

## Capítulo 18

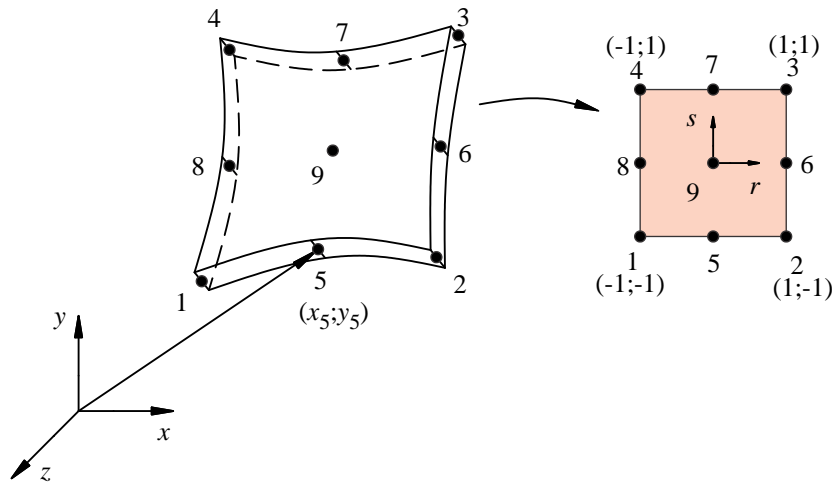
# Análise de compostos por elementos finitos – 1ª ordem

Até a década de 1960, a única forma de resolver problemas de placas e cascas, isotrópicas ou não, era através de soluções analíticas, geralmente em séries, por métodos como os de Ritz, de Galerkin, de Navier e outros em centenas de formas e variações. Esses métodos são aplicados ou sobre a forma forte ou sobre a forma fraca do problema e, em geral, permitem o tratamento de problemas relativamente simples e simétricos em termos de geometria, carregamento e condições de contorno. Entre as décadas de 1960 e 1980, com o advento dos computadores, os métodos de elementos finitos foram desenvolvidos a partir do método dos resíduos ponderados, permitindo o tratamento de problemas de complexidade mais próxima das situações reais. As soluções analíticas disponíveis passaram, então, a ser usadas apenas em etapas preliminares de projeto, enquanto a análise de segurança de projetos passou a ser executada mais intensamente por elementos finitos e não exclusivamente através de procedimentos experimentais, como anteriormente.

A partir dos anos de 1990, os computadores pessoais passaram a ser disponíveis a custo baixo o suficiente para sua disseminação a virtualmente qualquer engenheiro, deixando de ser acessíveis apenas às grandes universidades e corporações. Ao mesmo tempo, as capacidades de processamento e memória cresceram ao ponto de suportarem os programas comerciais de elementos finitos que haviam sido desenvolvidos nas décadas anteriores para computadores de grande porte, principalmente *main frames*. Não apenas isso, mas eles passaram a admitir os programas gráficos de interação com o usuário nas etapas de pré e pós-processamento do modelo numérico.

De fato, o processo de projeto atual pode usar o método de elementos finitos em quase todas as suas etapas. Tipicamente essas etapas são as seguintes:

- a) **Pré-dimensionamento.** Ainda com a participação de pré-cálculos usando soluções analíticas e formas algébricas aproximativas realizadas em paralelo ou logo em seguida ao projeto conceitual.
- b) **Análise de segurança.** Definida uma configuração para o sistema, este pode ser modelado por elementos finitos com riqueza de detalhes em sua geometria, materiais, carregamento e condições de contorno, de forma a espelhar o sistema real com o grau de detalhamento julgado adequado. Respostas para os deslocamentos e tensões são obtidas em todos os pontos da estrutura, permitindo a análise de segurança. Diversos comportamentos físicos podem ser considerados, como por exemplo os efeitos dinâmicos, a instabilidade, não-linearidades associadas a grandes deslocamentos ou a propriedades de material, como plasticidade e viscoplasticidade.
- c) **Melhoria ou otimização do projeto.** A etapa de análise pode mostrar com clareza regiões super-solicitadas e deficiências no comportamento da estrutura. Torna-se, então, relativamente simples realizar alterações de formas, espessuras, posições de apoios e cargas e analisar novamente a configuração. Em paralelo, o desenvolvimento relativo à teoria de otimização, feito desde o início do século XX, tornou-se perfeitamente acoplado ao método de elementos finitos, de forma que hoje o processo de projeto da estrutura pode ser feito de forma até certo ponto automatizada.



**Figura 18.1:** Mapeamento do elemento lagrangeano biquadrático e numeração intrínseca dos 9 nós.

$$\begin{pmatrix} u^o(x, y) \\ v^o(x, y) \\ w(x, y) \\ \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \end{pmatrix}_h^e = \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no}^e(x, y) \begin{pmatrix} u_{no} \\ v_{no} \\ w_{no} \\ \psi_{xno} \\ \psi_{yno} \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \Omega^e \quad (18.3)$$

onde  $n_{ne}$  é o número de nós do elemento e  $w_{no}$ , com  $no = 1, 2, \dots, n_{ne}$ , representam os *valores nodais* de  $w_h(x, y)$  no elemento, da mesma forma que  $u_{no}, v_{no}, \dots, \psi_{yno}$ .  $N_{no}^e(x, y)$  é o conjunto das  $n_{ne}$  funções base do elemento “e”. Em geral essas funções  $N_{no}^e$  não estarão escritas diretamente em termos de coordenadas reais  $(x, y)$ , mas mapeadas em termos das *coordenadas intrínsecas*  $(r, s)$  do elemento. A expressão (18.3) acima pode ser vista de forma expandida em (18.6), como mostrado a seguir.

### 18.1.1 Polinômios Lagrangeanos

Consideramos a família de funções base Lagrangeanas, constituídas pelos polinômios de Lagrange. Para um elemento biquadrático com os nós numerados como na Figura 18.1, as funções são

$$\begin{array}{ll} N_1(r, s) = \frac{1}{4}rs(r-1)(s-1), & N_5(r, s) = \frac{1}{2}s(1-r^2)(s-1), \\ N_2(r, s) = \frac{1}{4}rs(r+1)(s-1), & N_6(r, s) = \frac{1}{2}r(r+1)(1-s^2), \\ N_3(r, s) = \frac{1}{4}rs(r+1)(s+1), & N_7(r, s) = \frac{1}{2}s(1-r^2)(s+1), \\ N_4(r, s) = \frac{1}{4}rs(r-1)(s+1), & N_8(r, s) = \frac{1}{2}r(r-1)(1-s^2), \\ & N_9(r, s) = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s^2). \end{array} \quad (18.4)$$

Funções similares de qualquer grau, como as bilineares, bicúbicas etc. podem ser facilmente formadas simplesmente fazendo produtos dos polinômios uniaxiais, nas direções  $r$  e  $s$ . Por exemplo, os polinômios uniaxiais quadráticos Lagrangeanos são

$$\boxed{L_1(r) = \frac{r}{2}(r-1), \quad L_2(r) = (1-r^2), \quad L_3(r) = \frac{r}{2}(r+1)} \quad (18.5)$$

Cada função  $L_{no}$  é unitária no nó “no” e nula nos demais nós, uma vez que as posições dos nós definem os valores da coordenada intrínseca  $r$  como  $r = -1, r = 0$  e  $r = +1$ , conforme a Figura 18.2. Voltando às funções bidimensionais, observe, por exemplo, que  $N_1(r, s)$  e  $N_5(r, s)$  em (18.4) são

$$x(r, s) = \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no}^e(r, s) x_{no}, \quad y(r, s) = \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no}^e(r, s) y_{no} \quad (18.9)$$

isto é, dado um ponto nas coordenadas intrínsecas  $(r, s)$ , obtemos suas coordenadas reais  $(x, y)$  através das funções base. Os escalares  $x_{no}$  e  $y_{no}$  são as coordenadas dos  $n_{ne}$  nós do elemento. As relações (18.9) colocam então as coordenadas  $x$  e  $y$  de um ponto genérico do elemento como funções de  $r$  e  $s$ . A relação inversa existe se a forma do elemento não for excessivamente distorcida, embora em geral possa não ser obtível de forma analítica. Isto significa que a relação (18.9) é biunívoca, permitindo que se possa escrever, pelo menos formalmente, a relação inversa  $r = r(x, y)$  e  $s = s(x, y)$ , de forma que (18.8) pode ser vista como:

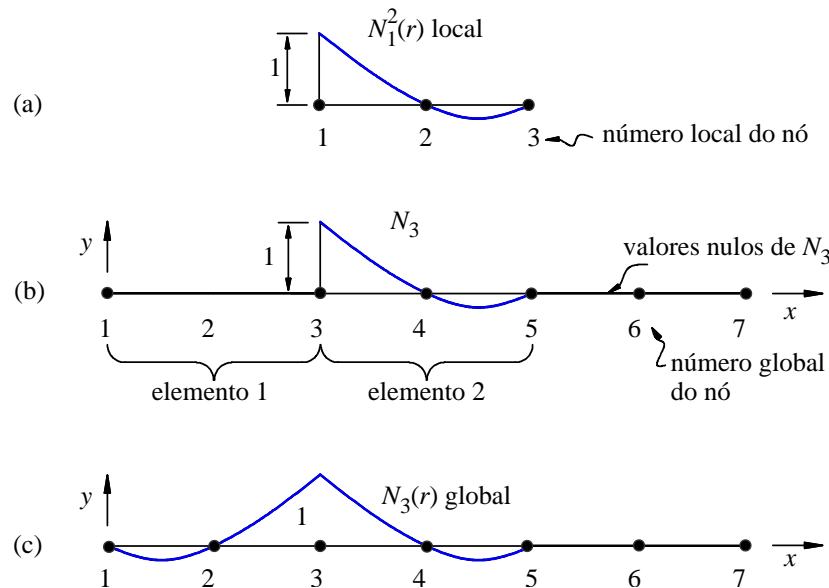
$$\mathbf{u}_h^e(x, y) = \bar{\mathbf{N}}^e(x, y)\mathbf{U}^e. \quad (18.10)$$

Esta é a forma inicialmente mostrada em (18.3).  $\bar{\mathbf{N}}^e(x, y)$  é uma função diferente de  $\mathbf{N}^e(r, s)$ , definida por  $\bar{\mathbf{N}}^e(x, y) := \mathbf{N}^e(r(x, y), s(x, y))$ . Entretanto, para simplificar a notação, eliminaremos as barras, uma vez que o valor das duas funções é o mesmo em cada ponto.

### 18.1.3 Continuidade interelementar

Observe que a forma com que os deslocamentos  $\mathbf{u}_h(x, y)$  são relacionados aos deslocamentos nodais em (18.10), implica que as funções  $\mathbf{u}_h$  são contínuas através das interfaces entre elementos contíguos. Isto é garantido pelo fato de que os nós da interface são comuns aos dois elementos vizinhos. Uma vez que o valor de  $\mathbf{u}_h$  é completamente definido pelos valores nodais,  $\mathbf{u}_h^e$  na borda de um elemento é igual a  $\mathbf{u}_h^e$  na borda comum pertencente ao elemento vizinho.

As funções elementares  $\mathbf{N}^e(r, s)$  de um elemento genérico “ $e$ ” podem ser montadas de forma a compor funções base globais. Por exemplo, no caso unidimensional, uma função local  $N_1^2(x)$ , associada ao nó local 1 do elemento 2, define a função global  $N_3(x)$  como ilustrado na Figura 18.3 para um caso uniaxial para facilitar a visualização.



**Figura 18.3:** a) Função base local quadrática uniaxial associada ao nó local 1 do elemento 2; b) função base global descontínua; c) função base global contínua associada ao nó 3.

A função global é zero em todo lugar, exceto sobre o elemento 2, onde possui os valores definidos pela função local. Esta é a função ilustrada na Figura 18.3b. Essa função, porém, é descontínua no nó 3, o que é inaceitável. Deve-se lembrar que no PTV é necessário que as funções de deslocamento sejam pelo menos contínuas, uma vez que elas serão diferenciadas uma vez para obter as deformações

$\mathbf{B} = \mathbf{0}$  e pode-se ter duas formulações separadas de elementos finitos, uma para o comportamento de membrana (elasticidade plana), e outra de flexão. A formulação do elemento de membrana seria definida pelo termo  $\mathbf{A}$  na primeira integral de (18.1), e o elemento de flexão pelo termo  $\mathbf{D}$  e pela integral de cisalhamento.

Para um elemento genérico “ $e$ ” de placa anisotrópica laminada a eq.(18.1) pode ser reescrita com o uso de (18.13), (18.16), (18.17) e (18.17) como

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{U}}^{eT} \left[ \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_f^{eT} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \mathbf{B}_f^e dx dy}_{\mathbf{K}_f^e} + \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_c^{eT} \mathbf{E}^e \mathbf{B}_c^e dx dy}_{\mathbf{K}_c^e} \right] \mathbf{U}^e \\ & - \hat{\mathbf{U}}^{eT} \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_w^{eT} q(x, y) dx dy}_{\mathbf{F}^e} = 0, \end{aligned} \quad (18.19)$$

ou, em notação compacta,

$$\hat{\mathbf{U}}^{eT} [\mathbf{K}_f^e + \mathbf{K}_c^e] \mathbf{U}^e - \hat{\mathbf{U}}^{eT} \mathbf{F}^e = 0. \quad (18.20)$$

$\mathbf{K}_f^e$ ,  $\mathbf{K}_c^e$  e  $\mathbf{F}^e$  são as matrizes de rigidez da membrana-flexão e de cisalhamento transversal e o vetor força nodal do elemento, respectivamente. Têm ordens  $5n_{ne} \times 5n_{ne}$  e  $5n_{ne}$ , respectivamente. O elemento biquadrático com polinômios Lagrangeanos, por exemplo, terá matrizes de ordem  $45 \times 45$  e vetor força  $\mathbf{F}^e$  de ordem 45.

Observe que o PTV afirma que a solução deve ser tal que a expressão em (18.1) deve se anular quaisquer que sejam as funções peso  $\hat{\mathbf{u}}_h$  usadas nos campos  $\boldsymbol{\varepsilon}_h^0$  e  $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_h$ . Esse “qualquer” deve ser, na realidade, restrito apenas a funções pertencentes ao espaço vetorial  $\mathbb{V}(\Omega)$ , isto é, funções  $C^0(\Omega)$  que se anulam na parte do contorno onde existem deslocamentos prescritos, isto é,  $\Gamma_u$ . Uma maneira de conseguir funções arbitrárias para (18.20) consiste em escolher diferentes vetores nodais  $\hat{\mathbf{U}}^e$ .<sup>1</sup> Por exemplo, se tomamos  $\hat{\mathbf{U}}^e = \{1, 0, \dots, 0\}^T$ , (18.20) produz uma equação algébrica, associada à primeira linha das matrizes de rigidez e do vetor força. Se em seguida tomamos  $\hat{\mathbf{U}}^e = \{0, 1, \dots, 0\}^T$ , isto produzirá uma segunda equação, correspondente à segunda linha das matrizes de rigidez e do vetor força. Podemos, portanto, produzir  $n_{ne}$  equações que tomarão a forma

$$\boxed{\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e, \quad \text{com} \quad \mathbf{K}^e = \mathbf{K}_f^e + \mathbf{K}_c^e} \quad (18.21)$$

Esta é a equação algébrica, discreta, de equilíbrio do elemento “ $e$ ”. Evidentemente esse sistema não pode ser resolvido, pois não são conhecidas condições de contorno de deslocamentos na borda do elemento. Algebricamente isto se traduz pelo fato de  $\mathbf{K}^e$  ser uma matriz singular, o que impede que se obtenha uma solução única para o sistema. Lembremos que a matriz de rigidez é simétrica e positiva semi-definida, isto é, todos os seus autovalores são não-negativos.

## 18.2 Integração e subintegração

Observe na definição das deformações em (18.11) que seus termos são constituídos pelas derivadas das funções de deslocamento em  $x$  e  $y$ , isto é,  $\partial u^0(x, y)/\partial x$  ou  $\partial v^0(x, y)/\partial x$  etc. De fato, não possuímos essas funções em termos de  $x$  e  $y$ , mas em termos das coordenadas intrínsecas  $r$  e  $s$  na forma (18.8). Entretanto, usando o mapeamento (18.9) e a regra da cadeia podemos escrever o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[ \begin{array}{cc} \frac{dx}{dr} & \frac{dy}{dr} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\}. \quad (18.22)$$

<sup>1</sup>Mais detalhes podem ser vistos em Mendonça/Fancello [136].

A matriz indicada é a chamada **matriz jacobiana J**. Em cada ponto de coordenadas  $(r, s)$ , a matriz  $\mathbf{J}(r, s)$  pode ser calculada usando (18.9). Caso o elemento não seja demasiado distorcido, essa matriz pode ser invertida. Pré-multiplicando (18.22) por  $\mathbf{J}^{-1}$  temos

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix}. \quad (18.23)$$

Os termos que compõem as matrizes de deslocamentos em (18.6) e de deformação em (18.12) podem ser tomados de dois conjuntos de funções que denominamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^e(x, y) &= \{ N_1(x, y), N_2(x, y), \dots, N_{no}(x, y), \dots, N_{nne}(x, y) \}, \\ \mathbf{N}^{xy}(x, y) &= \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & \dots & N_{no,x} & \dots & N_{nne,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & \dots & N_{no,y} & \dots & N_{nne,y} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18.24)$$

Como as funções de forma  $N_{no}$  estão definidas explicitamente em termos de  $(r, s)$ , podem-se calcular suas derivadas em cada ponto, formando a seguinte matriz:

$$\mathbf{N}^{rs}(r, s) = \begin{bmatrix} N_{1,r} & N_{2,r} & \dots & N_{no,r} & \dots & N_{nne,r} \\ N_{1,s} & N_{2,s} & \dots & N_{no,s} & \dots & N_{nne,s} \end{bmatrix}. \quad (18.25)$$

A relação entre as derivadas em  $(r, s)$  e  $(x, y)$  são dadas por (18.23). Aplicamos essa relação a cada coluna de (18.24) e a coluna correspondente de (18.25), de forma que a relação para todos os nós pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & \dots & N_{no,x} & \dots & N_{nne,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & \dots & N_{no,y} & \dots & N_{nne,y} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1} \begin{bmatrix} N_{1,r} & N_{2,r} & \dots & N_{no,r} & \dots & N_{nne,r} \\ N_{1,s} & N_{2,s} & \dots & N_{no,s} & \dots & N_{nne,s} \end{bmatrix},$$

$$\boxed{\implies \mathbf{N}^{xy}(x, y) = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}^{rs}(r, s)} \quad (18.26)$$

Isto significa que, de forma indireta, obtivemos as derivadas das funções base em relação a  $x$  e  $y$  num dado ponto de coordenadas  $(r, s)$  do elemento. Esses valores é que serão usados na definição das matrizes de deformação  $\mathbf{B}_f$  e  $\mathbf{B}_c$  no ponto  $(r, s)$ .

### 18.2.1 Integração numérica

Graças à existência do mapeamento, as funções no integrando de (18.19) não são, em geral, conhecidas explicitamente e precisam de integração numérica. Consideramos a seguir qualquer uma das integrais em (18.19) que definem uma das matrizes de rigidez do elemento ou do vetor força. A técnica mais frequente nesta integração consiste em uma quadratura como a de Gauss ou de Gauss-Lobato. Consideremos uma integral arbitrária definida num domínio unidimensional na forma:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (18.27)$$

Suponha que  $f(x)$  seja um polinômio de grau  $p$ . Primeiro mapeia-se o domínio real  $x_1 < x < x_2$  para o domínio padrão  $-1 \leq r \leq 1$ , utilizando as funções lineares

$$\left\| \begin{array}{l} L_1(r) = (1-r)/2, \\ L_2(r) = (1+r)/2, \end{array} \right\| \implies \left\| \begin{array}{l} x(r) = x_1 L_1(r) + x_2 L_2(r), \\ dx = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) dr. \end{array} \right\|$$

Com isso (18.27) torna-se

$$I = \int_{r=-1}^1 f(x(r)) \frac{dx}{dr} dr. \quad (18.28)$$

Prova-se (ver [103], por exemplo) que essa integral pode ser resolvida exatamente através de um somatório que envolve a avaliação da função num número finito  $np$  de pontos, denominados **pontos de integração**, de coordenadas intrínsecas  $\tilde{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, np$ , e de **pesos de integração**  $P_i$ , isto é:

$$I = \sum_{i=1}^{np} f(x(\tilde{r}_i)) \frac{dx}{dr} P_i. \quad (18.29)$$

A quantidades de pontos, suas posições e os valores dos pesos dependem do grau  $p$  do polinômio de  $f$ . Valores usuais são vistos na Tabela 18.1. Valores adicionais podem ser vistos em Kopal [114] e Zienkiewicz e Taylor [229], por exemplo. A formulação é tal que uma quadratura de  $np$  pontos integra exatamente um polinômio de grau

$$p = 2np - 1 \quad (18.30)$$

Caso a função  $f$  não seja polinomial, o erro associado ao uso de uma das quadraturas de  $np$  pontos é  $O(d^{2np} f(r^*)/dr^{2np})$ , onde  $r^*$  é a coordenada de um ponto no intervalo  $[-1, 1]$ . Isto significa que se  $f$  for um polinômio de grau 5, por exemplo, e usarmos a quadratura de 2 pontos, de fato estaremos integrando apenas o polinômio cúbico que passa pelos dois pontos de integração. Nesse caso o processo é denominado de **subintegração** ou integração reduzida. Em formulações de placas e cascas em geral, o processo de subintegração é uma das formas usadas para evitar problemas de excessiva rigidez que algumas formulações apresentam, principalmente os elementos de baixa ordem, quando são integradas de forma completa. (Este é o denominado problema de enrijecimento, *locking*, de membrana e cisalhamento transversal em elementos de vigas, placas e cascas.)

**Tabela 18.1:** Coordenadas e pesos para a fórmula de quadratura gaussiana.

Número de pontos $np$	grau $p$	coordenadas $\tilde{r}_i$	pesos $P_i$ [114][229]
1	1	0,0	2,0
2	3	$\pm 1,0/\sqrt{3}$	1,0
3	5	$\pm \sqrt{3/5}$	5/9
		0,0	8/9
4	7	$\pm 0,861\ 136\ 311\ 594\ 953$	0,347 854 854 137 454
		$\pm 0,339\ 981\ 043\ 584\ 856$	0,652 145 154 862 546

Em laminados bi e tridimensionais mapeados nos domínios  $(-1, -1) \leq (r, s) \leq (1, 1)$  e  $(-1, -1, -1) \leq (r, s, t) \leq (1, 1, 1)$ , a integração é feita de forma independente nas duas ou três direções do problema, usando as mesmas quadraturas unidimensionais da Tabela 18.1:

$$\begin{aligned} \iint f(x, y) dx dy &= \iint_{-1}^1 f(r, s) |J(r, s)| dr ds = \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} f(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) |J(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)| P_i P_j, \\ \iiint f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{-1}^1 f(r, s, t) |J(r, s, t)| dr ds dt \\ &= \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \sum_{l=1}^{np} f(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j, \tilde{t}_l) |\mathbf{J}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j, \tilde{t}_l)| P_i P_j P_l, \end{aligned} \quad (18.31)$$

onde  $|\mathbf{J}|$  é o determinante da matriz jacobiana. No caso unidimensional, ele é apenas o  $dx/dr$  usado em (18.28) e (18.29). Ele aparece para manter a unicidade do valor da área durante o mapeamento, isto é,  $dx dy = |\mathbf{J}(r, s)| dr ds$ , como pode ser visto em matemática avançada ou mecânica do contínuo [129]. Domínios mapeados em triângulos ou tetraedros possuem outras fórmulas de integração numérica que

$$\bar{N}_m(\bar{r}_l, \bar{s}_l) = \delta_{lm}, \quad \text{com } l, m = 1, \dots, \bar{n}\bar{p},$$

isto é,  $\bar{N}_m$  é uma base de funções que possuem valor unitário no  $m$ -ésimo ponto de integração reduzida e zero nos demais pontos. Esta nova função terá, então, o grau definido pelo número de pontos de integração reduzida em cada direção. Define-se  $\bar{B}_{ij}$  como

$$\bar{B}_{ij}(r, s) = \sum_{m=1}^{\bar{n}\bar{p}} \bar{N}_m(r, s) B_{ij}(\bar{r}_m, \bar{s}_m). \quad (18.33)$$

Num elemento com integração reduzida de  $\bar{n}\bar{p} = 2$ ,  $\bar{N}_m$  seriam funções bilineares interpolando os  $2 \times 2$  pontos de subintegração. A Figura 18.4 ilustra o caso correspondente unidimensional. Os elementos biquadráticos e bilineares têm integração normal de  $3 \times 3$  e  $2 \times 2$ , e reduzida de  $2 \times 2$  e  $1 \times 1$ , respectivamente. Assim, se  $B_{ij}$  tiver uma variação quadrática numa dada direção, como ilustrado na Figura 18.3a, a integração reduzida considera um  $\bar{B}_{ij}$  de variação linear.

Em (18.32) a integração é feita pela regra normal, mas os termos de  $\mathbf{K}_f^e$  correspondentes às deformações de membrana  $\varepsilon^o$ , que são as três primeiras linhas, são substituídos por  $\bar{B}_{ij}$ . Isso pode ser representado por

$$\mathbf{B}_f^e(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & \bar{B}_{12}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & \cdots \\ \bar{B}_{21}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & \bar{B}_{22}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & \cdots \\ \bar{B}_{31}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & \bar{B}_{32}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & \cdots \\ B_{41}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & B_{42}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & \cdots \\ B_{51}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & B_{52}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & \cdots \\ B_{61}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & B_{62}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) & \cdots \end{bmatrix}_{6 \times 5n_{ne}} \quad (18.34)$$

### 18.2.2 Sobreposição e condições de contorno

A matriz de rigidez e o vetor força de cada elemento são calculados fazendo as integrações indicadas em (18.19). Em seguida elas são sobrepostas formando a *matriz de rigidez global*  $\mathbf{K}$  e o *vetor força global*  $\mathbf{F}$ , de tal forma que se obtém o sistema algébrico

$$\boxed{\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}} \quad (18.35)$$

$\mathbf{K}$  é uma matriz de ordem  $5nnos \times 5nnos$ , ou  $n_{gl} \times n_{gl}$ , onde  $nnos$  é o **número de nós do modelo** e  $n_{gl} = 5nnos$  é o **número total de graus de liberdade** do modelo.  $\mathbf{U}$  contém todos os deslocamentos nodais do modelo, isto é,

$$\mathbf{U} = \left\{ \underbrace{u_1, v_1, w_1, \psi_{x1}, \psi_{y1}}_{\text{nó global 1}}, \underbrace{\dots}_{\text{nó 2}}, \dots, \underbrace{u_{nnos}, v_{nnos}, w_{nnos}, \psi_{xnnos}, \psi_{y_{nnos}}}_{\text{nó } nnos} \right\}^T. \quad (18.36)$$

Detalhes sobre o processo de sobreposição em si podem ser vistos em livros-texto de elementos finitos, como [103]. O mesmo se aplica aos processos de imposição das condições de contorno, da integração das matrizes, do uso das quadraturas de Gauss e do cálculo do jacobiano.

### 18.2.3 Cálculo das tensões

Uma vez aplicadas as condições de contorno de deslocamentos em número suficiente para eliminar todos os movimentos de corpo rígido, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  se torna não-singular e o sistema (18.35) pode ser resolvido. Após determinados os deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$  em todo o modelo, podem-se coletar os deslocamentos correspondentes a um certo elemento “ $e$ ” e formar o vetor de deslocamento nodal do elemento  $\mathbf{U}^e$ . Note que, diferentemente das seções anteriores, agora esse vetor é conhecido. As **deformações em qualquer ponto do elemento** podem ser obtidas calculando as matrizes de deformação  $\mathbf{B}_f^e(x, y)$  e  $\mathbf{B}_c^e(x, y)$  naquele ponto e efetuando os produtos (18.13).

$N$  equações e  $N$  valores desconhecidos  $\tau_{xz}^{l_k}(x, y, z_{k-1})$ , os valores da tensão na superfície inferior de cada lâmina. Esses valores podem ser determinados pelas condições de contorno e de continuidade interlaminar. As **condições de contorno** são

$$\tau_{xz}^{l_1}\left(x, y, -\frac{H}{2}\right) = 0, \quad \tau_{xz}^{l_N}\left(x, y, \frac{H}{2}\right) = 0, \quad (18.42)$$

isto é, as faces superior e inferior da placa são livres de tensões cisalhantes. As **condições de restrição** são

$$\tau_{xz}^{l_k}(x, y, z_k) = \tau_{xz}^{l_{k+1}}(x, y, z_k), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (18.43)$$

isto é, as tensões cisalhantes transversais são contínuas nas interfaces. Estas compõem então  $N-1$  condições de restrição, que somadas a (18.42) rendem  $N+1$  condições impostas para  $N$  parâmetros incógnitos. O processo de solução é portanto o seguinte:

- passo 1 – toma-se a primeira lâmina,  $k = 1$ ;
- passo 2 – da condição de contorno na superfície inferior do laminado, eq.(18.42), calcula-se a distribuição de tensões na lâmina  $k$  usando (18.41);
- passo 3 – obtém-se a tensão na superfície superior da lâmina  $l_k$ ,  $\tau_{xz}^{l_k} = (x, y, z_k)$ ;
- passo 4 – cálculo da tensão na superfície inferior da lâmina seguinte, isto é, de (18.43),  $\tau_{xz}^{l_{k+1}} = (x, y, z_k) = \tau_{xz}^{l_k} = (x, y, z_k)$ ;
- passo 5 – da eq.(18.41) obtemos a distribuição de tensão na lâmina  $l_{k+1}$ ;
- passo 6 – incrementa-se o contador de lâminas,  $k = k + 1$ , e retorna-se ao passo 3. Repetir o processo até a última lâmina.

Em geral, ao fim do processo, a segunda condição de contorno (18.42) não será perfeitamente satisfeita por causa das limitações da teoria de Mindlin. Esse procedimento pode ser repetido para  $\tau_{yz}$  de forma análoga.

#### 18.2.4 Extração de tensões

A determinação acurada de tensões em elementos finitos não é assunto trivial. As dificuldades não se devem aos procedimentos descritos para o cálculo de tensões, que são simples e diretos o suficiente. Mas observe que eles envolvem a diferenciação dos deslocamentos. Isso implica que, se estamos usando funções polinomiais quadráticas contínuas para expandir os deslocamentos, obteremos uma aproximação linear (em dada direção), para as deformações e tensões, **descontínuas** nas interfaces entre elementos, mesmo nas situações em que deveriam ser contínuas. *Grosso modo*, isto pode ser usado para explicar por que, no método de elementos finitos de deslocamentos, a precisão obtida nas tensões é sempre inferior à obtida para os deslocamentos num dado modelo.

Existem procedimentos para obter estimativas mais precisas para as tensões coplanares em elementos finitos de deslocamentos. Esses procedimentos atendem pelo nome genérico de *métodos de extração de tensões*, e têm sido objeto de pesquisa desde a década de 1970.

Um dos procedimentos mais clássicos e limpos é um método de suavização de tensões baseado no método dos mínimos quadrados. O desenvolvimento desse método iniciou-se com os trabalhos de Hinton e Campbell [97], em 1974, e Barlow [35], em 1976, entre outros: [97], [139], [43], [89]. Barlow mostrou que, num elemento isoparamétrico do tipo serendipity, as tensões tinham precisão máxima nos pontos de integração de Gauss. Baseado nesta informação desenvolveu-se a ideia de que as tensões podiam ser calculadas em cada elemento nos pontos de integração e em seguida esses valores podiam ser usados para determinar valores de tensões nos nós usando um *método de mínimos quadrados*, isto é, obtém-se a distribuição que minimiza o erro quadrático em cada elemento ou no modelo como um todo. Como consequência, a distribuição obtida seria contínua. O processo pode ser visto com detalhes em Zienkewicz [228], [229].



### 18.3 Tensões higrotérmicas

Na equação (18.1) partimos da expressão do PTV prevendo como único tipo de carregamento a carga distribuída  $q$ . Sem dúvida, outros tipos de carregamento podem ser facilmente incorporados com cargas distribuídas aplicadas ao longo do contorno e cargas concentradas. Entretanto, um tipo importante de carregamento em laminados que merece detalhamento é aquele proveniente dos efeitos térmicos e higroscópicos. Trataremos aqui apenas dos efeitos térmicos para manter a leveza do texto. O tratamento dos efeitos higroscópicos, pelo menos neste nível de análise, é feito de forma totalmente análoga à análise térmica. Basta a duplicação de todos os termos térmicos vistos a seguir para os correspondentes termos higroscópicos, iniciando pela transposição dos coeficientes de dilatação térmica  $\alpha$ 's por dilatação higrométrica  $\beta$ 's.

A análise de elementos finitos levando em conta as tensões térmicas pode partir da expressão do PTV, com a inclusão dos esforços iniciais de origem térmica. Em lugar de (18.1), usamos

$$\int_{\Omega} \left\{ \begin{matrix} \hat{\varepsilon}^o \\ \hat{\kappa} \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{matrix} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \begin{matrix} \hat{\gamma}_{yz} \\ \hat{\gamma}_{xz} \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} E_{44} & E_{45} \\ E_{45} & E_{55} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{w} q d\Omega - \underbrace{\int_{\Omega} \left\{ \begin{matrix} \hat{\varepsilon}^o \\ \hat{\kappa} \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} \mathbf{N}^T \\ \mathbf{M}^T \end{matrix} \right\} d\Omega}_{\text{novos}} = 0. \quad (18.44)$$

$\{\mathbf{N}^T, \mathbf{M}^T\}^T$  são os esforços térmicos calculados conforme as eqs.(7.53)–(7.54), página 180. Tomando as deformações peso  $\{\hat{\varepsilon}^o; \hat{\kappa}\}^T$  de (18.16), temos a expressão discretizada do PTV no elemento  $e$  de forma similar a (18.19):

$$\hat{\mathbf{U}}^{eT} \left[ \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_f^{eT} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{B}_f^e dx dy}_{\mathbf{K}_f^e} + \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_c^{eT} \mathbf{E}^e \mathbf{B}_c^e dx dy}_{\mathbf{K}_c^e} \right] \mathbf{U}^e - \underbrace{\hat{\mathbf{U}}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_w^{eT} q(x, y) dx dy}_{\mathbf{F}^e} - \underbrace{\hat{\mathbf{U}}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_f^{eT} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{N}^T \\ \mathbf{M}^T \end{matrix} \right\} dx dy}_{(\text{novos}) \mathbf{F}^{eT}} = 0, \quad (18.45)$$

donde resulta

$$\boxed{\left[ \mathbf{K}_f^e + \mathbf{K}_c^e \right] \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{eT}} \quad (18.46)$$

Aqui,  $\mathbf{F}^{eT}$  é o vetor de forças térmicas nodais no elemento  $e$ .

Após a sobreposição, imposição de condições de contorno e resolução do sistema algébrico, teremos os deslocamentos  $\mathbf{U}$  do modelo, de onde se podem selecionar os termos para os deslocamentos nodais de cada elemento  $\mathbf{U}^e$ . Tomando esse vetor, (18.13) produz as deformações generalizadas em cada ponto do elemento:

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{matrix} \right\}_h^e = \mathbf{B}_f^e(x, y) \mathbf{U}^e. \quad (18.47)$$

Com isso temos as deformações totais sofridas em cada lâmina  $k$  (ver eqs.(7.26) para vigas e (7.61) para painéis) nas direções  $x$ - $y$  do elemento:

$${}^t \varepsilon^{xl_k} = \varepsilon^o + z_k \kappa. \quad (18.48)$$

As deformações efetivas nas lâminas vêm de (7.27) e (7.62) para vigas e painéis:

$$\varepsilon^{xl_k}(z) = {}^t \varepsilon^{xl_k}(z) - {}_d \varepsilon^{xT, lk}(z). \quad (18.49)$$

O terceiro termo representa as deformações térmicas que a lâmina sofreria se estivesse desacoplada das demais, e é dado por (7.59).

As tensões efetivas vêm de (7.29) e (7.63):

$$\sigma^{xl_k}(z) = \overline{\mathbf{Q}}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{xl_k}(z). \quad (18.50)$$

Lembremos que estas são as tensões associadas à falha da lâmina, como visto no Capítulo 7.

Em diversas situações é útil conhecer as tensões e deformações provenientes apenas das interações térmicas entre as lâminas. Inicialmente, obtemos as deformações térmicas sofridas pelo laminado a partir de (7.21) ou (7.56):

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{oT} \\ \boldsymbol{\kappa}^T \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^T \\ \mathbf{M}^T \end{Bmatrix}. \quad (18.51)$$

Isso corresponde às deformações térmicas em cada lâmina  $k$  dadas por (ver eqs.(7.22) ou (7.57) para vigas e painéis):

$${}_t\boldsymbol{\varepsilon}_x^{xT,l_k}(z_k) = \boldsymbol{\varepsilon}^{oT} + z_k \boldsymbol{\kappa}^T. \quad (18.52)$$

Daí podemos extrair a parte associada às tensões térmicas (ver eqs.(7.23) ou (7.58)):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{xT,l_k}(z) = {}_t\boldsymbol{\varepsilon}^{xT,l_k}(z) - {}_d\boldsymbol{\varepsilon}^{xT,l_k}(z), \quad (18.53)$$

e as tensões numa lâmina genérica  $k$  provenientes das interações térmicas vêm de (7.24) ou (7.60):

$$\boldsymbol{\sigma}^{xT,l_k}(z) = \overline{\mathbf{Q}}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{xT,l_k}(z). \quad (18.54)$$

As tensões mecânicas vêm de (7.30) e (7.64):

$$\boldsymbol{\sigma}^{xm,l_k}(z) = \boldsymbol{\sigma}^{xl_k}(z) - \boldsymbol{\sigma}^{xT,l_k}(z).$$

## 18.4 Frequências naturais e carregamentos dinâmicos

Existem diversas formas de obter as equações algébricas de movimento para o método de elementos finitos. Uma delas consiste em usar o mesmo princípio dos trabalhos virtuais, já usado na seção anterior para o caso estático, e aplicar o princípio de D'Alembert para decompor uma parcela das forças de corpo em forças de inércia. Isso foi feito também no Capítulo 11.

A forma fraca para um problema dinâmico linear pode ser obtida a partir da forma (11.84), página 312. Eliminamos todos os termos não-lineares e consideramos, apenas por simplicidade da exposição, que a placa não esteja submetida a cargas coplanares, de forma que a integral de contorno em (11.84) se anule. As forças de corpo  $F_x, F_y, F_z$  etc. são definidas em termos das forças de inércia em (11.63). A integral dos termos de inércia em (11.84) torna-se:

$$I = \int_{\Omega} \left[ \rho_o (\widehat{u}^o \ddot{u}^o + \widehat{v}^o \ddot{v}^o + \widehat{w}^o \ddot{w}^o) + \rho_1 (\widehat{u}^o \ddot{\psi}_x + \widehat{v}^o \ddot{\psi}_y + \widehat{\psi}_x \ddot{u}^o + \widehat{\psi}_y \ddot{v}^o) + \rho_2 (\widehat{\psi}_x \ddot{\psi}_x + \widehat{\psi}_y \ddot{\psi}_y) \right] d\Omega. \quad (18.55)$$

Esta integral pode ser reorganizada de forma matricial como:

$$I = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \widehat{u}^o(x, y) \\ \widehat{v}^o(x, y) \\ \widehat{w}^o(x, y) \\ \widehat{\psi}_x(x, y) \\ \widehat{\psi}_y(x, y) \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho_o(x, y) & 0 & 0 & \rho_1(x, y) & 0 \\ 0 & \rho_o(x, y) & 0 & 0 & \rho_1(x, y) \\ 0 & 0 & \rho_o(x, y) & 0 & 0 \\ \rho_1(x, y) & 0 & 0 & \rho_2(x, y) & 0 \\ 0 & \rho_1(x, y) & 0 & 0 & \rho_2(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}^o(x, y, t) \\ \ddot{v}^o(x, y, t) \\ \ddot{w}^o(x, y, t) \\ \ddot{\psi}_x(x, y, t) \\ \ddot{\psi}_y(x, y, t) \end{Bmatrix} d\Omega, \quad (18.56)$$

mecânicas elásticas do material, considerando apenas sua massa. A distinção entre o material laminado e o homogêneo fica restrita apenas ao cálculo das densidades generalizadas  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Para a placa homogênea,  $\rho_0$  é a própria densidade do material multiplicada pela espessura da placa, enquanto para o laminado devemos usar a densidade equivalente, ponderando as densidades de cada lâmina conforme eq.(11.44). Nota-se que a formulação apresentada aqui é apenas uma das centenas que existem, não necessariamente a melhor ou mais precisa, apenas possivelmente a mais simples, mais utilizada e mais antiga, que fornece resultados geralmente aceitáveis em engenharia.

A equação diferencial (18.63) consiste, então, num problema clássico de dinâmica linear, em que se busca a solução nodal  $\mathbf{U}(t)$  a cada instante, dado o histórico de cargas nodais  $\mathbf{F}(t)$ , dada a configuração do sistema no instante inicial  $\mathbf{U}(0)$  e as condições de contorno a cada instante. Este é um típico problema de valor inicial para um problema de vibração forçada não-amortecido.

Formas clássicas de resolver esse problema são várias, como o *método da análise modal*, o *método de integração direta* e o *método de análise espectral*. Entretanto, vários procedimentos devem ser especiais porque, quando o sistema algébrico (18.63) é obtido pelo método de elementos finitos, a ordem das matrizes é tipicamente grande, tornando proibitivos certos procedimentos de cálculo. Sugerem-se ao leitor textos como os de [37], [133] e [61].

### 18.4.1 Frequências naturais de vibrações

Da mesma forma já vista em sistemas homogêneo-isotrópicos, a partir da equação do movimento (18.63) se pode definir um problema de autovalores para a determinação das aproximações para as frequências e modos naturais de vibração. Por completicidade mostraremos aqui o procedimento padrão.

Busquemos a resposta do sistema na situação em que o carregamento seja nulo, isto é,  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$ , para  $\forall t > 0$ . Usando o procedimento padrão de separação de variáveis adotado em equações diferenciais parciais, mostra-se que a solução de (18.63) pode ser posta na forma

$$\mathbf{U}(t) = \bar{\mathbf{U}}e^{i\omega t}, \quad (18.64)$$

onde  $\bar{\mathbf{U}}$  são valores nodais, independentes do tempo, “ $e$ ” é a função exponencial e  $\omega$ , um parâmetro real.  $\bar{\mathbf{U}}$  e  $\omega$  são identificados como o modo e a frequência natural de vibração, e são neste ponto ainda incógnitas.

Substituindo (18.64) em (18.63) para um carregamento nulo e simplificando o termo exponencial, obtemos:

$$\boxed{[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{0}} \quad (18.65)$$

que é um problema clássico, linear, de autovalor, com duas matrizes simétricas de ordem  $n_{gl}$ , que pode ser resolvido por métodos adequados.

Algebricamente, mostra-se que um problema como o (18.65) possui  $n_{gl}$  autopares reais. Em caso de análise de estruturas por elementos finitos, interessa apenas uns poucos primeiros, os menores 10 a 20 autopares, de forma que são geralmente usados os métodos que permitem extrair apenas os primeiros autopares de um problema. Isso também é associado ao fato de que o custo para obter todos os autopares é quase sempre proibitivo. Além disso, a precisão das aproximações para os modos obtidos por elementos finitos se deteriora à medida que o número do modo cresce, tornando-se apenas lixo numérico após um certo ponto. Remetemos o leitor a famílias de métodos como o de Lanczos, de Interação Subespacial [37], [64], e os métodos acessórios a estes, usados para pequenos sistemas, como o  $QR$  para matrizes reais não-simétricas e o de Jacobi para matrizes simétricas, entre outros, [81], [161].

## 18.5 Flambagem e matriz geométrica

Da mesma forma que no caso da análise dinâmica, a estabilidade inicial de placas laminadas por elementos finitos é idêntica à de placas isotrópicas, embora o comportamento exibido seja diferente.

não-conservativos, subestimando perigosamente os valores corretos. A análise realizada com (18.71) é chamada de **análise de instabilidade inicial**, e vem sendo progressivamente substituída por uma análise não-linear completa, de grandes deslocamentos.

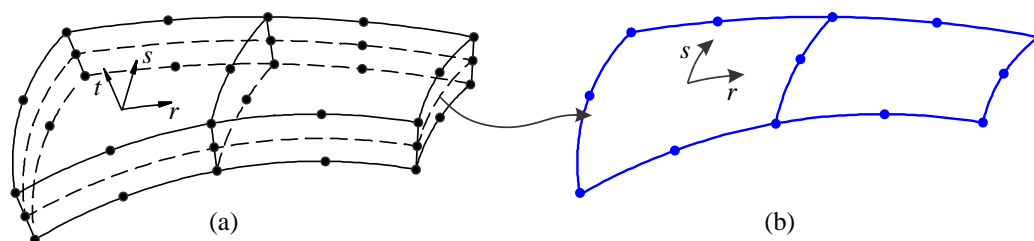
## 18.6 Elemento de casca degenerada laminada

Existem pelo menos duas grandes famílias de formulações de elementos finitos para cascas. Uma delas é proveniente das teorias de casca, embasada em teoria diferencial de superfícies, e uma outra que é obtida a partir de uma adaptação simples dos elementos sólidos tridimensionais tradicionais, denominada formulação de casca degenerada, como ilustrado na Figura 18.5. Formulações do último tipo são relativamente simples, pois de fato lidam com uma situação tridimensional adaptada, o que permite dispensar praticamente toda a complexidade da geometria analítica e das milhares de teorias de cascas desenvolvidas desde o início do século XX. Um levantamento abrangente de formulações de elementos finitos de cascas pode ser visto na referência [221].

A formulação de casca degenerada foi inicialmente apresentada por Ahmad, Irons e Zienkiewicz [26], de onde tomamos a descrição que segue. Desenvolvimentos sobre subintegração seletiva são apresentados por Zienkiewicz e Taylor [228] para cascas homogêneo-isotrópicas e detalhados para cascas de materiais compostos laminados por Hughes [103]. Bathe [37] faz uso extensivo de uma das melhores características dessa formulação de casca, que é a de permitir uma extensão direta a problemas não lineares.

A formulação parte da ideia um tanto óbvia de modelar a casca usando elementos sólidos, simplesmente definindo adequadamente as coordenadas nodais. Entretanto, fazendo isso diretamente, observam-se alguns problemas. Um deles, mais evidente, é o excessivo número de nós, isto é, usar dois ou mais nós ao longo da espessura da casca torna-se computacionalmente caro, principalmente em cascas, que usualmente possuem espessuras uniformes sobre grandes extensões, e podem, portanto, ser simuladas dentro de certo nível de precisão, apenas pelo comportamento de sua superfície média.

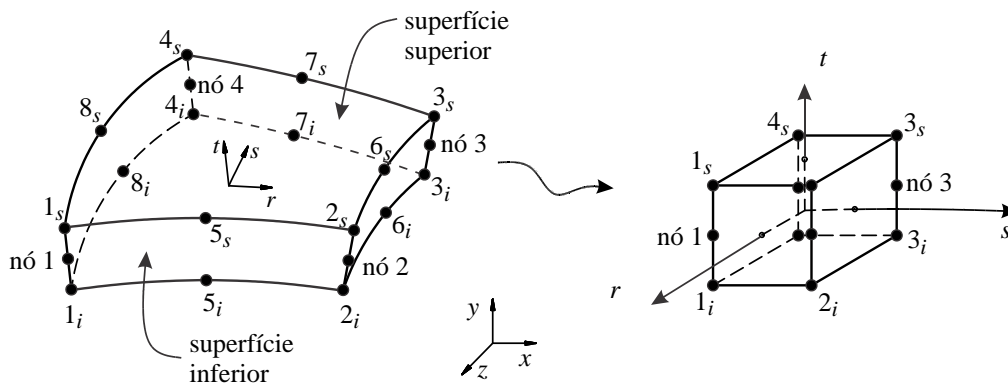
O segundo aspecto que é apontado por Zienkiewicz, um aspecto não óbvio, é que a colocação de diversos nós alinhados bastante próximos um do outro, ao longo da espessura, e outros relativamente bastante distantes ao longo da superfície, pode gerar matrizes de rigidez mal condicionadas. Isso ocorre em razão da presença de coeficientes demasiado diferentes dentro da matriz, uns representando a rigidez entre dois nós próximos, ao longo da espessura, outros de nós distantes, ao longo da superfície. Uma maneira de circunscrever essas dificuldades consiste em tomar a formulação sólida, tridimensional, e impor as condições de casca, isto é, a inextensibilidade e a linearidade do segmento inicialmente normal e reto, como detalhado a seguir.



**Figura 18.5:** Trecho de casca modelada por elementos sólidos triquadráticos serendipity em (a), e por elementos bidimensionais apenas em sua superfície média em (b).

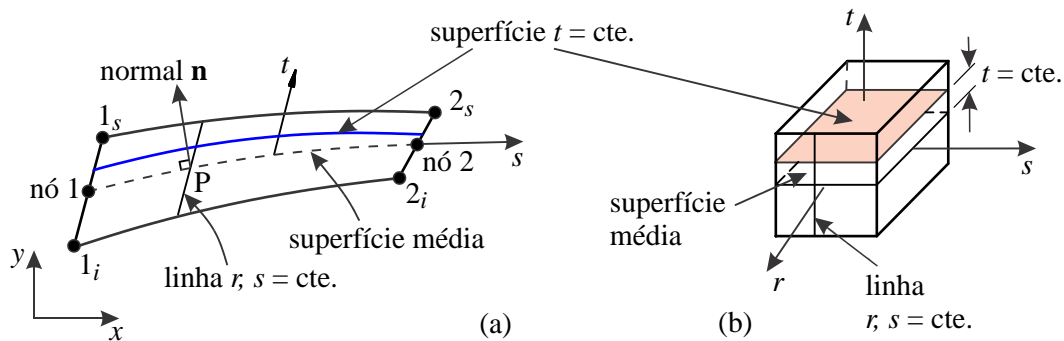
### 18.6.1 Geometria de um elemento quadrilateral de casca

Nesta etapa, o desafio consiste em converter a representação da geometria do segmento de casca das coordenadas  $x$ - $y$ - $z$  de cada um dos nós das superfícies inferior e superior, e dos nós intermediários do elemento sólido, em coordenadas apenas de um outro conjunto de nós, posicionados sobre uma superfície de referência, frequentemente a superfície média. Torna-se necessário, além disso, o valor da espessura da casca associada a cada ponto.



**Figura 18.6:** Domínio físico do elemento de casca e seu mapeamento no cubo-padrão de dimensões  $2 \times 2 \times 2$ . Os pontos  $i_i$  e  $i_s$  definem as superfícies inferior e superior. Esses pontos definem os nós  $no_i$  na superfície média.

Definimos inicialmente as coordenadas intrínsecas curvilíneas  $r, s$  na superfície média da casca e a coordenada  $t$  na direção da espessura. Essas coordenadas variam de  $-1$  a  $1$ , de forma que se possa definir um mapeamento entre a posição  $(x, y, z)$  de um ponto no elemento em relação ao sistema global fixo de eixos, e as coordenadas  $(r, s, t)$  no domínio-padrão. (Ver Figura 18.6).



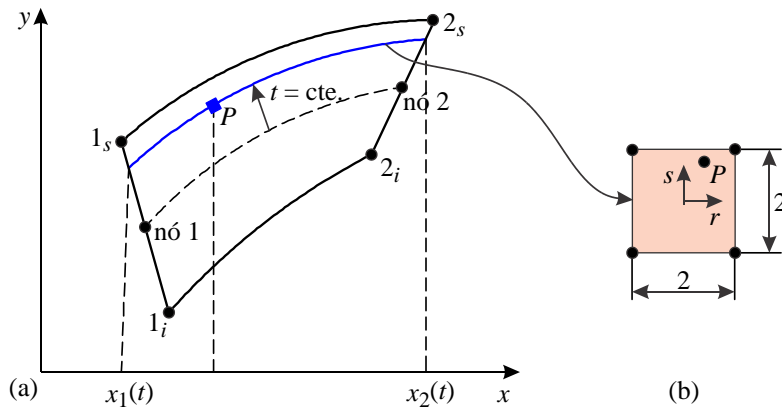
**Figura 18.7:** Superfície  $t = cte.$  e a linha “pseudonormal” definida por  $r, s = cte.$  O vetor  $\mathbf{n}$  é a normal ao plano  $t = cte.$  Em (a) temos apenas uma vista da face definida por  $r = +1$  do elemento.

Temos os pontos  $i_i$  que definem a superfície inferior e os pontos  $i_s$  na superfície superior como nas Figuras 18.6 e 18.7. No ponto médio entre cada par de pontos  $i_i$  e  $i_s$  define-se o nó  $no_i$ . Um ponto genérico  $P$  pode ser entendido como localizado pela interseção entre a superfície  $t = cte.$  e a linha de  $r, s = cte.$  Essa linha é chamada de **pseudonormal**, pois não necessariamente é normal à superfície de referência. O caso ilustrado na Figura 18.7 mostra essa diferença. Mesmo que inicialmente o elemento tenha sido definido de forma que o segmento seja normal, num problema não-linear de grandes deformações o elemento pode tornar-se distorcido como nesse caso.

Consideremos uma pseudonormal como aquela associada ao  $no_1$  na Figura 18.8. A coordenada  $x$  de um ponto genérico nesta linha, definido por um certo valor de  $t$ , pode ser obtida por interpolação linear entre as coordenadas  $x$  dos pontos extremos nas superfícies inferior e superior ( $1_i$  e  $1_s$  como ilustrados na Figura 18.8), isto é:

$$x_1(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right) x_{1s} + \left(\frac{1-t}{2}\right) x_{1i}.$$

Da mesma forma, podemos calcular a coordenada de um ponto na linha pseudonormal formada pelos pontos  $2_i$  e  $2_s$  na mesma superfície  $t = cte.$ , e para todas as demais pseudonormais. Esses pontos na superfície  $t = cte.$  têm coordenadas



**Figura 18.8:** Interpolação de  $\mathbf{x}$  no plano definido por  $t = cte.$  em um ponto genérico  $P.$  Em (b) temos o domínio padrão plano associado à superfície  $t = cte.$  do elemento.

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix}_j = \left(\frac{1+t}{2}\right) \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix}_{\text{sup.}} + \left(\frac{1-t}{2}\right) \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix}_{\text{inf.}}, \quad j = 1, \dots, n_{ne}. \quad (18.72)$$

Note que para  $t = 0$  temos as coordenadas dos nós na superfície de referência obtidas como a média aritmética das coordenadas dos pontos nas superfícies superior e inferior do elemento.

A esta altura temos as coordenadas de  $n_{ne}$  pontos sobre a superfície  $t = cte.$  Esses pontos, então, definem a posição de um ponto genérico  $P$  através das funções base bidimensionais comuns, definidas em termos das coordenadas intrínsecas  $r, s,$  como as funções biquadráticas (18.4). Esse é um mapeamento plano como o da Figura 18.8. A expressão desse mapeamento para a coordenada  $x$  do ponto  $P$  será:

$$x(r, s, t) = \sum_{j=1}^{n_{ne}} N_j(r, s) x_j(t). \quad (18.73)$$

Usando (18.72) temos o mapeamento completo na forma

$$\begin{Bmatrix} x(r, s, t) \\ y(r, s, t) \\ z(r, s, t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{n_{ne}} N_j(r, s) \left(\frac{1+t}{2}\right) \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix}_{\text{sup.}} + \sum_{j=1}^{n_{ne}} N_j(r, s) \left(\frac{1-t}{2}\right) \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix}_{\text{inf.}}. \quad (18.74)$$

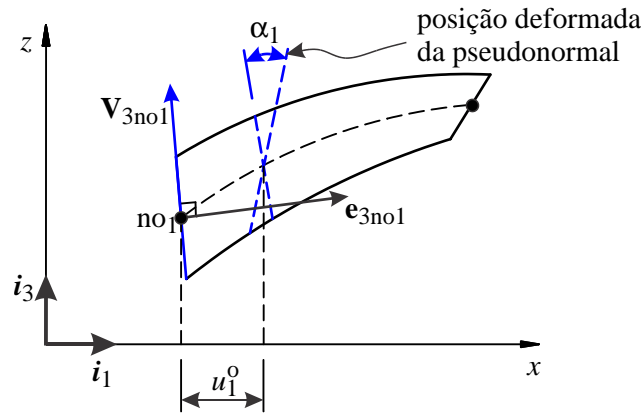
Em trabalhos com cascas, é usual e conveniente trabalhar com valores associados à superfície de referência. Desta forma, pode-se reordenar (18.74) para a forma

$$\begin{Bmatrix} x(r, s, t) \\ y(r, s, t) \\ z(r, s, t) \end{Bmatrix} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n_{ne}} N_j \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_{js} + x_{ji} \\ y_{js} + y_{ji} \\ z_{js} + z_{ji} \end{Bmatrix}}_{\text{superfície média}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n_{ne}} N_j \frac{t}{2} \begin{Bmatrix} x_{js} - x_{ji} \\ y_{js} - y_{ji} \\ z_{js} - z_{ji} \end{Bmatrix}}_{\text{vetor pseudonormal}},$$

isto é,

$$\begin{Bmatrix} x(r, s, t) \\ y(r, s, t) \\ z(r, s, t) \end{Bmatrix} = \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no} \begin{Bmatrix} x_{no} \\ y_{no} \\ z_{no} \end{Bmatrix} + \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no} \frac{t}{2} \mathbf{V}_{3no}. \quad (18.75)$$

Agora estamos tratando com os  $n_{ne}$  nós do elemento situados sobre a superfície de referência, de forma que voltamos a usar o contador  $no$  como em todo o capítulo. O vetor  $\mathbf{V}_{3no}$  é orientado segundo



**Figura 18.10:** Posição deformada do segmento pseudonormal. Deslocamento  $u_1^0$  e rotação  $\alpha_1$  no nó 1 em torno do vetor  $\mathbf{e}_{2no1}$ .

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{1no} = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{V}_{3no}, \\ \mathbf{V}_{2no} = \mathbf{V}_{3no} \times \mathbf{V}_{1no}, \end{array} \right. \xrightarrow{\text{normalização}} \left\| \begin{array}{l} \mathbf{e}_{1no} = \mathbf{V}_{1no} / \|\mathbf{V}_{1no}\|, \\ \mathbf{e}_{2no} = \mathbf{V}_{2no} / \|\mathbf{V}_{2no}\|. \end{array} \right. \quad (18.78)$$

Caso o vetor unitário global  $\mathbf{i}_1$  seja paralelo (ou quase paralelo) a  $\mathbf{V}_{3no}$ , usa-se o vetor  $\mathbf{i}_2$  em lugar de  $\mathbf{i}_1$  nessa expressão.

### 18.6.3 Deformações e tensões nas lâminas

Consideremos neste ponto a hipótese de que as lâminas na casca sejam dispostas de forma “bem comportada”, isto é, distribuem-se de forma aproximadamente paralela à superfície média, ou mais precisamente, ao longo das superfícies  $t = cte$ . Consideremos essas lâminas ortotrópicas com as direções principais orientadas de forma coerente. Isso torna necessário definir as deformações e tensões segundo eixos paralelos à superfície  $t = cte$ . Mas observe que os eixos definidos por  $\mathbf{e}_{1no}$ - $\mathbf{e}_{2no}$ - $\mathbf{e}_{3no}$  não servirão, pois, como  $\mathbf{e}_{3no}$  está na direção pseudonormal,  $\mathbf{e}_{1no}$  e  $\mathbf{e}_{2no}$  não estarão no plano tangente  $t = cte$ . Isso torna necessário que se definam eixos  $x'y'z'$  locais em cada ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y, z)$ , orientados em novas direções designadas como  $\mathbf{e}'_{3no}$  normal e  $\mathbf{e}'_{1no}$  e  $\mathbf{e}'_{2no}$  tangentes à superfície  $t = cte$ ., como ilustrado na Figura 18.11.

Consideramos agora as relações constitutivas (4.77), página 89, para uma lâmina ortotrópica em relação aos eixos locais  $x'y'z'$ , isto é,

$$\boldsymbol{\sigma}^{x'} = \mathbf{C}^{x'} \boldsymbol{\varepsilon}^{x'}, \quad (18.79)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{x'} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{x'} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{z'x'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \end{Bmatrix}. \quad (18.80)$$

Aqui  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  são as componentes de deslocamento nas direções locais  $x'$ - $y'$ - $z'$  definidas no ponto genérico  $P$ . O ângulo  $\theta$  de orientação das fibras na lâmina, em geral, é fornecido pelo usuário e é medido a partir de um dos lados do elemento, por exemplo, o lado definido pelos nós 1 e 2. O programa deve,

então, calcular o ângulo entre o eixo principal da lâmina e o eixo  $x'$  de forma a permitir a rotação da matriz de rigidez em (4.77) a partir de (4.3) e das propriedades de engenharia (4.16). Uma vez obtida a matriz de rigidez  $\mathbf{C}^{x'}$  em (18.79), aquela relação deve ser modificada para garantir a condição de tensão  $\sigma_{z'} = 0$  na lâmina, que é importante nas teorias de casca.

O processo consiste em impor  $\sigma_{z'} = 0$  em (18.79), de forma que da terceira das equações pode-se explicitar  $\varepsilon_{z'}$  como:

$$\varepsilon_{z'} = -\frac{1}{C_{33}^{x'}} \sum_{j=1; j \neq 3}^6 C_{3j}^{x'} \varepsilon_{j'}$$

(Note que aqui, implicitamente, ordenamos as tensões e deformações em (18.80) com índices numéricos de 1 a 6.) Substituindo  $\varepsilon_{z'}$  de volta em (18.79) obtemos a chamada relação constitutiva reduzida:

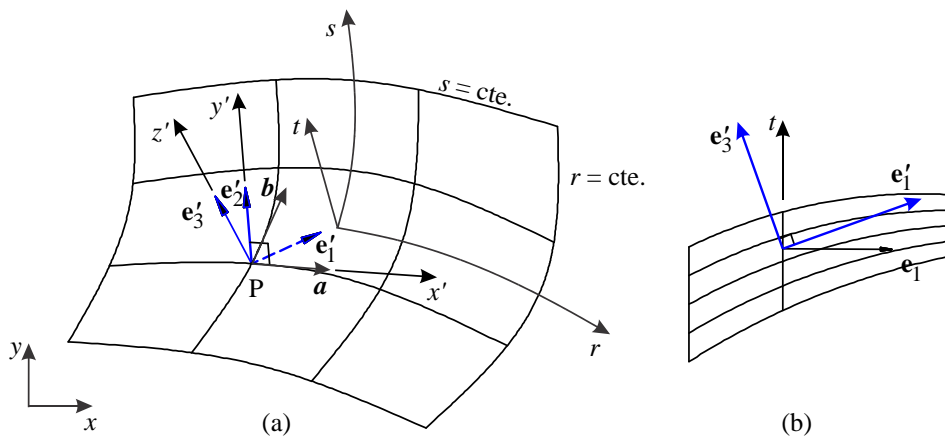
$$\sigma_{i'} = \sum_{j=1; j \neq 3}^6 \left( C_{ij}^{x'} - \frac{C_{i3}^{x'} C_{3j}^{x'}}{C_{33}^{x'}} \right) \varepsilon_{j'}, \quad \text{para } i', j' = 1, 2, 4, 5, 6. \quad (18.81)$$

De forma explícita, teremos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} & C_{12} - \frac{C_{13}C_{32}}{C_{33}} & 0 & 0 & C_{16} - \frac{C_{13}C_{36}}{C_{33}} \\ & C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} & 0 & 0 & C_{26} - \frac{C_{23}C_{36}}{C_{33}} \\ & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & C_{55} & 0 \\ \text{sim.} & & & & C_{66} - \frac{C_{36}^2}{C_{33}} \end{bmatrix}^{x'} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{z'x'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix}. \quad (18.82)$$

Esta relação reduzida será representada simplesmente por:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}'. \quad (18.83)$$



**Figura 18.11:** (a) Eixos num ponto genérico  $P$  posicionado numa superfície  $t = cte.$ ; (b) eixos sobre uma superfície  $s = cte.$  Ilustrações dos vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  tangentes às linhas  $r = cte.$  e  $s = cte.$ , não-ortogonais; vetores  $\mathbf{e}'_1$  e  $\mathbf{e}'_2$ , ortogonais, tangentes à superfície  $t = cte.$

### 18.6.4 Transformações

A matriz de rigidez do elemento é obtida pelo PTV e é dada por



normalizá-los:  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{V}'_1 / \|\mathbf{V}'_1\|$  e  $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{V}'_2 / \|\mathbf{V}'_2\|$ .

Observe agora que as componentes  $\{\mathbf{e}'_1\}$ ,  $\{\mathbf{e}'_2\}$  e  $\{\mathbf{e}'_3\}$  obtidas desse processo são componentes em relação aos eixos  $x$ - $y$ - $z$  globais, isto é, são os cossenos diretores de  $\mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}'_2$  e  $\mathbf{e}'_3$  nas direções  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$  e  $\mathbf{i}_3$ . Como os dois conjuntos de vetores são ortonormais, esses cossenos diretores formam de fato a matriz de transformações  $\mathbf{T}'$  entre os dois conjuntos de eixos (ver, por exemplo, Malvern [129]):

$$\mathbf{T}' = [\{\mathbf{e}'_1\}; \{\mathbf{e}'_2\}; \{\mathbf{e}'_3\}]. \quad (18.91)$$

Esta é, então, uma matriz ortogonal, isto é,  $\mathbf{T}'^{-1} = \mathbf{T}'^T$ , com  $\det \mathbf{T}' = +1$ .

As componentes do tensor gradiente de deslocamentos que aparecem à esquerda de (18.88) podem, então, ser transformadas por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \mathbf{T}'^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \mathbf{T}'. \quad (18.92)$$

A matriz à esquerda é assim calculada numericamente em cada ponto de integração, de forma que a matriz de deformação  $\mathbf{B}'$  naquele ponto pode ser obtida de (18.85) e (18.80).

### 18.6.5 Integração e subintegração

Os processos de integração e subintegração aqui são bastante semelhantes ao caso de placa visto na Seção 18.2, embora neste caso tenhamos uma integração tridimensional que deve ser feita lâmina a lâmina. Apresentamos aqui o processo mais direto, adequado no caso de laminados com quantidades moderadas de lâminas, na faixa de até 20 lâminas, por exemplo. Em laminados de 100 a 700 lâminas esse processo torna-se demasiado caro e técnicas adequadas devem ser usadas, como a proposta por Yunus, Kohnke e Sai Gal [226].

A equação (18.84) deve então ser colocada na forma:

$$\mathbf{K}^e = \sum_{l=1}^{nq} \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \mathbf{B}'^T(r_i, s_j, t_l) \bar{\mathbf{C}}^k \mathbf{B}'(r_i, s_j, t_l) |\mathbf{J}(r_i, s_j, t_l)| P_i P_j P_l \quad (18.93)$$

$|\mathbf{J}(r_i, s_j, t_l)| = \det \mathbf{J}$ . No caso de casca composta por uma única lâmina, a integração completa dos termos de membrana e de cisalhamento transversal requerem um ponto apenas na direção normal, e  $nq = 2$  ou mais pontos nos termos de flexão. Nesse caso a integração também pode ser feita analiticamente, de forma similar ao caso de placas, embora de forma mais trabalhosa.

No caso de grande quantidade de lâminas uma boa aproximação pode ser conseguida com um único ponto por lâmina,  $nq = 1$  em todos os termos. Caso contrário, a integração em cada lâmina requer pelo menos  $nq = 2$  pontos na direção normal por lâmina.

O processo de **subintegração seletiva** usado para evitar o *locking* é aplicado de forma similar ao do elemento de placa visto na Seção 18.2, usando o método da matriz  $\bar{\mathbf{B}}$ . Para aplicar o procedimento é necessário primeiramente identificarmos na matriz  $\mathbf{B}'$  os termos associados a membrana, flexão e cisalhamento transversal. Consideremos o sequenciamento dos graus de liberdade num nó como dado em (18.77). Se particionarmos  $\mathbf{B}'$  nó a nó, poderemos fazer

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{B}' \mathbf{U}^e = [\mathbf{B}'_1, \mathbf{B}'_2, \dots, \mathbf{B}'_{no}, \dots, \mathbf{B}'_{nne}] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_1^e \\ \mathbf{u}_2^e \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{no}^e \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{nne}^e \end{array} \right\}. \quad (18.94)$$

$\mathbf{B}'_{no}$  é, portanto, de ordem  $5 \times 5$ , que particionamos em três submatrizes nas formas