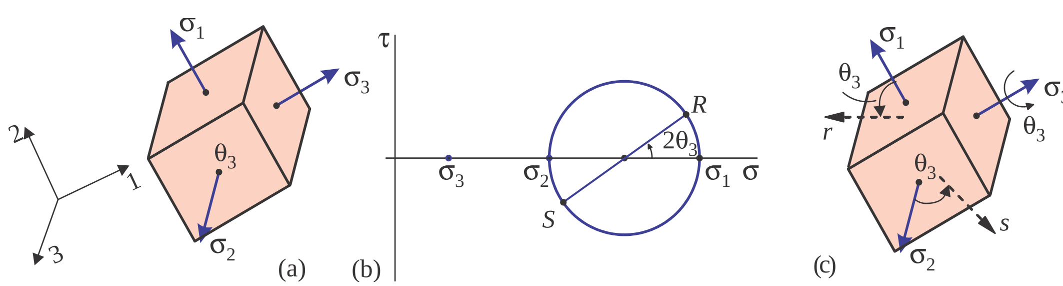


Figura 5.22: (a) Tensões e direções principais, (b) círculo de Mohr e (c) rotação em torno do eixo 3.

Note que o círculo de Mohr da Figura 5.22b é uma generalização do círculo de Mohr de um estado plano de tensões descrito no início do capítulo. No EPT, σ_z era nulo, enquanto no caso atual ele não o é.

Considere novamente as três tensões e direções principais, como na Figura 5.23a. Podemos fazer uma rotação θ_1 em torno do eixo 1 e definir novos eixos, t e u como mostrado. As tensões nas faces orientadas por t e u, (σ_t, σ_u e τ_{ut}), definem os pontos T e U e o círculo de Mohr mostrado na Figura 5.23b.

Comparando as Figuras 5.22 e 5.23, temos dois círculos de Mohr: um no plano $O12$ (para rotação em torno do eixo 3), e um círculo no plano $O23$ (para rotação em torno do eixo 1).

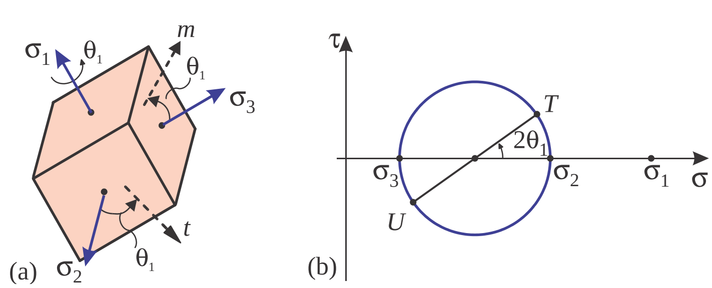


Figura 5.23: Rotação em torno do eixo 1.

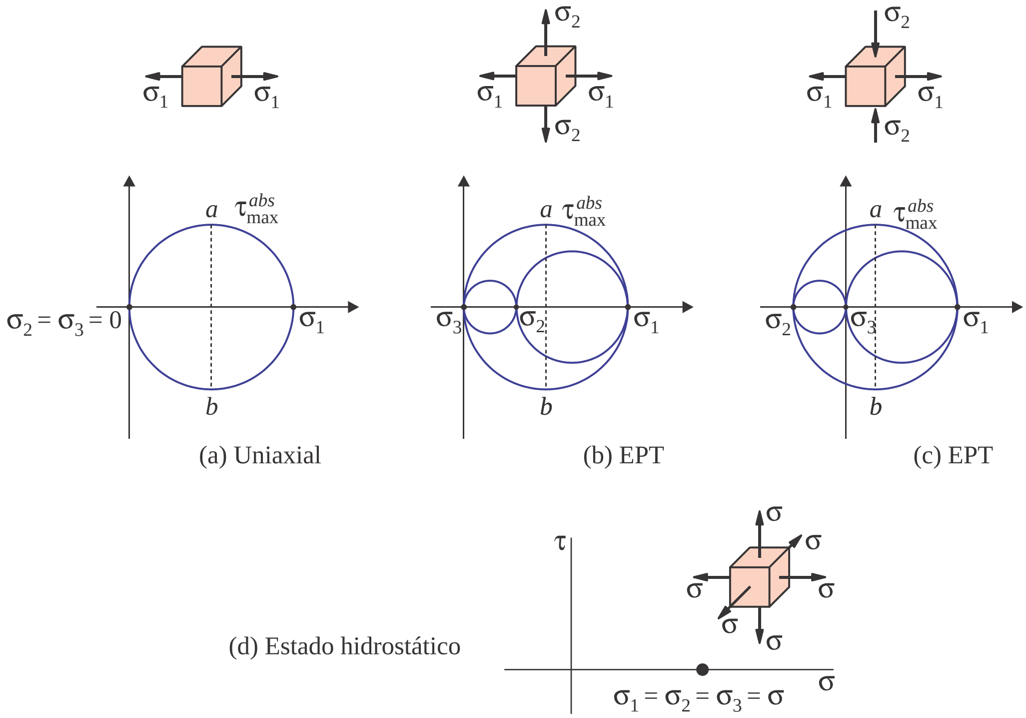


Figura 5.25: Representação dos círculos de Mohr em diversos estados de tensão.

$$\boxed{\begin{aligned} \tau^{abs}_{\max} &= \mathrm{Max}\{\tau^{12}_{\max};\ \tau^{13}_{\max};\ \tau^{23}_{\max}\}, \\ &= \frac{1}{2}\max\left\{|\sigma_1-\sigma_2|\,;\ |\sigma_1-\sigma_3|\,;\ |\sigma_2-\sigma_3|\right\} \end{aligned}} \tag{5.74}$$

A tensão máxima absoluta ocorre sempre em eixos contidos no plano do maior círculo de Mohr, a 45^o dos eixos principais associados. Por exemplo, para o estado de tensões da Figura 5.24, os eixos Oab estão contidos no plano $O13$, onde o eixo a está a 45^o do eixo 1, como na Figura 5.26.

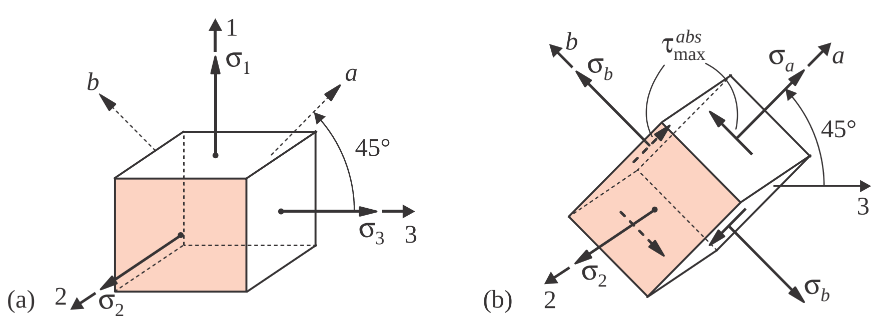


Figura 5.26: Tensões e direções principais em (a), e direções $a-b$ da tensão cisalhante máxima absoluta.

Exemplo 5.6 - Tensões principais e círculos de Mohr em EPT

Considere o estado de tensões planas dos Exemplos 5.2 e 3, $\{\sigma^x\} = \{20; -50; -25\}^T$ MPa. Construa os três círculos de Mohr e indique as tensões principais e tensões cisalhantes máximas em cada plano.

Solução:

Como se trata de um estado plano de tensões no plano xy, podemos obter diretamente as tensões principais σ_1e σ_2 e a tensão cisalhante máxima no plano 12, $\tau_{\max}^{12}$, usando o equacionamento do fluxograma da eq. (5.33). Isso já foi feito no Exemplo 5.3:

$$\tau_{\max}^{12}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \quad \text{e} \quad \sigma_{1,2}=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)\pm\tau_{\max}^{12}, \tag{5.75}$$

o que resulta

$$\begin{aligned}\tau_{\max}^{12} &= \sqrt{\left(\frac{20-(-50)}{2}\right)^2+(-25)^2}=43{,}01\ \text{MPa},\\ \sigma_{1,2} &= \left(\frac{20+(-50)}{2}\right)\pm 43{,}0=-15\pm 43,0\ \text{MPa}\end{aligned} \tag{5.76}$$

tal que $\sigma_1=28$ MPa e $\sigma_2=-58$ MPa, como já tinha sido obtido no Exemplo 5.3, página 187. As tensões cisalhantes máximas nos planos 13 e 23, $\tau_{\max}^{13}$ e $\tau_{\max}^{23}$, podem ser obtidas de (5.74)

$$\begin{aligned}\tau_{\max}^{13} &= \left|\sigma_1-\sigma_3\right|/2=28/2=14\ \text{MPa},\\ \tau_{\max}^{23} &= \left|\sigma_2-\sigma_3\right|/2=58/2=29\ \text{MPa}.\end{aligned} \tag{5.77}$$

Com as três tensões principais determinadas, os três círculos de Mohr podem ser esboçados, como na Figura 5.27.

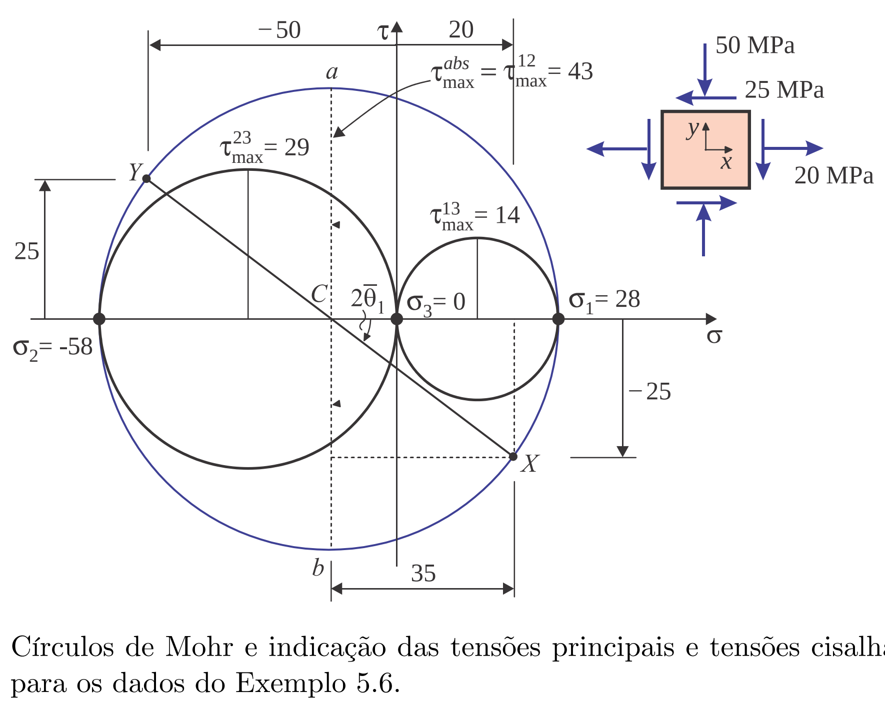


Figura 5.27: Círculos de Mohr e indicação das tensões principais e tensões cisalhantes máximas em cada plano para os dados do Exemplo 5.6.

5.7 Transformação de deformações em estado plano

Nessa seção mostraremos que as deformações são valores associados a um determinado sistema de eixos da mesma forma que as componentes de tensão. Em seguida apresentaremos as equações de transformação de componentes de um **estado plano de tensões** (EPT) em presença de uma rotação do sistema de coordenadas.

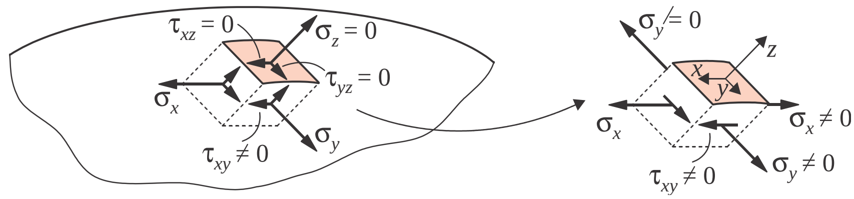


Figura 5.28: Estado de tensões numa superfície livre de um corpo.

Frequentemente as operações de transformação de deformações são realizadas para processar dados obtidos em medições de deformações. Um dos métodos mais comuns de medição de deformações é pelo uso de **extensômetros de resistência**. Esses extensômetros, como também diversos outros tipos de transdutores cinemáticos, **medem apenas deformações em pontos da superfície do corpo, não em pontos do seu interior.** No caso mais comum a superfície é livre de tensões, i.e., em cada ponto as três componentes de tensões na superfície são nulas. Por exemplo, no ponto ilustrado na Figura 5.28, se os eixos $x - y$ forem tangentes à superfície tem-se $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, o que caracteriza um estado plano de tensões, com o tensor tensão com as componentes

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.78}$$

Nesse caso, o estado de deformações é obtido pela Lei de Hooke generalizada, dada pela equação (4.60), página 120, para um material homogêneo, elástico-linear, isotrópico:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - v\sigma_y], \qquad \varepsilon_z = -\frac{v}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0. \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - v\sigma_x], \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \end{aligned} \tag{5.79}$$

Então o estado de deformações tem componentes

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{5.80}$$

G é dado por $G = E/2(1 + v)$.

A relação inversa de (4.125) pode ser facilmente obtida:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - v^2}(\varepsilon_x + v\varepsilon_y), \quad & \sigma_y &= \frac{E}{1 - v^2}(\varepsilon_y + v\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} & \sigma_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{aligned}} \tag{5.81}$$

Além disso, uma relação adicional é obtida para ε_z:

$$\varepsilon_z = \frac{-v}{1 - v}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \tag{5.82}$$

Nota-se que este **não é um estado plano de deformações** (EPD), pois $\varepsilon_Z \neq 0$ quando o coeficiente de Poisson $v \neq 0$. Então, além das deformações coplanares (no plano xy) vistas na Figura 5.29, existe também uma deformação normal ε_z, na direção perpendicular à superfície do corpo, provocado pelo efeito de Poisson.

Entretanto, observa-se que a componente ε_z não é afetada por uma rotação de sistema de coordenadas em torno do eixo z, isto é, as equações de transformação de (5.80) são as mesmas do estado plano de deformações (EPD):

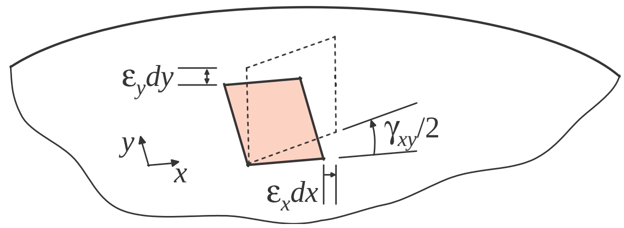


Figura 5.29: Deformações na superfície de um corpo.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.83}$$

e ε_z permanece inalterado com a rotação.

5.7.1 Aspectos gerais de transformação de deformações

A questão da transformação de deformações pode ser entendida com a ajuda da Figura 5.30a, onde temos um elemento ABCD de dimensões diferenciais $dx \times dy$, com as faces paralelas aos eixos x e y. Como ilustração, consideremos o elemento sujeito apenas a deformações ε_x, de forma que ele se deforma na configuração $\mathrm{A\overline{BC}D}$, isto é, o segmento AB paralelo ao eixo x alonga-se em $\varepsilon_x dx$ na direção x.

Consideremos agora, no mesmo ponto do corpo, um outro sistema de eixos, $\mathrm{A}x'y'$ como mostrado. Um segmento de material na direção x', ao longo de AC, tem inicialmente comprimento dx'. Com a deformação, o segmento AC deforma-se para $\mathrm{A\overline{C}}$, como visto na Figura 5.30a. É visível que a deformação de AC, isto é, $\varepsilon_{x'}$, será diferente de ε_x, uma vez que $\varepsilon_{x'}$ é tal que o comprimento final $\overline{\mathrm{AC}}$ é $(1 + dx')\varepsilon_{x'}$.

Em segunda, consideremos, ainda na Figura 5.30a, um outro elemento diferencial, no mesmo local, de dimensões $dx' \times dy'$, com faces paralelas aos eixos x' e y'. Na configuração original o elemento é retangular, isto é, com os ângulos internos retos. Entretanto, na configuração deformada os ângulos estão alterados pelo valor $\gamma_{x'y'}$, que é o ângulo formado pela rotação de AC em $\overline{\mathrm{AC}}$.

Da Figura 5.30a conclui-se, de forma geral, que a um simples elongamento uniaxial, ε_x, corresponde um estado de deformações mais complexas num outro sistema de coordenadas, $x' - y'$, envolvendo, pelo menos, um elongamento $\varepsilon_{x'}$ e um cisalhamento $\gamma_{x'y'}$.

Na Figura 5.30b temos a ilustração de que um estado simples de cisalhamento, γ_{xy}, num sistema de coordenadas $x - y$, está associada a um elongamento $\varepsilon_{x'}$ numa direção x'(além de outras deformações não mostradas). Nos eixos $x - y$, o retângulo ABCD deforma-se para $\overline{\mathrm{ABCD}}$ pelo cisalhamento γ_{xy}. Já o segmento AF na direção x', elonga-se para $\mathrm{A\overline{F}}$, gerando uma deformação normal $\varepsilon_{x'}$.

Em lugar de tratar de uma componente de deformação por vez, devemos considerar o conjunto delas, como na Figura 5.31a. Para um sistema Oxy de eixos, temos dois segmentos ortogonais de material, AB e AC, de comprimentos dx e dy. Cada um desses segmentos sofre um **elongamento** e uma **rotação**. Por exemplo, o segmento AB elonga-se no valor $\varepsilon_x dx$, e sofre uma rotação $\gamma_{xy}/2$, de forma que o ponto B desloca-se para a posição $\overline{\mathrm{B}}$. De forma semelhante, $\varepsilon_y dy$ é o elongamento de AC, e $\gamma_{xy}/2$ será sua rotação, tal que o ponto C toma a posição $\overline{\mathrm{C}}$.

Consideremos agora a mesma região do corpo, o mesmo estado de deformações, porém definimos um segundo sistema de eixos, $Ox'y'$, através de uma rotação θ em torno do eixo z. Se definimos um novo segmento, Ab, de comprimento dx', paralelo ao eixo x', o elongamento desse segmento será $\varepsilon_{x'} dx'$, fazendo b mover-se para c, e sua rotação $\gamma_{x'y'}/2$ faz b mover-se para $\bar{\mathrm{b}}$, como visto na Figura 5.31b. Da mesma forma, um segmento paralelo ao eixo y', terá elongamento $\varepsilon_{y'} dy'$ e rotação $\gamma_{x'y'}/2$.

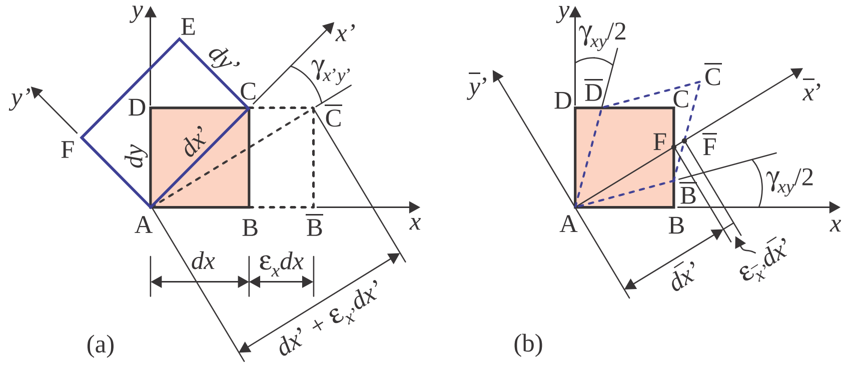


Figura 5.30: (a) Cisalhamento associado ao elongamento (b) elongamento associado a cisalhamento.

O que buscamos aqui é obter um conjunto de equações que determine os valores de $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$e $\gamma_{x'y'}$, em termos de ε_x, ε_y, γ_{xy} e θ, isto é,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Transformação}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} & \gamma_{x'y'}/2 & 0 \\ \gamma_{x'y'}/2 & \varepsilon_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.84}$$

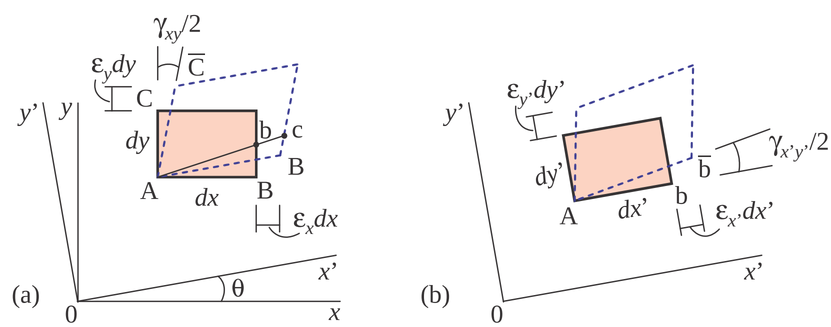


Figura 5.31: Deformações planas nos sistemas Oxy e $Ox'y'$.

5.7.2 Equação de transformação plana de EPD

Considere a Figura 5.32, onde temos um sistema de eixos $Ox'y'$ inclinado em relação ao sistema Oxy pelo ângulo θ. Uma porção de material que ocupe as posições do retângulo OARa na configuração indeformada do corpo, ocupará as posições do trapézio ODrd na configuração deformada. Observe que as deformações na figura foram grandemente exageradas par permitir a visualização. De fato, a teoria sendo vista nesse curso é de **pequenas deformações e rotações**, cujas características são listadas na seção 4.2.1, página 98.

A componente $\varepsilon_{x'}$de deformação é tal que define a componente do deslocamento AD ao longo do eixo x', isto é, AD$|_{x'} = \varepsilon_{x'}dx'$ como na Figura 5.32. Determinaremos $\varepsilon_{x'}dx'$somando as componentes dos segmentos AB, BC e CD ao longo de x'. Esses segmentos são definidos pelas componentes ε_x, ε_y e γ_{xy}:

$$AB = \varepsilon_x dx, \qquad BC = \varepsilon_y dy \qquad CD = \gamma_{xy} dy. \tag{5.85}$$

Os dois primeiros termos são fáceis de entender observando a região hachurada $OPAQ$ na Figura 5.32, que tem lados $dx \times dy$. O termo CD pode ser entendido com auxílio da figura inferior à direita, que mostra que γ_{xy} gera uma parcela de deslocamento horizontal, $\gamma_{xy}dy$, que define CD.

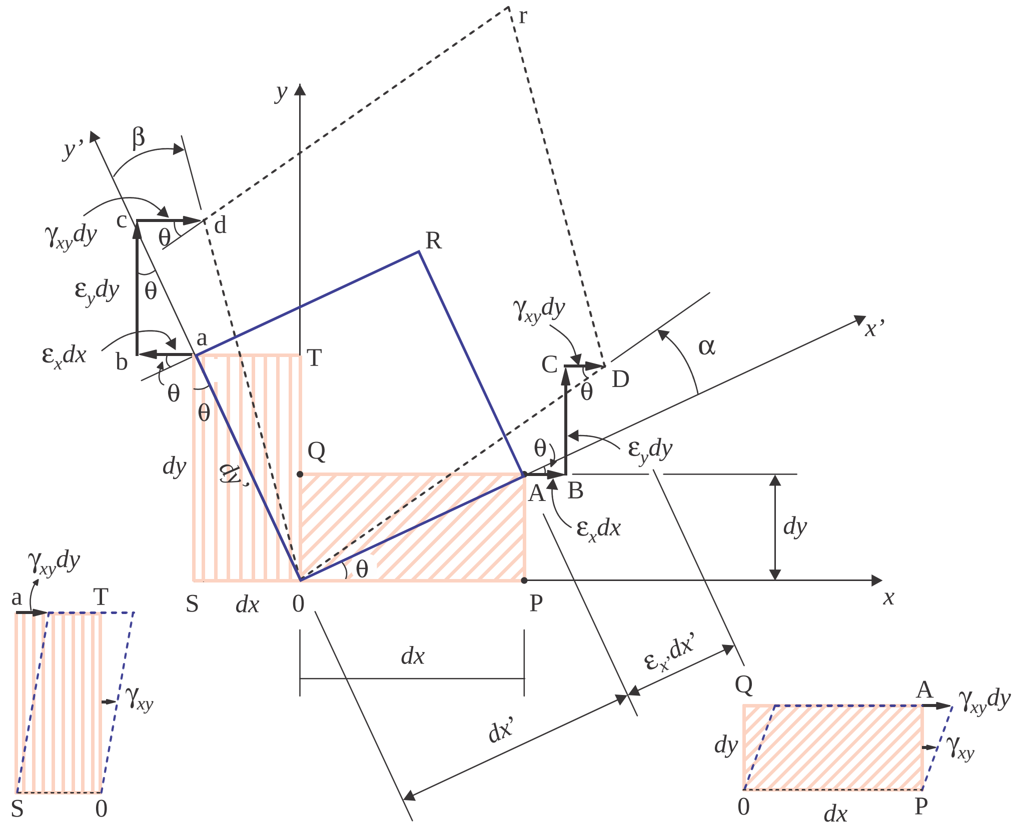


Figura 5.32: Deformações planas nos sistemas Oxy e $Ox'y'$.

Então, a parcela de AD na direção x' é obtida somando as parcelas de AB, BC e CD na direção x':

$$AD\mid_{x'} = AB\cos\theta + BC \text{ sen } \theta + CD\cos\theta,$$

isto é,

$$\varepsilon_{x'}dx' = \varepsilon_x dx\cos\theta + \varepsilon_y dy \text{ sen } \theta + \gamma_{xy}dy\cos\theta. \tag{5.86}$$

Observando o triângulo OPA nota-se que

$$\text{sen } \theta = \frac{dy}{dx'}, \qquad \cos\theta = \frac{dx}{dx'}, \tag{5.87}$$

Então (5.86) gera

$$\boxed{\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x\cos^2\theta + \varepsilon_y \text{sen}^2\ \theta + \gamma_{xy}\text{sen } \theta\cos\theta} \tag{5.88}$$

Para a dedução de $\varepsilon_{y'}$ seguimos procedimento análogo, observando o deslocamento do ponto a para a posição d na Figura 5.32. $\varepsilon_{y'}$ é tal que $ad\mid_{y'} = \varepsilon_{y'}dy'$. Então,

$$ad|_{y'} = ab \text{ sen } \theta + bc\cos\theta - cd \text{ sen } \theta. \tag{5.89}$$

Os segmentos são dados por

$$ab = \varepsilon_x dx, \qquad bc = \varepsilon_y dy \qquad \text{e} \qquad cd = \gamma_{xy}dy. \tag{5.90}$$

Essas relações são entendidas com auxílio do retângulo hachurado $OTaS$ de dimensões $dx \times dy$, que aparece em destaque com cisalhamento na figura inferior à esquerda da Figura 5.32. Usando (5.90) temos (5.89) como

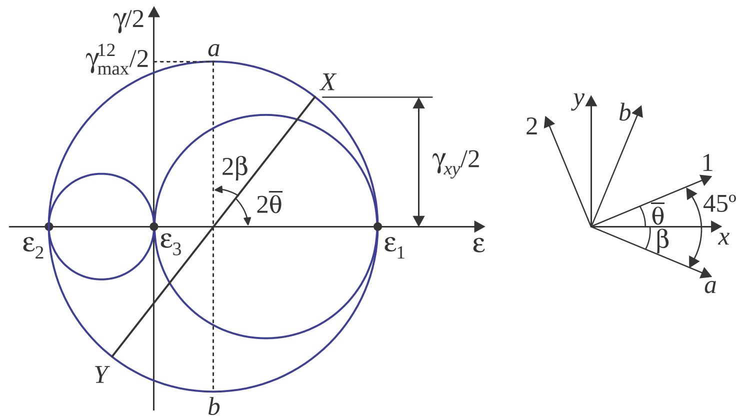


Figura 5.33: Círculo de Mohr de deformações.

Exemplo 5.7 - Deformações e tensões principais

Sabe-se que num certo ponto da superfície de um corpo as deformações são $\varepsilon_x = 250 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_y = 150 \cdot 10^{-6}$ e $\gamma_{xy} = 100 \cdot 10^{-6}$. (a) Determine as deformações e direções principais; (b) Esboce o círculo de Mohr de deformações; (c) Determine a deformação cisalhante máxima absoluta, $\gamma_{\max}^{abs}$; (d) Determine as tensões principais e $\tau_{\max}^{12}$. O material é aço, com módulo de elasticidade $E = 207$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

Solução:

O círculo de Mohr é obtido plotando os pontos $X = (\varepsilon_x; \gamma_{xy}/2) = (250;\ 50) \cdot 10^{-6}$ e $Y = (\varepsilon_y; -\gamma_{xy}/2) = (150;\ -50) \cdot 10^{-6}$. O círculo do plano xy é visto na Figura 5.34. Os valores das deformação principais do plano Oxy vem de (5.103):

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{array}\right\} = \left(\frac{250+150}{2}\right)10^{-6} \pm 10^{-6}\sqrt{\left(\frac{250-150}{2}\right)^2 + \left(\frac{100}{2}\right)^2} = \left\{\begin{array}{l}270,7 \cdot 10^{-6}\\ 129,3 \cdot 10^{-6}\end{array}\right. .$$

A terceira deformação principal não é nula como σ_3 no EPT, mas é dada em termos de ε_1 e ε_2 por (5.82):

$$\varepsilon_3 = \frac{-\nu}{(1-\nu)}(\varepsilon_1 +\ \varepsilon_2) = \frac{-0,3}{(1-0,3)}(270,7+129,3)\cdot 10^{-6} = -171,4 \cdot 10^{-6}.$$

As orientações dos eixos 1 e 2 são dadas por (5.102):

$$\text{tg } 2\overline{\theta} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x -\ \varepsilon_y} = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{(250-150)\cdot 10^{-6}} = 1 \quad \rightarrow \quad 2\overline{\theta} = 45^o.$$

Os eixos principais 1 e 2 são mostrados na Figura 5.34b, sendo que eixo 3 é obviamente normal ao plano O12. A altura do bloco diminui, uma vez que $\varepsilon_3 < 0$.)

Observando o círculo de Mohr vemos que a **deformação máxima absoluta** $\gamma_{\max}^{abs}$ ocorre no plano O13, e não no O12, i.e.,

$$\frac{\gamma_{\max}^{abs}}{2} = \frac{\varepsilon_1 -\ \varepsilon_3}{2} = \frac{270,7-(-171,4)}{2}\cdot 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma_{\max}^{abs} = 442,1 \cdot 10^{-6}}$$

As tensões principais vem de (5.81):

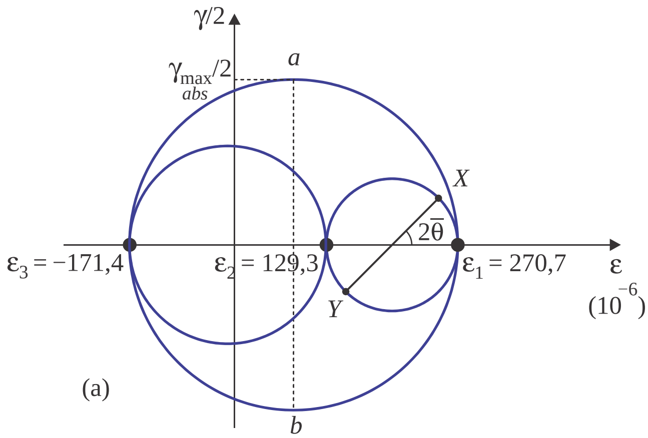


Figura 5.34: Círculo de Mohr de deformações do Exemplo 5.7 e elemento diferencial com as tensões e deformações principais.

$$
\left|\begin{array}{l}
\sigma_1 = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = \dfrac{207\cdot 10^9}{1-0,3^2}(270,7 + 0,3\times 129,3)\cdot 10^{-6} = 70,4\ \text{MPa}, \\
\sigma_2 = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) = \dfrac{207\cdot 10^9}{1-0,3^2}(129,3 + 0,3\times 270,7)\cdot 10^{-6} = 47,9\ \text{MPa}, \\
\tau_{12} = G\gamma_{12} = G\times 0 = 0, \\
\sigma_3 = 0.
\end{array}\right. \tag{5.104}
$$

Essas componentes de tensão também encontram-se ilustradas na Figura 5.34b, junto às deformações principais 1 e 2.

5.7.3 Comentários adicionais

Note que no exemplo partimos das deformações no sistema xy, obtivemos ε_1 e ε_2 e usamos a Lei de Hooke para chegar as tensões principais σ_1 e σ_2. Poderíamos ter seguido um outro caminho: usar a lei de Hooke para converter as deformações $x-y$ nas tensões $x-y$, e em seguida obter σ_1 e σ_2. Esses dois caminhos são mostrados da seguinte forma:

$$
\boxed{\begin{array}{cccc}
 & [\varepsilon^x] & \xrightarrow{\text{Lei de Hooke}} & \sigma^x & \\
\text{Transf. de deformações} & \downarrow & & \downarrow & \text{Transf. de tensões} \\
 & \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 & \xrightarrow{\text{Lei de Hooke}} & \sigma^1,\ \sigma^2 &
\end{array}} \tag{5.105}
$$

onde os índices "x" e "1" indicam os sistemas de eixos. No exemplo, a Lei de Hooke do EPT, eq.(5.81), produz

$$
\left|\begin{array}{l}
\sigma_x = \dfrac{E}{1-v^2}(\varepsilon_x + v\varepsilon_y) = \dfrac{207\cdot 10^9}{1-0,3^2}(250 + 0,3\cdot 150)\cdot 10^{-6} = 67,1\ \text{MPa}, \\
\sigma_y = \dfrac{E}{1-v^2}(\varepsilon_y + v\varepsilon_x) = \dfrac{207\cdot 10^9}{1-0,3^2}(150 + 0,3\cdot 250)\cdot 10^{-6} = 51,2\ \text{MPa}, \\
\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad\qquad\quad = \dfrac{207\cdot 10^9}{2(1+0,3)}\cdot 100\cdot 10^{-6} = 7,96\ \text{MPa}.
\end{array}\right.
$$

Agora buscamos as tensões principais:

$$
\sigma_{1,2} = \left(\frac{67,1+51,2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{67,1-51,2}{2}\right)^2 + 7,96^2} = \begin{cases} 70,4\ \text{MPa}, \\ 47,9\ \text{MPa}. \end{cases}
$$

que, como previsto, são os mesmos valores obtidos em (5.104), usando o caminho à esquerda de (5.105).

5.8 Extensômetros e rosetas

Extensômetros elétricos são transdutores de deformação que consistem, basicamente, num filamento metálico colado numa pequena região da superfície de um corpo em sua configuração indeformada. O filamento tem um comprimento, L_f, área de seção transversal A_f, e resistividade elétrica do material conhecida, de forma que sua resistência elétrica R é conhecida. Uma diferença de potencial elétrico V é aplicado nas extremidades do filamento em sua configuração indeformada. Quando o corpo é deformado, o filamento acompanha a deformação local e altera seu comprimento em ΔL_f e sua seção transversal em ΔA_f, o que resulta numa alteração ΔR de sua resistência elétrica. A variação da tensão elétrica é medida e obtém-se uma relação com a variação de comprimento. De fato, após as operações matemáticas pertinentes tem-se uma medição local da deformação específica média do corpo na direção do filamento, na pequena região em que o extensômetro foi colado.

Como as variações de resistência elétricas obtidas dessa forma são muito pequenas, o usual é a construção dos extensômetros com o filamento em "zig-zag" como na Figura 5.35a, de forma a aumentar o comprimento do filamento e assim melhorar a resolução da medição. O extensômetro como um todo é composto pelo filamento colado a uma película polimérica bastante fina que por sua vez serve de base na colagem à peça.

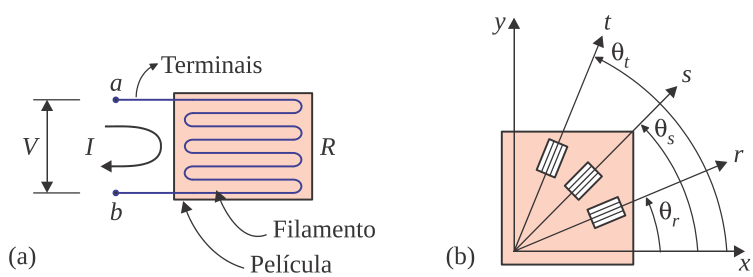


Figura 5.35: (a) Extensômetro simples, (b)roseta genérica de três extensômetros.

Para determinar o estado de deformações num ponto da superfície de um corpo precisamos especificar três componentes de deformação, ε_x, ε_y e γ_{xy}, em relação a um sistema de eixos cartesianos Oxy previamente determinado, tangentes à superfície. Torna-se necessário colar três extensômetros o mais próximos possível do ponto onde se deseja as deformações. Note que não há como medir diretamente uma deformação cisalhante, uma vez que extensômetros medem diretamente apenas deformações extensionais. Entretanto, como será visto a seguir, deformações cisalhantes são medidas, porém de forma indireta.

Como o processo de colar o extensômetro é bastante delicado, a tarefa de colar três deles perfeitamente alinhadas é evitada com o uso das chamadas **rosetas de deformação**. Uma roseta é constituída por dois ou mais extensômetros, montados em fábrica, numa mesma película, em orientações pré-definidas entre si. Dessa forma, a orientação relativa entre eles é bastante precisa e facilita o trabalho de montagem.

A Figura 5.35b mostra uma roseta hipotética com três extensômetros alinhados em três direções arbitrárias, θ_r, θ_s e θ_t. Com a experimentação, temos no ponto do corpo os três valores de deformação, ao longo dos eixos r, s e t, isto é, ε_r, ε_s e ε_t. Com isso, as componentes ε_x, ε_ye γ_{xy} vem da aplicação de $(5.88)_1$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_r\\ \varepsilon_s\\ \varepsilon_t\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc}\cos^2\ \theta_r & \operatorname{sen}^2\ \theta_r & \operatorname{sen}\ \theta_r\cos\theta_r\\ \cos^2\ \theta_s & \operatorname{sen}^2\ \theta_s & \operatorname{sen}\ \theta_s\cos\theta_s\\ \cos^2\ \theta_t & \operatorname{sen}^2\ \theta_t & \operatorname{sen}\ \theta_t\cos\theta_t\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}}. \tag{5.106}$$

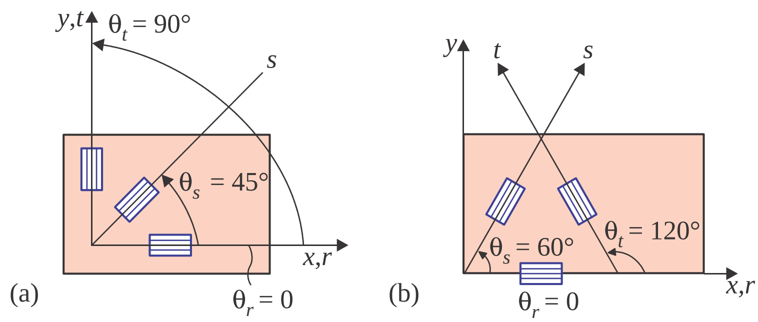


Figura 5.36: Extensômetros mais comuns: (a) roseta retangular 0°/45°/90° e (b) roseta em Δ com 0°/60°/120°.

Os valores de ε_x, ε_ye γ_{xy} são obtidos resolvendo o sistema algébrico. Por exemplo, as rosetas mais comuns são aquelas mostradas na Figura 5.36. Resolvendo (5.106) para essas rosetas temos

- Para a roseta $\theta_r/\theta_s/\theta_t = 0°/45°/90°$,

$$\boxed{\varepsilon_x = \varepsilon_r, \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_t, \qquad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_s - (\varepsilon_r + \varepsilon_t)} \tag{5.107}$$

- e para a roseta em delta: $\theta_r/\theta_s/\theta_t = 0°/60°/120°$,

$$\boxed{\varepsilon_x = \varepsilon_r, \qquad \varepsilon_y = \frac{2}{3}(\varepsilon_s + \varepsilon_t) - \frac{1}{3}\varepsilon_r, \qquad \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_s - \varepsilon_t)} \tag{5.108}$$

5.9 Exercícios

5.1 Considere o Exemplo 5.1, em que um ponto P de um corpo encontra-se sob estado plano de tensões com as componentes não nulas $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa e $\tau_{xy} = -25$ MPa, em relação ao sistema de coordenadas $Oxyz$. Determine as forças diferenciais que atuam num plano normal a um eixo x', pertencente a um sistema $Ox'y'z'$ definido por uma rotação plana $\theta = 60^o$ em torno do eixo z. Use o método do somatório de forças no elemento diferencial de volume como feito no Exemplo.

5.2 Repita o Exercício 1 para uma rotação plana $\theta = -30^o$.

5.3 Repita o Exercício 1 para uma rotação plana $\theta = -60^o$.

5.4 Repita o Exercício 1 para uma rotação plana $\theta = 90^o$.

Transformação de tensões planas

5.5 Construa um programa computacional para a transformação plana de estados planos de tensão, conforme as eqs. (5.17) ou (5.18). Programe em Fortran e em Mathematica ou Matlab. Tome como dados de entrada σ_x, σ_y e τ_{xy} e θ.

5.6 Considere o estado plano de tensões $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa e $\tau_{xy} = -25$ MPa, em relação ao sistema de coordenadas $Oxyz$. Determine as componentes de tensão em relação a um sistema de coordenadas $Ox'y'z'$ definido por uma rotação plana $\theta = 30^o$ em torno do eixo z. Esboce as tensões em ambos os sistemas de coordenadas em elementos volumétricos.

5.7 Repita o Exercício 6 para $\theta = 60^o$.

5.8 Repita o Exercício 6 para $\theta = -60^o$.

5.9 Repita o Exercício 6 para $\theta = 90^o$.

5.10 Considere o estado plano de tensões $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = 50$ MPa e $\tau_{xy} = 25$ MPa, em relação ao sistema de coordenadas $Oxyz$. Determine as componentes de tensão em relação a um sistema de coordenadas $Ox'y'z'$ definido por uma rotação plana $\theta = 30^o$ em torno do eixo z. Esboce as tensões em ambos os sistemas de coordenadas em elementos volumétricos.