

Capítulo 13

Tensões interlaminares e teoria de primeira ordem

Em razão das hipóteses de Kirchhoff, a teoria clássica de laminação apresenta uma série de limitações em seus resultados, como os seguintes:

1. Por definição, as tensões transversais σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são consideradas nulas na TCL (Teoria Clássica de Laminação). De fato, em geral essas tensões não são fisicamente nulas, e assumem valores importantes nas interfaces das lâminas nos compostos. Essas componentes de tensão são responsáveis por um dos modos de falha mais importantes e frequentes em laminados, a **delaminação**. Fisicamente, uma das causas dessas tensões consiste na diferença abrupta de propriedades elásticas entre lâminas contíguas. O efeito dessas tensões sobre laminados é, então, muito mais importante que sobre placas e cascas homogêneo-isotrópicas. Nos compostos, o módulo de elasticidade das resinas poliméricas tem um valor muito inferior ao módulo da fibra e mesmo do laminado como um todo. Uma vez que é a resina que transmite os esforços internos, o efeito do cisalhamento no laminado é o efeito somado das contribuições de cada região interlaminar ao longo da espessura.
2. A TCL também supõe uma distribuição linear de deslocamentos coplanares ao longo da espessura, contrariamente aos resultados analíticos obtidos por teorias mais sofisticadas.
3. A equação diferencial do problema para TCL, $\nabla^4 w = q/D$ para placas isotrópicas, permite a satisfação de apenas duas condições de contorno em cada ponto do contorno, o que impede completamente uma determinação precisa dos **efeitos de borda**, também chamada **camada limite** ou ainda *boundary layer*.
4. Também a TCL supõe um estado plano de tensões nas relações constitutivas, o que impede um cálculo preciso das tensões interlaminares.

Neste capítulo examinaremos a presença e o comportamento de dois problemas: (a) uma barra laminada sob tração e (b) o problema de flexão cilíndrica. Para ambos os problemas apresentaremos as soluções fornecidas pela TCL e pela teoria tridimensional de elasticidade. Adicionalmente, se desenvolverão as soluções fornecidas pela teoria de Mindlin para laminados semi-espessos. Esta é a teoria mais simples disponível, capaz de aproximar, até certo ponto, os efeitos de cisalhamento transversal num laminado sob flexão. Conforme se observará, embora essa teoria apresente melhores resultados que a TCL, para muitas aplicações ainda não é satisfatória. No Capítulo 19, apresentaremos as chamadas *teorias de ordem superior*, capazes de aproximar melhor os resultados.

Observamos que as soluções apresentadas aqui têm duplo objetivo. Primeiro, o de demonstrar o uso de alguns métodos clássicos de solução de problemas diferenciais. Além disso, as soluções podem, efetivamente, fornecer valores indicativos, úteis em etapas preliminares de projeto de componentes reais. Adicionalmente, esses valores são úteis na verificação de resultados obtidos por métodos numéricos de

uso geral, durante a qualificação de programas computacionais. Esse tipo de uso é comum em atividades de pesquisa e desenvolvimento. Formulações de elementos finitos, que permitem o tratamento mais preciso de problemas reais, complexos, são vistas no Capítulo 18.

13.1 Cisalhamento numa barra laminada sob tração

Pipes e Pagano [159] usaram o laminado mostrado na Figura 13.1 para analisar os efeitos das tensões cisalhantes. O laminado é simétrico angular, com um número par de lâminas do tipo $[\theta/-\theta/-\theta/\theta]$. A solução obtida pela TCL é comparada à solução dada pela teoria de elasticidade linear, ambas deduzidas a seguir.

13.1.1 Solução pela TCL

A solução pela TCL é obtida de forma bastante simples. Uma vez que $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{N} = \{N_x; 0; 0\}^T$, basta que se considere a rigidez extensional \mathbf{A} do laminado, cuja inversa fornece as deformações extensionais. Para esse tipo de laminado, $A_{16} = A_{26} = 0$, de forma que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \frac{N_x}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \begin{Bmatrix} A_{22} \\ -A_{12} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (13.1)$$

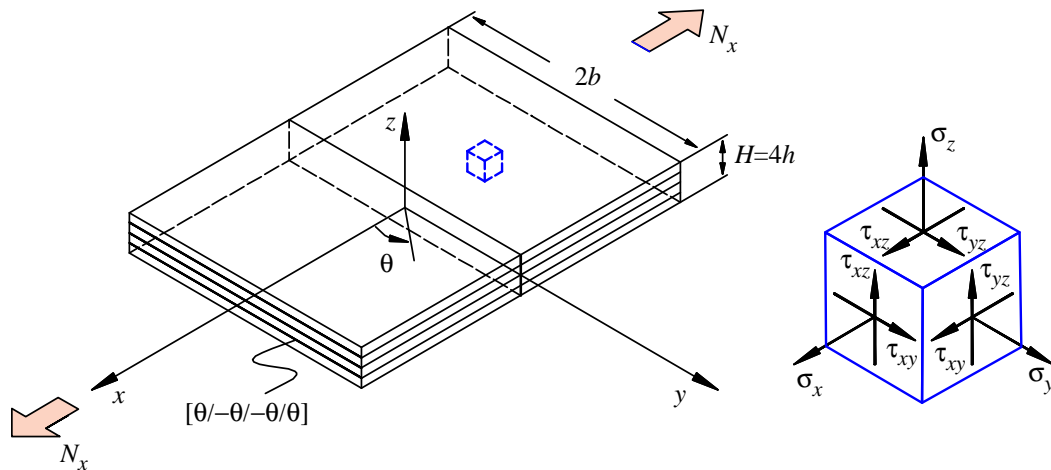


Figura 13.1: Problema de uma barra laminada simétrica sob tração. (cf. Pipes e Pagano [159].)

Porém, como as lâminas são angulares, as matrizes elásticas $\bar{\mathbf{Q}}^k$ são cheias, e as tensões coplanares em cada lâmina são

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{l_k} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}. \quad (13.2)$$

Consideremos a componente $\tau_{xy}^{l_k}$:

$$\tau_{xy}^{l_k} = \bar{Q}_{16} \varepsilon_x^o + \bar{Q}_{26} \varepsilon_y^o. \quad (13.3)$$

Uma vez que as deformações previstas pela TCL independem do ponto (x, y) , também a tensão cisalhante é suposta uniforme em toda a lâmina, inclusive nas bordas $y = \pm b$. Observe que, rigorosamente, do ponto de vista físico, temos como condições de contorno que $\tau_{xy}(x; \pm b; z) = 0$ para qualquer x, z . Esse tipo de condição de contorno, porém, não pode ser imposto numa teoria simplificada como a de Kirchhoff para placas delgadas isotrópicas ou na TCL, de forma que (13.3) apresenta valores não-nulos nas bordas.

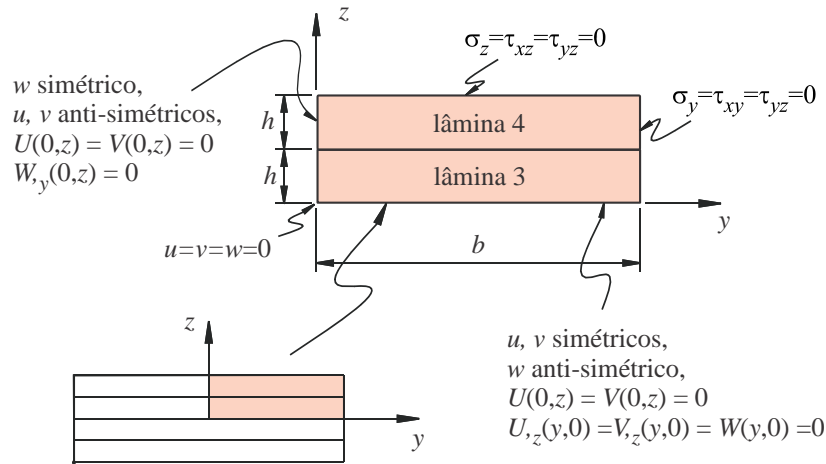


Figura 13.3: Região modelada pelo método de diferenças finitas, condições de contorno e simetria. (cf. Pipes e Pagano [159].)

13.1.2 Solução pela teoria de elasticidade linear

Pipes e Pagano [159] analisaram o problema da barra tracionada tratando-o como um estado triaxial de tensões em vez de tensões planas. A relação tensão-deformação para uma lâmina ortotrópica em relação aos eixos principais é dada pela eq.(4.3), página 74, enquanto nas direções xyz obtidas por uma rotação em torno do eixo z é dada por (4.77):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^x & C_{12}^x & C_{13}^x & 0 & 0 & C_{16}^x \\ & C_{22}^x & C_{23}^x & 0 & 0 & C_{26}^x \\ & & C_{33}^x & 0 & 0 & C_{36}^x \\ & & & C_{44}^x & C_{45}^x & 0 \\ & & & & C_{55}^x & 0 \\ sim. & & & & & C_{66}^x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (13.6)$$

As relações deformação-deslocamento usadas são as lineares tridimensionais dadas em (11.37). Considera-se que o laminado esteja submetido a um estado de extensão uniforme nas extremidades, de forma que se consideram todas as tensões independentes de x . O campo de deslocamentos é tomado como

$$u(x, y, z) = Kx + U(y, z), \quad v(x, y, z) = V(y, z), \quad w(x, y, z) = W(y, z). \quad (13.7)$$

Note que, exceto pelo termo Kx , todo o problema é plano, em termos apenas de y e z . Desta forma, as relações deformação-deslocamento tornam-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= K, & \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial U}{\partial z}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \quad (13.8)$$

e, como $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(y, z)$, as equações de equilíbrio provenientes de (11.38) se reduzem a

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (13.9)$$

Substituindo (13.7) em (13.8) e estas em (13.6) e finalmente estas últimas em (13.9), obtêm-se as três equações de equilíbrio em termos das três funções incógnitas U , V e W para uma lâmina k genérica:

$$\begin{cases} C_{66}^x U_{,yy} + C_{55}^x U_{,zz} + C_{26}^x V_{,yy} + C_{45}^x V_{,zz} + (C_{36}^x + C_{45}^x) W_{,yz} = 0, \\ C_{26}^x U_{,yy} + C_{45}^x U_{,zz} + C_{22}^x V_{,yy} + C_{44}^x V_{,zz} + (C_{23}^x + C_{44}^x) W_{,yz} = 0, \\ (C_{45}^x + C_{36}^x) U_{,yz} + (C_{44}^x + C_{23}^x) V_{,yz} + C_{44}^x W_{,yy} + C_{33}^x W_{,zz} = 0. \end{cases} \quad (13.10)$$

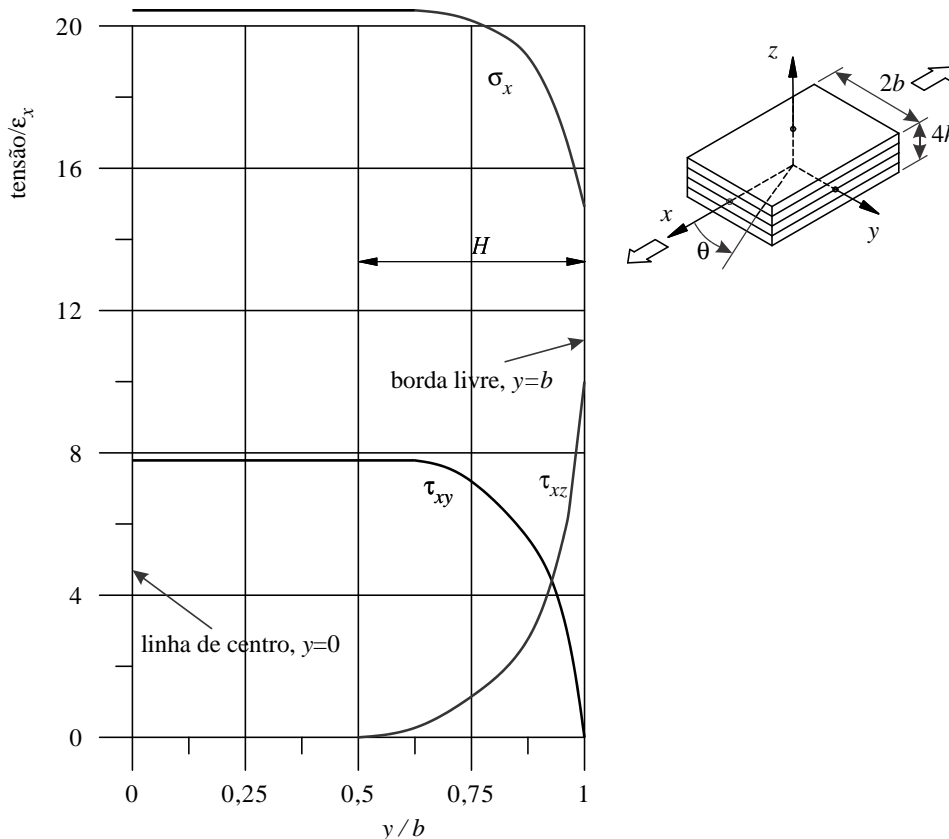


Figura 13.4: Barra laminada sob tração simples como nas Figuras 13.1 e 13.3. Tensões [MPa] na interface $z = h$ para $b = 8h = 2H$. Laminado de grafite-epóxi, $[45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / 45^\circ]$. (Pipes e Pagano [159].) Solução da TCL: $\sigma_x/\epsilon_x = 20,4$ GPa, $\tau_{xy}/\epsilon_x = 7,93$ GPa.

Este é um sistema acoplado de equações diferenciais de segunda ordem, linear, homogêneo, que aparentemente não possui solução analítica. Pipes e Pagano [159] buscaram então uma solução aproximada pelo *método de diferenças finitas*. Por causa da simetria da seção transversal, apenas um quarto dela tem que ser modelado. A Figura 13.3 indica a região modelada, as condições de contorno e as linhas de simetria. Os resultados numéricos obtidos por Pipes e Pagano foram obtidos para um laminado de quatro lâminas de grafite-epóxi com¹

$$\begin{aligned} E_1 &= 20,0 \cdot 10^6 \text{ psi}, & G_{12} &= G_{23} = G_{31} = 0,85 \cdot 10^6 \text{ psi}, \\ E_2 &= E_3 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ psi}, & \nu_{12} &= \nu_{23} = \nu_{31} = 0,21. \end{aligned} \quad (13.11)$$

As dimensões da seção foram tais que $b = 8h$, isto é, $2b = 4H$, onde H é a espessura do laminado e h da lâmina. A Figura 13.4 mostra a variação das tensões ao longo de y , na interface $z = h$ entre a terceira e a quarta lâmina, para uma sequência $[45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / 45^\circ]$.

Observe que na região central da barra a solução é como previsto na TCL, com σ_x e τ_{xy} aproximadamente constantes, e τ_{xz} nula. Próximo às bordas, porém, existe uma região onde τ_{xy} vai a zero, σ_x diminui e τ_{xz} cresce. Resultados obtidos para várias outras geometrias mostram que essa região de perturbação, geralmente denominada **camada limite**, tem dimensões sempre próximas do valor da espessura H do laminado. Em outros tipos de problemas, como na torção de barras, essa região se

¹Excepcionalmente usamos aqui valores no “sistema” inglês de unidades, uma vez que estas foram as unidades usadas por Pipes e Pagano em seu trabalho.

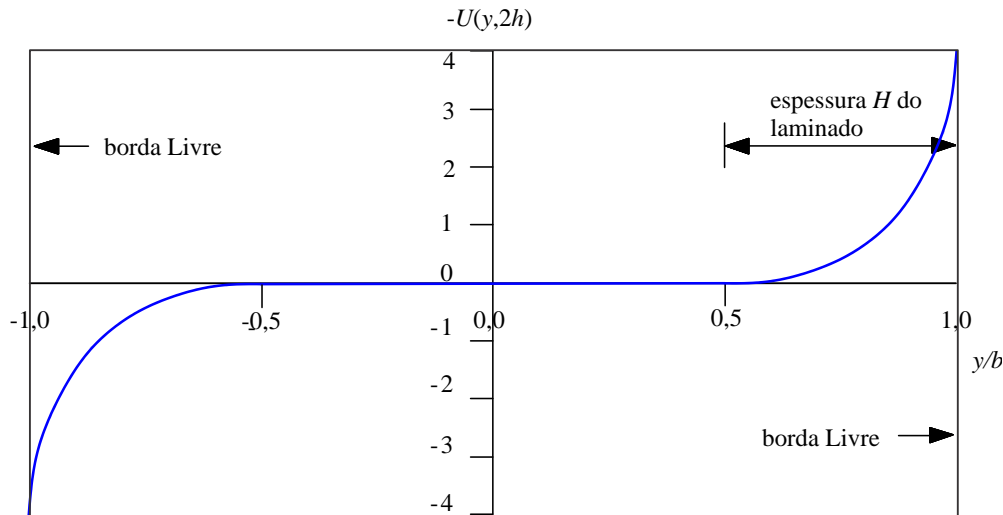


Figura 13.5: Distribuição dos deslocamentos axiais $U(y, z)$ ao longo de y na face da barra, $z = \pm 2h$. (Pipes e Daniels, [158]).

aproxima de $2H$. Observe que, contrariamente ao senso comum, mesmo num problema simples como este, de uma barra tracionada uniformemente ao longo de x , os deslocamentos axiais não são uniformes ao longo da seção transversal. Na Figura 13.5 a solução de Pipes e Pagano [159] é mostrada para a função $U(y, 2h)$ na superfície superior da barra. Como visto, $u(0, y, 2h)$ é aproximadamente nulo em toda a região central, como suposto na TCL, mas desvia-se sensivelmente na camada limite.

13.2 Cisalhamento em flexão

No Capítulo 11 apresentamos o equacionamento para a flexão de laminados semi-espessos, isto é, em que considerávamos a presença de um cisalhamento transversal constante ao longo da espessura, como indicado por (11.55). As relações cinemáticas (11.41) eram então lineares ao longo da coordenada z , o que torna aquela uma teoria de primeira ordem. Logo após as equações de movimento terem sido obtidas, eqs.(11.38), o equacionamento foi simplificado usando as hipóteses de Kirchhoff para placas delgadas e soluções analíticas para diversos casos foram apresentadas no Capítulo 12. Entretanto, como visto na Seção 13.1, embora a TCL seja capaz de fornecer respostas razoáveis no interior dos laminados, é incapaz de estimar as tensões interlaminares que se desenvolvem essencialmente nas regiões de borda. Torna-se necessário voltar a atenção à teoria de primeira ordem em busca da solução interlaminar. Como será visto neste capítulo, essa teoria também obtém sucesso apenas parcial neste campo, requerendo outras formulações, como as teorias de ordem superior vistas no Capítulos 19.

13.2.1 Teoria de Mindlin para laminados

O tratamento para considerar cisalhamento transversal constante ao longo da espessura para placas isotrópicas homogêneas foi primeiramente proposto por Reissner [168] e por Mindlin [137]. Aqueles trabalhos foram inicialmente estendidos para placas de materiais compostos por Yang, Norris e Stavsky [223], e posteriormente modificados por Whitney e Pagano [217].

O equacionamento fundamental foi desenvolvido na Seção 11.2 e é sumarizado aqui para maior clareza. Primeiramente, como se trata de uma teoria de primeira ordem, supõe-se que os deslocamentos variem linearmente ao longo da espessura, como em (11.41):

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u^o(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) = v^o(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t). \end{cases} \quad (13.12)$$

As relações deformação-deslocamento lineares resultam nas relações

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_x, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z\kappa_y, & \gamma_{xz} &= \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}, & \gamma_{yz} &= \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y},\end{aligned}\quad (13.13)$$

onde ε_x^0 , ε_y^0 e γ_{xy}^0 são as deformações normais coplanares da superfície de referência do laminado, κ_x , κ_y e κ_{xy} são as variações de curvatura, γ_{xz} e γ_{yz} são as deformações cisalhantes transversais. Essas deformações são relacionadas aos deslocamentos por

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial x}, & \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v^0}{\partial y}, & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}, \\ \kappa_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}.\end{aligned}\quad (13.14)$$

Usando as definições dos esforços normais, de momentos e cortantes, obtêm-se as relações constitutivas para o laminado, eqs.(11.56) e (11.61):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = k \sum_{\kappa=1}^N h_k \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (13.15)$$

A segunda igualdade pode ser posta na forma

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E}\gamma_c. \quad (13.16)$$

As equações do movimento em termos dos esforços são as cinco equações (11.51), ou equivalentemente (11.52), depois de eliminados os esforços cortantes. A substituição das relações cinemáticas (13.14) nas relações constitutivas (13.15) e destas nas equações de equilíbrio permitem a determinação destas em termos dos deslocamentos. Para um **laminado simétrico** temos que $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ em (13.15) e a inércia $\rho_1 = 0$ definida em (11.45), de forma que as equações do movimento assumem a seguinte forma:

$$\Rightarrow A_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2},$$

$$\Rightarrow A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2},$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow & \left[E_{55} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + E_{45} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + E_{44} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \\ & + \left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + q = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow & D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \\ & + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - \left[E_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + E_{45} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \\ + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - \left[E_{45} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + E_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Observe que as equações são desacopladas mesmo com a presença do cisalhamento transversal: as duas primeiras envolvem apenas deslocamentos de membrana, e as últimas, flexão.

As **condições de contorno** são aquelas listadas em (11.53) ou (16.29)–(16.33). Nas Seções 13.4 e 13.5 consideraremos com certo cuidado a determinação do fator de cisalhamento k presente em (13.15).

13.2.2 Flexão cilíndrica de laminados ortotrópicos – Modelo de 1ª ordem

Consideramos aqui o problema de flexão cilíndrica de um laminado ortotrópico, não necessariamente simétrico, com lâminas orientadas a 0° e 90° . Nesta seção buscaremos a solução usando as hipóteses do modelo de primeira ordem, também chamado de Mindlin-Reissner, conforme apresentado por Whitney e Pagano [217]. Nas seções seguintes mostraremos a solução do mesmo problema usando uma teoria mais simples, a TCL, e também usando uma formulação mais completa, a teoria de elasticidade, conforme apresentada por Pagano [149].

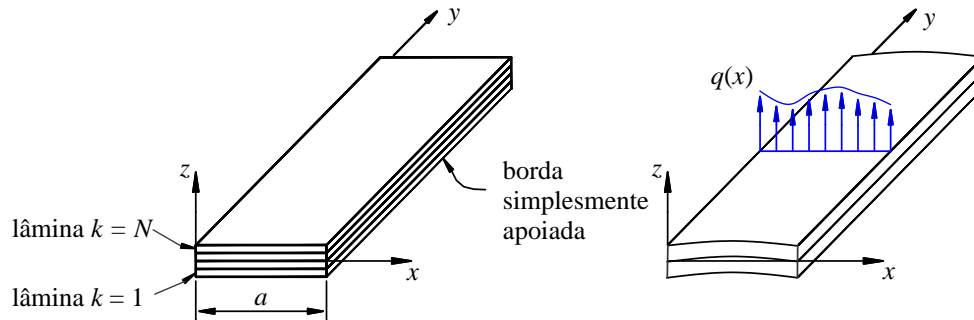


Figura 13.6: Flexão cilíndrica numa placa semi-infinita ortotrópica.

A placa é infinitamente longa na direção y , conforme a Figura 13.6, submetida a uma carga transversal $q = q(x)$ independente de y . Consideramos um laminado como aquele definido na eq.(6.32), com as lâminas orientadas ao longo dos eixos x e y , tal que $A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ e $B_{22} = -B_{11}$. Uma vez que a placa é infinita e a carga independe de y , na realidade todas as funções são independentes de y , isto é, em todas as equações diferenciais podemos fazer $\partial(\cdot)/\partial y = 0$. Com as bordas $x = 0$ e $x = a$ simplesmente apoiadas, a configuração deformada é uma superfície cilíndrica, de tal forma que

$$\begin{aligned} v^o(x, y, t) = 0, \quad u^o = u^o(x, t), \quad w = w(x, t), \\ \psi_y(x, y, t) = 0, \quad \psi_x = \psi_x(x, t). \end{aligned} \quad (13.18)$$

Assim, as equações de movimento (11.51) podem ser linearizadas e colocadas na forma

$$M_x(x) = B_{11}\varepsilon_x^o + D_{11}\kappa_x = -(B_{11}U_m + D_{11}\Psi_m)p_m \operatorname{sen} p_m x. \quad (13.32)$$

Eliminando $\operatorname{sen} p_m x$ de (13.31) e (13.32), temos:

$$\sigma_x^{lk}(x, z) = \frac{\overline{Q}_{11}^k(B_{11} - zA_{11})M_x}{\Delta} \left[\frac{q_m}{p_m^3(B_{11}U_m + D_{11}\Psi_m)} \right].$$

Substituindo as expressões para U_m e Ψ_m de (13.24), pode-se facilmente verificar que o termo entre chaves é igual a -1 , de forma que

$$\boxed{\sigma_x^{lk}(x, z) = -\frac{\overline{Q}_{11}^k(B_{11} - zA_{11})M_x}{\Delta}, \quad \text{com} \quad \Delta = A_{11}D_{11} - B_{11}^2} \quad (13.33)$$

Como será visto na Seção 13.2.3, esta é a mesma distribuição de tensões obtida pela TCL. Isto ocorre porque, em ambos os casos, a distribuição de deslocamentos é linear ao longo de z . Uma solução mais acurada para as tensões coplanares só pode ser obtida com o uso de teorias de ordem superior. Observe que essa igualdade de distribuições independe do tipo de carregamento aplicado, uma vez que a dedução usou um harmônico qualquer do carregamento distribuído.

13.2.3 Flexão cilíndrica de laminados ortotrópicos – TCL

Consideremos agora o mesmo problema ilustrado na Figura 13.6 e busquemos a sua solução ignorando o cisalhamento transversal. Aqui apresentamos apenas a solução para a placa ortotrópica, $A_{16} = A_{16} = 0$ etc. A solução para a placa anisotrópica também é possível, pelo mesmo método, e está sumarizada em [213]. As hipóteses feitas na Seção 13.2.2 ainda se aplicam, com as eqs.(13.18) substituídas por

$$u^o = u^o(x, t), \quad v^o(x, y, t) = 0, \quad w = w(x, t), \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = 0. \quad (13.34)$$

As equações de movimento são obtidas das eqs.(11.87), que para o caso de placa ortotrópica, e usando (13.34), simplificam-se para

$$\begin{cases} A_{11} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \rho_o \frac{\partial^2 u^o}{\partial t^2}, \\ 0 = 0, \\ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u^o}{\partial x^3} = q(x, t) - \rho_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (13.35)$$

As condições de contorno para as bordas simplesmente apoiadas são basicamente as mesmas expressões vistas em (13.21), mas devem ser reescritas na forma:

$$\begin{cases} w(x) = 0, \\ N_x(x) = 0 \longrightarrow A_{11} \frac{\partial u^o}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ M_x(x) = 0 \longrightarrow B_{11} \frac{\partial u^o}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \end{cases} \quad \text{para } x = 0 \text{ e } x = a. \quad (13.36)$$

Para o caso dinâmico, as duas equações (13.35) permanecem acopladas, mas para um caso estático elas podem facilmente ser desacopladas. Diferenciando a primeira equação uma vez e substituindo-a na segunda elimina-se u^o , o que resulta num sistema desacoplado na forma

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{A_{11}q(x)}{\Delta}, \\ \frac{\partial^3 u^o}{\partial x^3} = \frac{B_{11}q(x)}{\Delta} = \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \end{cases} \quad \text{com } \Delta = (A_{11}D_{11} - B_{11}^2). \quad (13.37)$$

Estas são equações diferenciais ordinárias. A solução pode ser obtida simplesmente integrando essas

13.2.4 Flexão cilíndrica de laminados ortotrópicos – Solução de elasticidade

Consideramos o problema da Figura 13.6, cuja solução foi mostrada nas seções 13.2.2 e 13.2.3 para as teorias de primeira ordem e a TCL, respectivamente. Pagano [149] desenvolveu a solução exata desse problema a partir das equações tridimensionais da elasticidade linear, de forma a avaliar a precisão das teorias simplificadas. A solução de Pagano para laminados ortotrópicos é sumarizada aqui, e a sua extensão para o caso de laminados angulares pode ser vista em Pagano [152]. (O leitor pode passar diretamente à seção seguinte, onde se comparam os resultados numéricos obtidos pelas diferentes teorias, sem prejuízo de continuidade do texto.)

Pagano considera que o corpo esteja num *estado plano de deformação* em relação ao plano x - z . O carregamento $q(x)$ consiste numa tração aplicada na face superior. Assim, em lugar de se trabalhar no plano x - z , trabalha-se no plano x - z , pois as funções independem de y . Podemos tomar a relação constitutiva (4.6), página 74, para um material ortotrópico, e aplicá-la a uma lâmina, com a restrição de que

$$\varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0. \quad (13.47)$$

Disso resulta

$$\begin{cases} \varepsilon_x = S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{13}\sigma_z, \\ 0 = S_{12}\sigma_x + S_{22}\sigma_y + S_{23}\sigma_z, \\ \varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y + S_{33}\sigma_z, \\ \gamma_{xz} = S_{55}\tau_{xz}. \end{cases} \quad (13.48)$$

Pode-se isolar σ_y da segunda equação e eliminá-lo das outras, donde resulta

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \left(S_{11} - \frac{S_{12}^2}{S_{22}} \right) \sigma_x + \left(S_{13} - \frac{S_{12}S_{23}}{S_{22}} \right) \sigma_z, \\ \varepsilon_z = \left(S_{13} - \frac{S_{23}S_{12}}{S_{22}} \right) \sigma_x + \left(S_{33} - \frac{S_{23}^2}{S_{22}} \right) \sigma_z, \\ \gamma_{xz} = S_{55}\tau_{xz}. \end{cases} \quad (13.49)$$

Essas relações podem ser postas numa forma matricial, como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{l_k} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{13} & 0 \\ R_{13} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & R_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{l_k}, \quad (13.50)$$

onde os R_{ij} são coeficientes de flexibilidade reduzidos para deformações planas, definidos por (13.49), ou ainda, de forma sintética, por

$$R_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i2}S_{j2}}{S_{22}}, \quad i, j = 1, 3, 5. \quad (13.51)$$

A relação constitutiva plana (13.50) é complementada pela segunda equação (13.48) na forma

$$\sigma_y = -\frac{S_{12}\sigma_x + S_{23}\sigma_z}{S_{22}}. \quad (13.52)$$

As demais equações que definem o problema são as **equações de equilíbrio** obtidas de (2.16), que se reduzem a

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \tau_{xz,z} = 0, \\ \sigma_{z,z} + \tau_{xz,x} = 0, \end{cases} \quad (13.53)$$

e as **relações deformação-deslocamento**,

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x}, \quad \varepsilon_z(x, z) = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz}(x, z) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (13.54)$$

e finalmente as **condições de contorno**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z(x, H/2) = q(x), \\ \sigma_z(x, -H/2) = \tau_{xz}(x, \pm H/2) = 0, \\ \sigma_x(0, z) = \sigma_x(a, z) = 0, \\ w(0, z) = w(a, z) = 0. \end{array} \right. \quad (13.55)$$

Além das condições de contorno, será também necessário definir *condições de continuidade* de trações e deslocamentos nas interfaces entre as lâminas. Como antes, seguimos a convenção de numerar as lâminas de baixo para cima, como definido na Figura 6.4, página 129. A superfície superior da lâmina k tem índice k e cota z_k , para $k = 1$ a N . A face inferior do laminado tem cota $z_0 = -H/2$.

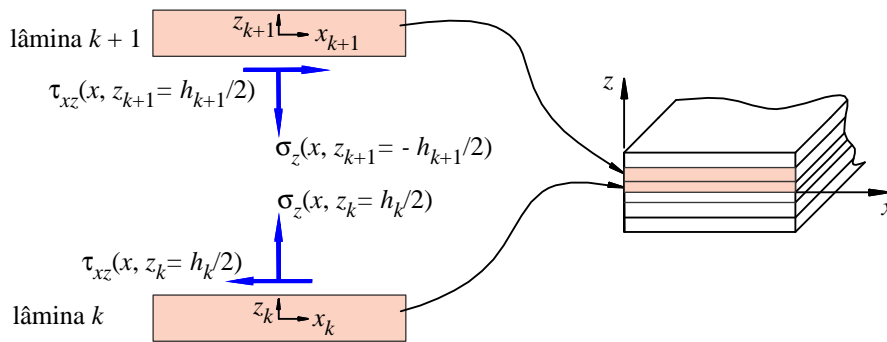


Figura 13.7: Tensões interlaminares entre as lâminas k e $k + 1$ e sistema local de coordenadas $x_k - y_k - z_k$.

Define-se também um sistema local de eixos coordenados (x_k, y_k, z_k) em cada lâmina, com origem em $x = 0$ e $z = \bar{z}_k$, isto é, na superfície média da lâmina k , como ilustrado na Figura 13.7. Desta forma as condições de continuidade numa interface genérica são

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z^{l_k}(x, z_k = h_k/2) = \sigma_z^{l_{k+1}}(x, z_{k+1} = -h_{k+1}/2), \\ \tau_{xz}^{l_k}(x, z_k = h_k/2) = \tau_{xz}^{l_{k+1}}(x, z_{k+1} = -h_{k+1}/2), \\ u^k(x, z_k = h_k/2) = u^{k+1}(x, z_{k+1} = -h_{k+1}/2), \\ w^k(x, z_k = h_k/2) = w^{k+1}(x, z_{k+1} = -h_{k+1}/2), \end{array} \right. \quad (13.56)$$

para $k = 1, 2, \dots, N - 1$. O **carregamento** $q(x)$ é expandido em série de Fourier como em (13.22), que colocamos na forma

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \text{sen } p_m x, \quad (13.57)$$

com $p_m = m\pi/a$. Esse carregamento é aplicado na superfície superior do laminado. A solução do problema de valor no contorno, descrita pelas equações (13.50) e (13.52)–(13.56), é dada por Pagano como

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{l_k} = f_k''(z) \text{sen } p_m x, \\ \sigma_z^{l_k} = -p_m^2 f_k(z) \text{sen } p_m x, \\ \tau_{xz}^{l_k} = -p_m f_k'(z) \cos p_m x, \end{array} \right. \quad \text{para } z \in \left[\frac{-h_k}{2}; \frac{h_k}{2} \right], \quad (13.58)$$

onde f_k'' indica a segunda derivada de f_k . Estas equações satisfazem identicamente as equações de

resultam num conjunto de $4N$ equações algébricas em termos das $4N$ constantes F_{jk} . A solução desse sistema define a solução em (13.65) e (13.66). Essa solução não funciona para o caso de uma lâmina isotrópica, como no núcleo de uma placa sanduíche ou em casos onde $b_k = 0$ em (13.63), pois a solução da equação (13.60) não mais é dada por (13.61). Pagano [149] indica essa solução como

$$f_k(z) = (F_{1k} + F_{2k}z) e^{m_{1k}z} + (F_{3k} + F_{4k}z) e^{-m_{1k}z} \quad \text{para } z \in \left[\frac{-h_k}{2}; \frac{h_k}{2} \right], \quad (13.67)$$

onde m_{1k} é dado por (13.62) com $b_k = 0$. As tensões em cada lâmina k são dadas por (13.58), e os deslocamentos apresentam-se na forma

$$\begin{aligned} u_k &= [-R_{11}^k f_k''(z) + R_{13}^k p_m^2 f_k(z)] \frac{\cos p_m x}{p_m}, \\ w_k &= [R_{13}^k f_k'(z) - R_{33}^k \int f_k(z) dz] \sin p_m x \quad \text{para } z \in \left[\frac{-h_k}{2}; \frac{h_k}{2} \right]. \end{aligned} \quad (13.68)$$

A integral na segunda equação é indefinida, realizada sobre a função dada em (13.67).

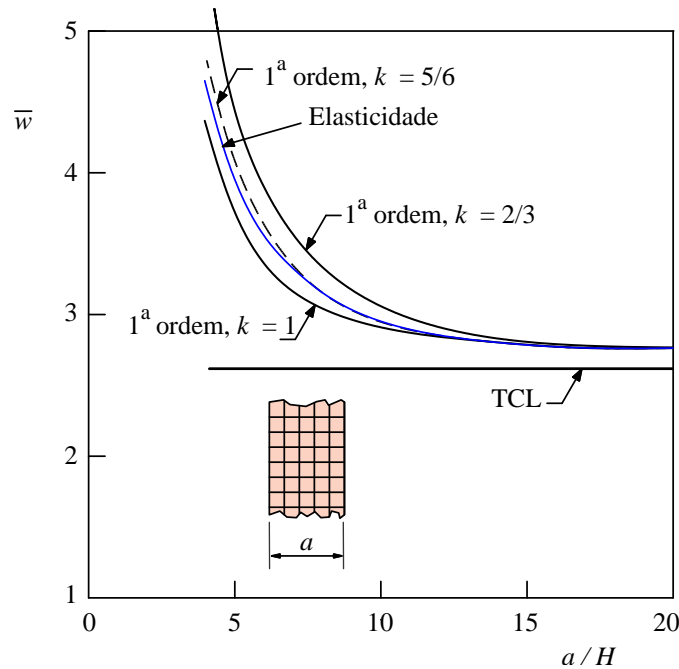


Figura 13.8: Comparação de deflexão máxima w_{\max} obtida pela teoria clássica de laminação (TCL) e pela teoria de primeira ordem, e a solução exata de elasticidade para laminado semi-infinito $[0^\circ/90^\circ]$. $\bar{w} = 10^3 w_{\max} E_2 H^3 / (q_{11} a^4)$. ([213] e [217].)

13.2.5 Flexão cilíndrica – Comparação de resultados

Whitney e Pagano [217] e [213] apresentam resultados comparativos para a solução do problema de flexão cilíndrica da placa semi-infinita ortotrópica, usando as três teorias: a TCL, a teoria de primeira ordem e a teoria exata de elasticidade de Pagano, descritas nas seções 13.2.2 a 13.2.4. Foram usados dois laminados, um não-simétrico com $[0^\circ/90^\circ]$ e um simétrico $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com lâminas de grafite/epóxi com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} E_1 &= 25 \cdot 10^6 \text{ psi}, & G_{12} &= 0,5 \cdot 10^6 \text{ psi}, & \nu_{12} &= \nu_{23} = 0,25. \\ E_2 &= 1 \cdot 10^6 \text{ psi}, & G_{23} &= 0,2 \cdot 10^6 \text{ psi}, & & \end{aligned} \quad (13.69)$$

O carregamento consistiu apenas no primeiro harmônico, $q(x) = q_1 \sin(\pi x/a)$. A Figura 13.8

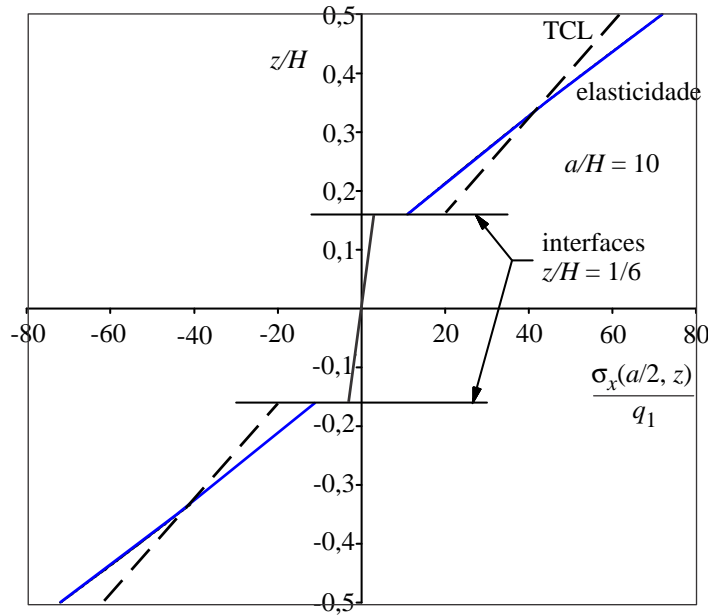


Figura 13.10: Tensões σ_x ao longo da espessura, para $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $a/H = 10$ (Pagano [149]).

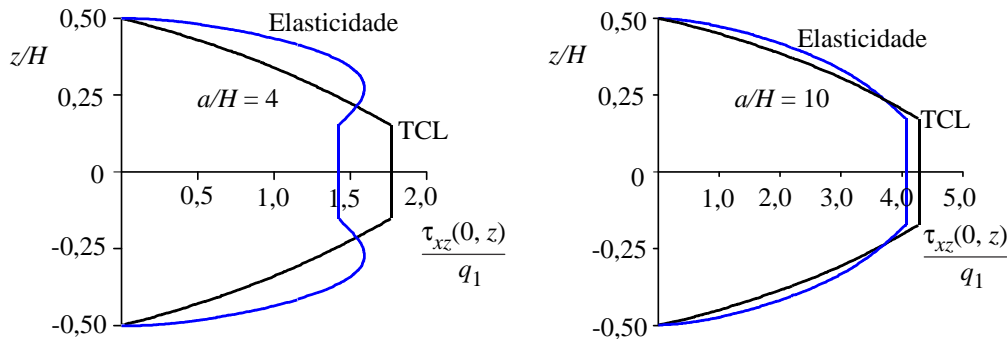


Figura 13.11: Tensões cisalhantes τ_{xz} para $a/H = 4$ e 10 , $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. (Pagano [149].)

deste problema é fornecida por Dobyns [68]. O carregamento $q(x, y)$, a deflexão transversal $w(x, y)$ e as rotações dos segmentos normais $\psi_x(x, y)$ e $\psi_y(x, y)$ são expandidos em série por

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \tag{13.70}$$

e

$$\left\{ \begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \\ \psi_x(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \\ \psi_y(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{ymn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right. \tag{13.71}$$

A origem do sistema de coordenadas está no vértice da placa, que tem dimensões $a \times b$. Estas equações satisfazem as condições de contorno, que neste caso são

$$\left\{ \begin{aligned} w(x, y) &= 0, \\ M_x(x, y) &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = a, \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{aligned} w(x, y) &= 0, \\ M_y(x, y) &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{em } y = 0 \text{ e } y = b. \tag{13.72}$$

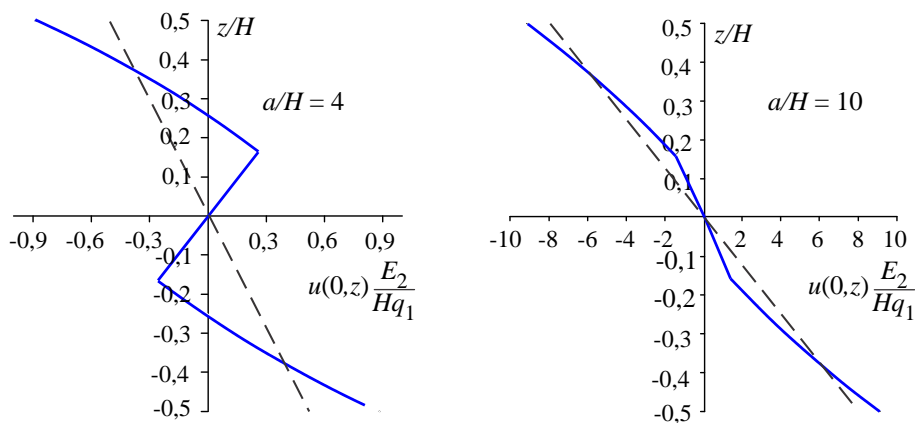


Figura 13.12: Deslocamento u para $a/H = 4$ e 10 , $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. (Pagano [149]).

Como o laminado é simétrico, os deslocamentos coplanares u^o e v^o são nulos. As condições de contorno (13.72) podem ser simplificadas no seguinte. Consideremos a condição $M_x(x, y) = 0$ nas bordas $x = 0$ e $x = a$. A relação constitutiva para um laminado ortotrópico será

$$M_x(x, y) = D_{11}\psi_{x,x} + D_{12}\psi_{y,y} = 0.$$

Ao longo de toda a borda temos $\psi_y = 0$, o que significa que $\psi_{y,y} = 0$. Logo, a segunda condição (13.72) pode ser substituída por $\psi_{x,x} = 0$. O processo pode ser repetido para a quarta condição, de forma que (13.72) apresenta-se na forma

$$\begin{cases} w(x, y) = 0, \\ \psi_{x,x}(x, y) = 0, \end{cases} \text{ em } x = 0 \text{ e } x = a, \quad \text{e} \quad \begin{cases} w(x, y) = 0, \\ \psi_{y,y}(x, y) = 0, \end{cases} \text{ em } y = 0 \text{ e } y = b \quad (13.73)$$

A substituição de (13.71) na forma estática obtida a partir das três últimas equações (13.17) resulta num sistema algébrico para cada harmônico mn na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{xmn} \\ \Psi_{ymn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \end{Bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} L_{11} = D_{11}p_m^2 + D_{66}p_n^2 + E_{55}, \\ L_{12} = (D_{12} + D_{66})p_m p_n, \\ L_{13} = E_{55}p_m, \quad L_{23} = E_{44}p_n, \\ L_{22} = D_{66}p_m^2 + D_{22}p_n^2 + E_{44}, \\ L_{33} = E_{55}p_m^2 + E_{44}p_n^2. \end{cases} \quad (13.74)$$

E_{44} e E_{55} são definidos em (13.15) ou em (11.61), página 305, e

$$p_m = \frac{m\pi}{a} \quad \text{e} \quad p_n = \frac{n\pi}{b}. \quad (13.75)$$

A solução pode facilmente ser obtida como:

$$\{\Psi_{xmn}, \Psi_{ymn}, W_{mn}\} = \frac{q_{mn}}{\det} \{L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13}, L_{12}L_{13} - L_{11}L_{23}, L_{11}L_{22} - L_{12}^2\} \quad (13.76)$$

e \det é o determinante da matriz em (13.75). Coeficientes q_{mn} para carga uniforme, carga concentrada e carga uniformemente distribuída sobre uma região da placa são dados nas eqs.(12.12)–(12.16). Sem dúvida, outros casos de carga podem ser calculados usando (12.4).

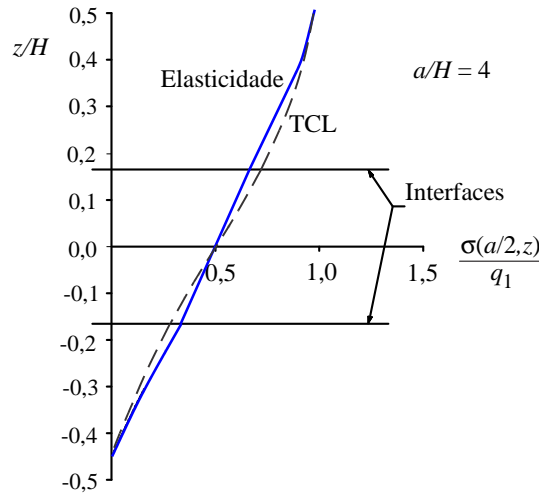


Figura 13.13: Tensões σ_z ao longo da espessura, para $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $a/H = 4$ (Pagano [149]).

13.4 Fator de cisalhamento k para placa ortotrópica homogênea

Diversos valores para o fator de cisalhamento k têm sido apresentados na literatura. Frequentemente os fatores obtidos para placas isotrópicas são utilizados para placas laminadas. Para placas isotrópicas homogêneas, Reissner [168] obteve $k = 5/6 = 0,833333$, para carregamento estático, Mindlin [137] obteve $k = \pi^2/12 = 0,82247$ para carregamento dinâmico. Cowper [63], [70], faz um levantamento de diversos procedimentos para vigas Timoshenko de diversas formas de seção transversal.

A determinação precisa do fator k é essencial para a obtenção de deslocamentos precisos pela teoria de primeira ordem em placas homogêneas. Para laminados, porém, a situação é mais complexa. A distribuição das tensões cisalhantes transversais é aproximadamente parabólica ao longo da espessura, quando sob carga estática. Quando sob carga dinâmica, porém, a distribuição é mais complexa por causa da presença das forças de inércia. Isso induz diferentes valores para k , conforme o tipo de carregamento. Outra complicação para os laminados é que não é razoável esperar um fator único em cada ponto, mas pelo menos dois fatores, k_x e k_y , em duas direções ortogonais. Neste sentido, Yang [223] determinou o fator k para o caso dinâmico enquanto Whitney [216] determinou k para o caso estático em laminados ortotrópicos não-simétricos, que veremos na próxima seção.

Consideramos nesta seção a determinação de k para o caso mais simples de uma placa homogênea ortotrópica seguindo a formulação de Timoshenko [192], e a de Reissner [168]. Ambos os métodos dependem de uma estimativa prévia acurada das tensões cisalhantes, ainda que em termos de esforços *a priori* desconhecidos. Inicialmente, mostraremos a obtenção dessa estimativa.

Partimos da integração da primeira das equações de equilíbrio (2.16) na forma

$$\tau_{xz}(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta=-H/2}^z \sigma_x(x, y, \eta) d\eta - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta=-H/2}^z \tau_{xy}(x, y, \eta) d\eta. \quad (13.77)$$

Para uma placa homogênea ortotrópica sob flexão, as tensões coplanares são dadas por (6.11), página 127, de forma que (13.77) pode ser integrada resultando

$$\tau_{xz}(x, y, z) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_{11} \kappa_x + Q_{12} \kappa_y) + \frac{\partial}{\partial y} (Q_{66} \kappa_{xy}) \right] \frac{H^2}{8} \left[1 - \left(\frac{z}{H/2} \right)^2 \right]. \quad (13.78)$$

Mas, de (6.21), temos que $\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$ para um laminado simétrico. No caso de uma única lâmina ortotrópica, de (6.25) temos que $\mathbf{D} = \mathbf{Q}H^3/12$. Então $\mathbf{M} = H^3\mathbf{Q}\boldsymbol{\kappa}/12$, isto é,

$$Q_{11} \kappa_x + Q_{12} \kappa_y = \frac{12M_x}{H^3}, \quad \text{e} \quad Q_{66} \kappa_{xy} = \frac{12M_{xy}}{H^3}. \quad (13.79)$$

$$U_c = \frac{1}{2kH} \int_{\Omega} \int_z \left(\frac{Q_x}{C_{55}} \tau_{xz} + \frac{Q_y}{C_{44}} \tau_{yz} \right) dz d\Omega.$$

Como $\int_z \tau_{xz} dz = Q_x$ e os demais termos do integrando são constantes, a integração em z resulta em:

$$U_c = \frac{1}{2kH} \int_{\Omega} \left[\frac{Q_x^2}{C_{55}} + \frac{Q_y^2}{C_{44}} \right] d\Omega. \quad (13.87)$$

Entretanto, voltando à expressão da energia de deformação (13.86) e usando a relação constitutiva da lâmina (13.82), temos

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_z \left[\frac{\tau_{xz}^2}{C_{55}} + \frac{\tau_{yz}^2}{C_{44}} \right] dz d\Omega. \quad (13.88)$$

Substituímos a distribuição parabólica (13.81) para as tensões:

$$U_c = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2H} \right)^2 \left[\frac{Q_x^2}{C_{55}} + \frac{Q_y^2}{C_{44}} \right] \int_{z=-H/2}^{H/2} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{H} \right)^2 \right]^2 dz d\Omega.$$

O resultado da integral em z é $8H/15$, de forma que

$$U_c = \frac{1}{2} \frac{6}{5H} \int_{\Omega} \left[\frac{Q_x^2}{C_{55}} + \frac{Q_y^2}{C_{44}} \right] d\Omega. \quad (13.89)$$

Comparando (13.87) e (13.89), observa-se que

$$k = \frac{5}{6} = 0,8333 \quad (13.90)$$

13.5 Fator k para placas ortotrópicas laminadas

Quando a placa é laminada, em geral não é possível obter um fator de correção preciso. A correção passa a depender do número de lâminas, das propriedades e da orientação de cada lâmina. Para o caso especial de placa laminada ortotrópica, simétrica ou não, Whitney [216] apresenta um procedimento eficiente para estimar dois fatores, k_1 e k_2 , nas direções principais da placa, conforme veremos a seguir.

Considera-se um laminado ortotrópico sob carga estática de flexão cilíndrica, como na Seção 13.2.2. A tensão normal numa lâmina k é então dada por (13.33). Diferenciando aquela equação em x e usando uma das equações de equilíbrio (11.85), neste caso reduzida a $M_{x,x} = Q_{,x}$, obtém-se

$$\sigma_{x,x}^{lk}(x, y, z) = -\frac{\bar{Q}_{11}^k}{\Delta} (B_{11} - A_{11}z) Q_x, \quad \text{com } \Delta = A_{11}D_{11} - B_{11}^2. \quad (13.91)$$

Tomamos a primeira das equações de equilíbrio (2.16) aplicada a essa lâmina, $\sigma_{x,x}^k + \tau_{xz,z}^k = 0$, e a integramos na espessura:

$$\tau_{x,z}^{lk}(x, y, z) = - \int_{z=-H/2}^z \frac{d\sigma_x^{lk}}{dx} dz \quad (13.92)$$

Usando (13.91) e efetuando a integração, temos

$$\tau_{x,z}^{lk} = \left[a^k + \frac{Q_{11}^k z}{2\Delta} (2B_{11} - A_{11}z) \right] Q_x. \quad (13.93)$$

a^k forma um conjunto de N constantes de integração, uma para cada lâmina, que deve ser determinado pelas condições de continuidade de tensões nas $N - 1$ interfaces, mais a condição de cisalhamento nulo

Da integração em z resulta:

$$\frac{1}{k_1} = A_{55} \sum_{k=1}^N \frac{1}{C_{55}^k} \left[(a^{l_k})^2 z + \frac{a^{l_k} B_{11}^k \bar{Q}_{11} z^2}{\Delta} + \frac{\bar{Q}_{11} z^2}{3\Delta^2} (B_{11}^2 Q_{11}^k - A_{11} \Delta a^{l_k}) - \frac{A_{11} B_{11} (\bar{Q}_{11}^k)^2 z^4}{4\Delta^2} + \frac{A_{11}^2 (\bar{Q}_{11}^k)^2 z^5}{2\Delta^2} \right]_{z_{k-1}}^{z_k}, \quad \text{com } \Delta = A_{11} D_{11} - B_{11}^2 \quad (13.102)$$

Toda a dedução pode ser feita da mesma forma para a obtenção de k_2 . A eq.(13.102) é, assim, uma forma direta de obter os fatores, bastante adequada ao uso em programas de elementos finitos, em que os cálculos podem ser feitos para cada ponto de integração (x, y) .

13.6 Exercícios

- 13.1 Explique o argumento de Pipes e Pagano para explicar a presença de tensões interlaminares numa barra laminada sob tração simples.
- 13.2 Deduza o sistema de equações diferenciais do modelo de elasticidade linear para a tração de uma barra laminada, eqs.(13.10).
- 13.3 Deduza o sistema de equações diferenciais de equilíbrio para um laminado simétrico pela teoria de Mindlin, eqs.(13.17).
- 13.4 Mostre que os coeficientes (13.24) são a solução do problema de valor no contorno (13.20)–(13.21) de flexão cilíndrica de laminado simétrico por modelo de primeira ordem.
- 13.5 Deduza as expressões para as tensões no problema de flexão cilíndrica de laminado simétrico, eqs.(13.30) e (13.33).
- 13.6 Considere o problema de flexão transversal de uma placa retangular de lados $a \times b$, simétrica, ortotrópica, simplesmente apoiada, usando a teoria de primeira ordem.
- identifique as equações de equilíbrio e as condições de contorno;
 - mostre que a solução é dada pelo sistema (13.74) usando as séries (13.71);
 - mostre que a solução é (13.76); programe a solução para carregamento distribuído uniforme e para carga concentrada.
- 13.7 Adapte a expressão (13.98) para o fator de cisalhamento k_2 ; programe as expressões para k_1 e k_2 de um laminado genérico; determinação de k_1 e k_2 para o laminado do Exemplo 6 do Capítulo 6, página 145, usando $G_{13} = G_{23} = G_{12}/2$; compare os resultados com os valores clássicos de Reissner e de Timoshenko.