

Capítulo 20

Redução matricial e resposta harmônica

Quando uma estrutura é submetida a um carregamento harmônico, isto é, um carregamento do tipo senoidal com amplitude e frequência constante, existem métodos mais específicos, logo mais eficientes, de obter a resposta que os métodos de amplo escopo como os de sobreposição modal e de integração direta. Esses métodos, denominados de resposta harmônica, viabilizam determinação da solução em forma de um **espectro de frequências**, em que a amplitude de deslocamento (ou velocidade, aceleração, etc.) de um grau de liberdade nodal arbitrário na estrutura é determinada para toda uma faixa contínua de valores de frequência de excitação.

Duas formas principais são usadas na elaboração do espectro de frequências. Em ambas as formas, as matrizes da equação de movimento do MEF são reduzidas. Numa forma, elas são reduzidas pela matriz modal, e geram um sistema modal desacoplado. Em outra forma, as matrizes são reduzidas via matriz de transformação \mathbf{T} seguindo a redução de Guyan vista na seção a seguir.

20.1 Redução de Guyan

Até certo ponto, o método de redução de Guyan tenta atingir o mesmo objetivo do método de sobreposição modal, no sentido de que tenta tomar o problema do sistema de equações de equilíbrio obtido pelo MEF, de ordem N , sendo geralmente N “muito grande”, e converte-lo num problema com um número reduzido de graus de liberdade, m , tal que $m \ll N$. O problema reduzido pode ser resolvido facilmente, repetidas vezes se necessário, gerando uma solução num espaço reduzido, e em seguida essa solução é transformada de volta para o espaço físico. No espaço reduzido as equações podem ser utilizadas para gerar o histórico de solução de deslocamentos via método de integração direta, por exemplo. Os detalhes são os seguintes.

No método de redução de Guyan os graus de liberdade do modelo de EF são selecionados como **escravos** ou **mestres**. Os graus de liberdade mestre são selecionados como aqueles que são, por si próprios, capazes de descrever a forma geral da peça num dos modos de vibração ou de deformação que se deseje representar. Geralmente são associados a translações, e raramente a rotações (quando se trata de elementos estruturais como vigas, placas e cascas). Geralmente esses graus de liberdade serão tomados nas regiões mais centrais dos vãos da estrutura, (como os nós 2, 4 e 6 no pórtico da Figura 20.1b, ou ainda os nós 3 e 5), em vez dos nós mais próximos dos apoios. Em geometrias delgadas, os mestres são os deslocamentos transversais, e raramente aqueles coplanares à superfície. Já os graus de liberdade escravos se movem acompanhando o movimento dos mestres conforme a influência da matriz de rigidez.

Considere-se a equação do movimento não amortecida, eq. (19.1) com os termos particionados em mestres, \mathbf{u}_m e escravos \mathbf{u}_e :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{me} \\ \mathbf{M}_{me}^T & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_m(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_e(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{me} \\ \mathbf{K}_{me}^T & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m(t) \\ \mathbf{u}_e(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_m(t) \\ \mathbf{F}_e(t) \end{Bmatrix}. \quad (20.1)$$

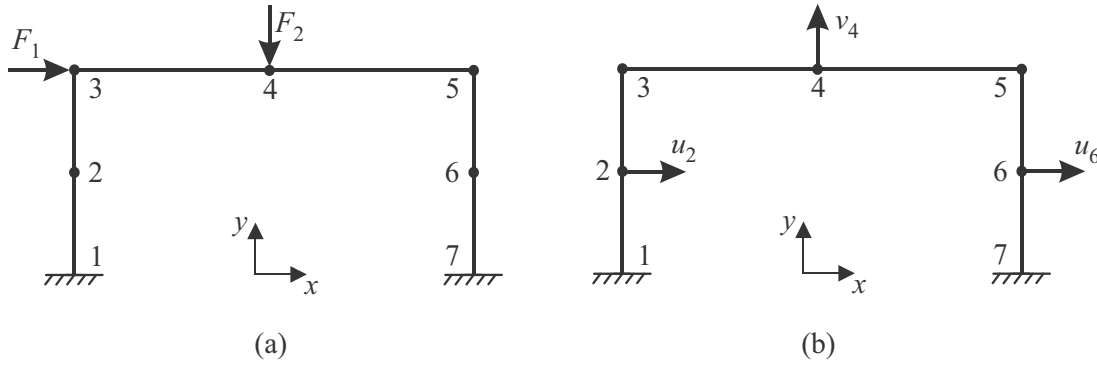


Figura 20.1: (a) Pórtico plano de 7 nós (21 g.l.) e (b) indicação de 3 g.l. mestres, nos nós 2, 4 e 6, para uso no método de Redução de Guyan. Caso se deseje usar 5 g.l. mestres, se poderia, por exemplo, adicionar as rotações dos nós 3 e 5.

onde as dimensões de \mathbf{u}_m e de \mathbf{u}_e são m e N_e , respectivamente, tal que $N = m + N_e$.

Guyan [43] e Irons [4] sugeriram que a relação entre escravos e mestres seja definida inteiramente pela rigidez, sem influências da inércia ou do carregamento. Não havendo inércia ou carregamento temporal, o deslocamento é independente do tempo. Então tem-se duas equações matriciais

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{mm}\mathbf{u}_m + \mathbf{K}_{me}\mathbf{u}_e = \mathbf{0}, \\ \mathbf{K}_{me}^T\mathbf{u}_m + \mathbf{K}_{ee}\mathbf{u}_e = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (20.2)$$

Resolvendo a segunda equação para \mathbf{u}_e tem-se

$$\mathbf{u}_e = -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{me}^T\mathbf{u}_m \quad (20.3)$$

Tem-se que o conjunto completo de deslocamentos nodais da estrutura pode ser representado em termos apenas dos graus mestre:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{me}^T \end{Bmatrix} \mathbf{u}_m, \quad (20.4)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade de ordem m . Essa expressão pode ser posta na forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}_m \quad \text{com} \quad \mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_m \\ \mathbf{T}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{me}^T \end{Bmatrix} \quad (20.5)$$

\mathbf{T} é uma matriz de transformação, de dimensões $N \times m$, isto é, tem “poucas” colunas comparado a N . Essa transformação pode ser aplicada para reduzir a dimensão do problema físico, tanto as equações de equilíbrio estático quanto dinâmico, ou o problema de autovalor associado a vibrações livres não amortecidas, como listado a seguir.

1. **Problema estático.** Nesse caso, o problema completo, de dimensão N , $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$, é reduzido aplicando a transformação $\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}_m$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{F}, \\ \mathbf{K}\mathbf{T}\mathbf{u}_m &= \mathbf{F}, && \text{(pré-multiplicar por } \mathbf{T}^T) \\ \underbrace{\mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T}}_{\bar{\mathbf{K}}}\mathbf{u}_m &= \underbrace{\mathbf{T}^T\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{F}}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\bar{\mathbf{K}}\mathbf{u}_m = \bar{\mathbf{F}}} \end{aligned} \quad (20.6)$$

O problema $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{u}_m = \bar{\mathbf{F}}$ tem agora dimensão reduzida m . **Observação:** no caso estático, não há economia de tempo de processamento, isto é, redução no número de operações pelo uso do sistema reduzido, devido às operações necessárias para determinar a matriz \mathbf{T} . Nota-se que essa é uma condensação estática de graus de liberdade.

do ponto de vista de programação e de computação dos dados. O procedimento que se mostra a seguir é apenas uma das possibilidades nessa direção, certamente não a única.

Etapa 1 - Identificar os números p_j , $j = 1, 2, \dots, m$, dos m graus de liberdade mestre da estrutura, gerando o conjunto $p = \{p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_m\}$.

Etapa 2 - O ponto de partida consiste em definir uma matriz $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, de dimensões $N \times m$.

Etapa 3 - Para cada coluna j de \mathbf{X} , colocar o valor -1 na posição p_j , onde p_j é o número do j -ésimo grau de liberdade mestre. Então, $T_{p_j j} = -1$.

Etapa 4 - Faz-se o produto $\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Se os graus de liberdade da estrutura estivessem particionados, esse sistema teria o aspecto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{me} \\ \mathbf{K}_{me}^T & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{K}_{mm} \\ -\mathbf{K}_{me}^T \end{Bmatrix}. \quad (20.9)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade de ordem $m \times m$.

Etapa 5 - Em \mathbf{Y} substituir $-\mathbf{K}_{mm}$ por \mathbf{I} , o que gera uma matriz modificada \mathbf{Y}' ocupando a mesma área de memória anteriormente ocupada por \mathbf{Y} .

Etapa 6 - Anular as m linhas e colunas de \mathbf{K} associadas aos graus de liberdade mestre. Em seguida, colocar o valor 1 em cada diagonal correspondente. Isso significa fazer $K_{ip_j} = K_{p_j i} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, N$, e $j = 1, 2, \dots, m$. Em seguida fazer $K_{p_j p_j} = 1$. Isso gera uma matriz modificada \mathbf{K}' ocupando a mesma área de memória anteriormente ocupada por \mathbf{K} .

Etapa 7 - Resolver para \mathbf{T} o sistema algébrico de ordem N : $\mathbf{K}'\mathbf{T} = \mathbf{Y}'$. Se os graus de liberdade estivessem particionado, o problema teria o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_m \\ \mathbf{T}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{me}^T \end{Bmatrix}, \quad (20.10)$$

cuja solução resulta exatamente em (20.5).

Observações:

- A solução de (20.10) é computacionalmente admissível no MEF pois envolve apenas a triangularização da matriz usando o método de Gauss, o que requer muito menos operações que sua inversão completa (ver Capítulo 12).
- Apesar da visualização particionada em (20.9) e (20.10), o procedimento descrito não requer um particionamento explícito, apenas as informações armazenadas nas Etapas 1 a 3.

20.1.2 Comentários gerais

Uma vez que o esforço de determinação de \mathbf{T} é similar (um pouco maior) que o de resolver diretamente o problema estático original, $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$, o método de redução de Guyan não apresenta vantagem nesse tipo de problema, exceto como base para as técnicas de subestruturação que, ai sim, são bastante eficientes. Nos problemas dinâmicos, \mathbf{T} sendo determinado apenas uma vez, a redução de Guyan gera o problema reduzido que pode ser utilizado no cálculo sucessivo da solução numa grande quantidade de intervalos de tempo.

A matriz de transformação \mathbf{T} opera no problema dinâmico de forma análoga à matriz modal Φ , porém com algumas vantagens e desvantagens.

1. As matrizes reduzidas $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$ pela transformação \mathbf{T} do método de Guyan são não esparsas. Isso não é grave, uma vez que são matrizes pequenas.

2. Se as colunas de \mathbf{T} forem linearmente independentes, a positividade definida de \mathbf{M} e \mathbf{K} são preservadas em $\bar{\mathbf{M}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$.
3. Os graus de liberdade no sistema reduzido de Guyan são físicos, ao contrário das matrizes no sistema modal. Em algumas situações essa característica do sistema de Guyan pode ser vantajosa.
4. Geralmente a matriz modal Φ é ortonormalizada pela massa, de forma que $\bar{\mathbf{M}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$ são diagonais, e é possível considerar $\bar{\mathbf{C}}$ também diagonal. Isso permite o desacoplamento da equação do movimento reduzido no espaço modal. Entretanto, o sistema reduzido produzido por \mathbf{T} , eq. (20.8), não possui essa propriedade, o que impede sua integração equação a equação. Para excitação não periódica, torna-se necessária a integração direta de todo o sistema simultaneamente, seguindo um dos métodos vistos no Capítulo 21. Para excitação harmônica, a **análise harmônica** (ver próxima seção) envolve apenas a triangularização de uma matriz reduzida a cada frequência de excitação sendo calculada.
5. Se a matriz modal Φ for obtida via um método como o de iterações subespaiais ou de Lanczos, ela provê uma modelagem bastante mais precisa dos primeiros m modos do sistema que aquele produzido por \mathbf{T} .
6. Em geral, os softwares comerciais de elementos finitos dispõem das duas formas de redução em problemas dinâmicos, a modal e a de Guyan. Discussões e resultados numéricos comparativos podem ser vistos em [45].

20.2 Análise de resposta harmônica

Métodos de resposta harmônica permitem que se analise a resposta de uma estrutura submetida a um carregamento harmônico, isto é, um carregamento do tipo senoidal com amplitude e frequência constante. Os métodos viabilizam a elaboração de um gráfico (espectro de frequências) com a amplitude de deslocamento (ou velocidade, aceleração, componente de tensão, etc.) de um ponto qualquer na estrutura versus frequência de excitação. Conhecidas as frequências do carregamento, o gráfico indica a amplitude da resposta, como no exemplo da Figura 20.2. Assim tem-se uma visão panorâmica do comportamento da estrutura quanto a excitações em diversas frequências. Particularmente, tem-se a identificação das frequências naturais amortecidas da estrutura como aquelas em que as amplitudes são maiores. Caso as frequências naturais não amortecidas tenham sido anteriormente identificadas, o gráfico aponta quais delas são mais importantes do ponto de vista de amplitudes de resposta.

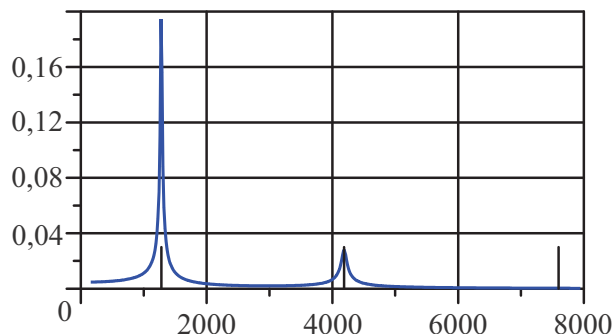


Figura 20.2: Amplitude [m] versus frequência de excitação [Hz] obtida por redução modal usando 2 modos num sistema de 3 graus de liberdade. As barras verticais indicam as frequências naturais não amortecidas (1.280, 4.188, 7.597 Hz) obtidas pela malha de 3 elementos, na página 512.

Duas formas principais são usadas na elaboração do espectro de frequências. Em ambas as formas, as matrizes da equação de movimento do MEF são reduzidas. Numa forma, elas são

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t) = \underbrace{\mathbf{\Phi}\mathbf{N}}_{\mathbf{U}} e^{i\Omega t} = \mathbf{U} e^{i\Omega t}. \quad (20.19)$$

Nota-se que \mathbf{U} é um vetor complexo de dimensão N . Na presente análise não se busca a solução temporal, mas apenas \mathbf{U} , que pode ser representado por sua parte real e imaginária ou por sua amplitude e ângulo de fase. Esses últimos são dados por

$$U_k = U_k^* e^{-i\delta_k}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N. \quad (20.20)$$

Assim, a solução temporal fica

$$u_k(t) = U_k^* e^{i(\Omega t - \delta_k)}. \quad (20.21)$$

Nos programas comerciais a solução pode ser apresentada através do par amplitude/ângulo de fase (U_k^* e δ_k), ou na parte real/imaginária de \mathbf{U} obtida de (20.19).

A Tabela 20.2.1 apresenta um fluxograma para o processo de cálculo do método harmônico via redução modal.

Tabela 20.1: Fluxograma do método de análise harmônica por redução modal.

1	Determina \mathbf{K} , \mathbf{C} e \mathbf{M} pelo MEF.
2	Lê dados de carga, em amplitude/fase ($B_k; \psi_k$), $k = 1, \dots, N$.
3	Lê dados: $m =$ número de modos, Ω_{\min} , $\Omega_{\max} =$ faixa de frequências e $n_\Omega =$ número de valores de Ω
4	Identifica os m valores de amortecimento modal ζ_j .
5	Calcula carregamento na forma $\mathbf{B} = \mathbf{B}^R + i\mathbf{B}^I$.
6	Resolve problema $[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\phi}^j = \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, m$, isto é, obtém $\boldsymbol{\Lambda}^2$ e $\mathbf{\Phi}$.
7	Calcula $\mathbf{D} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B} = \mathbf{D}^R + i\mathbf{D}^I$.
8	Converte \mathbf{D} para a forma polar: $D_j = d_j e^{i\rho_j}$: $d_j = \sqrt{(D_j^R)^2 + (D_j^I)^2}, \quad \rho_j = \arctan \frac{D_j^I}{D_j^R}.$
9	$\Delta\Omega = \frac{\Omega_{\max} - \Omega_{\min}}{n_\Omega - 1}$ - intervalo na faixa de frequências.
10	$c_\Omega = 0$ - contador de valores de frequências.
11	Início dos incrementos de frequência: $\Omega = \Omega_{\min} + c_\Omega \Delta\Omega$.
12	$h_j = \left[(1 - \beta_j^2)^2 + (2\zeta_j \beta_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \phi_j = \arctan \left\{ \frac{2\zeta_j \Omega}{(1 - \beta_j^2)} \right\} e$ $N_j = \frac{d_j}{\omega_j^2 h_j} e^{i(\rho_j - \phi_j)}.$
13	Calcula solução na frequência Ω em forma real/imaginária: $\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}\mathbf{N} = \mathbf{U}^R + i\mathbf{U}^I$.
14	Converte solução \mathbf{U} para a forma polar $U_k = U_k^* e^{i\delta_k}$, com amplitude/fase: $U_k^* = \sqrt{(U_k^R)^2 + (U_k^I)^2}, \quad \delta_k = \arctan \frac{-U_k^I}{U_k^R}, \quad k = 1, \dots, N.$
15	Se $c_\Omega < n_\Omega$, faz $c_\Omega = c_\Omega + 1$ e volta ao passo 11. Do contrario, cálculo concluído.

20.2.2 Exemplo 19.1 - Análise harmônica por redução modal

Considere a barra do Exemplo 17.11.1, página 497, engastada na extremidade esquerda, modelada por três elementos finitos como na Figura 18.4. Considere a barra sob condições iniciais de deslocamentos e velocidade nulas, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, submetida a uma força aplicada na extremidade variando no tempo conforme $10^5 \cos \Omega t$ Newtons.

Então, a resposta no nó 4 da malha (ver Figura 18.4), página 497, é dado pela parte real de $u_4(t) = 6,077 \cdot 10^{-3} e^{i(4.000t+0,01223)}$. Observe-se que essa amplitude no nó 4 da malha, $6,077 \cdot 10^{-3}$, é bastante próxima do valor de amplitude obtido pelo método de sobreposição modal, no Exemplo 19.10, eq. (19.161), com o valor de $6,355 \cdot 10^{-3}$ quando o método de sobreposição era feito com os três modos e amplitude $6,07 \cdot 10^{-3}$ m quando utilizava apenas 2 modos. Como comparação, o Exemplo 19.12 a seguir determina a solução analítica para a amplitude da seção extrema da barra, para vibrações harmônicas não amortecidas, no valor de $6,38734 \cdot 10^3$ m.

O procedimento entre as eqs. (20.23) e (20.24), pode ser realizado para uma série de valores de frequências Ω , e os resultados são mostrados nas Figuras 20.2 e 20.3. Nessas figuras as frequências de excitação coincidentes com as frequências naturais foram marcadas com barras verticais. Nota-se que, como foram utilizados dois modos na análise, as duas frequências naturais são bem identificadas em ambos os gráficos: no gráfico de amplitudes aparecem os picos e no de ângulos de fase existem as trocas de sinal. Entretanto, a terceira frequência natural não é identificada.

Nota-se que a amplitude máxima no primeiro pico ocorre numa frequência um pouco menor que a primeira frequência natural. Isso é coerente com a solução analítica do problema de um grau de liberdade, como pode ser visto em (17.47), página 475. Entretanto nota-se na solução aproximada desse exemplo, Figura 20.2, a frequência do segundo pico de amplitude é bem aproximada, porém aparece superior à segunda frequência natural. Isso é um reflexo do fato de terem sido usados apenas dois modos na redução das matrizes.

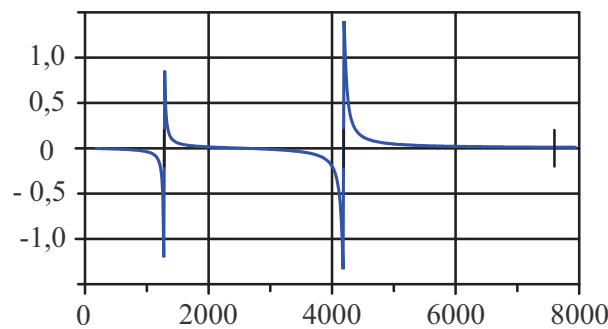


Figura 20.3: Ângulo de fase [rad] versus frequência de excitação [Hz] obtida por redução modal usando 2 modos. As barras verticais indicam as frequências naturais não amortecidas (1.280, 4.188, 7.597 Hz) obtidas pela malha de 3 elementos, na página 512.

20.2.3 Exemplo 19.2 - Solução analítica - resposta harmônica não amortecida em barra

Considera-se uma barra como na Figura 18.4, com os dados mostrados no Exemplo 17.11.1 (2), página 497, engastada na extremidade esquerda. Considere a barra submetida a uma força aplicada na extremidade variando no tempo conforme $10^5 \cos \Omega t$ Newtons. Considerar vibrações não amortecidas. Identifique as condições iniciais que a solução obtida requer. Determinar a amplitude da resposta na extremidade da barra na frequência de excitação de $\Omega = 4.000$ /s, usando $E = 200$ GPa, $\rho = 7.800$ kg/m³, $A = 10^{-4}$ m², $L = 1,0$ m.

Solução:

Considera-se a solução analítica para os modos naturais de vibração desenvolvida no Exemplo 4. A equação diferencial de movimento é a eq. (19.51), página 514:

$$\left\{ \begin{array}{l} AE \frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} - \rho A \frac{d^2 u(x,t)}{dt^2} = 0 \quad \forall x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad t > 0, \\ AE \frac{du}{dx}(L, t) = Af_x, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (20.25)$$

onde $f_x = f_x(t)$ é uma força por unidade de área da seção transversal, aplicada na extremidade da barra. No presente caso, essa é a excitação harmônica dada por $Af_x = b \cos \Omega t$, com $b = 10^5$. A solução desse problema pode ser obtida por separação de variáveis por $u(x, t) = X(x)T(t)$. A solução é harmônica com a mesma frequência da excitação (e com ângulo de fase nulo devido à ausência de amortecimento). No espaço a solução é uma combinação linear dos modos de vibração $\sin \beta x$ e $\cos \beta x$:

$$X(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x, \quad \text{onde} \quad \beta^2 = \frac{\Omega^2 \rho}{E} \quad (20.26)$$

e a solução temporal é dada por $T(t) = \cos \Omega t$. A solução geral tem a forma

$$u(x, t) = X(x)T(t) = [C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x] \cos \Omega t. \quad (20.27)$$

Diferenciando essa expressão e substituindo em (20.25)₁ nota-se que a equação do movimento é satisfeita. Substituindo na segunda equação obtém-se o deslocamento no engaste, $u(0, t) = 0$, isto é, $[C_1 \sin \beta 0 + C_2 \cos \beta 0] \cos \Omega t = 0$, o que implica $C_2 = 0$.

Substituindo (20.27) em (20.25)₃ para a de condição de contorno natural tem-se

$$\begin{aligned} EA \frac{du}{dx}(L, t) &= Af_x, \\ \beta EA C_1 \cos \beta L \cos \Omega t &= b \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Essa expressão só pode ser satisfeita se $C_1 = b/(\beta EA \cos \beta L)$. Assim, a solução temporal do problema de vibração harmônica da barra é

$$\boxed{u(x, t) = \frac{b}{(\beta EA \cos \beta L)} \sin \beta x \cos \Omega t} \quad (20.28)$$

As condições iniciais associadas a essa solução são:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{b}{(\beta EA \cos \beta L)} \sin \beta x, \\ \dot{u}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (20.29)$$

Substituindo os dados do problema, para excitação de amplitude $b = 10^5$ na frequência $\Omega = 4.000$ /s, obtém-se a amplitude da resposta na extremidade da barra: ($\beta = \Omega \sqrt{\rho/E} = 4.000 \sqrt{7.800/200} \cdot 10^9 = 0,789937$)

$$u^{ampl}(L) = \frac{b}{(\beta EA \cos \beta L)} \sin \beta x \Big|_{L=1} = \frac{10^5}{0,789937 \times 200 \cdot 10^9 \times 10^{-4} \cos \beta L} \sin \beta L$$

o que resulta em $u^{ampl}(L) = 6,38734 \cdot 10^{-3}$ m. A Figura 20.4 mostra a variação da amplitude do deslocamento na extremidade da barra em termos da frequência de excitação Ω . Uma vez que não foi incluído amortecimento, os picos de amplitude vão ao infinito nas frequências de excitação correspondentes às frequências naturais da barra, determinadas na Tabela 19.1 para esses dados como $\{7.955, 23.864, 39.773\}$ rad/s.

20.2.4 Resposta harmônica via redução de Guyan

Considera-se a equação do movimento obtida pelo MEF, $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$, de dimensão N , e determina-se a matriz de transformação \mathbf{T} para a redução de Guyan, dada em (20.5). Aplica-se a transformação de Guyan, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}\boldsymbol{\eta}(t)$ na equação do movimento e pré-multiplica-se o resultado

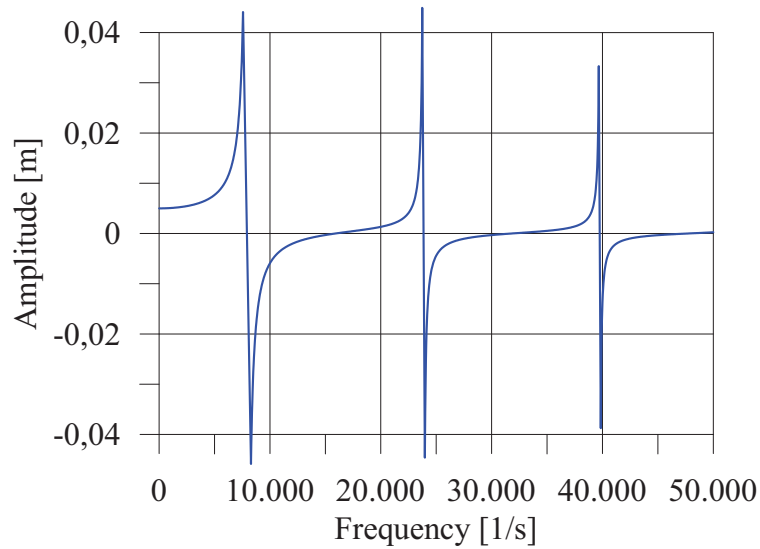


Figura 20.4: Solução analítica para amplitude de deslocamento na extremidade da barra versus frequência de excitação Ω . As frequências de reversão de fase para esses dados foram determinadas na Tabela 19.1, pg 512, como $\{7.955, 23.864, 39.773\}$ rad/s.

por \mathbf{T}^T . Isso resulta no sistema reduzido de m equações:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\boldsymbol{\eta}(t) &= \mathbf{f}(t), \\ &= \mathbf{T}^T \mathbf{F}(t), \\ \text{onde } \bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (20.30)$$

Considera-se o carregamento harmônico, dado em forma complexa por

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{B} e^{i\Omega t} \quad \text{onde } B_k = b_k e^{i\psi_k}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N, \quad (20.31)$$

onde \mathbf{B} é complexo, b_k e ψ_k são a amplitude e o **ângulo de fase do carregamento** no grau de liberdade k . Sendo $\mathbf{F}(t)$ colocado na forma complexa, também $\boldsymbol{\eta}(t)$ será complexo, também harmônico com a mesma frequência Ω da excitação, isto é,

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{N} e^{i\Omega t}, \quad (20.32)$$

sendo \mathbf{N} um vetor complexo de dimensão m . Diferenciando $\boldsymbol{\eta}(t)$ e substituindo em (20.30)₁ e simplificando o termo temporal tem-se

$$\begin{aligned} \left[\underbrace{\bar{\mathbf{K}} - \Omega^2 \bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{k}} + i \underbrace{\Omega \bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{c}} \right] \mathbf{N} &= \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{B}}_{\mathbf{g}} \\ \boxed{\underbrace{[\mathbf{k} + i\mathbf{c}]}_{\bar{\mathbf{k}}(\Omega)} \mathbf{N} = \mathbf{g}} & \end{aligned} \quad (20.33)$$

Esse é um problema algébrico cuja matriz $\bar{\mathbf{k}}(\Omega) \equiv [\mathbf{k} + i\mathbf{c}]$ é complexa, não esparsa, de dimensões $m \times m$, dependente da frequência de excitação Ω . Uma vez a solução \mathbf{N} tenha sido obtida, deve-se levá-la a (20.32) e em seguida aplicar à transformação de Guyan de volta ao espaço completo gerando o histórico de deslocamento:

não causa dificuldades na solução se $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Caso $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, a tendência é que \mathbf{k} , e por consequência, \mathbf{A} , sejam singular em algum valor de Ω próximo de cada frequência natural. Esses valores críticos de Ω , que podem ser designados por Ω^{cr} , são os m autovalores g_j do sistema reduzido $[\bar{\mathbf{K}} - g_j^2 \bar{\mathbf{M}}] \mathbf{x}^j = \mathbf{0}$. Nota-se que, como a matriz de transformação não aproxima corretamente os m primeiros modos de vibrações não amortecidas da estrutura, os g_j não serão as suas frequências naturais, embora possam ser aproximações.

Caso o sistema seja amortecido, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ faz com que \mathbf{A} seja não singular mesmo em $\Omega = g_j$.

Tabela 20.2: Fluxograma do método de análise harmônica por redução de Guyan.

1	Determina \mathbf{K} , \mathbf{C} e \mathbf{M} pelo MEF.
2	Lê dados de carregamento nodal, em amplitude/fase $(B_k; \psi_k)$, $k = 1, \dots, N$.
3	Lê dados: $m =$ número de g.l.mestres, Ω_{\min} , $\Omega_{\max} =$ faixa de frequências e $n_\Omega =$ número de valores de Ω .
4	Calcula carregamento na forma $\mathbf{B} = \mathbf{B}^R + i\mathbf{B}^I$.
5	Determina matriz de transformação \mathbf{T} . Calcula $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$, $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$, $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T}$.
6	Calcula carga reduzida $\mathbf{g} = \mathbf{T}^T \mathbf{B} = \mathbf{g}^R + i\mathbf{g}^I$.
7	$\Delta\Omega = \frac{\Omega_{\max} - \Omega_{\min}}{n_\Omega - 1}$ - intervalo na faixa de frequências.
8	$c_\Omega = 0$ - contador de valores de frequências.
9	Início dos incrementos de frequência: $\Omega = \Omega_{\min} + c_\Omega \Delta\Omega$.
10	$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{K}} - \Omega^2 \bar{\mathbf{M}}$ e $\mathbf{c} = \Omega \bar{\mathbf{C}}$.
11	Resolve $\begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{c} \\ \mathbf{c} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^R \\ \mathbf{N}^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^R \\ \mathbf{g}^I \end{Bmatrix}$.
12	$h_j = \left[(1 - \beta_j^2)^2 + (2\zeta_j \beta_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, $\phi_j = \arctan \left\{ \frac{2\zeta_j \Omega}{1 - \beta_j^2} \right\}$ e $N_j = \frac{d_j}{\omega_j^2 h_j} e^{i(\rho_j - \phi_j)}$.
13	Calcula $\mathbf{U} = \mathbf{T} \mathbf{N} = \mathbf{U}^R + i\mathbf{U}^I$.
14	Calcula solução na frequência Ω em forma real/imaginária: $\mathbf{U} = \Phi \mathbf{N} = \mathbf{U}^R + i\mathbf{U}^I$.
15	Converte solução \mathbf{U} para a forma polar $U_k = U_k^* e^{i\delta_k}$, com amplitude/fase:
16	$U_k^* = \sqrt{(U_k^R)^2 + (U_k^I)^2}$, $\delta_k = \arctan \frac{-U_k^I}{U_k^R}$, $k = 1, \dots, N$.
17	Se $c_\Omega < n_\Omega$, faz $c_\Omega = c_\Omega + 1$ e volta ao passo 10. Do contrario, cálculo concluído.

20.2.5 Exemplo 19.3 - Análise harmônica por redução de Guyan

Considere a barra do Exemplo 17.11.1, página 497, engastada na extremidade esquerda, modelada por três elementos finitos como na Figura 18.4. Considere a barra sob condições iniciais de deslocamentos e velocidade nulas, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, submetida a uma força aplicada na extremidade variando no tempo conforme $10^5 \cos \Omega t$ Newtons.

Determine o espectro de frequências para a amplitude da resposta no nó 4 na extremidade da barra. Utilize o método de redução de Guyan com os dois nós da extremidade livre da barra para obter a resposta em frequência. (Observe que esse problema é análogo ao Exemplo 11, apenas que naquele se utilizavam os modos de vibrações para a redução das matrizes.) Detalhar a solução para a frequência de excitação de $\Omega = 4.000$ /s. Use $E = 200$ GPa, $\rho = 7.800$ kg/m³, $A = 1,0$ cm², $L = 1,0$ m.

Solução:

As matrizes de MEF, os modos e frequências naturais da barra foram determinados nos exemplos anteriores, eqs. (18.33), (19.46)-(19.47) e as matrizes massa e rigidez são:

O módulo do vetor de carregamento reduzido é $\mathbf{g} = \mathbf{T}^T \mathbf{B}$, tal que suas partes real e imaginária são

$$\mathbf{g} = \Phi^T \mathbf{B} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{g}^R = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10^5 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{g}^I = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Montam-se as matrizes do sistema (20.33) $[\mathbf{k} + i\mathbf{c}] = \mathbf{g}$: $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{K}} - \Omega^2 \bar{\mathbf{M}}$ e $\mathbf{c} = \Omega \bar{\mathbf{C}}$:

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{K}} - \Omega^2 \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 8,584 & -6,069 \\ -6,069 & 5,8613 \end{bmatrix} 10^7 \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \Omega \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 3,378 & -1,184 \\ -1,184 & 1,824 \end{bmatrix} 10^5.$$

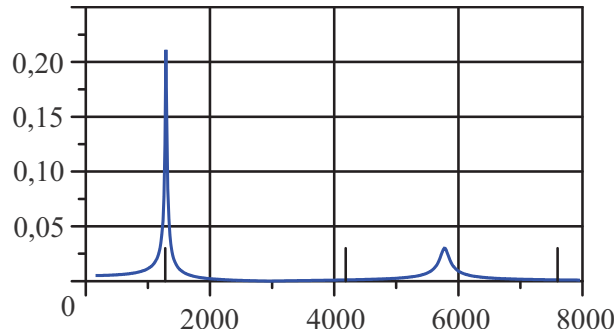


Figura 20.5: Amplitude [m] versus frequência de excitação [Hz] obtida por redução de Guyan usando graus de liberdade mestre dos nós 2 e 3. As barras verticais indicam as frequências naturais não amortecidas (1.280, 4.188, 7.597 Hz) obtidas pela malha de 3 elementos, na página 512.

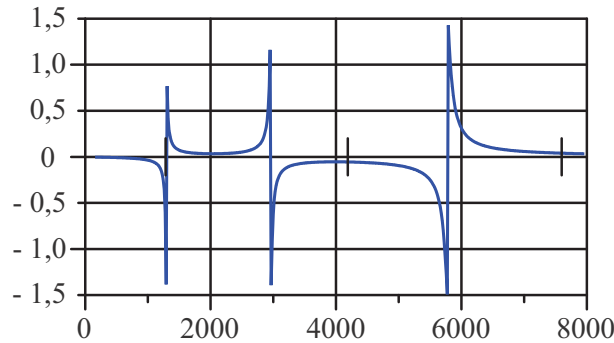


Figura 20.6: Ângulo de fase [rad] versus frequência de excitação [Hz] obtida por redução de Guyan usando graus de liberdade mestre dos nós 2 e 3. As barras verticais indicam as frequências naturais não amortecidas (1.280, 4.188, 7.597 Hz) obtidas pela malha de 3 elementos, na página 512.

O sistema algébrico $[\mathbf{k} + i\mathbf{c}] = \mathbf{g}$ é particionado na forma (20.40)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{c} \\ \mathbf{c} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^R \\ \mathbf{N}^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^R \\ \mathbf{g}^I \end{Bmatrix} \quad \text{que fica}$$

$$\begin{bmatrix} 858,4 & -606,9 & 3,378 & -1,184 \\ -606,9 & 586,13 & -1,184 & 1,824 \\ 3,378 & -1,184 & 858,4 & -606,9 \\ -1,184 & 1,824 & -606,9 & 586,13 \end{bmatrix} 10^5 \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^R \\ \mathbf{N}^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10^5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (20.44)$$

e sua solução é