

## Capítulo 4

# Comportamento do material - equações constitutivas

### 4.1 Introdução

A percepção de que o comportamento de uma peça submetida a esforços mecânicos muda em função do material empregado é comum à maioria das pessoas. Esta diferença se traduz em vários efeitos como a flexibilidade e a resistência exibidos pela peça. É tão difícil achar um pneu de automóvel feito de alumínio (excessivamente rígido) quanto uma chave de fenda de borracha (excessivamente flexível). Este vínculo entre solicitações externas e resposta mecânica é fornecido pelas chamadas **relações constitutivas**, que relacionam as tensões com às deformações desenvolvidas em uma partícula.

Os modelos constitutivos são construídos com o objetivo de reproduzir, em forma aproximada, o comportamento do material quando submetido a solicitações externas. A diversidade de materiais usados na engenharia é tão grande quanto a área de pesquisa dedicada à modelagem deste tipo de equações.

Neste capítulo será apenas esboçada uma classificação básica dos modelos constitutivos e em seguida se fará uma apresentação mais detalhada da relação constitutiva mais frequentemente usada em engenharia em problemas de mecânica dos sólidos: as equações constitutivas de **elasticidade linear**. No Capítulo 22 é desenvolvida a formulação de teoria de plasticidade clássica.

Um material é considerado **homogêneo** se apresenta propriedades mecânicas iguais em qualquer porção tomada de uma amostra, isto é, as propriedades não variam de um ponto a outro do corpo. Caso contrário, o material é não-homogêneo. Note-se que em casos reais essa definição depende de uma escala de ordem de grandezas. Por exemplo, numa lâmina de material composto de plástico reforçado por fibra, onde as fibras tem diâmetros da ordem de  $10\ \mu\text{m}$  (fibra de vidro), se tomamos em diversos pontos amostras de 1 mm, pode-se concluir que a lâmina é homogênea. Entretanto, se as amostras forem de dimensão de  $1\ \mu\text{m}$ , por exemplo, as propriedades obtidas dependerão da localização na lâmina, e se considerará a lâmina como não-homogênea.

Além do aspecto de homogeneidade, uma outra característica importante de um material é a **isotropia**. Considera-se que o material é isotrópico caso este apresente a mesma resposta mecânica para qualquer direção de solicitação. Um exemplo de material tipicamente não-isotrópico (**anisotrópico**) é a madeira, cujas fibras definem características claramente diferentes de material dependendo da orientação dos esforços.

Uma outra forma de classificar materiais diz respeito ao seu comportamento sob carregamento cíclico. Definimos um **material elástico** como um material em que, quando submetido à aplicação de carga até um valor máximo, seguida de um retorno ao nível zero de carga (descarregamento), não dissipa energia. A Figura 4.1b ilustra o diagrama de um **material elástico não linear**. O percurso no diagrama segue a mesma curva tanto no carregamento quanto no descarregamento.

Por outro lado, um material não-elástico é aquele que não cumpre esta regra, como na Figura 4.1a. Podemos afirmar que o universo de materiais que satisfazem rigorosamente a hipótese de comportamento elástico é praticamente inexistente. O que frequentemente acontece é uma clas-

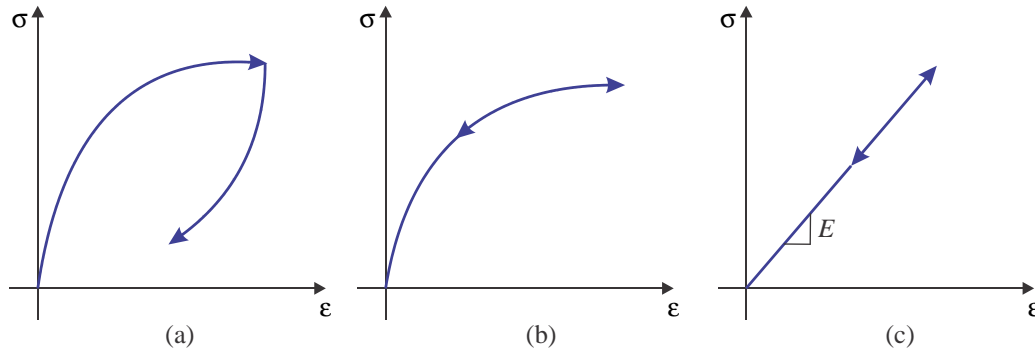


Figura 4.1: (a) Material não elástico, (b) material elástico não-linear, (c) material elástico linear.

sificação de níveis de carga para os quais este modelo se ajusta. O aço, por exemplo, apresenta um comportamento elástico para uma faixa razoavelmente ampla de sollicitação, que corresponde aproximadamente à faixa linear do diagrama. Após esta faixa o comportamento é não elástico e não linear até o colapso. Mesmo nestes casos elásticos clássicos, a existência de pequenos níveis de dissipação é sempre presente.

Materiais não elásticos dependem, em geral, da história do carregamento. Esta história pode considerar apenas a sequência deste, contabilizando os valores e a ordem em que foi efetuado, como também a velocidade de aplicação. Esta distinção separa os materiais independentes do tempo (plasticidade, elastoplasticidade, etc.) e aqueles que dependem deste (viscoplasticidade, viscoelasticidade, etc.). Nos primeiros o tempo define apenas uma ordem de acontecimentos enquanto nos últimos o tempo define o comportamento do material, isto é, suas propriedades dependem da velocidade de deformação.

Nas seções seguintes trataremos de forma resumida na caracterização do modelo de elasticidade isotrópica linear, amplamente utilizado em engenharia além de ser o modelo mais simples em sólidos.

## 4.2 Elasticidade linear

Uma subclassificação entre os comportamentos elásticos corresponde à divisão entre elasticidade linear (Figura 4.1c) e a não linear (Figura 4.1b). No caso da elasticidade linear em problemas de **sollicitação uniaxial**, as relações

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{e} \quad \tau = G\gamma, \quad (4.1)$$

são as clássicas correspondências lineares entre deformações e tensões: tensão/deformação normal e tensão/deformação cisalhante. O módulo de elasticidade  $E$  e de cisalhamento  $G$  são parâmetros que formam parte de um contexto maior que é visto a seguir.

Consideremos um problema geral de sollicitações. O modelo de elasticidade linear precisa relacionar as nove componentes de tensão com as nove componentes de deformação. Adicionalmente, sendo uma relação linear, deve admitir a relação inversa, isto é, a relação deformação-tensão:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{t}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{t}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (4.2)$$

Nesta equação,  $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\sigma}}$  representa a função que, dado o argumento tensorial  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , fornece o estado de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ . Analogamente, a segunda equação representa a relação inversa  $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , para a qual, dado o estado de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ , se obtém o estado de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Como construir esta função? Primeiramente observa-se que os tensores tensão e deformação são simétricos, o que significa que existem apenas 6 componentes independentes em cada um, isto é, 6 tensões a serem relacionadas a 6 deformações. Como estamos considerando apenas problemas lineares, buscamos então uma forma linear de relacionar esses dois conjuntos de termos. A única forma linear de relacionar esses conjuntos consiste em escrever uma combinação linear. Por exemplo,

$\sigma_{11}$  deve se relacionar de forma linear com cada uma das componentes de deformações, isto é,  $\sigma_{11} = a\varepsilon_{11} + b\varepsilon_{22} + c\varepsilon_{33} + d\varepsilon_{12} + e\varepsilon_{13} + f\varepsilon_{23}$ . O mesmo deve ocorrer com  $\sigma_{22}$ , porém através de outras 6 constantes. De fato as seis componentes de tensões se relacionam linearmente às deformações por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.3)$$

isto é,  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ , onde  $\mathbf{C}$  é denominada matriz de elasticidade. ( $2\varepsilon_{23}$ , etc, são as deformação de engenharia, geralmente denotadas por  $\gamma_{23}$ , etc.) O número de componentes diferentes em  $\mathbf{C}$  é, a princípio, 36. Cada um de seus termos é uma propriedade de material a ser obtida experimentalmente. Por outro lado, considerações de origem termodinâmica indicam a necessidade de  $\mathbf{C}$  ser simétrica, diminuindo assim, para 21 componentes diferentes. Finalmente, prova-se [67] que, se o material for **isotrópico**, as condições de igualdade de comportamento em qualquer direção conduzem a um formato representado pela expressão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.4)$$

onde estas componentes dependem apenas de **dois parâmetros independentes** a serem determinados por ensaio.

Vejamus uma forma de construir a relação (4.4). As observações de Cauchy, levaram-no a admitir como hipótese que, no caso de isotropia, as direções principais do tensor de deformação e de tensão são iguais. Assim, usando a decomposição em partes esférica e deviatórica para a tensão e para a deformação,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^d \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^d,$$

prova-se que num material isotrópico, cada parcela de tensão se relaciona apenas à parte correspondente de deformação, através de constantes de material  $K$  e  $\mu$ , da seguinte forma:

$$\text{parcela esférica} \quad \boldsymbol{\sigma}^e = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^e = K(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}, \quad (4.5)$$

$$\text{parcela deviatórica} \quad \boldsymbol{\sigma}^d = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^d. \quad (4.6)$$

Os escalares  $K$  e  $\mu$  são os **módulos volumétrico e de cisalhamento**, respectivamente. Essas constantes são determinados por ensaio do material. O tensor de tensões completo é obtido mediante a soma de ambas as parcelas de tensão:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^d + 3K\boldsymbol{\varepsilon}^e, \\ &= 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^e) + 3K\boldsymbol{\varepsilon}^e, \\ &= 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + (3K - 2\mu)\boldsymbol{\varepsilon}^e, \\ &= 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + (3K - 2\mu)\frac{(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})}{3}\mathbf{1}, \\ &= 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo

$$\lambda = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right). \quad (4.8)$$

Os parâmetros de material  $\mu$  e  $\lambda$  são conhecidos como **parâmetros de Lamé** e  $\mu = G$ . Em componentes, a equação constitutiva (4.7) se escreve

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), & \sigma_{12} &= 2G\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), & \sigma_{13} &= 2G\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{33} &= 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), & \sigma_{23} &= 2G\varepsilon_{23},\end{aligned}\quad (4.9)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G+2\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & G+2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & G+2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Apesar de sua simplicidade conceitual, os parâmetros  $K$  e  $\mu$  são de difícil determinação experimental. Por exemplo, a identificação experimental direta de  $K$  requer um ensaio com aplicação de pressão sobre um corpo de provas, e a medição da variação volumétrica decorrente. É um ensaio de difícil execução em sólidos. Então, é comum escrever este conjunto de equações em função de dois outros parâmetros: o **módulo de elasticidade**  $E$  e o **coeficiente de Poisson**  $\nu$ . Essas constantes possuem interpretação física de engenharia bem definidas e são diretamente obtíveis via ensaio de tração do material. O módulo de elasticidade é calculado como o coeficiente de proporcionalidade entre as deformações e tensões longitudinais num ensaio uniaxial. O coeficiente de Poisson, por outro lado, é obtido mediante o coeficiente entre a deformação longitudinal na direção do carregamento e uma direção ortogonal a este. Por exemplo, se a única componente de tensão não nula aplicada num ensaio for  $\sigma_{11}$ , tem-se:

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}, \quad \text{e} \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \quad (4.11)$$

A relação entre os parâmetros é

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (4.12)$$

Substituindo (4.12) em (4.7),

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}. \quad (4.13)$$

Considerando que se trata de um conjunto de equações lineares, a relação é invertível, dando como resultado:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \quad (4.14)$$

As expressões (4.13) e (4.14) usam a notação compacta. Esta forma de escrever é cômoda para indicar rapidamente o tipo de lei utilizada. Abrindo a relação em componentes, temos um conjunto de equações análogo a (4.7).

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{11} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), & \sigma_{12} &= G2\varepsilon_{12}, \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{22} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), & \sigma_{13} &= G2\varepsilon_{13}, \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{33} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), & \sigma_{23} &= G2\varepsilon_{23}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e a relação inversa

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), & \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = \frac{1}{G}\sigma_{12}, \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), & \gamma_{13} &= 2\varepsilon_{13} = \frac{1}{G}\sigma_{13}, \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), & \gamma_{23} &= 2\varepsilon_{23} = \frac{1}{G}\sigma_{23}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

As relações acima permitem que se reescreva a matriz elástica  $\mathbf{C}$  de (4.10) e sua inversa  $\mathbf{C}^{-1}$ , que tomam as formas:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

### 4.2.1 Deformações de origem térmicas

As ações externas mencionadas até o momento foram sempre de origem mecânica, introduzidas em forma de forças de superfície ou de corpo. Uma ação muito comum, porém, tem como origem variações térmicas sobre o componente. Estas deformações podem ter valores diferentes em direções diferentes ou podem ser uniformes nas várias direções (dilatação ou contração uniforme). Neste último caso se diz que o material é termicamente isotrópico. Sendo assim, a deformação é usualmente modelada através de um **coeficiente de dilatação térmica linear**  $\alpha$ . Dado um incremento térmico  $\Delta\mathcal{T}$  num ponto, a deformação térmica será

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{T}} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 0, 0, 0\}^T = \alpha \Delta\mathcal{T} \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T. \tag{4.19}$$

se a região em torno do ponto estiver livre de constricção e possa se deformar livremente. A deformação por ação mecânica, por outro lado, responde à equação já vista:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}.$$

A deformação total  $\bar{\varepsilon}$  é a soma de ambas:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon^T = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \varepsilon^T \quad (4.20)$$

e, portanto,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \left( \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{array} \right\} - \alpha \Delta T \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \right). \quad (4.21)$$

Em palavras, o estado de tensões num ponto material depende da deformação total do ponto, diminuído da deformação originada por fonte térmica.

### 4.2.2 Estado plano de deformação

Todo corpo ocupa uma região tridimensional no espaço e, portanto, pode ser modelado mediante o equacionamento já apresentado. A complexidade de um problema completo deste tipo em geral torna proibitiva a determinação de soluções analíticas. Entretanto, certos casos podem ser destacados por possuir características simplificadas de geometria, carregamento e vínculos que permitem a adição de novas hipóteses que reduzem a complexidade do problema original.

Uma das formas de caracterizar um estado plano de deformação é identifica-lo com o estado de deformação onde o tensor deformação apresenta um autovalor nulo. Em outras palavras, quando não existe deformação numa das três direções cartesianas. Por facilidade, orientemos os eixos de forma tal que esta direção coincida com o vetor da base  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ . Assim, por hipótese, temos um tensor deformação na forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & 0 \\ \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & u_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Utilizando as relações deformação-deslocamento lineares, pode-se definir um estado plano de deformações como um estado em que se tem, a cada ponto do corpo,

$$\varepsilon_{33} \equiv \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad \varepsilon_{13} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = 0, \quad \varepsilon_{23} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0. \quad (4.23)$$

Uma forma de satisfazer a essas condições é ter um campo de deslocamentos dado por  $u_3 = 0$  e  $u_1 = u_1(x_1, x_2)$  e  $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ , isto é, com o deslocamento todo contido no plano  $x_1$ - $x_2$ , e variando apenas com  $x$  e  $y$ , com todas as funções incógnitas independentes de  $x_3$ .

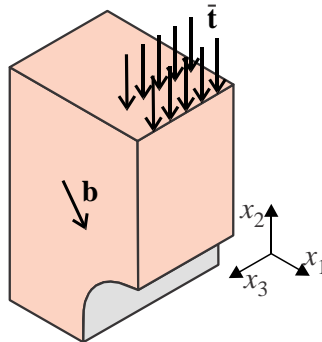


Figura 4.2: Estado plano de deformação.

É importante destacar que a definição apresentada descreve o estado de apenas um **ponto material** do corpo. Porém, é possível encontrar algumas situações em que o estado de deformações em todo o corpo se aproxima daquelas condições. Especificamente, estados planos de deformação são típicos de peças de geometria prismática com carregamento atuando no plano da seção transversal e sujeitas a algum tipo de vínculo que impede o deslocamento na direção do eixo do prisma, o eixo  $x_3$ , como na Figura 4.2. Deslocamentos e carregamentos devem ser na forma:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t}(x_1, x_2) = \begin{Bmatrix} t_1(x_1, x_2) \\ t_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b}(x_1, x_2) = \begin{Bmatrix} b_2(x_1, x_2) \\ b_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

Frequentemente é considerado que seja suficiente que o corpo tenha a forma de um prisma de comprimento superior às dimensões da seção transversal da peça para eliminar os deslocamentos na direção do eixo. De fato isto não é correto. É necessário que o corpo esteja adequadamente vinculado.

Uma vez definido, por hipótese, o tipo do campo de deformações no problema, as relações constitutivas (4.15) permitem calcular o estado de tensões correspondente:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{11} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{22} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{33} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A quarta equação de (4.25) mostra  $\sigma_{33}$  dependente das tensões no plano  $x_1 - x_2$  e a quinta indica que as componentes cisalhantes nos planos transversais,  $x_1 - x_3$  e  $x_2 - x_3$ , são nulas. Assim, dado que duas componentes de tensão são nulas e uma terceira dependente das primeiras, é usual escrever matricialmente apenas as componentes independentes:

$$\sigma(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{1}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

isto é,  $\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{C}^d \boldsymbol{\varepsilon}$ . Aqui,  $\mathbf{C}^d$  representa a matriz de componentes do tensor de elasticidade para estado plano de deformações e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor de componentes de deformação, dependentes das funções de deslocamento, isto é,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ .

Observamos que no termo 33 da matriz  $\mathbf{C}^d$  foi introduzido o escalar 1/2 para compensar a utilização da **deformação cisalhante de engenharia**,  $\gamma_{12}$  ( $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ ), em lugar de  $\varepsilon_{12}$  na deformação.

A relação deformação-deslocamento para as componentes não nulas de deformação são usualmente representada da seguinte forma:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (4.27)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é chamada de **operador diferencial**. Operando sobre o vetor de componentes de  $\mathbf{u}$ , fornece as componentes da deformação. Matrizes desse tipo são úteis para compactar a formulação numérica do método de elementos finitos.

Finalmente, cabe aqui ressaltar um aspecto importante: uma vez que estamos considerando o material como elástico linear isotrópico, o **estado plano de deformação produz um estado triaxial de tensões**. Isto é evidente se representamos todas as componentes da tensão e da deformação para este caso:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

O fato de simplificar a relação constitutiva de forma a envolver apenas três componentes de cada tensor se deve a uma comodidade operacional, dado que a componente restante da tensão,  $\sigma_{33}$ , depende das primeiras.

### 4.2.3 Estado plano de tensão

De forma análoga ao caso anterior, define-se o estado plano de tensões como aquele em que o tensor tensão possui uma das tensões principais (autovalores) igual a zero. Orientando o eixo cartesiano  $x_3$  e fazendo esta direção coincidir com a direção de autovalor nulo, obteremos a seguinte representação das componentes de tensão:

$$\sigma(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Essa definição diz respeito a uma única partícula de material. Entretanto, existem casos em que o corpo inteiro encontra-se submetido a um estado de tensões desse tipo. É o caso de corpos delgados como barras e placas delgadas submetidas a cargas contidas no plano da superfície média do corpo (Figura 4.3).

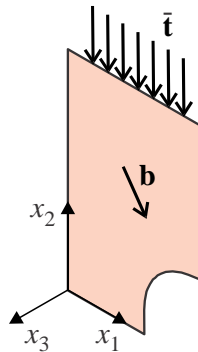


Figura 4.3: Estado plano de tensão.

Novamente, considerando o material elástico isotrópico linear, as equações (4.16) nos permitem



calcular as deformações correspondentes:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}, \\
 \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\
 \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{23} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

É frequente, porém, a necessidade de obter a relação inversa dado que, em geral, a solução numérica fornece o campo de deslocamentos cuja derivação resulta nas deformações. A inversão é realizada usando as três primeiras equações, aquelas que correspondem às componentes coplanares. As duas últimas não são mais úteis, dado que  $\varepsilon_{33}$  já foi expresso em função das deformações no plano e as deformações cisalhantes transversais ao plano são nulas. Operando, se obtém as expressões

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_{11} + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\varepsilon_{22}, \\
 \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_{22} + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\varepsilon_{11}, \\
 \sigma_{12} &= E\frac{1-\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_{12}.
 \end{aligned}
 } \tag{4.31}$$

Essas relações podem ser colocadas em forma matricial:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^t} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{array} \right\} = \mathbf{C}^t \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}). \tag{4.32}$$

A matriz  $\mathbf{C}^t$  é a matriz de elasticidade para estado plano de tensões. As componentes de tensão e deformação foram dispostas em forma de matriz de uma coluna, conforme a chamada notação de Voigt.

#### 4.2.4 Sólido de revolução e problemas axi-simétricos

Um outra situação específica em problemas mecânicos é dado pelas peças cuja geometria é constituída por uma curva plana (geratriz) que revoluciona em torno de um eixo. Deste modo, a geometria possui simetria axial (Figura 4.4). Se além da geometria, também o carregamento, as propriedades do material e a vinculação, possuem simetria em torno do eixo de revolução, tem-se o chamado problema axi-simétrico, que possui algumas propriedades particulares.

Para a análise de um problema deste tipo, o sistema de coordenadas cartesiano deixa de ser prático, sendo adotado o sistema de coordenadas cilíndrico. Lembremos que, neste sistema, a base de vetores unitários ortogonais muda de ponto para ponto (Figura 4.4). Observe que em cada ponto os vetores da base  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_\theta$  apontam em distintas direções sempre nas direções radial e tangencial, respectivamente.

Duas hipóteses são fundamentais no tratamento de problemas axi-simétricos:

- Todas as variáveis independem de  $\theta$ , isto é,  $\partial(\cdot)/\partial\theta = 0$  em todos os dados e equações diferenciais.
- Admite-se que os deslocamentos circunferenciais  $u_\theta$  são nulos. Como consequência, os deslocamentos de cada ponto do corpo se mantêm em seu próprio planos de simetria. Assim os deslocamentos são iguais em todos os planos de simetria, permitindo assim, a modelagem do

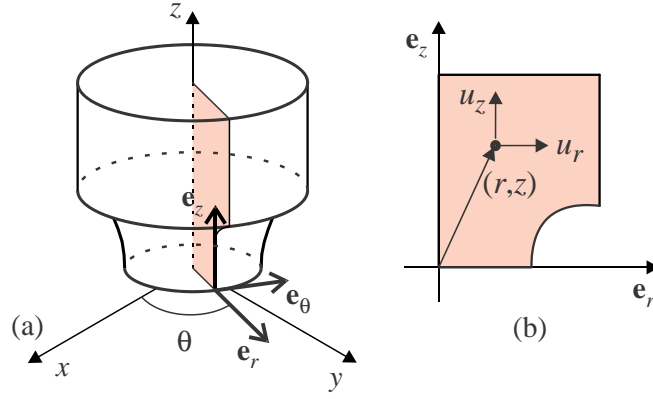


Figura 4.4: Sólido de revolução em (a) e superfície geratriz em (b). Deslocamentos  $u_r$  e  $u_z$  e coordenadas de um ponto  $(r, z)$ .

problema em apenas este plano. **Essa hipótese elimina a possibilidade de carregamento na direção tangencial.** Os deslocamentos e seu gradiente são dados por

$$\mathbf{u}(r, z) = \begin{Bmatrix} u_r(r, z) \\ u_\theta = 0 \\ u_z(r, z) \end{Bmatrix}, \quad \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

É preciso destacar que esta expressão não convencional do gradiente é devido ao sistema de coordenadas adotado, e onde já se encontra inserida a hipótese (a).

A parte simétrica do gradiente define as deformações:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

As tensões são obtidas aplicando as equações constitutivas (4.15):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1+\nu}{E} \varepsilon_r + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z), \\ \sigma_\theta &= \frac{1+\nu}{E} \varepsilon_\theta + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z), \\ \sigma_z &= \frac{1+\nu}{E} \varepsilon_z + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z), \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = 0, \\ \sigma_{\theta z} &= \sigma_{z\theta} = 0, \\ \sigma_{rz} &= \frac{1+\nu}{E} \varepsilon_{rz}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Observamos nas equações (4.35) que as tensões cisalhantes nos planos envolvendo a direção circunferencial são nulas. Porém, existe uma tensão normal circunferencial  $\sigma_\theta$ . As componentes não nulas são incorporadas na seguinte notação matricial:

$$\sigma(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \nu & 1-\nu & 0 \\ 1-\nu & \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^r} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^r \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.36)$$

As componentes relevantes das tensões e deformações são quatro: tensões normais e cisalhantes no plano de simetria e a tensão normal circunferencial. A relação deformação-deslocamentos pode ser obtida em forma matricial, como nos casos anteriores, com o uso da matriz de diferencial  $\mathbf{D}$  adaptada para este caso:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (4.37)$$

### 4.3 Problema de equilíbrio em termos de deslocamento - Eqs. de Navier

Colocando lado a lado as equações de equilíbrio (2.25), as equações cinemáticas (3.29), e equações constitutivas (4.15) e (4.16), constataremos a possibilidade de formular um sistema completo de equações diferenciais que permita a busca de uma solução. Antes de fazer isto, analisemos primeiramente qual o contexto de validade destas equações.

Um primeiro aspecto a observar é que o equilíbrio entre as forças atuantes no corpo ocorre a cada instante  $t$  do processo e, portanto, em cada uma das configurações deformadas. Isso é um problema, uma vez que a geometria deformada  $\Omega_t$  é desconhecida a priori, e forma parte das informações que se deseja obter. Por exemplo, consideremos as equações de equilíbrio dinâmico (2.22),  $\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho d\mathbf{v}/dt$ , onde as operações de diferenciação devem ser executadas em relação às coordenadas  $(dx_1, dx_2, dx_3)$  da configuração deformada, e não em relação a  $(dX_1, dX_2, dX_3)$  da configuração indeformada. Esta situação conduz a um problema não linear cuja solução deve ser iterativa. Por outro lado, a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, descrita na seção 3.2, permite tratar um conjunto de casos onde a diferença entre as configurações deformada e indeformada é suficientemente pequena. Assim, é possível resolver as equações de equilíbrio (2.22) na configuração indeformada, conhecida, sem incorrer em grandes erros em relação à condição formalmente correta.

Outro aspecto a discutir são as informações disponíveis sobre as condições mecânicas atuando na superfície (contorno) da peça. Uma informação usual é a força por unidade de área  $\bar{\mathbf{t}}$ : por exemplo, a pressão atmosférica, uma força de tração distribuída, pressão numa superfície, etc. Entretanto, muitas vezes esta informação está indisponível em certas regiões do corpo, pois se trata de uma força de reação. Este é o caso nas regiões do contorno em que o corpo está fixo a uma fundação ou submetido a um movimento prescrito. Essa parte do contorno é denotada por  $\Gamma_u$  e indica os pontos nos quais o deslocamento (e não a força  $\bar{\mathbf{t}}$ ) são conhecidas. Para ilustrar essa condição considere uma um tubo cilíndrico que deve ser introduzido em em outro, por interferência: o diâmetro interno do cilindro externo deve ser expandido em um valor especificado por projeto, para atingir a fixação desejada. Assim, o deslocamento radial do diâmetro interno é conhecido, e a força distribuída  $\bar{\mathbf{t}}$  é

uma incógnita do problema, a ser determinada na solução.

Note que as considerações acima são colocadas de um ponto de vista estritamente de engenharia. Do ponto de vista de teoria de equações diferenciais, ocorre que é a equação, ou sistema de equações diferenciais, é que determina os tipos possíveis de condições que **devem** ser conhecidas no contorno de qualquer problema, como **condição necessária** para a existência e unicidade da solução, no caso de sistemas lineares. Ao longo do texto, e principalmente no Capítulo 14, a vinculação entre as equações diferenciais e suas condições de contorno se tornarão mais claras. Uma restrição matemática que deve-se ter sempre em mente é a seguinte: **só é possível uma solução se alguma informação for previamente conhecida em cada ponto do contorno**. No presente problema de deformações, **ou o deslocamento ou a força devem ser conhecida em cada ponto do contorno, ou uma combinação entre estas**. Isso significa que, num dado problema, se um ponto, ou uma região do contorno, não for conhecido a priori tanto o deslocamento quanto a força, então o problema matemático não pode ser resolvido. Infelizmente existem muitas situações reais em engenharia nessa situação, o que exige diversos procedimentos típicos para contornar a dificuldade e gerar ou estimar valores prescritos em todo o contorno.

A partir dessas considerações, o contorno do corpo será separado em duas regiões disjuntas:  $\Gamma_f$  é a parte do contorno onde são aplicadas forças prescritas  $\bar{\mathbf{t}}$ , que podem incluir cargas distribuídas, concentradas, ou regiões sob carregamento nulo (Figura 4.5). Assim, as **equações de movimento** e condições de contorno tratadas no restante do texto são

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f, \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u. \end{cases} \quad (4.38)$$

Tomando por exemplo o **equilíbrio dinâmico num ponto interior**, a primeira expressão em (4.38) corresponde a 3 equações diferenciais parciais de primeira ordem envolvendo 6 variáveis independentes (as componentes de  $\boldsymbol{\sigma}$ ).

A expressão cinemática linear

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$$

fornece 6 equações diferenciais parciais lineares, (uma para cada uma das componentes de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , que é simétrico) e envolvem 9 variáveis desconhecidas: 6 componentes de deformação e 3 de deslocamento.

A relação constitutiva elástica linear isotrópica

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$$

contém 6 equações relacionando as 6 componentes de tensão e as 6 de deformação.

Contabilizando número de equações e o número de funções incógnita, temos:

Tipo:	num. equações	num. de funções
Equilíbrio	3	6 ( $\boldsymbol{\sigma}$ )
Cinemáticas	6	9 ( $\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}$ )
Constitutivas	6	12 ( $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ )
Total	15	15 ( $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}$ )

(4.39)

Uma vez que todo o sistema é linear, e o número de equações é idêntico ao de funções incógnitas, prova-se que o sistema **possui** solução, e apenas **uma única solução**, desde que as condições de contorno aplicadas sejam adequadas. Um procedimento muito utilizado para tratar desse conjunto de equações consiste em eliminar as deformações nas relações constitutivas usando as relações cinemáticas, isto é, nas relações constitutivas as tensões ficam em termos de deslocamentos. Em seguida estas são substituídas nas equações de equilíbrio, de forma que todo o sistema fica resumido às três equações de equilíbrio escritas em termos das três componentes da função de deslocamento

$\mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Em notação compacta, essas substituições são:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} . && \text{Equilíbrio dinâmico. Usando as relações constitutivas,} \\ \operatorname{div} (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{b} &= \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} . && \text{Usando as relações cinemáticas,} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \left[ \mathbf{C} \left( \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \right) \right] + \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} , \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega .} \quad (4.40)$$

Esta última expressão envolve três equações diferenciais com três variáveis:  $u_1(\mathbf{x})$ ,  $u_2(\mathbf{x})$ ,  $u_3(\mathbf{x})$ . Lembremos que parte do contorno do corpo pode estar sujeito a tensões prescritas, isto é, as tensões  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  tomam valores conhecidos  $\bar{\mathbf{t}}$ . Essas tensões podem também ser escritas em termos dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} . && \text{Usando as relações constitutivas:} \\ (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} . && \text{Usando as relações cinemáticas:} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left[ \mathbf{C} \left( \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \right) \right] \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f .} \quad (4.41)$$

Este tipo de condição é conhecido como condição de contorno de Neumann. As equações (4.40) e (4.41) são conhecidas como **equações de Navier**.<sup>1</sup>

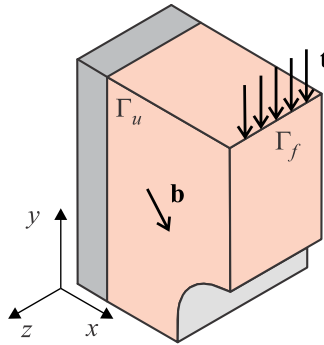


Figura 4.5: Corpo submetido a carregamento de força de corpo e condições de contorno de deslocamento e força.

Esta formulação, denominada **formulação de equilíbrio em deslocamentos**, é definida pelo seguinte sistema de equações diferenciais, condições de contorno e condições iniciais:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \left[ \mathbf{C} \left( \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \right) \right] + \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} , & \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ e } \forall t \in [0, T] , \\ \left[ \mathbf{C} \left( \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \right) \right] \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} , & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f \text{ e } \forall t \in [0, T] , \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} , & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \text{ e } \forall t \in [0, T] , \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}), \text{ e } \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}_o(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ e } t = 0 . \end{array} \right. \quad (4.42)$$

$\bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x})$  e  $\bar{\mathbf{v}}_o(\mathbf{x})$  são as condições iniciais de deslocamento e velocidade em todo o corpo, que devem ser conhecidos e prescritos no instante inicial. Para elasticidade linear a equação no domínio e as condições de contorno naturais tomam a seguinte forma, em notação indicial (para  $i = 1, 2, 3$ ):

<sup>1</sup>Claude Louis Marie Henri Navier, francês, 1785 – 1836.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + b_i = \rho \ddot{u}_i, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ e } \forall t \in [0, T], \\ \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} n_i + G \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j = \bar{t}_i, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f \text{ e } \forall t \in [0, T], \\ u_i = \bar{u}_i, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \text{ e } \forall t \in [0, T], \\ u_i(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_{io}(\mathbf{x}), \text{ e } \frac{du_i}{dt}(\mathbf{x}, t) = \bar{v}_{io}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ e } t = 0. \end{array} \right. \quad (4.43)$$

A solução deste sistema pode ser obtida via técnicas analíticas ou numéricas. Soluções analíticas foram largamente estudadas ao longo dos séculos dezenove e vinte, fornecendo a solução para um imenso número de casos particulares onde as características geométricas e de carregamento são simples o suficiente para permitirem a obtenção de soluções fechadas ou em série de funções. Nos últimos anos esforços neste sentido foram quase completamente abandonados em substituição ao desenvolvimento e utilização de métodos numéricos, que são objeto de estudo dos próximos capítulos. O aparecimento dessas técnicas abriu enormemente o espectro de aplicação dos modelos da mecânica do contínuo em geral e mecânica dos sólidos em particular.

## 4.4 Exercícios

- 4.1 Para que o problema seja chamado de elasticidade linear algumas aproximações devem ser feitas. Quais são as hipóteses adotadas nas equações de equilíbrio, quais as adotadas nas equações constitutivas e quais nas equações cinemáticas?
- 4.2 Usar os resultados do Exercício 3.3. Após calcular as deformações no ponto A, calcular as tensões produzidas por esta deformação. Calcular a variação de volume deste tipo de deformação. Separar o tensor de tensões esférico e desviador e calcular torção máxima para que não haja falha, para limite de escoamento do material de 100 MPa, usando critério de máxima tensão cisalhante. ( $E = 2,1 \times 10^5$  MPa,  $\nu = 0,3$ ).
- 4.3 Todo estado plano de deformações é também um estado plano de tensões e vice-versa? Para responder a esta pergunta analise o caso de uma barra sob tração (estado uniaxial de tensões).
- 4.4 Use os resultados de deformação do Exercício 3.4 e calcule as tensões nos pontos P1 e P2. Use a relação constitutiva triaxial (4.15) e a do modelo de estado plano de tensões (4.31). Discuta qual é a solução mais adequada para este problema. Calcule as tensões e direções principais de tensão nos pontos avaliados. Compare com as direções principais das deformações nos mesmos pontos.
- 4.5 Prove que as direções principais de deformação e tensão num sólido linear isotrópico são as mesmas.