

# Capítulo 12

## Flexão de placas delgadas laminadas

Consideramos aqui soluções para alguns problemas clássicos de placas delgadas laminadas sob carga transversal. São problemas de placa retangular, espessura constante, com algum tipo de regularidade no empilhamento das lâminas. Uma lista mais completa de problemas com solução disponível encontra-se em Reddy [164], Whitney [213] e Lekhnitskii [123], [124]. A síntese e a apresentação de alguns problemas usando teoria de primeira ordem para laminados semi-espessos pode ser vista no Capítulo 13. Observe que as soluções são apresentadas aqui com dupla finalidade: demonstrar o uso de alguns métodos clássicos de solução de problemas diferenciais e mostrar que as soluções podem efetivamente fornecer valores indicativos, úteis em etapas preliminares de projeto de componentes reais, de geometria não-simples. Adicionalmente, esses valores são úteis na verificação de resultados obtidos por métodos numéricos de uso geral, durante a qualificação de programas computacionais. Este tipo de uso é comum em atividades de pesquisa e desenvolvimento. Formulações de elementos finitos, que permitem o tratamento mais preciso de problemas reais complexos, são vistas em capítulos subsequentes.

### 12.1 Placas delgadas ortotrópicas

Considera-se primeiramente o caso do laminado delgado simétrico, com  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , e  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ , sob carga distribuída transversal. Este é um dos casos de análise mais simples. Embora a maioria dos laminados usados não se encaixe neste tipo, essas soluções são ainda assim usadas de forma aproximativa. Por sua vez, aplicações tradicionais como placas e cascas com reforços constituídos por nervuras, metálicas ou não, e placas corrugadas, como vistas na Seção 6.5, frequentemente se encaixam perfeitamente nesta categoria.

Na ausência de forças coplanares, o problema é regido pela equação (11.89), alterada para o caso estático:

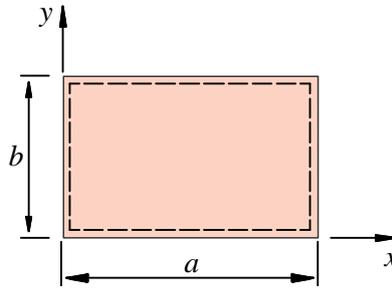
$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (12.1)$$

com condições de contorno como aquelas mostradas em (11.103).

#### 12.1.1 Placas retangulares simplesmente apoiadas

A placa tem dimensões  $a \times b$  nas direções  $x \times y$ , como ilustrado na Figura 12.1. As condições de contorno são

$$\begin{aligned} w(x, y) &= 0, \\ M_x(x, y) &= -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, & \text{para } x = 0 \text{ e } x = a, \forall y, \\ & \text{e} \\ w(x, y) &= 0, \\ M_y(x, y) &= -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, & \text{para } y = 0 \text{ e } y = b, \forall x. \end{aligned} \quad (12.2)$$



**Figura 12.1:** Configuração da placa retangular simplesmente apoiada.

Este tipo de problema é adequado ao chamado procedimento de Navier. Esse procedimento foi inicialmente proposto e aplicado a problemas de placas delgadas isotrópico-homogêneas [194], mas pode ser aplicado aqui. O processo consiste simplesmente em expandir a deflexão transversal  $w(x, y)$  e a carga distribuída  $q(x, y)$  em termos de séries duplas infinitas de senos na seguinte forma:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad q(x, y) = \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (12.3)$$

Por substituição observa-se que cada termo  $w_{mn}(x, y) = \operatorname{sen} (m\pi x/a) \operatorname{sen} (n\pi y/b)$  satisfaz as condições de contorno (12.2). Basicamente, qualquer função  $q(x, y)$  pode ser expandida desta forma, tanto quanto  $w(x, y)$ , para  $m_1$  e  $n_1$  tendendo ao infinito. Dada uma certa função  $q(x, y)$  para o carregamento, seus coeficientes de Fourier podem ser obtidos por

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a q(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (12.4)$$

Substituindo as expansões (12.3) na equação de equilíbrio (12.1), obtêm-se os coeficientes para os deslocamentos:

$$W_{mn} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \frac{q_{mn}}{D_{mn}}, \quad \text{com} \quad D_{mn} = D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mna}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{na}{b}\right)^4, \quad (12.5)$$

o que resulta na solução

$$W(x, y) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (12.6)$$

Os esforços de momento são

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \begin{Bmatrix} \left(m^2 D_{11} + \left(\frac{na}{b}\right)^2 D_{12}\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \\ \left(m^2 D_{12} + \left(\frac{na}{b}\right)^2 D_{22}\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \\ -\frac{2aD_{66}}{b} mn \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{Bmatrix}. \quad (12.7)$$

As tensões coplanares numa lâmina  $l_k$  são dadas por

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} 2,273 & \text{para } E_1/E_2 = 5 \\ 1,435 & \text{para } E_1/E_2 = 10 \\ 1,047 & \text{para } E_1/E_2 = 15 \end{array} \right\} \quad \text{para } N = 4 \text{ lâminas } [0/90//90/0].$$

Outros resultados para a deflexão máxima de uma placa retangular ortotrópica simplesmente apoiada sob carga distribuída são mostrados na tabela para um laminado simétrico, ortotrópico na forma  $[0/90/...]_s$ , com  $w_{\max} \pi^6 D_{22}/16q_0 a^4$  e  $(D_{12} + 2D_{66})/D_{22} = 1$ :

$D_{11}/D_{22}$	$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$
1	0,244094	0,0380374	0,00907447
5	0,121437	0,0336668	0,00910980
10	0,0738104	0,0288729	0,00884545
15	0,0526758	0,0252061	0,00852305

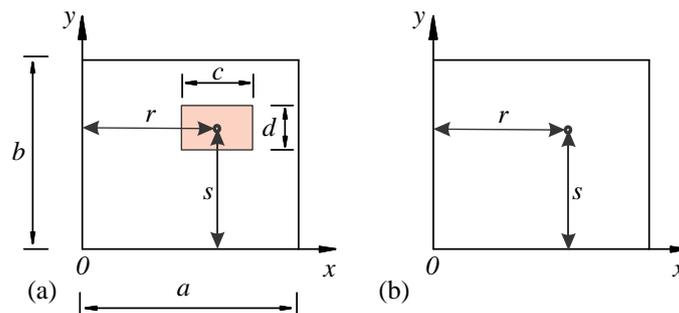
Os valores foram obtidos com  $m_1 = n_1 = 27$ , que são suficientes para uma convergência de 5 algarismos significativos. Observe que o caso  $D_{11}/D_{22} = 1$  corresponde a uma placa isotrópica. Para este caso, Timoshenko [194] fornece mais valores tabelados, até mesmo para os esforços.

**Carregamento uniforme sobre uma área retangular** Como indicado na Figura 12.2a, neste caso a carga uniforme  $q_0$  é aplicada apenas sobre uma região de dimensões  $c \times d$ , com centro no ponto  $(r, s)$ . A integral em (12.4) resulta em

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi r}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi c}{2a} \operatorname{sen} \frac{n\pi d}{2b} \quad (12.15)$$

**Carga concentrada** Para o caso ilustrado na Figura 12.2b, de uma carga concentrada  $P$  aplicada na posição  $(r, s)$ , toma-se a carga distribuída do item acima e faz-se  $q_0 = P/cd$  em (12.15). Fazendo o limite de  $c \rightarrow 0$  e  $d \rightarrow 0$  (usando o fato conhecido do cálculo de que  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x/x = 1$ ),

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \operatorname{sen} \frac{m\pi r}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{b} \quad (12.16)$$



**Figura 12.2:** (a) Carga distribuída sobre uma região de dimensões  $c \times d$  da placa e (b) carga concentrada no ponto  $(r, s)$ .

**Carga composta por um harmônico  $mn$**  Neste caso, a carga é apenas uma das componentes de (12.3):

$$q(x, y) = q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (12.17)$$

De (12.5) a solução torna-se

As quatro constantes  $C_1$  a  $C_4$  da solução homogênea devem ser obtidas pelas condições de contorno nos lados  $x = 0, a$ . Para o **caso dos dois lados engastados**, as condições de contorno são

$$w(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ e } x = a. \quad (12.35)$$

Suponha que as constantes elásticas sejam tais que as raízes caiam no caso 1. Substituindo (12.28) em (12.34) e esta em (12.35), obtêm-se as constantes

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{4\rho_2 b^4 q_0}{D_{22} \pi^5 n^5 H_n} \left[ \rho_1 \left( \cosh n\pi\rho_1 \frac{a}{b} - \cosh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} \right) \left( \cosh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \rho_2 \sinh n\pi\rho_1 \frac{a}{b} - \rho_1 \sinh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} \right) \sinh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} \right], \\ C_2 &= \frac{4\rho_2 b^4 q_0}{D_{22} \pi^5 n^5 H_n} \left[ \rho_2 \left( \cosh n\pi\rho_1 \frac{a}{b} - \cosh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} \right) \left( \sinh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \rho_1 \sinh n\pi\rho_1 \frac{a}{b} - \rho_2 \sinh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} \right) \left( \cosh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} - 1 \right) \right], \\ C_3 &= - \left[ \frac{4b^4 q_0 + D_{22} \pi^5 n^5 H_n C_1}{D_{22} \pi^5 n^5 H_n} \right], \\ C_4 &= - \frac{\rho_1 C_2}{\rho_2}, \\ H_n &= \rho_1 \rho_2 \left( \cosh n\pi\rho_1 \frac{a}{b} - \cosh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} \right)^2 \\ &\quad - \left( \rho_1 \sinh n\pi\rho_1 \frac{a}{b} - \rho_2 \sinh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} \right) \left( \rho_2 \sinh n\pi\rho_1 \frac{a}{b} - \rho_1 \sinh n\pi\rho_2 \frac{a}{b} \right). \end{aligned} \quad (12.36)$$

Esta solução, assim como vários outros casos de condições de contorno, é desenvolvida em [123].

### 12.1.3 Método energético – Placa delgada retangular engastada

Consideramos uma placa laminada simétrica ortotrópica ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ), retangular, engastada nas bordas, sob carga  $q_0$  uniformemente distribuída. As dimensões são  $a \times b$ . Os eixos coordenados têm origem no vértice, como na Figura 12.1. Mesmo que aparentemente simples e similar aos problemas vistos nas seções anteriores, este problema já não admite solução exata nos moldes do método de Navier ou de Levy. Isto exige que se busque uma aproximação da solução. Utilizaremos aqui a minimização de uma aproximação da energia potencial pelo método de Ritz, como apresentado na Seção 11.6.5, página 323.

A energia potencial vem de (11.65), tomando  $U$  de (11.135) e  $W$  de (11.64):

$$\begin{aligned} \Pi &= U_f + W \\ \Pi &= \frac{1}{2} \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &\quad - \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a q_0 w dx dy. \end{aligned} \quad (12.37)$$

As condições de contorno são:

$$\left\| \begin{array}{ll} w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 & \text{em } x = 0 \text{ e } x = a, \\ w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 & \text{em } y = 0 \text{ e } y = b. \end{array} \right. \quad (12.38)$$

$$M_{\max} \approx \frac{49b^2 D_{22} q_0 a^4}{64 [7b^4 D_{11} + 7a^4 D_{22} + 4a^2 b^2 (D_{12} + 2D_{66})]} \quad (12.52)$$

Para **placa quadrada ortotrópica**,  $a = b$ , com  $m_1 = n_1 = 1$ ,

$$M_{\max} \approx \frac{49 D_{22} q_0 a^2}{64 [7D_{11} + 4D_{12} + 7D_{22} + 8D_{66}]}, \quad (12.53)$$

e para **placa isotrópica quadrada**,  $m_1 = n_1 = 1$ ,

$$M_{\max} \approx \frac{49a^2 q_0}{1152} = 0,0425a^2 q_0. \quad (12.54)$$

## 12.2 Laminado delgado angular simétrico

Consideramos aqui uma placa laminada delgada angular simétrica simplesmente apoiada. A matriz de rigidez  $[C]$  deste tipo de laminado é mostrada na eq.(6.30), onde  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{D}$  são matrizes cheias. Este problema seria similar ao da placa ortotrópica vista na Seção 12.1.1 não fosse pelos termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  agora não-nulos. A equação de equilíbrio vem de (11.89), página 314, donde resulta

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[ 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right] + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y). \quad (12.55)$$

Observe que esta equação é idêntica a (12.1) para laminados ortotrópicos, exceto pelos termos entre colchetes. Para uma placa retangular simplesmente apoiada as condições de contorno são

$$\begin{aligned} w(x, y) &= 0 \\ M_x(x, y) &= -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, & \text{para } x = 0 \text{ e } x = a, \forall y. \\ &e \\ w(x, y) &= 0 \\ M_y(x, y) &= -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, & \text{para } y = 0 \text{ e } y = b, \forall x. \end{aligned} \quad (12.56)$$

Em razão da presença dos termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  na equação de equilíbrio, o processo simples de Navier usado na Seção 12.1.1 de separação de variáveis e uso de série não funciona. Observe que a expansão (12.3) para  $w$  satisfaz apenas as condições de contorno geométricas,  $w = 0$ , e não satisfaz a equação de equilíbrio. Entretanto, uma vez que a expansão (12.3) satisfaz as condições de contorno geométricas, ela pode ser usada no método de Ritz para minimizar a energia potencial. Seguimos então o procedimento usado por Ashton [29] para a solução aproximada deste problema.

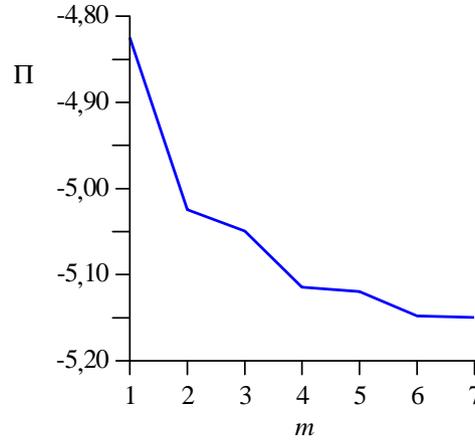
Para um laminado simétrico a energia potencial de flexão vem de (11.135) e (11.139), na página 322:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int \int \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ \left. + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2qw \right] dx dy. \end{aligned} \quad (12.57)$$

Da mesma forma que na Seção 12.1.3, substitui-se a expansão (12.3) de  $w$  em (12.57), diferencia-se  $\partial \Pi / \partial W_{ij}$  usando (12.42) e integram-se os termos. Obtém-se então um sistema algébrico na forma (12.45),

Para  $\nu_{12} = 0,25$  e  $G_{12} = 4.500$  GPa, obtém-se também que  $E_1 = 29.504$  MPa e  $E_2 = 2.152,7$  MPa.)

A Figura 12.3 ilustra a curva de convergência da energia potencial total com o número de harmônicos  $m$  em cada direção, para o caso de uma placa quadrada de lado  $a = 1.000$  mm, com sequência de empilhamento  $[45^\circ/3 \text{ mm}/0^\circ/6 \text{ mm}/45^\circ/3 \text{ mm}]$ , e propriedades de lâminas:  $E_1 = 5.487$  MPa e  $E_2 = 1.832$  MPa,  $\nu_{12} = 0,25$  e  $G_{12} = 890$  GPa.



**Figura 12.3:** Variação da energia potencial total com o número de termos não-nulos na série em cada direção.  $\Pi$  está multiplicado por  $10^3$ .

### 12.3 Laminado delgado cruzado anti-simétrico

Consideramos aqui uma placa laminada delgada cruzada anti-simétrica simplesmente apoiada. Os laminados cruzados regulares (lâminas de material e espessura idênticos) anti-simétricos têm rigidez como mostrado na eq.(6.32), com termos  $(16) = (26) = 0$ , mas com acoplamento membrana-flexão dados por  $B_{22} = -B_{11}$ , não nulos. Lembremos que este tipo de laminado tem a forma  $[0^\circ/90^\circ]$  ou  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ . Restringe-se ainda aos casos em que  $A_{11} = A_{22}$  e  $D_{11} = D_{22}$ . Para uma placa simplesmente apoiada seguiremos o processo de solução por série proposto por Whitney e Leissa [219].

As equações de equilíbrio vêm de (11.87), página 313, que agora permanecem acopladas na forma

$$\begin{cases} A_{11} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \\ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0, \\ D_{11} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{11} \left( \frac{\partial^3 u^o}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v^o}{\partial y^3} \right) = q(x, y). \end{cases} \quad (12.65)$$

Note que agora o laminado não é simétrico e as equações são acopladas. Para a placa simplesmente apoiada, as condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = a, \forall y$  são

$$\begin{cases} w(x, y) = 0, & v^o(x, y) = 0, \\ M_x(x, y) = B_{11} \frac{\partial u^o}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ N_x(x, y) = A_{11} \frac{\partial u^o}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v^o}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \end{cases}$$

e nas bordas  $y = 0$  e  $y = b, \forall x$ ,

$$\begin{bmatrix} (A_n \bar{m}^2 + A_{66} \bar{n}^2) & (A_{12} + A_{66}) \bar{m} \bar{n} & -B_{11} \bar{m}^3 \\ (A_{12} + A_{66}) \bar{m} \bar{n} & (A_{66} \bar{m}^2 + A_{11} \bar{n}^2) & B_{11} \bar{n}^3 \\ -B_{11}^3 \bar{m} & B_{11}^3 \bar{n} & D_{11} (\bar{m}^4 + \bar{n}^4) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \end{Bmatrix}. \quad (12.71)$$

Os termos  $\bar{m}$  e  $\bar{n}$  são definidos em (12.59). Então, se truncamos a expansão em  $m_1 \times n_1$  termos na série, devemos resolver  $m_1 \times n_1$  sistemas do tipo (12.71).

Para simplificar a análise, Whitney e Leissa [219] usaram uma carga que consiste apenas de um único termo, o primeiro na série (12.70). Como a matriz em (12.71) é simétrica não-singular, para  $m, n \geq 2$  a solução é sempre  $U_{mn} = V_{mn} = W_{mn} = 0$ . De forma geral as soluções dos diversos harmônicos são independentes e basta buscar a solução de um único deles,  $mn$ , que Whitney & Leissa obtêm como

**Tabela 12.1:** Resultados numéricos para placa retangular com lados  $a/b = 2$ , simplesmente apoiada, cruzada, com  $b/H = 50$ .

$E_1/E_2$	$N$	$\frac{w_{\max} E_2}{q_{11} b}$	$\frac{u_{\max}^o}{w_{\max}}$	$\frac{N_x \max}{q_{11} b}$	$\frac{N_{xy} \max}{q_{11} b}$
40	2	1.749	0,00720	0,06383	0,02724
40	6	676	0,00207	0,00797	0,00345
40	10	630	0,00111	0,00263	0,00194
40	$\infty$	627	0	0	0
30	2	1.791	0,00469	0,36336	0,15507
30	6	1.562	0,00134	0,10562	0,05074
30	10	1.546	0,00091	0,06273	0,02409
30	$\infty$	1.540	0	0	0

$$\begin{cases} U_{mn} = \frac{q_{mn} R^3 b^3 B_{11} m}{\pi^3 D_{mn}} \left[ A_{66} m^4 + A_{11} (mnR)^2 + (A_{12} + A_{66}) (nR)^4 \right], \\ V_{mn} = \frac{-q_{mn} R^4 b^3 B_{11} n}{\pi^3 D_{mn}} \left[ (A_{12} + A_{66}) m^4 + A_{11} (mnR)^2 + A_{66} (nR)^4 \right], \\ W_{mn} = \frac{q_{mn} R^4 b^4}{\pi^4 D_{mn}} \left[ A_{11} m^2 + A_{66} (nR)^2 (A_{66} n^2 + A_{11} (nR)^2) - (A_{12} + A_{66})^2 (mnR)^2 \right], \end{cases} \quad (12.72)$$

onde  $R = a/b$  e

$$\begin{aligned}
 D_{mn} = & [(A_{11}m^2 + A_{66}(nR)^2)(A_{66}m^2 + A_{11}(nR)^2) - \\
 & (A_{12} + A_{66})(mnR)^2][D_{11}(m^4 + (nR)^4) + 2(D_{12} + 2D_{66})(mnR)^2] \\
 & - B_{11}^2[A_{11}(mnR)^2(m^4 + (nR)^4) + A_{66}(m^8 + (nR)^8) \\
 & + 2(A_{12} + A_{66})(mnR)^4].
 \end{aligned} \tag{12.73}$$

Observe que, se fizermos  $B_{11} = 0$ , de (12.72) temos que  $U_{mn} = V_{mn} = 0$  e

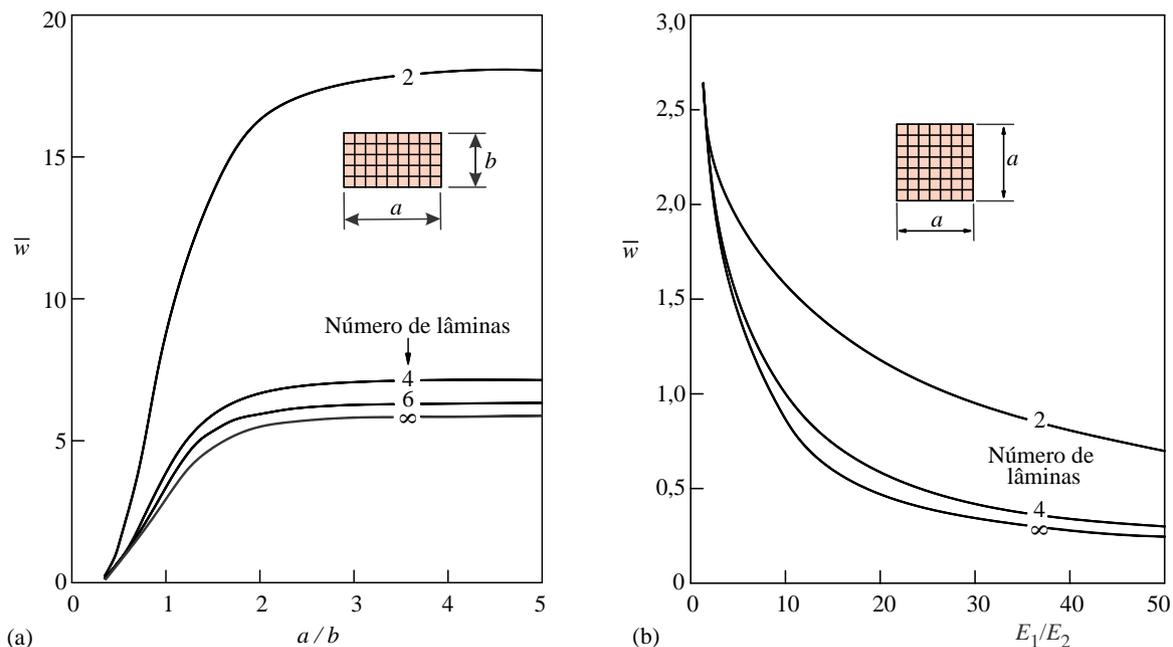
$$W_{mn} = \left(\frac{Rb}{\pi}\right)^4 \frac{q_{mn}}{[D_{11}(m^4 + (nR)^4) + 2(D_{12} + 2D_{66})(mnR)^2]}, \tag{12.74}$$

que é a solução do laminado ortotrópico simétrico simplesmente apoiado para o caso em que  $A_{22} = A_{11}$  e  $D_{22} = D_{11}$ , como pode ser visto também simplificando (12.18).

Whitney e Leissa [219] obtiveram resultados para compostos de lâminas de vidro/epóxi, boro/epóxi ou grafite/epóxi com  $\nu_{12} = 0,25$  e  $G_{12}/E_2 = 0,5$ . Para o grafite/epóxi, que tem  $E_1/E_2 \approx 40$ , a Figura 12.4a mostra a deflexão máxima do harmônico  $mn = 11$ , em função do aspecto da placa  $R = a/b$ .

Na Figura 12.4b tem-se a solução para uma placa quadrada, porém varia-se o quociente dos módulos  $E_1/E_2$ . Em ambos os gráficos na Figura 12.4, a curva indicada por “ $\infty$ ” é a chamada “solução ortotrópica”. **O que os resultados mostram é que, à medida que o número de lâminas é aumentado, rapidamente se aproxima da solução ortotrópica. Nota-se que a matriz  $\mathbf{B}$  pode ser algumas vezes desprezada para laminados com mais de seis lâminas.**

Da Figura 12.4b observa-se que o efeito de  $\mathbf{B}$  é menos importante para laminados de baixo coeficiente  $E_1/E_2$ . Entretanto, como se observa da Figura 12.4a, o desprezo de  $\mathbf{B}$  num laminado de duas lâminas pode acarretar erro de  $3 \times 1$  nos deslocamentos. Whitney e Leissa produziram alguns resultados numéricos adicionais que reproduzimos na Tabela 12.1 de forma a facilitar cálculos aproximados. Observa-se que os deslocamentos e esforços coplanares provenientes do acoplamento são bastante pequenos em comparação aos valores transversais.



**Figura 12.4:** Deflexão máxima num laminado anti-simétrico cruzado simplesmente apoiado sob carga senoidal, obtida pelas eqs.(12.72) de Whitney e Leissa [219]. Em (a)  $E_1/E_2 = 40$ . Em (a) e (b)  $G_{12}/E_2 = 0,5$ ,  $\nu_{12} = 0,25$ .  $\bar{w} = 10^3 w_{\max} E_2 H^3 / (q_{11} b^4)$  (Cf. Jones, [105]).

$$(B_{16}; B_{26}) = - (Q_{16}; Q_{26}) \frac{H^2}{2N}. \quad (12.80)$$

Assim, para uma espessura  $H$  fixa, um aumento do número  $N$  de lâminas provoca uma redução no valor dos termos de acoplamento. Os resultados das Figuras 12.4 a 12.5 mostram qualitativamente o efeito dessa redução nos valores de deslocamento

## 12.5 Exercícios

- 12.1 Para a placa retangular ortotrópica simplesmente apoiada implemente um programa computacional para as soluções de  $w$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  a partir das equações (12.5)–(12.10), para os diversos tipos de carregamento.
- 12.2 Para a placa delgada engastada ortotrópica, obtenha o sistema algébrico (12.45) para  $m_1 = n_1 = 2$ . Escreva um programa para resolvê-lo. Programe também para obter a distribuição dos deslocamentos e dos esforços  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ . Dado um certo valor de carga, como pode ser feita a avaliação de segurança?
- 12.3 (a) Deduza as expressões para a rigidez (12.60) e (12.61) do laminado delgado angular simétrico simplesmente apoiado;
- (b) Implemente um programa computacional para gerar a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e o vetor força  $\mathbf{F}$  e resolver o sistema (12.58).
- 12.4 Considere o problema de flexão de placa delgada simétrica ortotrópica sob carga distribuída simetricamente em relação aos eixos de simetria da placa, como visto na Seção 12.1.3. Mostre que o método de Ritz pode ser usado com funções dadas por  $X_m(x) = \text{sen}(2n\pi x/a - n\pi/2) + 1$ , para  $m = 1, 2, \dots$ , em lugar de (12.47).
- 12.5 Considere o material associado à eq.(12.63). Mostre que, para um laminado de lâminas idênticas, orientadas a  $[-45/45/-45]$ , temos que: (a) sempre  $D_{22} = D_{11}$ ; (b)  $Q_{11}/Q_{22} = E_1/E_2$ ; (c)  $E_1/E_2 = 13,706$  para qualquer valor de  $\nu_{12}$ ; (d)  $Q_{22} = 68 G_{12}/[1,5(54\nu_{12} + 77) + 23(1,5 - 5\nu_{12})]$ .