

# Fundamentos da Mecânica das Estruturas

---

Eliseu Lucena Neto, Ph.D.

Instituto Tecnológico de Aeronáutica



Copyright © 2021 Editora Orsa Maggiore.

Projeto gráfico, ilustrações: Eliseu Lucena Neto

Editoração eletrônica: Eliseu Lucena Neto

Capa: Maria Elisa Ramos

#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Lucena Neto, Eliseu

Fundamentos da mecânica das estruturas /

Eliseu Lucena Neto. - - Florianópolis, SC :

Orsa Maggiore, 2021.

523 p.: il., tabs., gráfs.

ISBN 978-65-993681-2-7

1. Análise estrutural (Engenharia). 2. Engenharia de estruturas.

3. Estruturas - Teoria. 4. Mecânica

I. Título.

21-77450

CDD-624.171

Índices para catálogo sistemático:

1. Estruturas mecânicas : Engenharia civil                      624.171

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão expressa dos editores.

1ª edição - 2021

Direitos adquiridos pela: Editora Orsa Maggiore.

<https://www.EditoraOrsaMaggiore.com.br>

Impresso no Brasil

*Printed in Brazil*

#### Outras publicações da editora

- *Soluções dos problemas propostos em Fundamentos da Mecânica das Estruturas*, Eliseu L. Neto, 2021.
- *Materiais compostos e Estruturas sanduíche - Projeto e análise*, Mendonça, 2019.
- *O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos*, Mendonça e Fancello, 2019.
- *Fundamentos de Mecânica dos Sólidos*, Mendonça, 2021.
- *800 problemas resolvidos de Mecânica dos Sólidos, propostos no livro Resistência dos Materiais e Fundamentos de Mecânica dos Sólidos (digital)*, Mendonça, 2021.

# Sumário

<b>Prefácio</b>	<b>ix</b>
<b>Notação</b>	<b>xi</b>
<b>1 Tensão</b>	<b>1</b>
1.1 Vetor tensão	1
1.2 Tensor tensão	5
1.3 Mudança de base	10
1.4 Tensões principais	14
1.5 Componentes esférica e desviadora	17
1.6 Diagrama de Mohr	20
1.7 Equações de equilíbrio	27
Problemas	33
<b>2 Deformação</b>	<b>39</b>
2.1 Configuração, transformação e deformação	39
2.2 Gradiente da transformação	42
2.3 Tensor deformação	47
2.4 Relações deformação-deslocamento	49
2.5 Tensor pequena deformação	49
2.6 Interpretação geométrica	52
2.7 Medição experimental	55
2.8 Compatibilidade das componentes do tensor deformação	56
2.9 Decomposição polar	58
2.10 Tensor pequena rotação	62
Problemas	65
<b>3 Outras medidas de tensão</b>	<b>69</b>
3.1 Mudança de volume	69
3.2 Mudança de área	71
3.3 Primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff	73

---

3.4	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff	76	
3.5	Equações de equilíbrio referidas à configuração inicial	79	
	Problemas	81	
<b>4</b>	<b>Equações constitutivas</b>		<b>83</b>
4.1	Material hiperelástico	84	
4.2	Mudança de base	90	
4.3	Simetria do material	91	
	Problemas	100	
<b>5</b>	<b>Teoria linear da elasticidade</b>		<b>103</b>
5.1	Linearização das equações	103	
5.2	Condições de contorno	105	
5.3	Barras cilíndricas sob torção uniforme	108	
	Problemas	123	
<b>6</b>	<b>Cálculo variacional</b>		<b>125</b>
6.1	Algumas definições	126	
6.2	Equações de Euler-Lagrange e as condições de contorno	128	
	Problemas	133	
<b>7</b>	<b>Princípio dos deslocamentos virtuais</b>		<b>135</b>
7.1	Trabalho e energia	135	
7.2	Partículas	143	
7.3	Sólidos rígidos	148	
7.4	Sólidos deformáveis	154	
7.5	Princípio da energia potencial	159	
	Problemas	167	
<b>8</b>	<b>Teoria de vigas</b>		<b>169</b>
8.1	Vigas no plano	170	
8.2	Vigas no espaço	191	
8.3	Vigas sob pequenas deformações mas grandes deslocamentos e rotações	204	
	Problemas	217	
<b>9</b>	<b>Métodos dos resíduos ponderados e de Ritz</b>		<b>219</b>
9.1	Método dos resíduos ponderados	219	
9.2	Método de Ritz	230	
9.3	Considerações finais	246	

---

Problemas	247	
<b>10 Método dos elementos finitos</b>		<b>251</b>
10.1 Aproximação por trechos	252	
10.2 Um breve histórico	256	
10.3 Elemento de barra	257	
10.4 Elemento de viga de Euler-Bernoulli	281	
10.5 Elemento de viga de Timoshenko	287	
10.6 Considerações finais	293	
Problemas	295	
<b>11 Teoria de placas</b>		<b>299</b>
11.1 Relações deformação-deslocamento	299	
11.2 Equações de equilíbrio e condições de contorno	304	
11.3 Equações constitutivas	317	
11.4 Equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos	320	
11.5 Pós-processamento	323	
11.6 Métodos de solução	325	
11.7 Placas laminadas	351	
Problemas	366	
<b>12 Geometria diferencial</b>		<b>369</b>
12.1 Curvas	369	
12.2 Superfícies	372	
12.3 Derivadas dos vetores unitários	383	
12.4 Relações de Codazzi e Gauss	384	
Problemas	385	
<b>13 Teoria de cascas</b>		<b>389</b>
13.1 Relações deformação-deslocamento	389	
13.2 Equações de equilíbrio e condições de contorno	394	
13.3 Equações constitutivas	405	
13.4 Correções de Sanders	406	
13.5 Considerações finais	412	
Problemas	422	
<b>14 Estabilidade do equilíbrio</b>		<b>423</b>
14.1 Ponto de bifurcação e ponto limite	424	
14.2 Sensibilidade a imperfeição	437	

---

14.3	Consequências da linearização	447
14.4	Flambagem de vigas	450
	Problemas	464
<b>A</b>	<b>Série de Fourier</b>	<b>469</b>
A.1	Preliminares	469
A.2	Série trigonométrica	473
A.3	Série em duas variáveis	480
<b>B</b>	<b>Deformação em coordenadas curvilíneas</b>	<b>483</b>
<b>C</b>	<b>Deformação e movimento de corpo rígido</b>	<b>489</b>
	Referências	493
	Índice remissivo	503

# Prefácio

Um modelo matemático que descreve o comportamento de uma estrutura é composto por três grupos de equações: as equações de equilíbrio, as relações deformação-deslocamento e as equações constitutivas, que envolvem os campos de deslocamento, deformação e tensão como incógnitas a serem determinadas sob certas condições de contorno. O que determinamos do modelo corresponde exatamente ao que ocorre com a estrutura? Provavelmente não. Cada modelo é fruto de hipóteses e, conseqüentemente, sua aplicabilidade vai até onde as hipóteses permitem. Saber identificar o limite da aplicação e, quando necessário, transpor esse limite por meio de modelos mais refinados nos ensina a conviver com a incerteza. É por não existir um modelo correto de forma absoluta que nos motiva aqui a dar atenção aos fundamentos. Estes, sim, são universais por lastrearem todos os possíveis modelos.

Este livro aborda assuntos essenciais à mecânica das estruturas sob um ponto de vista moderno, escrito de forma simples mas rigorosa. Destina-se a cursos de graduação e de pós-graduação, e a profissionais que procuram revisitar a área, admitindo que o leitor possua os conhecimentos de matemática e mecânica comuns aos ciclos básicos dos cursos de engenharia. Optamos pela notação matricial, e pela álgebra e cálculo que dela decorrem, para manter o texto conciso. Focado nos fundamentos, a ênfase será sempre no entendimento dos conceitos e não na solução de problemas específicos. O livro é organizado em catorze capítulos e três apêndices.

O que discutimos nos Capítulos 1-4, complementado pelas condições de contorno apresentadas no Capítulo 5, representa a essência da teoria da elasticidade. A forma linearizada clássica dessa teoria é sintetizada no Capítulo 5. A presença do Capítulo 6, sobre cálculo variacional, é para introduzir uma linguagem mais apropriada na discussão do princípio dos deslocamentos virtuais no Capítulo 7 e em seu emprego nos capítulos subsequentes. O Capítulo 8 traz a teoria de vigas de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko, com suas extensões a vigas sob torção. Versões não lineares dessas teorias são também estabelecidas para vigas sob pequenas deformações mas grandes deslocamentos e rotações. O método dos resíduos ponderados e o de Ritz do Capítulo 9 são ferramentas robustas na obtenção de soluções aproximadas dos modelos matemáticos utilizados. O método dos elementos finitos é apresentado no Capítulo 10 como uma extensão do método de Ritz. O Capítulo 11 apresenta a teoria de placas de Kirchhoff e a de Reissner-Mindlin. A introdução de geometria diferencial no Capítulo 12 é para generalizar as teorias de cascas no Capítulo 13. Neste, identificamos a versão de Reissner e a de Sanders da teoria de cascas de Love, além de suas formas modificadas que incorporam a deformação

de cisalhamento transversal. Por fim, o Capítulo 14 aborda a estabilidade do equilíbrio. O fato de se lidar com teorias de vigas, placas e cascas, que são os elementos estruturais tipicamente empregados na engenharia, possivelmente torne o título do livro mais significativo para o leitor.

Exemplos simples são colocados em pontos estratégicos de maneira que se tenha uma melhor compreensão do assunto. Os problemas de fim de capítulo foram planejados para verificar o grau de compreensão do leitor, estimulando seu raciocínio e iniciativa. Todos encontram-se detalhadamente resolvidos num volume auxiliar intitulado *Soluções dos Problemas Propostos em Fundamentos da Mecânica das Estruturas*, Orsa Maggiore, Florianópolis, 2021.

Embora uma vasta bibliografia nos tenha influenciado, listamos nas Referências apenas as publicações julgadas estritamente necessárias na complementação da leitura de algumas passagens do texto.

As milhares de horas dedicadas à tarefa de escrever este livro, muitas delas à noite, feriados ou finais de semana, nem sempre foram momentos de euforia. Minha família encarregava-se de me socorrer com palavras de ânimo. A ela, minha gratidão. Não posso deixar de mencionar que uma parte significativa da motivação em escrever veio do convívio com os colegas Adriano Luiz de Carvalho Neto e Francisco Alex Correia Monteiro, que estimulavam interessantes discussões técnicas enquanto tentavam minimizar meus desacertos.

Espero que o leitor encontre no livro estímulo para aprofundar-se neste fascinante ramo da mecânica tão importante às engenharias aeroespacial, civil, mecânica, naval, dentre outras. Críticas e sugestões podem ser enviadas para [eliseu@ita.br](mailto:eliseu@ita.br) ou [elucenaneto@gmail.com](mailto:elucenaneto@gmail.com), as quais serão bem-vindas e valiosas numa futura revisão.

São José dos Campos, 28 de junho de 2021

Eliseu Lucena Neto

# Capítulo 1

## Tensão

Quanto ao modo como são exercidas, as *forças externas* que atuam num sólido dividem-se em duas classes: *forças de volume* e *forças de superfície*. As forças de volume, como o próprio nome sugere, distribuem-se por todo o volume do sólido. São forças de campo, exercidas a distância por algum outro corpo, especificadas em termos de força por unidade de volume. O peso e a força eletromagnética são exemplos de forças de volume. As forças de superfície, como o próprio nome também sugere, aparecem na superfície do sólido devido ao contato físico com outros corpos. Elas são especificadas em termos de força por unidade de área. Desenvolvem-se ainda no sólido *forças internas* que resistem à tendência de uma parte do sólido mover-se em relação a uma outra parte do mesmo sólido. São forças de contato, não exercidas por algum outro corpo, que respondem pela integridade do sólido. Supor que o sólido seja formado de *pontos materiais* que se distribuem continuamente no volume, apesar da natureza discreta da matéria quando avaliada em níveis atômicos, permite tratar as forças internas usando o conceito de *tensão*. Mostramos neste capítulo como as forças externas e as tensões interagem, inclusive para o equilíbrio do sólido.

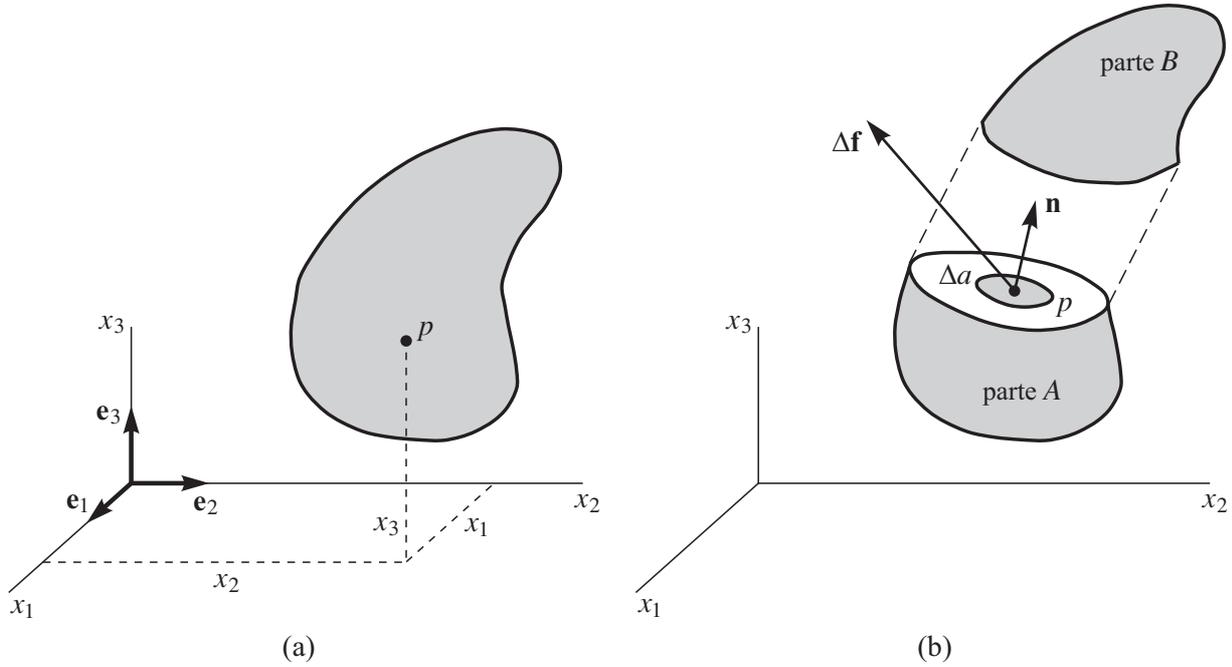
### 1.1 Vetor tensão

Sob a ação das forças externas um sólido se desloca, sofre mudanças de forma ou volume e surgem nele forças internas. Imaginemos o sólido nessa situação *transformada* pela ação das forças, ocupando uma região qualquer do espaço (veja Figura 1.1a), onde um ponto  $p(x_1, x_2, x_3)$  é identificado pelo sistema de coordenadas cartesianas<sup>1</sup> (retilíneas) ortogonais  $x_1x_2x_3$  (*coordenadas eulerianas*,<sup>2</sup> segundo a nomenclatura do Capítulo 2). A *base ortonormal* do sistema é definida pelos vetores unitários  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , mutuamente ortogonais, nas direções dos eixos coordenados. A Figura 1.1b mostra o sólido seccionado em duas partes, parte  $A$  e parte  $B$ , por um plano que passa pelo ponto  $p$ . O plano de corte tem duas faces: uma na parte  $A$ , orientada segundo o vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  que aponta para fora da parte  $A$ , e outra na parte  $B$ , orientada segundo  $-\mathbf{n}$  que aponta para fora da parte  $B$  (vetor não mostrado na figura). A força que a parte  $A$  exerce sobre a parte  $B$  e a força que a parte  $B$  exerce

---

<sup>1</sup>René Descartes, filósofo e matemático francês nascido em La Haye em 1596, falecido em Estocolmo em 1650.

<sup>2</sup>Leonhard Euler, matemático suíço nascido em Basileia em 1707, falecido em St. Petersburg em 1783.



**Figura 1.1** (a) Sólido numa região do espaço após a ação de forças externas, com as coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  de um ponto genérico  $p$ ; (b) a força interna  $\Delta \mathbf{f}$ , exercida pela parte  $B$  sobre a parte  $A$ , é distribuída na área  $\Delta a$ , em torno do ponto  $p$ , segundo o plano de corte definido pelo vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ .

sobre a parte  $A$  têm a mesma intensidade, a mesma direção, porém sentidos opostos, conforme a terceira lei de Newton<sup>3</sup> (princípio da ação e reação). É uma força oriunda do contato entre as duas partes de um mesmo sólido sendo, portanto, uma força interna. Admitir que a força de contato entre as partes  $A$  e  $B$  seja continuamente distribuída na área da seção de corte (distribuição, em geral, não uniforme) é, também, admitir que o material seja continuamente distribuído no volume do sólido. A resultante da força que é distribuída na área  $\Delta a$  em torno de  $p$  é indicada na Figura 1.1b por  $\Delta \mathbf{f}$  (representamos a força que a parte  $B$  exerce sobre a parte  $A$ ; a força que a parte  $A$  exerce sobre a parte  $B$  seria  $-\Delta \mathbf{f}$ ).

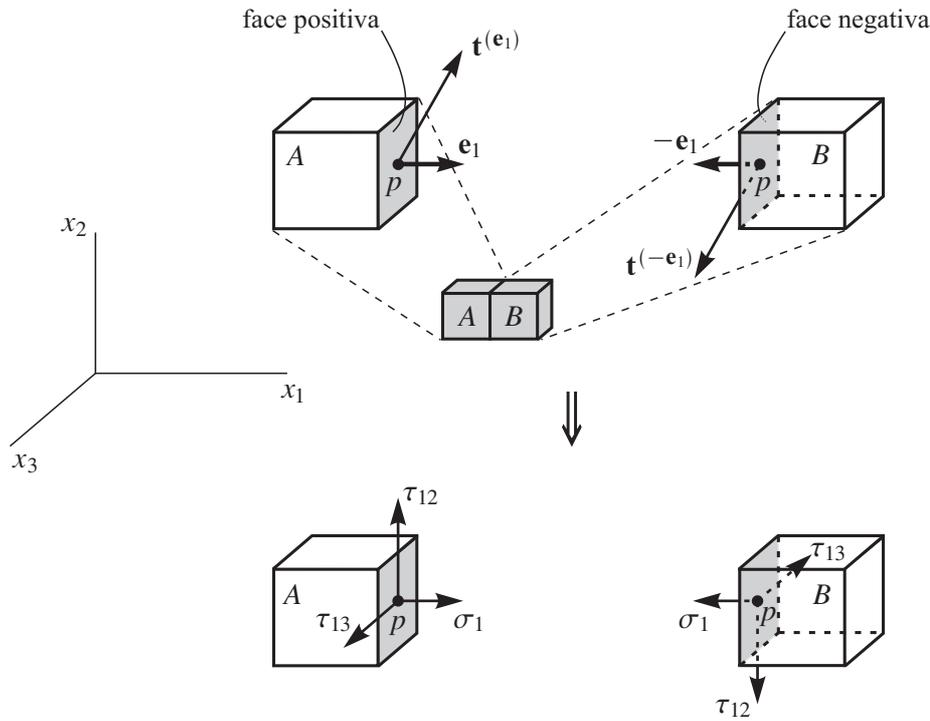
Chamemos de  $\mathbf{r}$  o vetor posição do ponto de aplicação de  $\Delta \mathbf{f}$  em relação ao ponto  $p$  e  $\Delta \mathbf{m}$  o momento produzido pela força, como indicado na Figura 1.2a. É indiferente se trabalhamos com a parte  $A$  ou com a parte  $B$ . Se a área  $\Delta a$  for reduzida progressivamente, mas sempre contendo o ponto  $p$ , o *vetor tensão* que atua no ponto segundo o plano considerado é definido por

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a}. \quad (1.1)$$

O numerador e o denominador da fração tendem simultaneamente a zero, mas a fração, em geral, tende a um valor finito (veja, por exemplo, que  $10^{-10}/10^{-11} = 10^{-100}/10^{-101} = \dots = 10$ ). A existência desse limite é um postulado fundamental na mecânica do contínuo, introduzido por Cauchy<sup>4</sup> por volta de 1822, e baseia-se na idealização do material com uma distribuição contínua no volume

<sup>3</sup>Isaac Newton, físico e matemático inglês nascido em Woolsthorpe em 1642, falecido em Londres em 1727.

<sup>4</sup>Augustin Louis Cauchy, engenheiro e matemático francês nascido em Paris em 1789, falecido em Sceaux em 1857.



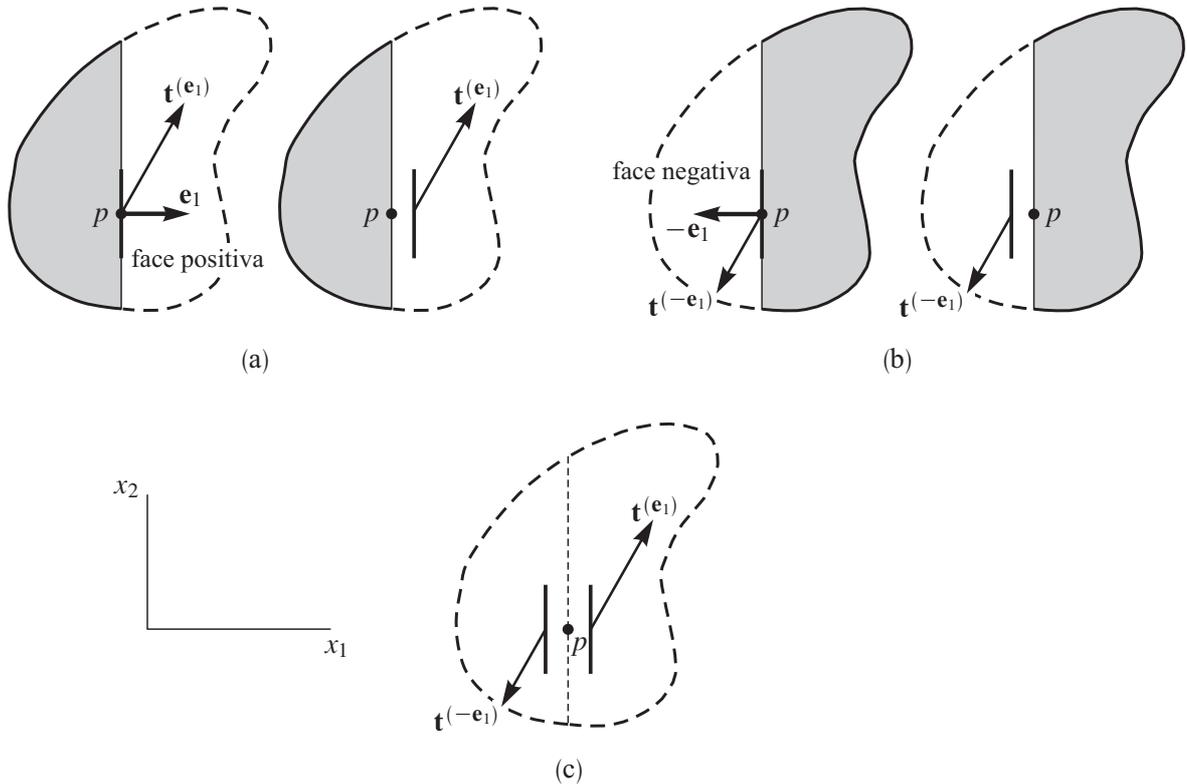
**Figura 1.3** Vetor tensão que atua em  $p$  segundo o plano de corte paralelo ao plano  $x_2x_3$ , indicado nas faces positiva e negativa com suas respectivas componentes.

separa os dois paralelepípedos, onde uma das faces do plano tem normal  $\mathbf{e}_1$  (face no paralelepípedo  $A$ ), e a outra face tem normal  $-\mathbf{e}_1$  (face no paralelepípedo  $B$ ). A face de normal  $\mathbf{e}_1$ , que se volta para o sentido positivo do eixo  $x_1$ , será considerada positiva, e a face de normal  $-\mathbf{e}_1$  será considerada negativa. Denotemos por  $\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1)}$  ou  $\mathbf{t}^{(-\mathbf{e}_1)}$  ( $= -\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1)}$ ) o vetor tensão que atua nesse plano. Se o vetor tensão for representado pelas suas componentes no sistema  $x_1x_2x_3$ , adotamos a convenção de ser positiva a componente que na face positiva aponta no mesmo sentido do eixo correspondente ou que na face negativa aponta no sentido contrário do eixo:

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1)} = \sigma_1\mathbf{e}_1 + \tau_{12}\mathbf{e}_2 + \tau_{13}\mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}^{(-\mathbf{e}_1)} = -\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1)} = -\sigma_1\mathbf{e}_1 - \tau_{12}\mathbf{e}_2 - \tau_{13}\mathbf{e}_3. \quad (1.4)$$

Por essa notação, uma tensão normal  $\sigma_i$  atuará na face perpendicular ao eixo  $x_i$  e uma tensão de cisalhamento  $\tau_{ij}$  atuará na face perpendicular ao eixo  $x_i$ , segundo a direção de  $x_j$ . Perceba que uma tensão normal positiva é de tração e que uma tensão normal negativa é de compressão. A Figura 1.3 traz os sentidos positivos das componentes do vetor tensão, caso a representação seja na face positiva ou na face negativa do plano de corte.

Para facilitar a visualização das duas faces do plano sem recorrer às partes  $A$  e  $B$ , é comum o seguinte procedimento: desenhamos a face positiva e a face negativa ligeiramente afastadas uma da outra como indicado na Figura 1.4, onde a distância que se observa entre as duas faces é puramente esquemática, não existe, é só para facilitar a visualização. São as duas faces de um mesmo plano que passa por  $p$ . A extensão do procedimento para os planos paralelos a  $x_1x_2$  e  $x_1x_3$  que passam por  $p$  resultará na representação mostrada na Figura 1.5. Novamente, o paralelepípedo que vemos na figura é meramente ilustrativo, sem dimensão, obtido após afastar as duas faces de cada plano perpendicular



**Figura 1.4** Representação esquemática do plano de corte paralelo ao plano  $x_2x_3$  com as faces ligeiramente afastadas do ponto  $p$ : (a) face positiva; (b) face negativa; (c) ambas as faces.

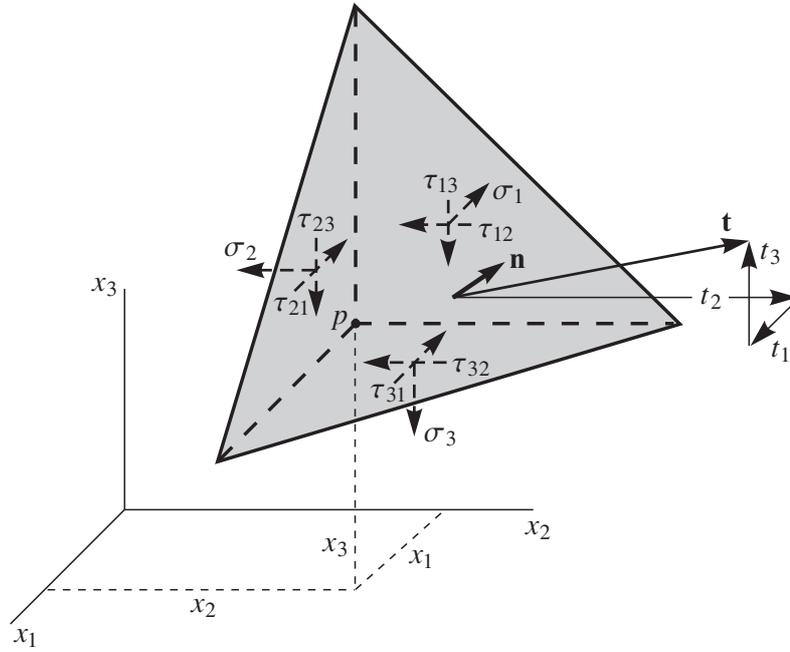
aos eixos coordenados que passam pelo ponto  $p$ , ou seja, duas faces paralelas do paralelepípedo são as faces de um mesmo plano.

A Figura 1.6 mostra o caso simples de uma barra tracionada por uma força de intensidade  $F$ , cuja área  $a_0$  da seção transversal mantém-se constante ao longo da barra após as transformações provocadas pela força. A barra é seccionada num ponto  $p$  qualquer segundo três planos. A seção de corte no plano 0 coincide com a seção transversal, e as seções nos planos 1 e 2 têm áreas  $a_1$  e  $a_2$ , respectivamente. Supondo que a força distribua-se uniformemente em cada seção de corte, o vetor tensão  $\mathbf{t}_0$  no ponto  $p$  segundo o plano 0 tem maior intensidade do que o vetor tensão  $\mathbf{t}_1$  segundo o plano 1, que por sua vez tem maior intensidade do que o vetor tensão  $\mathbf{t}_2$  segundo o plano 2, pois  $a_0 < a_1 < a_2$ . Generalizando, dizemos que num ponto de um sólido atua um número infinito de vetores tensões, havendo um vetor tensão para cada plano que passa pelo ponto. Só “vemos” um dado vetor tensão após seccionarmos o sólido no plano onde ele atua, removendo uma das partes.

## 1.2 Tensor tensão

Sabendo-se que é o vetor tensão que resiste no ponto, segundo o plano onde atua, à tendência de uma parte do sólido mover-se em relação a uma outra, é imprescindível ao projeto que todos os vetores tensões no ponto sejam conhecidos. Mostremos que a infinidade de vetores tensões que passam por um ponto não são independentes. Se conhecermos três deles que atuam em planos mutuamente ortogonais conheceremos os demais.





**Figura 1.8** Componentes do vetor tensão  $\mathbf{t}$  (notação usada no lugar de  $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$ ) que atua no plano inclinado que passa pelo ponto  $p$  e componentes do tensor tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  no ponto.

cuidado de escrever  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$  (Mase *et al.*, 2010). Outros preferem manter (1.17) como está, porém com o índice  $i$  identificando a direção, e não a face, onde atua a tensão de cisalhamento (Holzapfel, 2001). A diferença entre adotar um ou outro procedimento torna-se irrelevante para  $\boldsymbol{\sigma}$  simétrico ( $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$ ).

Na expressão (1.17) cada vetor unitário  $\mathbf{n}$  associa-se ao vetor tensão  $\mathbf{t}$ , que atua no plano normal a  $\mathbf{n}$ , por meio de um *operador linear* representado pela matriz  $\boldsymbol{\sigma}$ . O operador é assim denominado por gozar das propriedades

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}_a + \mathbf{n}_b) = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_a + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_b \quad \boldsymbol{\sigma}(\alpha\mathbf{n}_a) = \alpha\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_a, \quad (1.18)$$

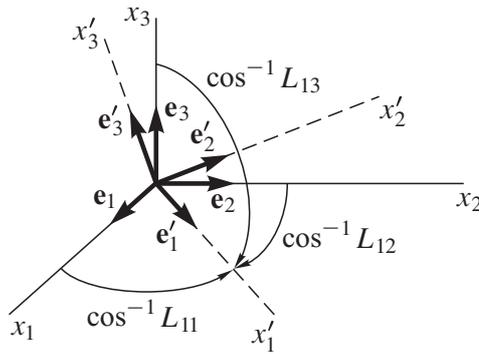
onde  $\mathbf{n}_a$  e  $\mathbf{n}_b$  são vetores unitários arbitrários e  $\alpha$  é um escalar qualquer. Um operador linear que associa um vetor a um outro vetor no espaço tridimensional é um *tensor de segunda ordem* tridimensional. Talvez seja esta a forma mais simples de se definir um tensor de segunda ordem. Foi  $\boldsymbol{\sigma}$  o primeiro tensor de segunda ordem a ser identificado, o que explica o emprego generalizado do termo “tensor” (nome aparentemente dado por Voigt<sup>5</sup>). O paralelepípedo meramente ilustrativo, sem dimensão, da Figura 1.5 costuma ser visto como uma representação do tensor tensão no ponto  $p$  segundo o sistema  $x_1x_2x_3$ .

Mostraremos na Seção 1.7 que

$$\tau_{21} = \tau_{12} \quad \tau_{31} = \tau_{13} \quad \tau_{32} = \tau_{23}, \quad (1.19)$$

ou seja, a matriz  $\boldsymbol{\sigma}$  é simétrica. Portanto, das nove componentes do tensor de segunda ordem  $\boldsymbol{\sigma}$ , agrupadas na matriz quadrada  $\boldsymbol{\sigma}$  de ordem 3, apenas seis são independentes ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{21} = \tau_{12}, \tau_{31} = \tau_{13}, \tau_{32} = \tau_{23}$ ).

<sup>5</sup>Woldemar Voigt, físico alemão nascido em Leipzig em 1850, falecido em Göttingen em 1919.



**Figura 1.9** Sistemas cartesianos ortogonais  $x_1x_2x_3$  e  $x'_1x'_2x'_3$ , com indicação dos ângulos entre  $x'_1$  e os eixos do sistema  $x_1x_2x_3$ .

$$= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{n}' = \mathbf{L}\mathbf{n}. \quad (1.20)$$

A matriz de transformação  $\mathbf{L}$  é ortogonal, ou seja,  $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^T$  (veja Problema 1.4), e a relação (1.20) mantém-se válida para qualquer outro vetor. Especificamente,

$$\mathbf{t}' = \mathbf{L}\mathbf{t}. \quad (1.21)$$

Multiplicando ambos os membros de (1.17) por  $\mathbf{L}$  e sabendo-se que  $\mathbf{L}^T\mathbf{L} = \mathbf{I}$ ,

$$\mathbf{L}\mathbf{t} = \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{L}^T\mathbf{L})\mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T}_{\boldsymbol{\sigma}'} \underbrace{\mathbf{L}\mathbf{n}}_{\mathbf{n}'} \Rightarrow \mathbf{t}' = \boldsymbol{\sigma}'\mathbf{n}' \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T. \quad (1.22)$$

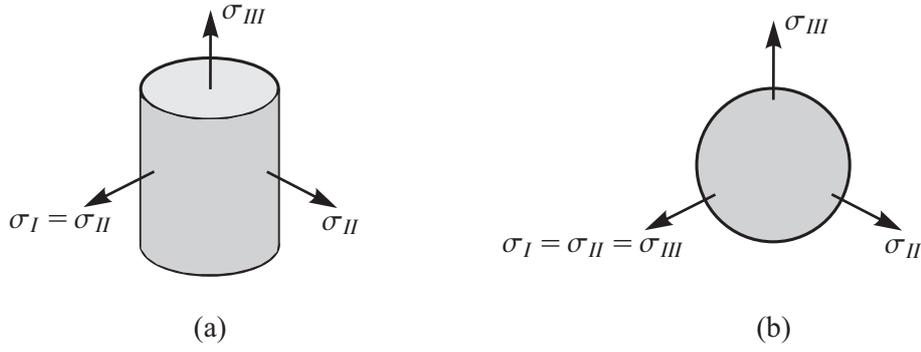
Apesar de um mesmo vetor ser aqui representado por  $\mathbf{n}$  ou  $\mathbf{n}'$ , a matriz  $\mathbf{n}$  refere-se ao sistema  $x_1x_2x_3$  e  $\mathbf{n}'$  refere-se ao sistema  $x'_1x'_2x'_3$ . Explicação semelhante aplica-se também às matrizes  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\sigma}'$  do tensor. Como translações do sistema não afetam as componentes do vetor e do tensor, somente rotações (mudança de base) são consideradas.

**Exemplo 1.2** Suponha que o sistema  $x'_1x'_2x'_3$  seja obtido por uma rotação de  $45^\circ$ , no sentido anti-horário, do sistema  $x_1x_2x_3$  em torno do eixo  $x_3$  (veja Figura 1.10). Determine as componentes do vetor tensão  $\mathbf{t}$  e do tensor tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ , dados no Exemplo 1.1, nesse novo sistema.

Usando a matriz de transformação

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos



**Figura 1.14** Estado de tensão: (a) cilíndrico; (b) esférico.

*primeiro, segundo e terceiro invariantes* do estado de tensão. Enquanto  $I_1$  varia linearmente com as tensões,  $I_2$  tem variação quadrática e  $I_3$  cúbica. Existem outros invariantes associados a  $\boldsymbol{\sigma}$  mas apenas três são independentes. Dada a simetria de  $\boldsymbol{\sigma}$ , mostremos que os três planos sobre os quais as tensões principais atuam são mutuamente ortogonais.

Sejam  $\mathbf{n}_I$  e  $\mathbf{n}_{II}$  os vetores unitários ortogonais aos planos onde atuam  $\sigma_I$  e  $\sigma_{II}$ , respectivamente. De (1.25),

$$\sigma_I \mathbf{n}_I = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_I \quad \sigma_{II} \mathbf{n}_{II} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{II}. \quad (1.30)$$

Pré-multiplicando a primeira das equações por  $\mathbf{n}_{II}^T$  e a segunda por  $\mathbf{n}_I^T$ , levando-se em conta que a matriz  $\boldsymbol{\sigma}$  é simétrica,

$$\sigma_I \mathbf{n}_{II}^T \mathbf{n}_I = \mathbf{n}_{II}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_I = \mathbf{n}_I^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{II} \quad \sigma_{II} \mathbf{n}_I^T \mathbf{n}_{II} = \mathbf{n}_I^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{II}. \quad (1.31)$$

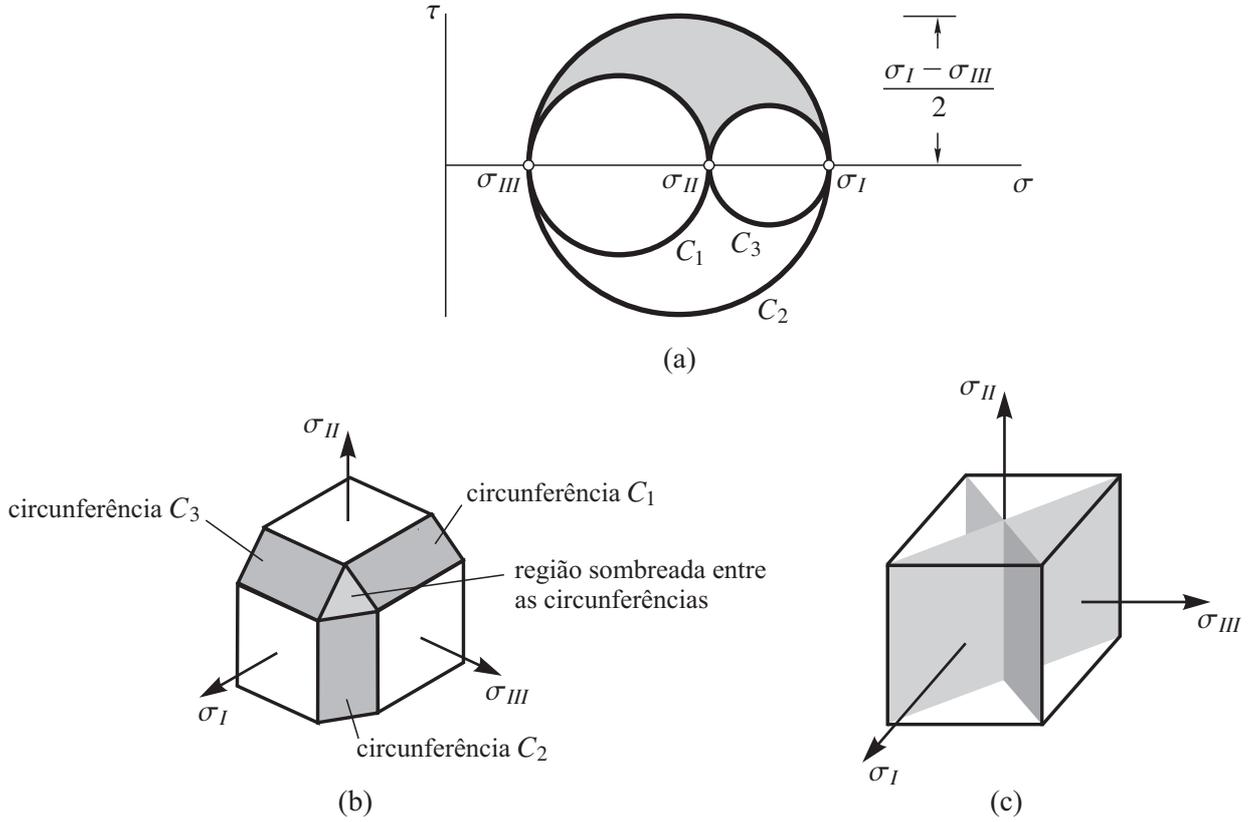
Subtraindo a segunda equação da primeira, lembrando que  $\mathbf{n}_{II}^T \mathbf{n}_I = \mathbf{n}_I^T \mathbf{n}_{II}$ ,

$$(\sigma_I - \sigma_{II}) \mathbf{n}_I^T \mathbf{n}_{II} = 0. \quad (1.32)$$

Se  $\sigma_I \neq \sigma_{II}$ , então  $\mathbf{n}_I^T \mathbf{n}_{II} = 0$ . Ou seja, as tensões  $\sigma_I$  e  $\sigma_{II}$  atuam em planos ortogonais.

Permutando os índices de  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{n}$  em (1.32), chegaremos às seguintes conclusões:

- (a) Se  $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$ , os três planos onde as tensões principais atuam são únicos e mutuamente ortogonais.
- (b) Se  $\sigma_I = \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$ , o vetor  $\mathbf{n}_{III}$  é único e ortogonal a  $\mathbf{n}_I$  e  $\mathbf{n}_{II}$  que são indefinidos. Ou seja, todos os planos paralelos a  $\mathbf{n}_{III}$  tem tensão de cisalhamento nula e tensão normal  $\sigma = \sigma_I = \sigma_{II}$ . Quaisquer dois vetores unitários ortogonais entre si e a  $\mathbf{n}_{III}$  poderão ser escolhidos para  $\mathbf{n}_I$  e  $\mathbf{n}_{II}$ . Se imaginarmos um cilindro circular infinitesimal no ponto com a face plana normal a  $\sigma_{III}$ , a superfície lateral do cilindro estará apenas sob tensão normal  $\sigma = \sigma_I = \sigma_{II}$  (veja Figura 1.14a). Daí um estado de tensão com duas tensões principais iguais e distintas de uma terceira ser denominado *cilíndrico*.
- (c) Se  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ , então todos os planos que passam pelo ponto tem tensão de cisalhamento nula e tensão normal  $\sigma = \sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ . Quaisquer três vetores unitários mutuamente



**Figura 1.15** (a) Diagrama de Mohr; (b) planos associados às circunferências  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e à região sombreada entre as circunferências no diagrama de Mohr; (c) planos a  $45^\circ$  em relação a  $\sigma_I$  e  $\sigma_{III}$  onde atuam a máxima tensão de cisalhamento  $(\sigma_I - \sigma_{III})/2$  e a tensão normal  $(\sigma_I + \sigma_{III})/2$ .

Se  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ , então  $(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) > 0$ . Como  $n_1^2 \geq 0$ , temos da primeira das equações (1.49) que

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_{II})(\sigma - \sigma_{III}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2. \quad (1.50)$$

Considerando apenas a igualdade, (1.50) representa a equação da circunferência no plano  $\sigma\tau$ , com centro em  $[(\sigma_{II} + \sigma_{III})/2, 0]$  e raio  $(\sigma_{II} - \sigma_{III})/2$ , indicada na Figura 1.15a por  $C_1$ . A região definida pela desigualdade consiste de todos os pontos fora da circunferência.

Procedendo de maneira análoga, concluímos da segunda das equações (1.49) que

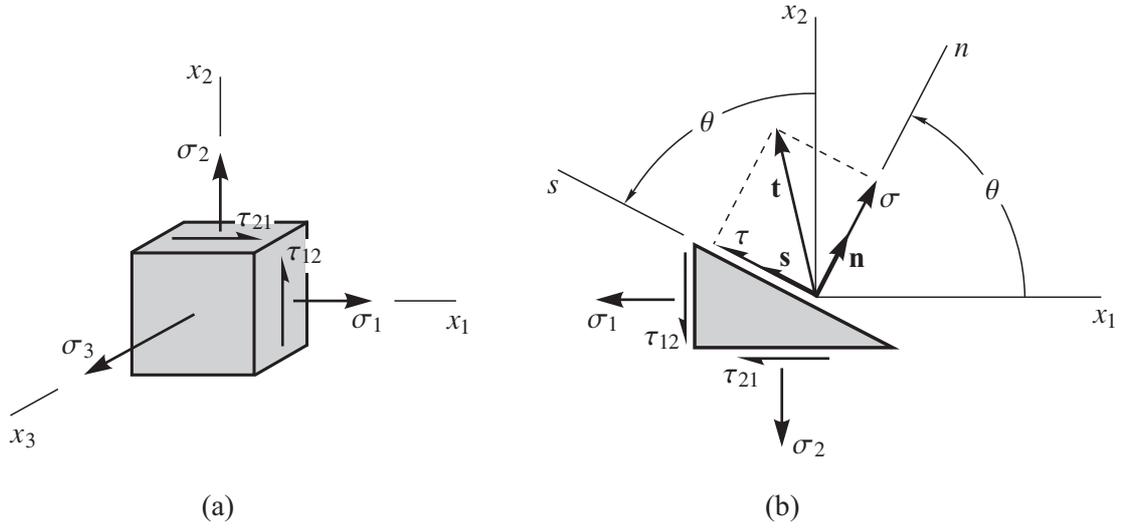
$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_I)(\sigma - \sigma_{III}) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2, \quad (1.51)$$

representado graficamente na Figura 1.15a pelos pontos sobre a circunferência  $C_2$  e no seu interior. Da terceira das equações (1.49), obtemos

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_I)(\sigma - \sigma_{II}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2 \quad (1.52)$$

representado graficamente na Figura 1.15a pelos pontos sobre a circunferência  $C_3$  e fora dela.

Sabendo-se que o par  $(\sigma, \tau)$  que atua num plano deverá satisfazer simultaneamente (1.50), (1.51) e (1.52), então esse par corresponderá a um ponto da região sombreada (incluídas as circunferências



**Figura 1.16** (a) Estado de tensão num sistema de coordenadas em que  $x_3$  é um eixo principal; (b) plano inclinado genérico paralelo a  $x_3$ .

é também conhecido nesse sistema. As componentes  $\sigma$  e  $\tau$  de qualquer vetor tensão que atua em planos paralelos a  $x_3$ , ou seja, paralelos a  $\sigma_3$ , satisfazem a igualdade em (1.52),

$$\tau^2 + \left( \sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2, \quad (1.55)$$

e representam um ponto sobre a circunferência  $C_3$ . Como o emprego de (1.55) requer o conhecimento das tensões principais  $\sigma_I$  e  $\sigma_{II}$ , é mais prático reescrever a expressão em termos das componentes conhecidas  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$ .

Considere o plano inclinado genérico, paralelo a  $x_3$ , mostrado na Figura 1.16b. Os vetores unitários  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{s}$  indicados são dados por

$$\mathbf{n} = [\cos \theta \quad \sin \theta \quad 0]^T \quad \mathbf{s} = [-\sin \theta \quad \cos \theta \quad 0]^T. \quad (1.56)$$

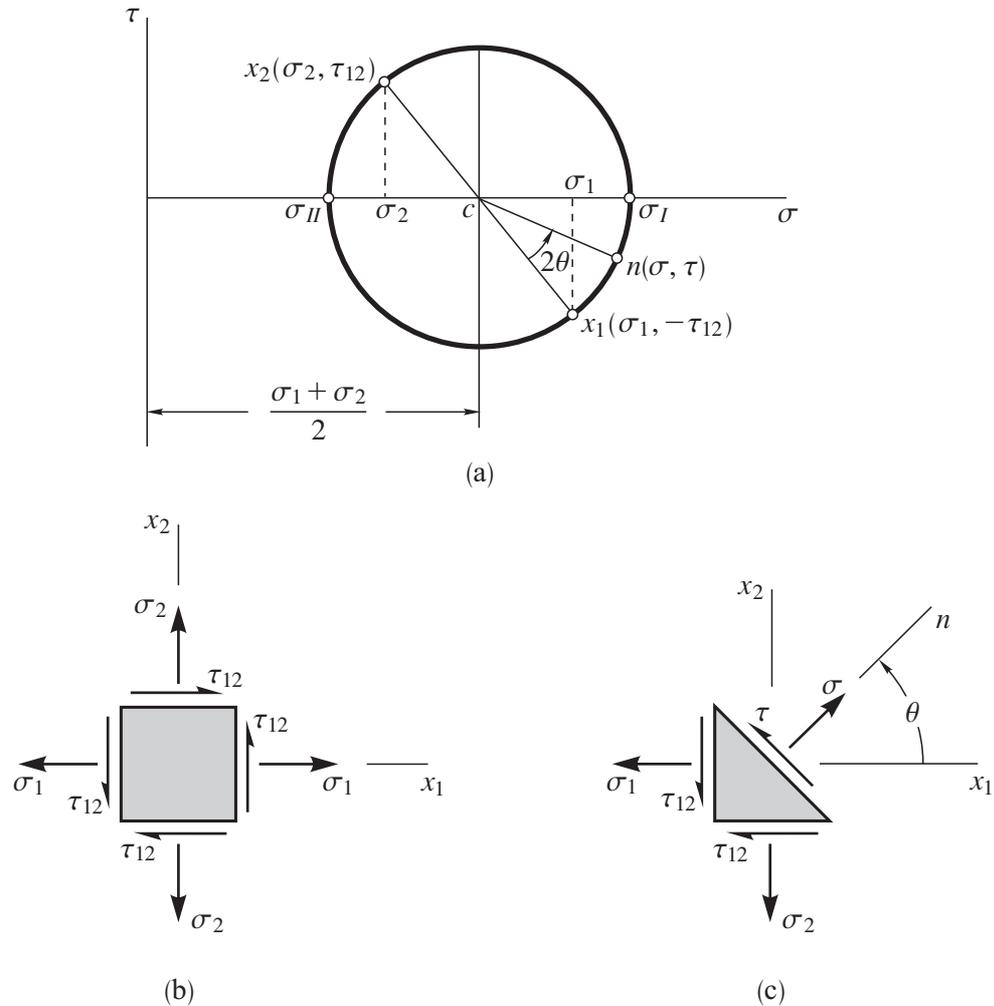
De (1.17),

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \theta + \tau_{12} \sin \theta \\ \sigma_2 \sin \theta + \tau_{12} \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.57)$$

O vetor tensão  $\mathbf{t}$  independe de  $\sigma_3$  pois é paralelo ao plano  $x_1x_2$ . Suas componentes nas direções normal e tangencial ao plano são

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{n}^T \mathbf{t} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta + 2\tau_{12} \sin \theta \cos \theta \\ \tau &= \mathbf{s}^T \mathbf{t} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta + \tau_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Diferentemente de (1.47), o valor algébrico de  $\tau$  é dessa vez significativo: se positivo indicará que a componente vetorial  $\tau \mathbf{s}$  aponta no mesmo sentido de  $\mathbf{s}$ , se negativo aponta em sentido oposto. Quando  $x_3$  não é um eixo principal, (1.58) continua ainda válida, só que  $\tau$  nessa expressão passa a representar apenas uma das componentes do vetor tensão de cisalhamento na direção de  $\mathbf{s}$  (existe uma outra componente não nula desse vetor na direção de  $x_3$ ; veja Problema 1.22).



**Figura 1.17** (a) Circunferência de Mohr para os vetores tensões que atuam nos planos paralelos à tensão principal  $\sigma_3$ ; (b) componentes dos vetores tensões que atuam nos planos perpendiculares aos eixos  $x_1$  e  $x_2$  (estão indicadas as duas faces de cada plano); (c) componentes  $\sigma$  e  $\tau$  do vetor tensão que atua no plano de normal  $\mathbf{n}$ .

Para um estado de tensão com  $\tau_{13} = \tau_{23} = 0$ , uma simples inspeção da circunferência de Mohr mostra que duas tensões principais são dadas por (1.63) e que a máxima tensão de cisalhamento, em planos paralelos a  $x_3$ , é igual ao raio da circunferência:  $\sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)/2]^2 + \tau_{12}^2}$  ou  $(\sigma_I - \sigma_{II})/2$ .

**Exemplo 1.4** Um sólido apresenta o seguinte estado de tensão em um ponto

$$\begin{bmatrix} 10000 & -4000 & 0 \\ -4000 & 6000 & 0 \\ 0 & 0 & -2000 \end{bmatrix} \text{ kPa,}$$

cujo esboço é dado na Figura 1.18.

A circunferência de Mohr que representa os vetores tensões que atuam em planos paralelos à tensão principal  $-2000$  kPa tem centro em

$$\left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right) = \left( \frac{10000 + 6000}{2}, 0 \right) = (8000, 0) \text{ kPa.}$$

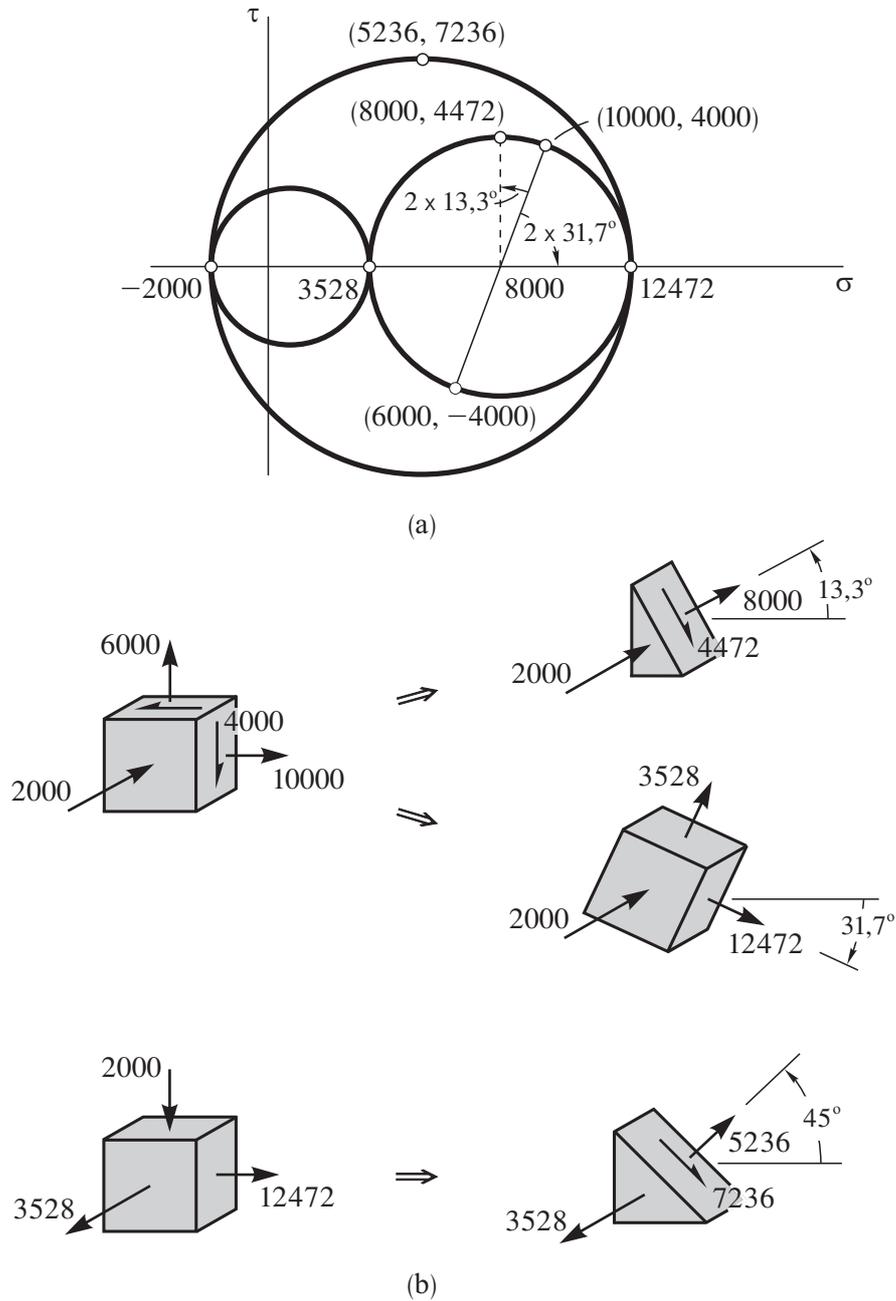
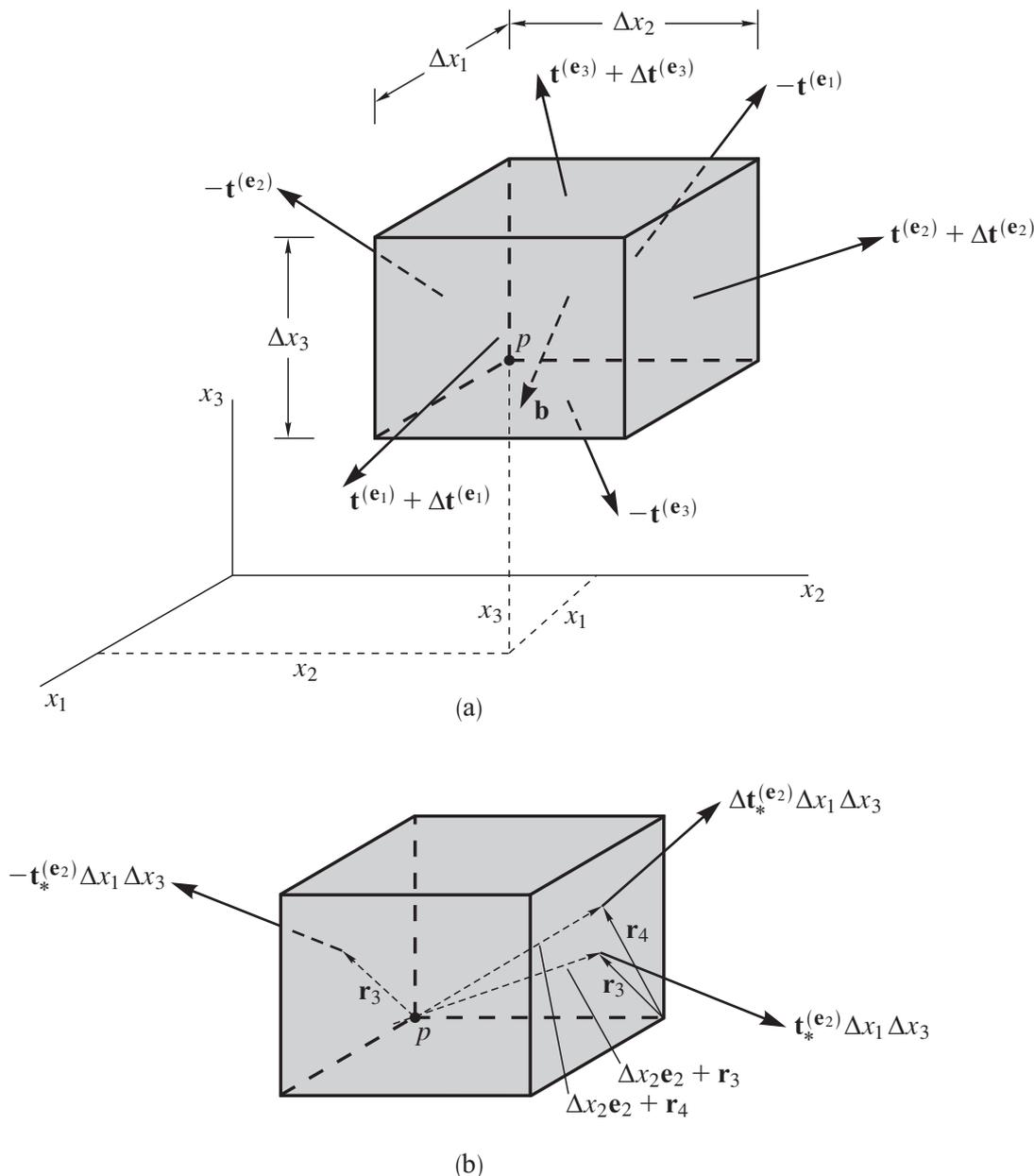


Figura 1.19 Exemplo 1.4: (a) circunferências de Mohr; (b) alguns vetores tensões.

## 1.7 Equações de equilíbrio

Para examinar a variação do tensor tensão ponto a ponto no sólido, consideremos o paralelepípedo, não necessariamente pequeno, indicado na Figura 1.20a. O paralelepípedo é extraído do interior do sólido, seccionando o sólido por planos perpendiculares aos eixos coordenados, com três desses planos passando pelo ponto  $p$ .

Os vetores tensões  $-\mathbf{t}^{(e_i)}$  ou  $\mathbf{t}^{(e_i)} + \Delta\mathbf{t}^{(e_i)}$  podem variar ponto a ponto nas faces onde atuam, assim como a força de volume  $\mathbf{b}$  pode variar ponto a ponto no paralelepípedo. Destacamos na Figura 1.20b a força resultante  $-\mathbf{t}_*^{(e_2)} \Delta x_1 \Delta x_3$  que atua na face negativa perpendicular ao eixo  $x_2$ , com ponto de aplicação em  $\mathbf{r}_3$  (não necessariamente no centróide da face), e a força resultante  $(\mathbf{t}_*^{(e_2)} + \Delta\mathbf{t}_*^{(e_2)}) \Delta x_1 \Delta x_3$  que atua na correspondente face positiva (veja o significado de  $\mathbf{t}_*^{(e_2)}$  na



**Figura 1.20** (a) Paralelepípedo extraído do sólido com as faces perpendiculares aos eixos coordenados; (b) o ponto de aplicação da força  $-\mathbf{t}_*^{(e_2)} \Delta x_1 \Delta x_3$  é definido pelo vetor  $\mathbf{r}_3$ , o da força  $\mathbf{t}_*^{(e_2)} \Delta x_1 \Delta x_3$  é definido pelo vetor  $\Delta x_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{r}_3$  e o do acréscimo de força  $\Delta \mathbf{t}_*^{(e_2)} \Delta x_1 \Delta x_3$  é definido pelo vetor  $\Delta x_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{r}_4$ .

página 6). A força que atua na face positiva é desmembrada em duas parcelas: uma das parcelas é a força  $\mathbf{t}_*^{(e_2)} \Delta x_1 \Delta x_3$ , de mesma intensidade que a força que atua na face negativa e com ponto de aplicação em  $\Delta x_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{r}_3$ , e a outra parcela é o acréscimo  $\Delta \mathbf{t}_*^{(e_2)} \Delta x_1 \Delta x_3$  sofrido pela força ao se passar de uma face para outra, com ponto de aplicação em  $\Delta x_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{r}_4$ . Analogamente, a força resultante associada à força de volume é  $\mathbf{b}_* \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ . Não indicamos na Figura 1.20b as forças que atuam nas demais faces e nem a força de volume, simplesmente para não sobrecarregar o desenho.

O momento de uma força em relação ao ponto  $p$  é o produto vetorial do vetor que define o ponto de aplicação da força em relação a  $p$  pela força propriamente dita. Assim, o momento das forças indicadas na Figura 1.20b é

## Capítulo 2

# Deformação

O objetivo principal deste capítulo é quantificar localmente a mudança de forma e de volume sofrida por um sólido quando submetido a deslocamentos. Supor, como antes, que o sólido seja um meio contínuo permite tratar essa mudança usando o conceito de *deformação*.

### 2.1 Configuração, transformação e deformação

Admitir que o sólido seja contínuo é supor que seja formado por pontos materiais que se distribuem continuamente no volume. É também supor que cada ponto material ocupe uma, e somente uma, posição no espaço num dado tempo  $t$ . À região do espaço definida pelas posições dos pontos materiais damos o nome de *configuração*, observando que uma mesma região pode corresponder a duas configurações distintas desde que algum ponto material ocupe posições diferentes quando se muda de uma configuração para outra. Por exemplo, a rotação de um sólido esférico, de um ângulo diferente de  $360^\circ$  ou múltiplos, em torno de um eixo diametral implicará uma mudança de configuração, mas a região do espaço por ele ocupada permanecerá a mesma.

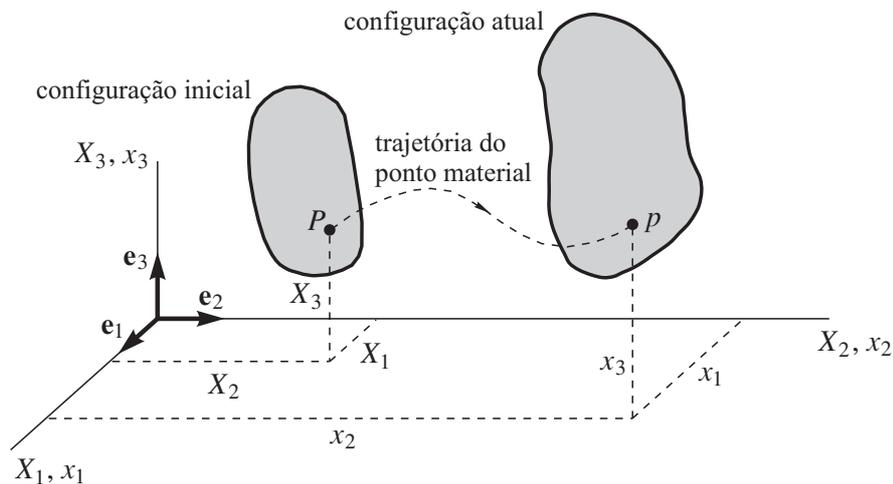
Uma configuração conhecida num tempo fixo  $t_r$  é denominada *configuração de referência*. Quando  $t_r = 0$ , ou seja, a configuração é conhecida no instante inicial da observação, a configuração de referência é denominada *configuração inicial*. A configuração é dita *atual* ou *corrente* se esta refere-se ao instante corrente  $t$  no qual desejamos conhecê-la.

No texto, a configuração de referência será sempre a inicial e as quantidades a ela referidas serão normalmente identificadas por letras maiúsculas, identificando-se por letras minúsculas as que se referem à configuração atual.

As configurações inicial e atual de um sólido estão representadas na Figura 2.1. Referindo-se aos sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais  $X_1X_2X_3$  e  $x_1x_2x_3$ , um ponto material é identificado na configuração inicial por  $P$  e na configuração atual por  $p$ , para onde se desloca segundo uma dada trajetória. As coordenadas  $X_1, X_2, X_3$  que identificam  $P$  são denominadas *coordenadas lagrangianas*<sup>1</sup> ou *materiais*; as coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  que identificam  $p$  são denominadas *coordenadas eulerianas*

---

<sup>1</sup>Joseph Louis Lagrange, matemático francês nascido em Turim em 1736, falecido em Paris em 1813.



**Figura 2.1** Um ponto material na configuração inicial é localizado pelas coordenadas lagrangianas  $X_i$ , e na configuração atual pelas coordenadas eulerianas  $x_i$ .

ou *espaciais*. Os vetores unitários dos sistemas  $X_1X_2X_3$  e  $x_1x_2x_3$  coincidem, pois as coordenadas lagrangianas e eulerianas estão sendo aqui medidas nos mesmos eixos. Chamaremos de  $e_1, e_2, e_3$  esses vetores em ambos os sistemas. As coordenadas lagrangianas podem referir-se a qualquer configuração de referência (configuração conhecida), não necessariamente a inicial. A configuração do sólido em qualquer tempo  $t$  pode ser expressa em função da configuração inicial por meio de

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

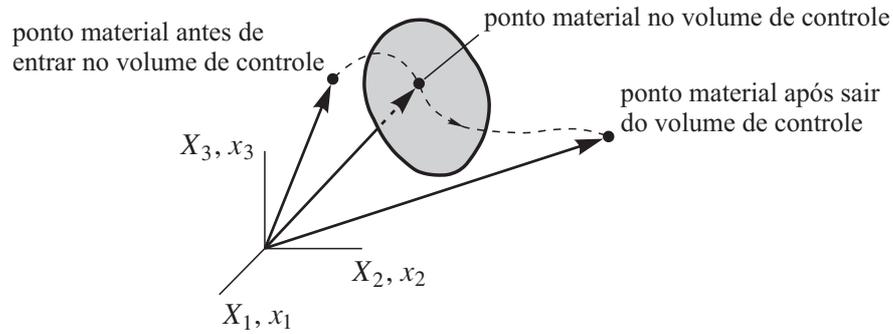
À mudança de configuração entre dois dados instantes denominamos *transformação*. Para um valor fixo de  $X_1, X_2$  e  $X_3$ , a expressão (2.1) descreve no tempo a trajetória do ponto material que na configuração inicial posiciona-se nas coordenadas  $(X_1, X_2, X_3)$ ; para um valor fixo de  $t$ , a expressão representa a transformação da configuração inicial na configuração do instante  $t$ .

Se numa transformação um ponto material desloca-se em relação a algum outro ponto material de sua vizinhança, dizemos então que a transformação envolve *deformação*. Nessas condições, o sólido sofre mudança de forma ou de volume ao passar de uma configuração para outra. Conceito puramente geométrico, a deformação pode ser quantificada de várias maneiras e independentemente de qualquer princípio da física. Apresentaremos neste capítulo a medida de deformação mais conhecida na mecânica dos sólidos: o *tensor deformação de Green*.<sup>2</sup>

#### Comentários 2.1:

- Para um valor fixo de  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , que define um ponto no espaço, perceba de (2.1) que diferentes pontos materiais (diferentes coordenadas  $(X_1, X_2, X_3)$ ) podem passar por esse ponto em tempos diferentes.
- Qualquer quantidade, como, por exemplo, a massa específica  $\rho$ , pode ser matematicamente descrita de duas formas. Numa delas utilizamos a *descrição lagrangiana* ou *material* em que

<sup>2</sup>George Green, matemático inglês nascido em Sneinton em 1793, falecido na mesma localidade em 1841.



**Figura 2.2** Ponto material dentro e fora de um volume de controle.

$X_i$  e  $t$  são as variáveis independentes:

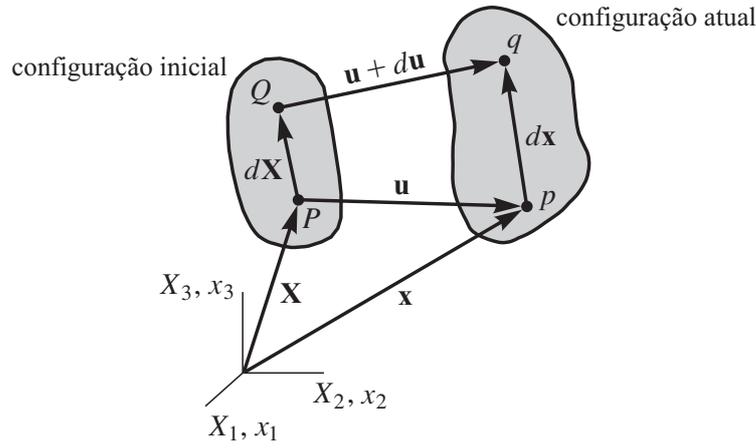
$$\rho = \rho(X_1, X_2, X_3, t). \quad (2.2)$$

Na outra utilizamos a *descrição euleriana* ou *espacial* em que  $x_i$  e  $t$  são agora as variáveis independentes:

$$\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t). \quad (2.3)$$

Para um valor fixo de  $X_i$ , a expressão (2.2) descreve como a massa específica do ponto material definido por  $X_i$  varia com o tempo. O ponto material está em foco. Por outro lado, para um valor fixo de  $x_i$ , que define um ponto no espaço por onde passam provavelmente vários pontos materiais, a expressão (2.3) descreve como a massa específica no ponto  $x_i$  varia com o tempo. Uma posição no espaço, não mais um ponto material, está agora em foco.

- Enquanto a descrição euleriana é de uso limitado na mecânica dos sólidos por não se conhecer a configuração atual (domínio de  $x_i$ ), ela é a descrição preferida na mecânica dos fluidos. Dois fatores contribuem para isso: (a) a ideia de uma configuração específica tem pouco significado para os fluidos por não possuírem uma geometria natural (adaptam-se à forma do reservatório que os contém); (b) a cinemática dos fluidos é descrita a partir do campo de velocidade e não do campo de deslocamento como acontece com os sólidos (o termo “campo” enfatiza que a quantidade a que se refere, aqui representada pela velocidade ou deslocamento, varia de ponto a ponto no corpo, ou seja, é uma função da posição). Assim, a mecânica dos fluidos adota a descrição euleriana após definir no espaço uma região de interesse na qual procura determinar a velocidade, pressão, massa específica, etc., do fluido que por ali passa. Essa região conhecida, denominada *volume de controle* e que permanece inalterada com o tempo, é usada como domínio de  $x_i$ . A Figura 2.2 mostra um ponto material dentro e fora de um volume de controle.
- Este capítulo é desenvolvido com base na descrição lagrangiana. Devido à tensão de Cauchy ser definida na configuração atual, a descrição euleriana foi empregada no desenvolvimento do Capítulo 1 por uma questão de conveniência. Alguns dos resultados lá obtidos serão transformados para a descrição lagrangiana no Capítulo 3.



**Figura 2.3** Configurações antes e depois da transformação.

## 2.2 Gradiente da transformação

A configuração do sólido num tempo  $t$  é expressa em função da configuração inicial por meio de (2.1), que reescrevemos como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X_1, X_2, X_3, t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (2.4)$$

Para um dado instante  $t$ , a expressão (2.4) representa a transformação da configuração inicial na configuração do instante  $t$  (veja Figura 2.3). O conceito de deformação envolve, necessariamente, a comparação entre duas configurações. O tempo gasto ou a trajetória seguida entre as duas configurações são dados irrelevantes.

Dois pontos materiais vizinhos são identificados por  $P$  e  $Q$  na configuração inicial e por  $p$  e  $q$  na configuração atual, após sofrerem os deslocamentos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ . O comprimento e a direção do segmento  $PQ$  mudam quando passa para  $pq$ , mas consideramos que o segmento mantenha-se reto, mesmo que haja deformação, por ser infinitesimal (veja Exemplo 2.1). Da Figura 2.3,

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Dessa relação, ou da própria Figura 2.3,

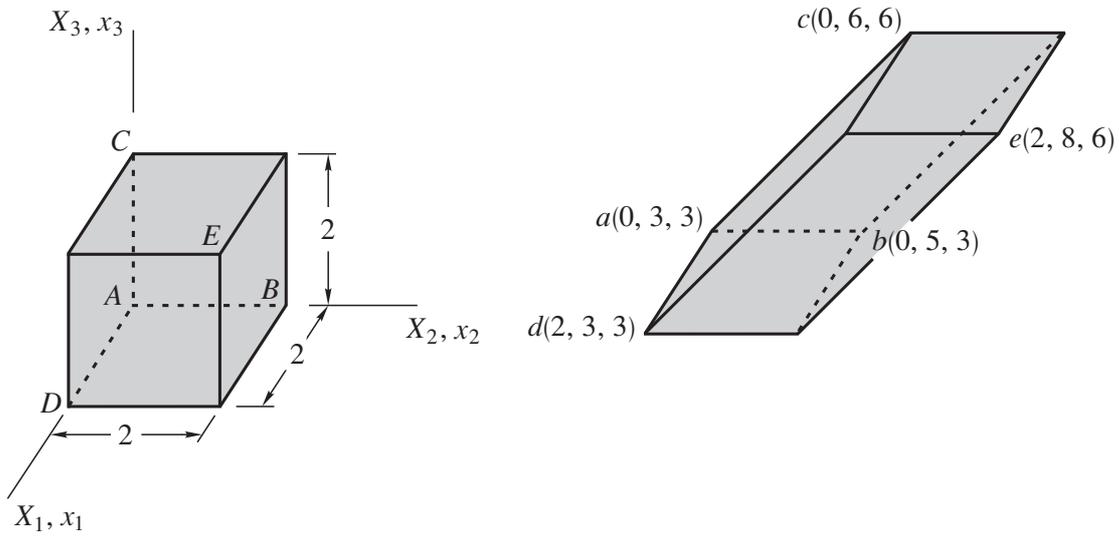
$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + d\mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Se  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  é uma função contínua e diferenciável de  $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$ , hipótese necessariamente associada à distribuição contínua dos pontos materiais no volume, podemos escrever

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3 \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

ou, simbolicamente,

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3} \end{bmatrix} d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.8)$$



**Figura 2.4** Exemplo 2.2: transformação homogênea de um cubo de aresta 2 (unidade não indicada).

Perceba pela série que a forma linear é também válida, quer a transformação seja ou não homogênea, na identificação de pontos infinitamente próximos a  $p$ ,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_P} d\mathbf{X},$$

como antecipado em (2.8). Fica claro por esse procedimento que um vetor infinitesimal  $d\mathbf{X}$  transforma-se num outro vetor infinitesimal  $d\mathbf{x}$  e não numa curva. ■

**Exemplo 2.2** Uma transformação homogênea é responsável pela mudança de configuração, indicada na Figura 2.4, de um sólido inicialmente cúbico. As fibras paralelas a  $X_1$  mantêm o mesmo comprimento e direção. Determine o gradiente  $\mathbf{F}$  da transformação, a transformação  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X_1, X_2, X_3)$  e o campo de deslocamento  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(X_1, X_2, X_3)$ .

Omitimos o tempo que separa as duas configurações por ser um dado irrelevante ao problema. Da transformação de  $\overrightarrow{AB}$  em  $\overrightarrow{ab}$ ,

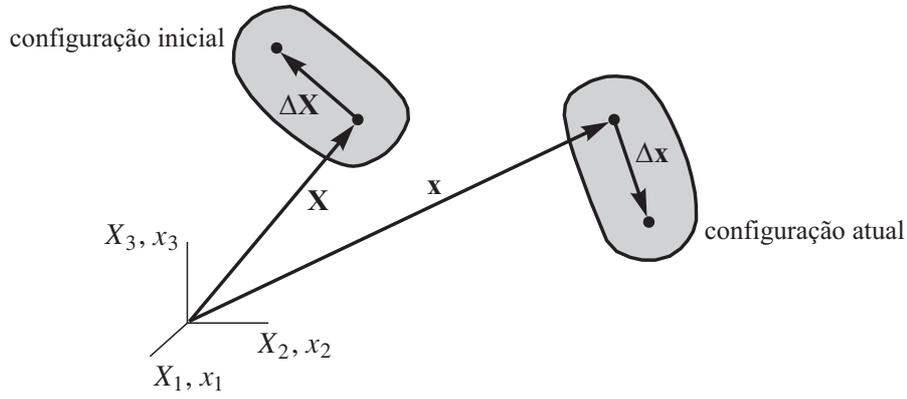
$$\{ab\} = \mathbf{F} \{AB\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$F_{12} = 0 \quad F_{22} = 1 \quad F_{32} = 0$$

onde  $\{AB\}$  e  $\{ab\}$  contêm as componentes dos vetores  $\overrightarrow{AB}$  em  $\overrightarrow{ab}$ , respectivamente. O procedimento acima é válido porque a transformação é homogênea e  $\mathbf{F}$ , que independe de  $X_i$ , transformará qualquer vetor, não necessariamente infinitesimal, num outro vetor (veja Exemplo 2.1). Da transformação de  $\overrightarrow{AC}$  em  $\overrightarrow{ac}$ ,

$$\{ac\} = \mathbf{F} \{AC\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$F_{13} = 0 \quad F_{23} = F_{33} = \frac{3}{2}.$$



**Figura 2.5** Exemplo 2.3: sólido sob movimento puro de corpo rígido.

**Exemplo 2.3** Mostre que num *movimento de corpo rígido* (movimento que não provoca deformação) a matriz  $\mathbf{F}$  é ortogonal (veja Figura 2.5).

Num movimento puro de corpo rígido a transformação é necessariamente homogênea, com a propriedade de transformar um vetor qualquer  $\Delta\mathbf{X}$  no vetor

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{F} \Delta\mathbf{X}$$

de igual comprimento:

$$\Delta\mathbf{X}^T \Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{x}^T \Delta\mathbf{x} = (\mathbf{F} \Delta\mathbf{X})^T \mathbf{F} \Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \Delta\mathbf{X}$$

ou

$$\Delta\mathbf{X}^T (\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \Delta\mathbf{X} = 0.$$

Visto que a matriz entre parênteses é simétrica, ou seja,  $\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{F})^T$ , a expressão é válida para qualquer vetor  $\Delta\mathbf{X}$  se, e somente se,  $\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{0}$  (veja Problema 1.3; “se e somente se” significa que é uma condição necessária e suficiente). Portanto,

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}. \quad \blacksquare$$

**Exemplo 2.4** Discuta a transformação envolvida num movimento de corpo rígido.

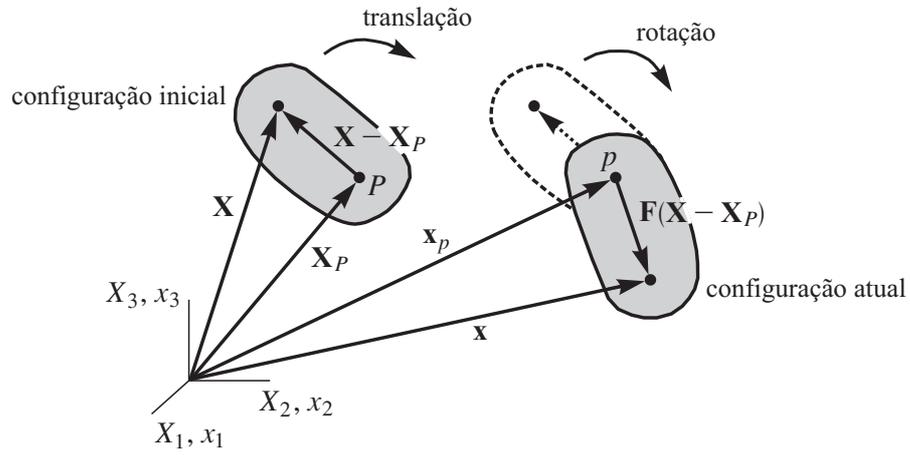
Dada a homogeneidade da transformação nesse movimento, escrevemos com base nos Exemplos 2.1 e 2.3 que

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_p = \mathbf{F} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_p) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{F} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_p) + \mathbf{x}_p$$

onde  $\mathbf{F}$  é independente de  $X_i$  e ortogonal, e  $\mathbf{X}_p$  identifica um dado ponto material na configuração inicial (veja Figura 2.6). A translação do sólido é levada em conta no vetor posição  $\mathbf{x}_p$  e a rotação em torno desse ponto é quantificada por  $\mathbf{F} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_p)$ .

*Translação pura de corpo rígido* Se houvesse apenas translação, o vetor  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$  se moveria paralelamente ao vetor  $\mathbf{X} - \mathbf{X}_p$  e, portanto,  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ :

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_p = \mathbf{X} - \mathbf{X}_p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{x}_p - \mathbf{X}_p.$$



**Figura 2.6** Exemplo 2.4: sólido rigidamente transladado e rotacionado.

O vetor deslocamento  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{x}_p - \mathbf{X}_P$  independeria de  $X_i$ , ou seja, todos os pontos materiais seriam deslocados da mesma quantidade  $\mathbf{x}_p - \mathbf{X}_P$ .

*Rotação pura de corpo rígido* Se houvesse apenas rotação em torno do ponto  $\mathbf{X}_P = \mathbf{x}_p$ , então

$$\mathbf{x} - \mathbf{X}_P = \mathbf{F}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_P) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_P) + \mathbf{X}_P.$$

No caso particular de a rotação ser em torno da origem  $\mathbf{X}_P = \mathbf{x}_p = \mathbf{0}$ , a transformação se reduziria a

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{X}. \quad \blacksquare$$

## 2.3 Tensor deformação

Para quantificar a deformação que ocorre no sólido numa dada transformação, voltemos à Figura 2.3 denominando  $dS$  o comprimento do vetor  $d\mathbf{X}$  e  $ds$  o comprimento do vetor  $d\mathbf{x}$ . Assim,

$$dS^2 = d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} \quad ds^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = (\mathbf{F} d\mathbf{X})^T \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (2.14)$$

Dividindo ambos os membros de

$$ds^2 - dS^2 = d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \quad (2.15)$$

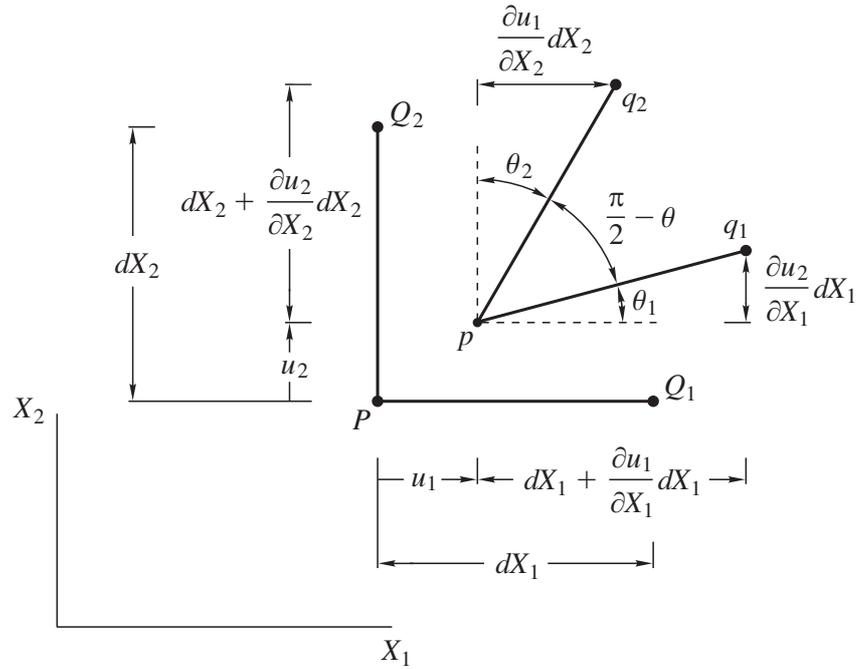
por  $2 dS^2$ , obtemos

$$\frac{ds^2 - dS^2}{2 dS^2} = \frac{d\mathbf{X}^T}{dS} \left( \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}}{2} \right) \frac{d\mathbf{X}}{dS} = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{N}. \quad (2.16)$$

O vetor unitário  $\mathbf{N}$  está na direção de  $d\mathbf{X}$  e

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}}{2} = \frac{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}}{2} \quad (2.17)$$

é o *tensor deformação de Green*. É um tensor de segunda ordem simétrico ( $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^T$ ) que apresenta, portanto, seis componentes independentes. É uma quantidade essencial na caracterização do material, como veremos no Capítulo 4. A inclusão do divisor 2 em (2.16) se dá por uma questão de conveniência,



**Figura 2.8** Deslocamento dos pontos  $P$ ,  $Q_1$  e  $Q_2$ , inicialmente contidos no plano  $X_1X_2$ , para as posições  $p$ ,  $q_1$  e  $q_2$ , não necessariamente contidas no plano  $X_1X_2$ .

ou seja,  $\epsilon_1$  representa uma medida de deformação segundo  $(ds_1^2 - dS_1^2) / 2dS_1^2$  para segmentos inicialmente paralelos ao eixo  $X_1$ .

Os pontos  $P$  e  $p$ , de abscissas  $X_1$  e  $X_1 + u_1$  respectivamente, indicam que o comprimento da projeção do segmento  $\overrightarrow{PQ_1}$  sobre o eixo  $X_1$  muda de  $dX_1$  para  $(1 + \partial u_1 / \partial X_1) dX_1$  com a transformação. A mudança relativa do comprimento da projeção,

$$\frac{(1 + \partial u_1 / \partial X_1) dX_1 - dX_1}{dX_1} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \quad (2.28)$$

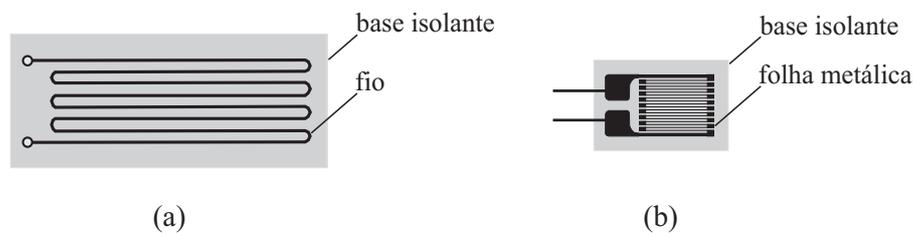
é a pequena deformação  $\epsilon_1$  dada em (2.25). Poderíamos também argumentar que numa pequena deformação a fibra pouco muda de comprimento, ou seja,  $ds_1 \approx dS_1$ . Assim, a hipótese  $|\partial u_i / \partial X_j| \ll 1$  permitiria escrever

$$\epsilon_1 = \frac{ds_1^2 - dS_1^2}{2dS_1^2} = \frac{(ds_1 + dS_1)(ds_1 - dS_1)}{2dS_1^2} \approx \frac{2dS_1(ds_1 - dS_1)}{2dS_1^2} = \frac{ds_1 - dS_1}{dS_1}, \quad (2.29)$$

que é uma forma bastante familiar na engenharia de se ver essa componente. Interpretações análogas podem ser dadas às componentes  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_3$ .

Consideremos, agora, os dois segmentos  $\overrightarrow{PQ_1}$  e  $\overrightarrow{PQ_2}$ , inicialmente paralelos aos eixos  $X_1$  e  $X_2$ . Com a transformação, os segmentos passam para  $\overrightarrow{pq_1}$  e  $\overrightarrow{pq_2}$ , não necessariamente contidos no plano  $X_1X_2$ , formando entre eles um ângulo  $\pi/2 - \theta$ . Assim,

$$\begin{aligned} \{pq_1\}^T \{pq_2\} &= (\mathbf{F} \{PQ_1\})^T \mathbf{F} \{PQ_2\} = \{PQ_1\}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \{PQ_2\} \\ &= \{PQ_1\}^T (2\epsilon + \mathbf{I}) \{PQ_2\} = 2 \{PQ_1\}^T \epsilon \{PQ_2\} + \{PQ_1\}^T \{PQ_2\} \\ &= 2 dS_1 dS_2 \mathbf{N}_1^T \epsilon \mathbf{N}_2 \end{aligned} \quad (2.30)$$



**Figura 2.9** Extensômetro de: (a) fio condutor elétrico; (b) folha metálica.

## 2.7 Medição experimental

Dentre os vários dispositivos empregados na medição experimental da deformação, fazemos um breve comentário sobre o *extensômetro* ou *strain gage* com o simples objetivo de associar a medida por ele efetuada a expressões apresentadas anteriormente. O extensômetro mede a deformação normal  $\epsilon_N$  na superfície de um sólido e, como concebido originalmente, consiste de um fio condutor elétrico preso a uma base isolante, como indicado na figura 2.9a. A base é colada na superfície do sólido, no ponto e direção onde se deseja medir a deformação. Quando o sólido se deforma, o fio do dispositivo também se deforma, variando sua resistência elétrica. É possível determinar a deformação a partir da variação da resistência elétrica do fio (Dally e Riley, 2005). Hoje o fio é substituído por algo semelhante obtido do corte de uma folha metálica muito fina (veja Figura 2.9b). Perceba a preocupação em se reduzir ao máximo as dimensões do extensômetro, dispondo o fio em várias dobras, para aproximar a deformação medida daquela que realmente ocorre no ponto em torno do qual se faz a colagem.

Suponha que o ponto  $P$  na Figura 2.10a esteja na superfície de um sólido e que um sistema cartesiano é escolhido de maneira que o plano  $X_1X_2$  seja tangente à superfície no ponto. Se três deformações normais  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$  e  $\epsilon_c$  distintas forem medidas no ponto, qualquer outra deformação, normal ou de cisalhamento, no ponto e contida no plano  $X_1X_2$  pode ser determinada a partir delas. De fato, usando (2.22) escrevemos

$$\epsilon_a = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{N} = \epsilon_1 \cos^2 \theta_a + \epsilon_2 \sin^2 \theta_a + \gamma_{12} \sin \theta_a \cos \theta_a \quad (2.39)$$

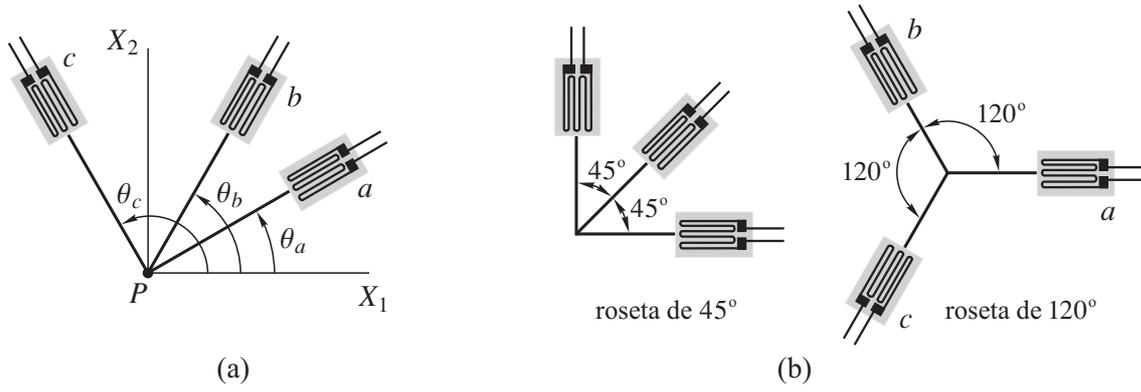
onde  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos \theta_a & \sin \theta_a & 0 \end{bmatrix}^T$  segundo a Figura 2.10a. De maneira análoga,

$$\epsilon_b = \epsilon_1 \cos^2 \theta_b + \epsilon_2 \sin^2 \theta_b + \gamma_{12} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad \epsilon_c = \epsilon_1 \cos^2 \theta_c + \epsilon_2 \sin^2 \theta_c + \gamma_{12} \sin \theta_c \cos \theta_c. \quad (2.40)$$

Essas expressões das deformações normais poderiam também ter sido obtidas adaptando-se a primeira das equações (1.58) pela troca das componentes da tensão pelas da deformação. Temos com (2.39) e (2.40) um número suficiente de equações para determinar as componentes  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  e  $\gamma_{12}/2$  do tensor deformação.

Nenhuma deformação na direção de  $X_3$ , normal ou de cisalhamento, é diretamente medida ou calculada. Sua identificação requer informações adicionais (veja Problema 5.1).

O agrupamento dos três extensômetros é chamado de *roseta*. A Figura 2.10b mostra as rosetas de  $45^\circ$  e  $120^\circ$ . Se dois extensômetros são colados nas direções de  $X_1$  e  $X_2$ , como poderá ocorrer com a



**Figura 2.10** (a) Direções nas quais são medidas as três deformações normais; (b) rosetas de 45° e 120°.

roseta de 45°, então  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são as próprias medidas desses extensômetros restando a solução de uma única equação para a determinação de  $\gamma_{12}$ . Em qualquer caso, um extensômetro poderá sempre ser colado na direção de  $X_1$  e a solução do sistema envolver apenas duas equações para a determinação de  $\epsilon_2$  e  $\gamma_{12}$ .

**Exemplo 2.7** Sabendo-se que as deformações normais obtidas pela roseta de 120° indicada na Figura 2.10b são

$$\epsilon_a = 44 \cdot 10^{-6} \quad \epsilon_b = -55 \cdot 10^{-6} \quad \epsilon_c = 66 \cdot 10^{-6},$$

determine  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  e  $\gamma_{12}$ .

Considerando que  $\theta_a = 0^\circ$ ,  $\theta_b = 120^\circ$  e  $\theta_c = 240^\circ$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= \epsilon_1 \cos^2 0^\circ + \epsilon_2 \sin^2 0^\circ + \gamma_{12} \sin 0^\circ \cos 0^\circ \\ \epsilon_b &= \epsilon_1 \cos^2 120^\circ + \epsilon_2 \sin^2 120^\circ + \gamma_{12} \sin 120^\circ \cos 120^\circ \\ \epsilon_c &= \epsilon_1 \cos^2 240^\circ + \epsilon_2 \sin^2 240^\circ + \gamma_{12} \sin 240^\circ \cos 240^\circ. \end{aligned}$$

Portanto,

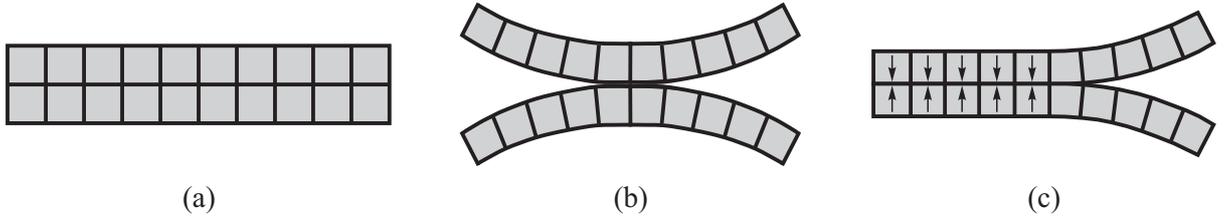
$$\epsilon_a = \epsilon_1 \quad \epsilon_b = \frac{1}{4}\epsilon_1 + \frac{3}{4}\epsilon_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{12} \quad \epsilon_c = \frac{1}{4}\epsilon_1 + \frac{3}{4}\epsilon_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{12}$$

ou

$$\epsilon_1 = \epsilon_a = 44 \cdot 10^{-6} \quad \epsilon_2 = \frac{-\epsilon_a + 2\epsilon_b + 2\epsilon_c}{3} = -7,3 \cdot 10^{-6} \quad \gamma_{12} = \frac{-2\epsilon_b + 2\epsilon_c}{\sqrt{3}} = 139,7 \cdot 10^{-6}. \quad \blacksquare$$

## 2.8 Compatibilidade das componentes do tensor deformação

Dados os deslocamentos  $u_1(X_1, X_2, X_3)$ ,  $u_2(X_1, X_2, X_3)$  e  $u_3(X_1, X_2, X_3)$ , determinamos as seis componentes independentes da deformação usando (2.24) ou, de uma maneira mais restrita, (2.25). Se, ao contrário, forem dadas as componentes da deformação, teremos um sistema de seis equações diferenciais parciais com apenas três incógnitas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ . É de se esperar que o sistema não tenha solução para uma deformação com componentes arbitrariamente fixadas.



**Figura 2.11** (a) Sólido na configuração inicial, cortado em pedaços; (b) sólido sob campo de deformação especificado arbitrariamente; (c) campo de deformação adicional necessário na recomposição do sólido.

Um raciocínio físico pode servir de apoio às considerações de ordem matemática. Imaginemos que o sólido seja cortado em pedaços e, em seguida, que um campo de deformação seja especificado arbitrariamente. Tentemos reconstituir o sólido primitivo reunindo todos os pedaços de modo que as faces destes se adaptem umas às outras, tal como ocorria antes da deformação. Pode não ser possível reconstituir o sólido primitivo sem impor uma deformação adicional a cada pedaço. O sólido deformado deixará de ser contínuo, aparecendo rachas (veja Figura 2.11). Para um perfeito encaixe, as componentes de  $\epsilon$  precisam satisfazer certas condições que garantam à deformação de cada pedaço ser relacionada, ou compatível, com a deformação dos pedaços adjacentes. Tais condições podem ser obtidas eliminando-se  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  das relações deformação-deslocamento, após supor que sejam funções contínuas, como mostraremos a seguir usando as relações linearizadas (2.25). Obter essas condições para as relações não lineares (2.24) não é uma tarefa trivial (Malvern, 1969).

Das derivações

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial X_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1 \partial X_2^2} \quad \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_1^2 \partial X_2} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1 \partial X_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_1^2 \partial X_2}, \quad (2.41)$$

obtemos

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2}. \quad (2.42)$$

De maneira análoga, as derivações

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial X_2 \partial X_3} &= \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1 \partial X_2 \partial X_3} & \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1 \partial X_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1 \partial X_3} \end{aligned} \quad (2.43)$$

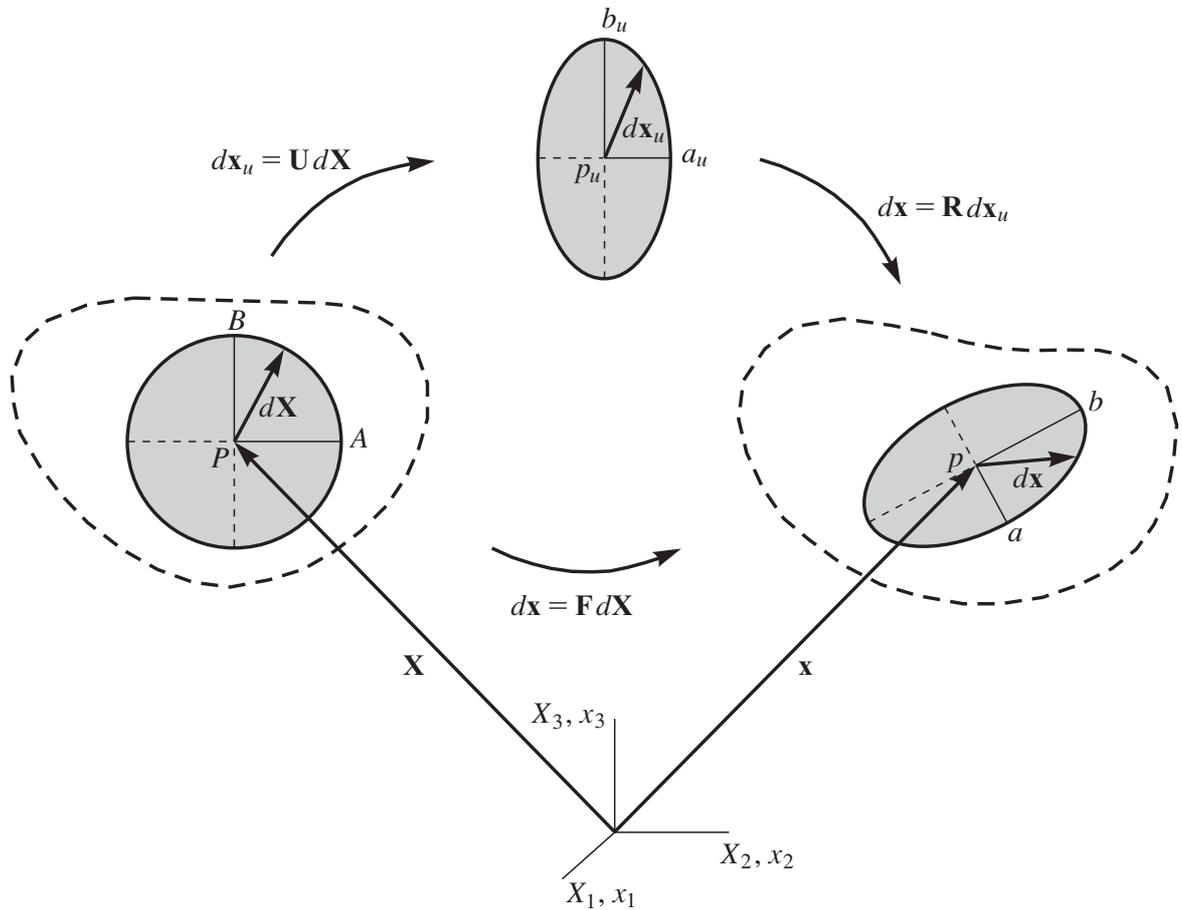
resulta em

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left( -\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} \right). \quad (2.44)$$

A permutação cíclica das variáveis  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  em (2.42) e (2.44) resulta nas demais relações.

Coletando os resultados,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} &= \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} &= \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_3}{\partial X_1^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} &= \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_3}{\partial X_2^2} & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial X_2 \partial X_3} &= \frac{\partial}{\partial X_1} \left( -\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} \right) \end{aligned}$$



**Figura 2.12** Ação de  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{R}$  em transformar um volume originalmente esférico na vizinhança do ponto material  $P$ . As fibras  $PA$  e  $PB$  estão supostamente alinhadas com as direções principais de  $\mathbf{U}$ .

Ao definir o tensor de deformação de Green, comentamos que a ortogonalidade de  $\mathbf{F}$  implicaria deformação nula no ponto. Agora, com a decomposição polar, vemos mais claramente que essa ortogonalidade representa uma rotação de corpo rígido, ou seja,  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$  pois  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ .

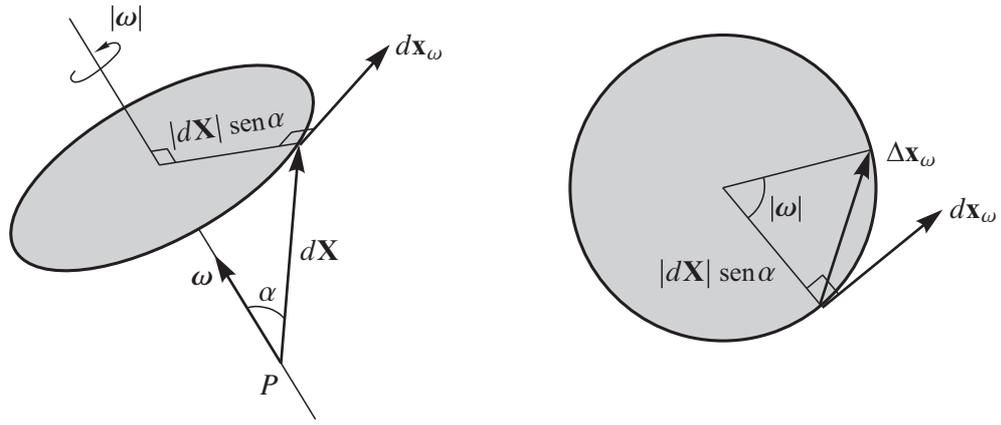
Por não afetar a transformação de  $d\mathbf{X}$  em  $d\mathbf{x}$  (não há mudança de comprimento ou orientação), uma translação de corpo rígido pode ser imaginada ocorrer antes da primeira etapa ( $\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{I}$ ), entre as duas etapas ( $\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{I}$ ), depois da segunda etapa ( $\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{I}\mathbf{R}\mathbf{U}$ ), ou mesmo simultaneamente a elas. O efeito da translação é representado pelo tensor identidade  $\mathbf{I}$ . A Figura 2.12 ilustra a ação de  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{R}$  em transformar um volume originalmente esférico na vizinhança do ponto material  $P$ . As fibras  $PA$  e  $PB$ , supostamente alinhadas com as direções principais de  $\mathbf{U}$ , são apenas alongadas ou encurtadas sob a ação do tensor, sem sofrer nenhuma rotação. O elipsóide que resulta da ação de  $\mathbf{U}$  é rigidamente rotacionado pela ação de  $\mathbf{R}$  (veja Problema 2.22). Mostremos a seguir como identificar  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{U}$ .

O tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.50)$$

é simétrico positivo definido. De fato, a simetria é facilmente verificada por meio de

$$\mathbf{C}^T = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^T = \mathbf{F}^T (\mathbf{F}^T)^T = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{C}. \quad (2.51)$$



**Figura 2.13** A fibra  $d\mathbf{X}$  gira como um corpo rígido de um ângulo  $|\boldsymbol{\omega}|$  em torno de um eixo paralelo ao vetor  $\boldsymbol{\omega}$  passando pelo ponto  $P$ .

A componente  $\omega_i$  do vetor  $\boldsymbol{\omega}$  representa a rotação de corpo rígido de  $d\mathbf{X}$  em torno de um eixo paralelo a  $X_i$  que passa pelo ponto  $P$  (veja Figura 2.3). Usando as componentes  $\omega_i$ , o tensor escreve-se

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

A fibra  $d\mathbf{X}$  da Figura 2.3 é destacada na Figura 2.13. Geometricamente, a expressão (2.65) pode ser obtida dessa figura, na qual indicamos o movimento de  $d\mathbf{X}$  devido exclusivamente à rotação de corpo rígido, de um ângulo  $|\boldsymbol{\omega}|$  em torno de um eixo paralelo ao vetor  $\boldsymbol{\omega}$  passando pelo ponto  $P$ . A rotação faz a extremidade de  $d\mathbf{X}$  girar com um raio

$$|d\mathbf{X}| \sin \alpha, \quad (2.68)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $d\mathbf{X}$  e  $\boldsymbol{\omega}$ . O deslocamento sofrido pela extremidade é

$$|\Delta \mathbf{x}_\omega| = 2(|d\mathbf{X}| \sin \alpha) \sin \frac{|\boldsymbol{\omega}|}{2}. \quad (2.69)$$

Se o ângulo de rotação  $|\boldsymbol{\omega}| \ll 1$  radiano, então  $\sin |\boldsymbol{\omega}|/2 \approx |\boldsymbol{\omega}|/2$  e

$$|\Delta \mathbf{x}_\omega| \approx |\boldsymbol{\omega}| |d\mathbf{X}| \sin \alpha = |d\mathbf{x}_\omega| \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x}_\omega = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{X}. \quad (2.70)$$

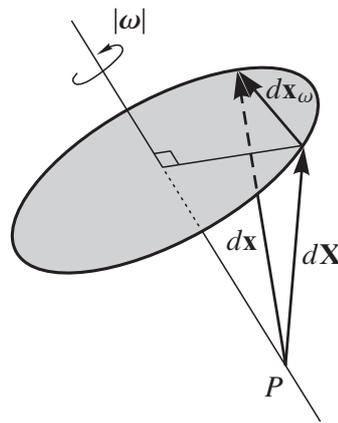
**Exemplo 2.9** Determine  $\boldsymbol{\omega}$  para o sólido do Exemplo 2.6.

Como o campo de deslocamento é

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta - 1 & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix},$$

então

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \theta \end{Bmatrix}.$$



**Figura 2.14** O tensor  $\mathbf{R}$  transforma  $d\mathbf{X}$  em  $d\mathbf{x}$ , enquanto o tensor  $\mathbf{\Omega}$  tranforma  $d\mathbf{X}$  em  $d\mathbf{x}_\omega$  para rotações suficientemente pequenas de modo que o vetor  $d\mathbf{x}_\omega$  é tangente à circunferência (veja Figura 2.13).

tensores  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{\Omega}$  lidam com a rotação em torno de  $P$  de maneira distinta.

- Embora a identificação de  $\omega$  a partir de  $\mathbf{\Omega}$  seja uma tarefa simples, o mesmo não acontece em relação a  $\mathbf{R}$  (Spurrier, 1978; Argyris, 1982). Ou seja, não é trivial identificar para um dado  $\mathbf{R}$  o ângulo de rotação e o eixo em torno do qual ocorre (veja Problema 2.15).
- Sem a restrição  $|H_{ij}| \ll 1$ , a parcela simétrica que aparece na decomposição de  $\mathbf{H}$  não mais representa o tensor pequena deformação e nem a parcela antissimétrica o tensor pequena rotação. Noutras palavras, deixa de ser válida a decomposição aditiva de  $\mathbf{H}$  na soma de uma deformação pura mais uma rotação pura. Consequentemente, na expressão (2.64) esses tensores não mais seriam identificados como lá estão. O tensor rotação  $\mathbf{R}$ , adotado nos casos em que nenhuma restrição é imposta à ordem de grandeza de  $|H_{ij}|$ , não é antissimétrico mas, por ser ortogonal, apresenta, assim como  $\mathbf{\Omega}$ , apenas três componentes independentes.
- Com relação à Figura 2.8, vimos que

$$\theta_1 \approx \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \quad \theta_2 \approx \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \tag{2.73}$$

para  $|H_{ij}| \ll 1$ . Assim, a pequena rotação

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \tag{2.74}$$

em torno de  $X_3$  não ocorreria se  $\theta_1 = \theta_2$ . Interpretações análogas podem ser dadas às componentes  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

## Problemas

**2.1** Verifique as expressões (2.22).

**2.2** Num dado instante, o campo de desloca-

## Capítulo 3

# Outras medidas de tensão

A descrição euleriana foi empregada no Capítulo 1 por ser o caminho natural para definir tensão (vetor e tensor tensão de Cauchy) e estabelecer o equilíbrio, visto que é na configuração atual onde todas as forças, externas e internas, estão presentes e o equilíbrio ocorre. Infelizmente, na forma como são apresentadas, as equações de equilíbrio (1.82) não se prestam a aplicações práticas na mecânica dos sólidos porque se referem a uma configuração desconhecida. Noutras palavras, as equações de equilíbrio precisam ser integradas, mas não conhecemos o domínio das coordenadas eulerianas  $x_i$  ( $= X_i + u_i$ ) por elas embutirem na sua definição os deslocamentos incógnitos  $u_i$ . Precisamos, assim, reescrever as equações nas coordenadas lagrangianas  $X_i$  para tornar referência a configuração inicial (configuração conhecida). Na transformação da configuração atual para a configuração inicial, as mudanças de área e volume sofridas pelo sólido emergem naturalmente nas equações transformadas. Essas mudanças instigam a redefinição da medida de tensão, até então adotada como sendo a de Cauchy. Duas novas medidas são abordadas neste capítulo: a primeira tensão de Piola<sup>1</sup>-Kirchhoff<sup>2</sup> (vetor e tensor) e a segunda tensão de Piola-Kirchhoff (vetor e tensor).

### 3.1 Mudança de volume

Considere que as arestas  $d\mathbf{X}'$ ,  $d\mathbf{X}''$  e  $d\mathbf{X}'''$  do paralelepípedo mostrado na Figura 3.1 na configuração inicial sejam transformadas em  $d\mathbf{x}'$ ,  $d\mathbf{x}''$  e  $d\mathbf{x}'''$  com a deformação. Os volumes do paralelepípedo nas configurações inicial e atual são dados por

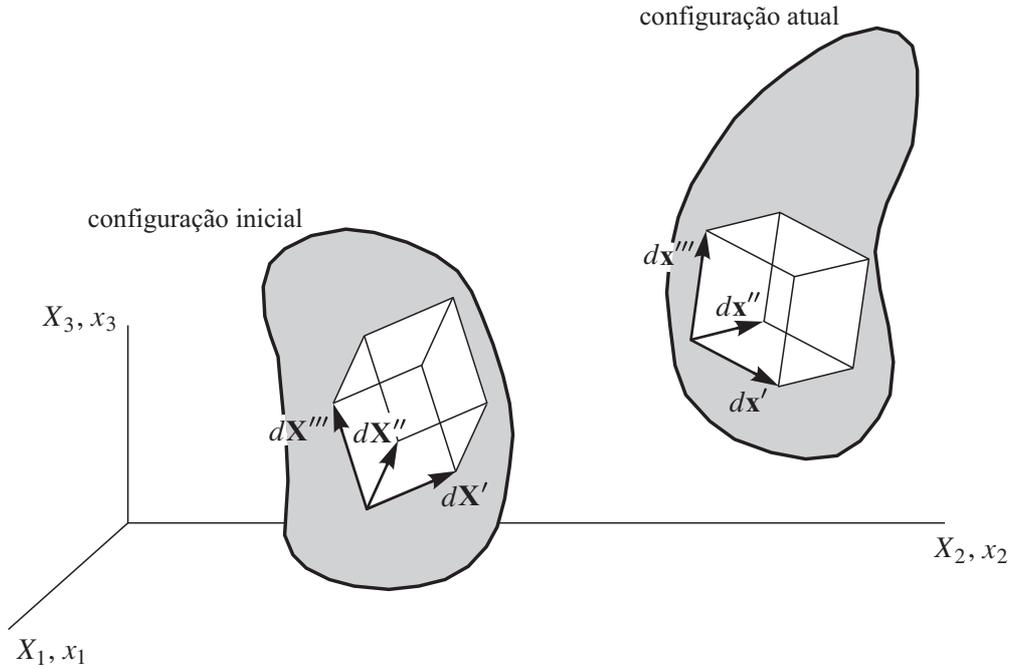
$$dV = d\mathbf{X}''' \cdot (d\mathbf{X}' \times d\mathbf{X}'') \quad dv = d\mathbf{x}''' \cdot (d\mathbf{x}' \times d\mathbf{x}''). \quad (3.1)$$

Sabemos da análise vetorial que o produto misto  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  é igual ao determinante  $\det \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$  da matriz cujas primeira, segunda e terceira colunas são as componentes dos vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} dv &= \det \begin{bmatrix} d\mathbf{x}''' & d\mathbf{x}' & d\mathbf{x}'' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{F} d\mathbf{X}''' & \mathbf{F} d\mathbf{X}' & \mathbf{F} d\mathbf{X}'' \end{bmatrix} \\ &= \det \left( \mathbf{F} \begin{bmatrix} d\mathbf{X}''' & d\mathbf{X}' & d\mathbf{X}'' \end{bmatrix} \right) = \det \mathbf{F} \det \begin{bmatrix} d\mathbf{X}''' & d\mathbf{X}' & d\mathbf{X}'' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Gabrio Piola, matemático e físico italiano nascido em Milão em 1794, falecido em Giussano em 1850.

<sup>2</sup>Gustav Robert Kirchhoff, físico alemão nascido em Königsberg em 1824, falecido em Berlim em 1887.



**Figura 3.1** Mudança de volume com a deformação.

$$= J d\mathbf{X}''' \cdot (d\mathbf{X}' \times d\mathbf{X}'') = J dV. \quad (3.2)$$

O determinante  $\det \mathbf{F}$ , que é denotado por  $J$ , é comumente conhecido por *jacobiano da transformação*. Ele pode ser visto como um fator de escala que converte  $dV$  em  $dv$ . Como não é fisicamente possível transformar  $dV$  num  $dv$  nulo ou negativo, qualquer transformação é restrita a  $J > 0$  independentemente do ponto. A matriz  $\mathbf{F}$  é, portanto, sempre invertível.

**Exemplo 3.1** Qual o volume do cubo do Exemplo 2.2 após a transformação?

Como o gradiente da transformação é

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

então

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{3}{2}.$$

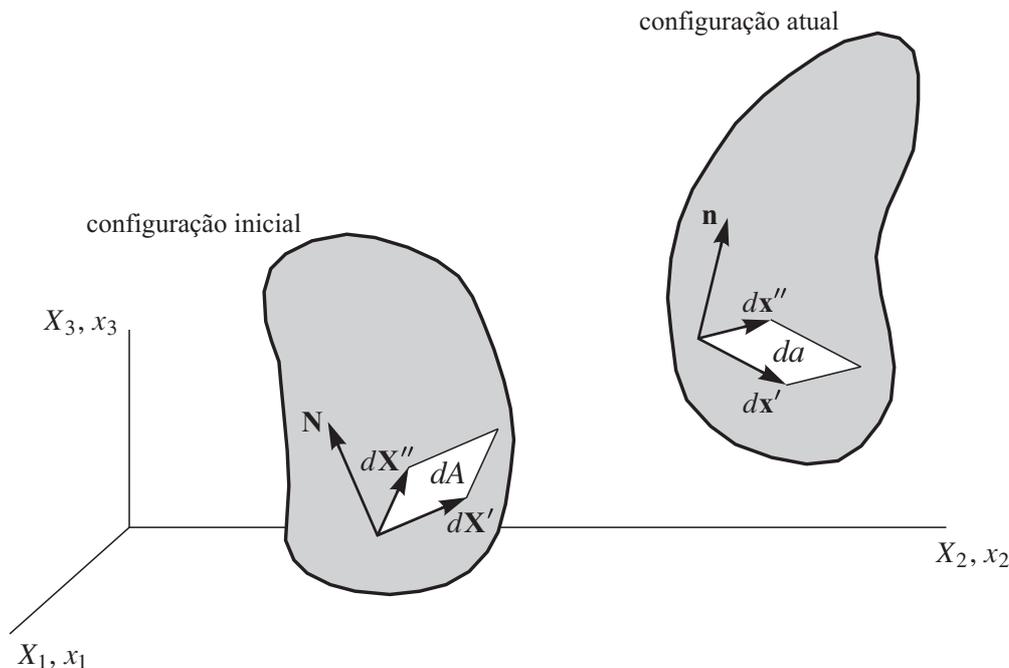
O volume do sólido na configuração atual, dado por

$$v = \int_v dv = \int_V J dV = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \frac{3}{2} dX_1 dX_2 dX_3 = 12,$$

pode ser verificado geometricamente na figura do Exemplo 2.2. ■

*Comentários 3.1:*

- O determinante de  $\mathbf{F}$  pode ser escrito em função dos invariantes do tensor deformação. Usando (2.17),



**Figura 3.2** Mudança de área com a deformação.

Multiplicando escalarmente (3.10) por um vetor  $\mathbf{r}$  qualquer, obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da &= \mathbf{r} \cdot (d\mathbf{x}' \times d\mathbf{x}'') = \det \begin{bmatrix} \mathbf{r} & d\mathbf{x}' & d\mathbf{x}'' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{r} & \mathbf{F}d\mathbf{X}' & \mathbf{F}d\mathbf{X}'' \end{bmatrix} \\
 &= \det \left( \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{-1}\mathbf{r} & d\mathbf{X}' & d\mathbf{X}'' \end{bmatrix} \right) = \det \mathbf{F} \det \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{F}^{-1}\mathbf{r}}_{\mathbf{r}_1} & d\mathbf{X}' & d\mathbf{X}'' \end{bmatrix} \\
 &= J\mathbf{r}_1 \cdot (d\mathbf{X}' \times d\mathbf{X}'') = J\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{N} dA
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde definimos o vetor  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{r}$ . Portanto,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da = J\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{N} dA \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}^T \mathbf{n} da = J (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{r})^T \mathbf{N} dA \tag{3.12}$$

ou

$$\mathbf{r}^T \mathbf{n} da = J\mathbf{r}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}^T (\mathbf{n} da - J\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA) = 0. \tag{3.13}$$

A validade da expressão para qualquer vetor  $\mathbf{r}$  (não especificamente  $\mathbf{r}$  nulo, nem perpendicular ao vetor representado pelo termo entre parênteses) implica

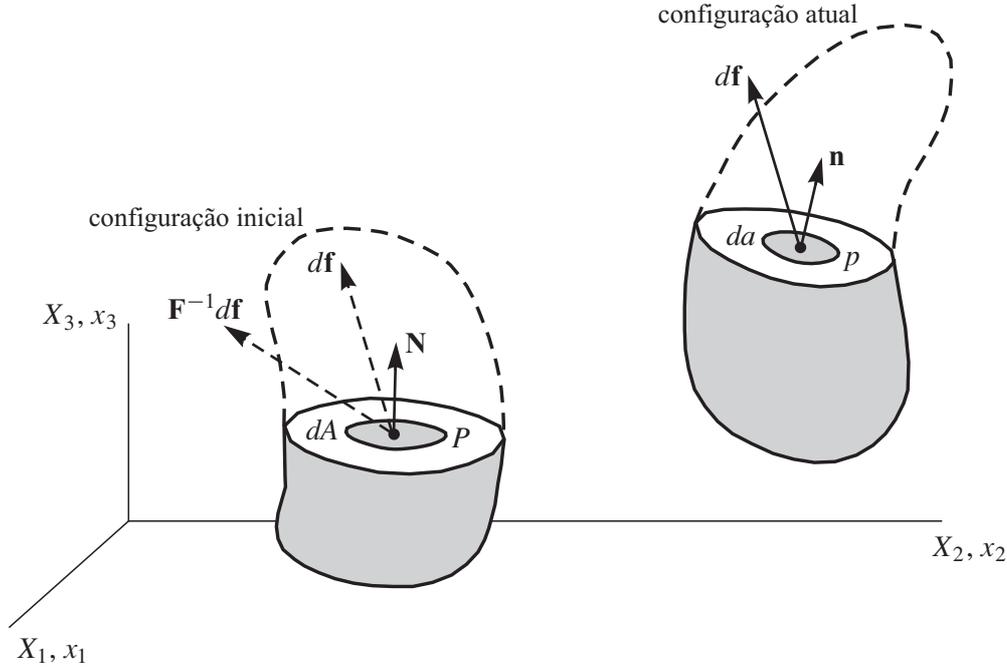
$$\mathbf{n} da - J\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} da = J\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA. \tag{3.14}$$

A expressão (3.14), que relaciona as áreas  $dA$  e  $da$ , é conhecida por *fórmula de Nanson*.<sup>3</sup>

**Exemplo 3.2** Qual a área da face direita do cubo do Exemplo 2.2 após a transformação?

Do Exemplo 3.1,

<sup>3</sup>Edward John Nanson, matemático inglês nascido em Penrith em 1850, falecido em Glen Iris (Melbourne, Austrália) em 1936.



**Figura 3.3** Forças adotadas na definição do vetor tensão de Cauchy ( $d\mathbf{f}$  em  $da$ ), primeiro vetor tensão de Piola-Kirchhoff ( $d\mathbf{f}$  em  $dA$ ) e segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff ( $\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{f}$  em  $dA$ ).

Encontremos a relação entre os tensores  $\mathbf{P}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Como

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} da = \mathbf{T}_1 dA, \quad (3.19)$$

então

$$\mathbf{T}_1 = \frac{da}{dA} \mathbf{t} = \frac{da}{dA} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}. \quad (3.20)$$

De (3.18) e (3.20),

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{P} \mathbf{N} = \frac{da}{dA} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}. \quad (3.21)$$

Dado que

$$\frac{da}{dA} \mathbf{n} = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \quad (3.22)$$

pela fórmula de Nanson (3.14), então

$$\mathbf{P} \mathbf{N} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{P} - J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

A validade da expressão para qualquer  $\mathbf{N}$  resulta em

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \mathbf{F}^T. \quad (3.24)$$

O tensor  $\mathbf{P}$  é, em geral, não simétrico.

**Exemplo 3.3** A transformação de um sólido da configuração inicial na configuração atual é descrita por

$$x_1 = -6X_2 \quad x_2 = \frac{1}{2}X_1 \quad x_3 = \frac{1}{3}X_3.$$

O tensor tensão de Cauchy num certo ponto é