

Capítulo 14

Propriedades matemáticas básicas do MEF

Esse capítulo reorganiza as formulações de MEF que nos capítulos anteriores foram detalhadas utilizando um equacionamento que, até certo ponto, parece distinto para cada um dos problemas a que o método foi aplicado (barras, vigas, elasticidade plana e 3D). No presente capítulo, resumimos a aplicação de MEF para três tipos de problemas: barras, transferência de calor 3D e elasticidade 3D. Essa nova apresentação é feita usando uma formatação simbólica que permite visualizar estruturas matemáticas do MEF válidas para uma grande variedade de problemas. Sobre essa estrutura, são deduzidas algumas propriedades básicas do MEF e de suas soluções, permitindo ao analista melhor avaliar os resultados obtidos de simulações numéricas. Resultados típicos de unicidade de solução, de convergência e erro são abordados. Adicionalmente, são apresentados outros métodos derivados do método dos resíduos ponderados. Finalmente, são apresentadas e exemplificadas formulações de princípios de mínimo com restrição via multiplicadores de Lagrange e soluções aproximadas via método de Rayleigh-Ritz.

14.1 Espaços vetoriais de funções

Nesta seção serão feitas definições mínimas para permitir a compreensão de alguns dos conceitos matemáticos básicos do MEF. Elas dizem respeito à classificação de funções e a determinação de suas propriedades de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade, dentre outras. Tal estudo corresponde a uma grande área da matemática denominada “Análise Funcional”. O leitor já iniciado nestes tópicos pode ignorar esta seção.

Consideramos inicialmente funções escalares w definidas numa região aberta $\Omega = (0, L)$ do espaço Euclidiano unidimensional. Assim, denota-se

$$\begin{aligned} w : \Omega &\rightarrow R, \\ \Omega &\subset R. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Frequentemente, e sem perda de generalidade, o intervalo aberto $(0, L)$ é normalizado para $L = 1$.

Dependendo das características de w , podem ser definidos os seguintes conjuntos de funções:

$$\begin{aligned} L_2(\Omega) &= \left\{ w \left| \int_0^L w^2 dx < \infty \right. \right\}, \\ H^k(\Omega) &= \left\{ w \left| \frac{d^j w}{dx^j} \in L^2, \text{ para } j = 0, 1, \dots, k \right. \right\}, \\ C^k(\Omega) &= \left\{ w \left| \frac{d^j w}{dx^j} \text{ para } j = 0, 1, \dots, k \text{ existem e são funções contínuas} \right. \right\}, \end{aligned} \tag{14.2}$$

$L_2(\Omega)$ é o conjunto contendo funções tais que a integral do quadrado dessas fornece um número finito. Assim, se diz que tais funções são quadrado-integráveis (ou simplesmente funções L_2) em

Ω . O conjunto $H^k(\Omega)$ contém funções tais que ela e suas derivadas até ordem k são quadrado-integráveis. Como consequência desta definição, resultam naturais as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} H^0 &= L_2, \\ H^k &\subset H^{k+1}, \end{aligned} \quad (14.3)$$

O conjunto H^k é denominado **espaço vetorial de funções de Hilbert**, e é um tipo particular dos **espaços vetoriais de funções** de Sobolev. As funções nesse espaço possuem características **vetoriais**.

Uma definição diferente consiste em exigir continuidade das funções: o conjunto $C^k(\Omega)$ em (14.2) incorpora as funções tais que esta e suas derivadas até ordem k existem e são contínuas em Ω . Relacionar os conjuntos $C^k(\Omega)$ com $H^k(\Omega)$ não é tarefa óbvia. Para isto, conta-se com o teorema de embebedimento de Sobolev, que prova que

$$H^{k+1} \subset C_b^k. \quad (14.4)$$

É possível mostrar que todos esses conjuntos, como definidos, gozam das propriedades de **espaços vetoriais** definidos no Capítulo 1, página 6. Desta forma, esses conjuntos são espaços vetoriais.

Mais normas e produtos escalares em espaços d -dimensionais

Consideramos agora funções escalares definidas em regiões abertas Ω contidas em espaços Euclidianos de dimensão $d = 1, 2$ ou 3 , isto é, $\Omega \subset R^d$. A definição dos espaços vetoriais $L_2(\Omega)$ e de Hilbert são as seguintes, em notação compacta:

$$\begin{aligned} L_2(\Omega) &= \{w \mid \int_{\Omega} w^2 d\Omega < \infty\}, \\ H^k(\Omega) &= \left\{ w \in L_2(\Omega), \left| \frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \in L_2(\Omega), \text{ para } |\alpha| \leq k \right. \right\}, \\ \text{onde } |\alpha| &\equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Por exemplo, caso $\Omega \subset R^2$, as definições dos espaços H^0 , H^1 e H^2 , em forma estendida, ficam

$$\begin{aligned} H^0(\Omega) &= \{w \mid w \in L_2(\Omega)\} = L_2(\Omega), \\ H^1(\Omega) &= \left\{ w \left| w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2} \in L_2 \right. \right\}, \\ H^2(\Omega) &= \left\{ w \left| w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \in L_2 \right. \right\}. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Finalmente, associado ao espaço $H^k(\Omega)$ em (14.5), tem-se o espaço $H_0^k(\Omega)$, definido por:

$$H_0^k(\Omega) \equiv \{w \in H^k(\Omega), |w(\mathbf{x}) = 0 \text{ em } \forall x \in \Gamma_u\} \quad (14.7)$$

isto é, $H_0^k(\Omega)$ é constituído pelas funções $w \in H^k(\Omega)$ que são nulas na parte Γ_u do contorno.

Norma L_2

O espaço vetorial $L_2(\Omega)$ possui o **produto escalar**

$$\langle v, w \rangle_{L_2(\Omega)} \equiv \int_{\Omega} vw \, d\Omega, \quad (14.8)$$

e a norma correspondente, chamada **norma L_2** :

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{L_2(\Omega)}} \quad (14.9)$$

A expressão “suficientemente regular” se refere, neste contexto, a funções $w : \Omega \rightarrow R$ tal que $\int_{\Omega} (dw/dx)^2 dx < \infty$, isto é, aquelas funções definidas no segmento $(0, L)$ cuja integral da derivada elevado ao quadrado fornece um número finito. Isto garante que as operações necessárias para realizar o cálculo sejam sempre executáveis. Esta condição é exatamente a caracterização das funções do espaço $H^1(\Omega)$, de forma que se pode simplesmente escrever: $u \in H^1(\Omega)$.

Formulação fraca. Como foi visto no Capítulo 7, o problema de uma barra elástico-linear sob tração pode ser descrito em sua forma fraca como:

$$\text{Dados } b : \Omega \rightarrow R, \bar{u} \in R, \text{ e } \bar{t} \in R, \text{ obter } u \in \text{Kin}, \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} EA \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{du}{dx} d\Omega = \int_{\Omega} Ab\hat{u} d\Omega + \bar{t}\hat{u}(L), \quad \forall \hat{u} \in \text{Var}, \quad (14.17)$$

Uma forma alternativa de representar o funcional em (14.17) consiste em definir os seguintes operadores:

$$a(u, \hat{u}) = \int_{\Omega} EA \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{du}{dx} d\Omega \quad \text{e} \quad l(\hat{u}) = \int_{\Omega} Ab\hat{u} d\Omega + \bar{t}\hat{u}(L). \quad (14.18)$$

Assim, a forma fraca (14.17) toma a forma simbólica

Dados $b : \Omega \rightarrow R, \bar{u} \in R, \text{ e } \bar{t} \in R, \text{ obter } u \in \text{Kin}, \text{ tal que}$ $a(u, \hat{u}) = l(\hat{u}), \quad \forall \hat{u} \in \text{Var}.$	(14.19)
--	---------

Até esse ponto parece não haver benefício na mudança da representação (14.17). Entretanto, o texto que segue tornará mais clara as vantagens desta forma simbólica.

14.2.2 Problema variacional de condução de calor

De forma análoga ao caso anterior, passamos a redefinir domínio, conjunto de funções admissíveis e operadores para esse problema.

O domínio do problema. Tomamos neste caso um domínio Ω ocupando uma região no espaço Euclidiano d -dimensional, onde $d = 1, 2$ ou 3 é o número de dimensões do problema. Isso é representado em notação compacta por $\Omega \subset R^d$. O contorno de Ω é denotado por $\partial\Omega = \Gamma$, tal que o fechamento é $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. O contorno é dividido em três regiões disjuntas, Γ_u, Γ_q e Γ_c , tais que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c$ e $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, com $i, j = u, q, c$, e $i = j$. Em Γ_u e Γ_q atuam temperaturas g e fluxos h prescritos, respectivamente, e Γ_c é a região sob convecção.

Conjuntos de funções admissíveis. Neste problema definem-se os conjuntos (ver (13.25)-(13.26))

$$\text{Kin} = \{u : \Omega \rightarrow R^d \mid u \text{ é suficientemente regular, e } u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}) \text{ em } \Gamma_u\}, \\ \text{Var} = \{u : \Omega \rightarrow R^d \mid u \text{ é suficientemente regular, e } u(\mathbf{x}) = 0 \text{ em } \Gamma_u\}. \quad (14.20)$$

Observe que as definições são similares àsquelas em (14.16) do problema de barra. Entretanto, o domínio Ω é diferente e a definição da regularidade suficiente é diferente. No presente caso, exige-se que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega < \infty. \quad (14.21)$$

Uma representação compacta do requisito de regularidade da função é simplesmente: $u \in H^1(\Omega)$.

A correspondente **Formulação fraca** foi mostrada em forma explícita em (13.33). Aqui fazemos sua representação simbólica da seguinte forma:

Dados: $b : \Omega \rightarrow R^d$, $g : \Gamma_u \rightarrow R^d$, $h : \Gamma_q \rightarrow R^d$, obter $u \in Kin$ tal que: $a(u, \hat{u}) = l(\hat{u}), \quad \forall \hat{u} \in Var,$	(14.22)
--	---------

onde os operadores são definidos por

$$\begin{aligned}
 a(u, \hat{u}) &= \int_{\Omega} k \nabla \hat{u} \cdot \nabla u \, d\Omega + \int_{\Gamma_c} \hat{u} h_c(\mathbf{x}) \mathcal{T} \, d\Gamma, \\
 l(\hat{u}) &= \int_{\Gamma_q} \hat{u} h \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \hat{u} h_c(\mathbf{x}) \mathcal{T}_{\infty} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{u} b \, d\Omega.
 \end{aligned}
 \tag{14.23}$$

Note que o operador $a(u, \hat{u})$ é sempre definido com todos os termos contendo a incógnita do problema, enquanto $l(\hat{u})$ contém apenas funções conhecidas, quer sejam os dados ou a função peso.

14.2.3 Problema variacional de elastostática linear

Domínio do problema. Como no problema de condução de calor, consideramos o domínio $\Omega \subset R^d$, com contorno $\partial\Omega = \Gamma$, tal que o fechamento é $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Diferentemente do problema de condução de calor, aqui os campos de dados e da incógnita são funções vetoriais. Isto pode ser representado, por exemplo, como $\mathbf{b}(\mathbf{x}) \in R^c$ e $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in R^c$ ou $b_j(\mathbf{x}) \in R, b_j(\mathbf{x}) \in R$, para $j = 1, c$. Em elastostática, sempre $c = d$. De forma geral, as condições de contorno em cada ponto podem ser distintas para cada uma das componentes de deslocamento ou força. Uma maneira geral consiste em dividir o contorno em duas regiões disjuntas para cada direção j , Γ_{uj} e Γ_{fj} , tal que $\Gamma = \Gamma_{uj} \cup \Gamma_{fj}$ e $\Gamma_{uj} \cap \Gamma_{fj} = \emptyset, j = 1, c$. Em Γ_{uj} e Γ_{fj} atuam a componente j do deslocamento prescrito, \bar{u}_j , e de forças prescritas, \bar{t}_j . Com isso, os conjuntos de funções admissíveis se tornam distintos para cada direção. Por exemplo, para uma direção j , se tem

$$Kin_j = \{u_j : \Omega \rightarrow R \mid u_j \text{ é suficientemente regular, e } u_j = \bar{u}_j(\mathbf{x}) \text{ em } \Gamma_{uj}\}, \tag{14.24}$$

Entretanto, uma vez entendida essa diversidade de formas de condições de contorno, no restante do texto usaremos uma notação simplificada que consiste em considerar que em cada ponto são prescritas condições para todas as componentes de deslocamento ou de força. Esta é a forma como a formulação foi apresentada os capítulos anteriores. Assim, considera-se que o contorno é dividido em duas regiões disjuntas, Γ_u e Γ_f , tais que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_f = \emptyset$. Em Γ_u e Γ_f atuam deslocamentos prescritos $\bar{\mathbf{u}}$ e forças prescritas $\bar{\mathbf{t}}$. Assim temos os:

Conjuntos de funções admissíveis. Esses conjuntos foram definidas no Capítulo (8.2)-(8.3). Aqui eles são representados de uma forma ligeiramente diferente:

$$\begin{aligned}
 Kin &= \{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow R^c \mid u_j \text{ é suficientemente regular, e } \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \text{ em } \Gamma_u \}, \\
 Var &= \{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow R^c \mid u_j \text{ é suficientemente regular, e } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_u \}.
 \end{aligned}
 \tag{14.25}$$

A exigência de regularidade suficiente para permitir a realização das operações de integração é, nesse caso, a seguinte:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \, d\Omega < \infty. \tag{14.26}$$

É possível mostrar que se cada uma das componentes de \mathbf{u} for tal que $u_j \in H^1(\Omega), j = 1, c$, e se \mathbf{C} for limitada, então a condição (14.26) é satisfeita, de forma que a regularidade suficiente dos conjuntos Kin e Var são representadas simplesmente por: $u_j \in H^1(\Omega),$ para $j = 1, c$.

Formulação fraca. Também conhecido em elastostática como Princípio dos Trabalhos Virtu-

um campo linear de deslocamento e impondo as 6 condições (14.36), o que gera:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_1(\mathbf{x}) \\ \tilde{u}_2(\mathbf{x}) \\ \tilde{u}_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix}}_{\text{Transl de C.R.}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} a_2y - a_3z \\ -a_2x + b_3z \\ a_3x - b_3y \end{Bmatrix}}_{\text{Rotação de C.R.}} \quad (14.37)$$

Os dois termos à direita da igualdade representam translação e rotação de corpo rígido, respectivamente. Entretanto, o segundo termo representa rotação de corpo rígido apenas no âmbito do presente modelo cinemático linear, de pequenas deformações, deslocamentos e rotações.

Se condições de contorno são impostas em $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ tal que os movimentos de corpo rígido sejam impedidos, segue que $a(\cdot, \cdot)$ é **positiva-definida**. Em particular, se $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u$, segue-se que (14.34) é satisfeito. Raciocínio similar pode ser seguido para os casos de elasticidade 1D e condução de calor, tomando as constantes de material $E > 0$ e $k > 0$, respectivamente.

Unicidade de solução do problema generalizado

Pode-se mostrar que a consequência direta da positividade do operador bilinear é a unicidade da solução do problema variacional. Para provar a unicidade de solução, admitamos que existam duas soluções, as funções \mathbf{u}_1 e $\mathbf{u}_2 \in var$ que satisfazem o problema variacional (14.27), isto é, para qualquer $\mathbf{v} \in Var$,

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \\ a(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}). \end{cases} \quad (14.38)$$

Subtraindo uma equação da outra se tem $a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = 0$. Escolhendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in Var$, se tem

$$a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0.$$

Da positividade do operador, a única função que fornece valor nulo é a própria função nula, isto é, deve-se ter

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2.$$

É importante lembrar que a propriedade de positividade foi alcançada ao restringir as funções ao espaço Var , que contém condições suficientes para garantir a ausência de movimentos de corpo rígido (no caso de elastostática). Caso isto não aconteça, a forma bilinear é apenas positiva semi-definida, e perde-se a garantia de unicidade da solução.

14.2.5 Norma de energia no problema generalizado

Define-se a **norma de energia** por:

$$\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)} = \sqrt{\frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad (14.39)$$

O nome “norma de energia” é usado porque, no caso do **problema elastostático**, $a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ em (14.29) **corresponde exatamente a duas vezes a energia da deformação elástica** associado ao campo de deslocamento \mathbf{u} . Na literatura não existe uniformidade na definição dessa norma. Geralmente quando o problema é outro que não de elastostática, e não há uma energia física associada, a norma é definida como

$$\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)} = \sqrt{a(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad (14.40)$$

Finalmente, define-se o seguinte o **produto escalar** associado à norma de energia, no espaço $Var(\Omega)$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{E(\Omega)} = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in Var \quad (14.41)$$

14.3 MEF - simetria e positividade da matriz de rigidez

Consideremos aqui a aproximação do Princípio Variacional (14.27). Quando a aproximação é feita usando funções de forma definidas sobre todo o domínio, tem-se o chamado método de Galerkin; por outro lado, quando se usam funções de suporte compacto (que são não nulas apenas em sub regiões do domínio), os elementos, o método de Galerkin torna-se o MEF.

A presente seção focaliza o problema elastostático. Entretanto, toda a argumentação pode ser facilmente adaptada a outros problemas elípticos como o de condução de calor estacionário. Para problemas de dinâmica estrutural, a positividade da matriz massa é importante, e é vista na seção 633

Considera-se o domínio Ω particionado em elementos Ω^e , tal que sua união cobre o domínio Ω , isto é, $\cup \Omega^e = \Omega$ e $\Omega^e \cap \Omega^f = \emptyset$ para $e \neq f$. Define-se uma malha de nós associada à partição de elementos. Definem-se funções de aproximação $\varphi_j(\mathbf{x})$, associadas a cada nó j , com a propriedade $\varphi_j(\mathbf{x}_k) = \delta_{jk}$, para todos os nós j e k da malha. As funções φ_j também são requeridas serem nulas em todo \mathbf{x} que não pertença aos elementos que contém o nó j . A região em que cada $\varphi_j(\mathbf{x})$ é não nula é o denominado **suporte** S_j de $\varphi_j(\mathbf{x})$. O conjunto de funções $\varphi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, N_{nos}$, deve ser tal que os N_{nos} suportes cubram Ω , isto é, cada $\mathbf{x} \in \Omega$ pertence a um ou mais suportes $S_j(\mathbf{x})$.

Uma vez definido um conjunto de funções $\varphi_j(\mathbf{x})$, esse conjunto serve de base para aproximar uma função da seguinte forma:

$$w_g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_{nos}} \varphi_j(\mathbf{x}) w_j^g. \quad (14.42)$$

Definem-se dois conjuntos de dimensão finita para funções vetoriais $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \in R^c$, com $\mathbf{w} : \Omega \rightarrow R^d$:

$$\begin{aligned} Kin_h &= \left\{ \mathbf{w}(\mathbf{x}) \mid w_g = \sum \varphi_j(\mathbf{x}) w_j^g \text{ para componentes } g = 1, \dots, c, \right. \\ &\quad \left. \mid w_g \in H^1(\Omega) \text{ e } w_g(\mathbf{x}) = \bar{u}_g(x) \text{ se } \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\} \\ Var_h &= \left\{ \mathbf{w}(\mathbf{x}) \mid w_g = \sum \varphi_j(\mathbf{x}) w_j^g \text{ para componentes } g = 1, \dots, c, \right. \\ &\quad \left. \mid w_g \in H^1(\Omega) \text{ e } w_g(\mathbf{x}) = 0 \text{ se } \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\} \end{aligned} \quad (14.43)$$

Assim, esses conjuntos de dimensão finita estão contido em suas contrapartidas de dimensão infinita: $Kin_h \subset Kin$ e $Var_h \subset Var$. A satisfação das condições $w_g \in H^1(\Omega)$ é garantida pela escolha adequada da base de funções $\varphi_j(x)$. Frequentemente a base é escolhida simplesmente como contínua, tal que $w_g \in C^0(\Omega)$.

A forma discretizada do PV enunciado em (14.32) é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Dados: } & \mathbf{b} : \Omega_h \rightarrow R^c, \quad \bar{\mathbf{t}} : \Gamma_f \rightarrow R^c, \quad \bar{\mathbf{u}} : \Gamma_u \rightarrow R^c, \\ \text{obter } & \mathbf{u}_h \in Var_h \text{ tal que: } \quad a(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h) = \tilde{l}(\hat{\mathbf{u}}_h), \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_h \in Var_h, \end{aligned} \quad (14.44)$$

com $\tilde{l}(\hat{\mathbf{u}}_h) = l(\hat{\mathbf{u}}_h) - a(\mathbf{w}_h, \hat{\mathbf{u}}_h)$, definido em (14.33).

Definem-se os seguintes conjuntos de nós:

$$\begin{aligned} \eta_t &= \{\text{números de todos os nós da malha } N_{nos}\}. \\ \eta_u &= \{\text{números dos nós em } \Gamma_u\}. \\ \eta_{nu} &= \{\text{números dos nós que não estão em } \Gamma_u\}. \end{aligned}$$

Esse conjunto possui N_i elementos, que são os nós cujos deslocamentos são incognitas.

$$(14.45)$$

demonstrada como segue. Foi visto que $a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ é uma forma bilinear positiva-definida $\forall \mathbf{u} \in Var$. O espaço de funções de aproximação $Var_h \subset Var$, logo $a(\mathbf{u}_h^0, \mathbf{u}_h^0)$ também é positiva-definida, isto é, $a(\mathbf{u}_h^0, \mathbf{u}_h^0) \geq 0 \forall \mathbf{u}_h^0 \in Var_h$, e $a(\mathbf{u}_h^0, \mathbf{u}_h^0) = 0$ se e somente se $\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{0}$.

Num problema discretizado, \mathbf{u}_h^0 pode ser visto como uma função dos coeficientes nodais \mathbf{U}^0 , através da relação $\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{U}^0$, o que significa que o valor da forma bilinear também definida pelos valores nodais. Então se pode identificar algumas situações:

1. Se a base de funções de aproximação for linearmente independente, (que é o caso clássico do MEF), a única forma de se ter $\mathbf{u}_h^0(\mathbf{U}^0) = \mathbf{0}$ é com $\mathbf{U}^0 = \mathbf{0}$. Segue-se que, para qualquer $\mathbf{v} = \mathbf{N}\mathbf{V} \in Var_h$,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \geq 0, \text{ e} \\ a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = 0 \text{ se } \mathbf{V} = \mathbf{0}. \\ \text{Logo, } \mathbf{K} &\text{ é positiva-definida.} \end{aligned} \quad (14.56)$$

2. Se a base de funções de aproximação for linearmente dependente, existe forma de se ter $\mathbf{u}_h^0(\mathbf{U}^0) = \mathbf{0}$ mesmo com $\mathbf{U}^0 \neq \mathbf{0}$, o que implica \mathbf{K} ser positiva semi-definida. Para verificar essa possibilidade basta considerar um caso simples de discretização para uma componente j :

$$v_{hj}^0(\mathbf{x}) = v_{j1}\varphi_1(\mathbf{x}) + v_{j2}\varphi_2(\mathbf{x}) + v_{j3}\varphi_3(\mathbf{x}). \quad (14.57)$$

Consideremos um caso de dependência linear explícita da base, por exemplo se $\varphi_2 = \varphi_1$. Nesse caso é possível construir um vetor nodal não nulo, $\mathbf{V} = \{v_{j1}, v_{j2}, v_{j3}\}^T = \{b, -b, 0\}^T$. Dependendo da formulação e da definição das funções de forma, é possível ter deslocamento nulo em todo o domínio: $v_{hj}^0(\mathbf{x}) = b\varphi_1(\mathbf{x}) - b\varphi_1(\mathbf{x}) + 0\varphi_3(\mathbf{x})$. Nesse caso, as linhas/colunas 1 e 2 de \mathbf{K} seriam idênticas. Isso resulta $\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = 0$, mesmo com $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$. Claramente a mesma conclusão se chega para outros tipos de dependência linear na base.

As bases usadas no presente texto, que correspondem àquelas usadas na maioria das aplicações do MEF no mundo, são baseadas em funções nodais. Estas satisfazem à propriedade $\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ onde \mathbf{x}_j é a coordenada do nó j . Como consequência, são linearmente independentes e formam o que se chama uma **Partição da Unidade**. Por outro lado, quando parte das funções é não nodal, como é comum nas funções enriquecidas do MEF Generalizado (GFEM/XFEM), não há garantia *a priori* da independência da base. Ver, por exemplo, os artigos iniciais do GFEM/XFEM [33, 95, 96, 77, 14, 37], e [8, 73].

14.3.1 A solução do MEF é a melhor aproximação?

Considere-se a base de funções de aproximação $\varphi_j(\Omega)$ que define o espaço $Var_h \subset Var$. O MEF produz os valores dos coeficientes nodais \mathbf{U} , que por sua vez produz a solução aproximada $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum \varphi_j(\mathbf{x})\mathbf{U}_j \in Var_h$. A questão que se coloca é a seguinte: essa função $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$ produzida pelo MEF é a melhor aproximação da solução exata $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ que se poderia obter com aquele conjunto de funções $\varphi_j(\mathbf{x})$? A resposta é positiva, como será demonstrado a seguir por numa dedução tradicional.

Seja $\mathbf{u} \in Var$ a solução exata do problema variacional. Então,

$$a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = \tilde{l}(\hat{\mathbf{u}}), \quad \hat{\mathbf{u}} \in Var, \quad (14.58)$$

Seja também $\mathbf{u}_h \in Var_h$ a solução aproxima, que satisfaz

$$a(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h) = \tilde{l}(\hat{\mathbf{u}}_h), \quad \hat{\mathbf{u}}_h \in Var_h. \quad (14.59)$$

Como $Var_h \subset Var$, se tem que a solução $\mathbf{u} \in Var$ também satisfaz a equação

$$a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}_h) = \tilde{l}(\hat{\mathbf{u}}_h), \quad \hat{\mathbf{u}}_h \in Var_h. \quad (14.60)$$

relação da seguinte forma. A solução aproximada de MEF \mathbf{u}_h é uma projeção vetorial, em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E(\Omega)}$, da solução exata \mathbf{u} sobre Var_h . Logo, \mathbf{u}_h é o elemento no espaço Var_h mais próximo a \mathbf{u} . Isto pode ser expresso de forma simbólica em (14.68).

Essa relação pode ser visualizado na analogia da Figura 14.1. O plano representa o espaço linear de funções Var , e a reta representa um subespaço $Var_h \subset Var$. A solução exata $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, em geral, não está contida em Var_h , mas em Var . A função erro do MEF, $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$, é ortogonal a qualquer função $\mathbf{v} \in Var_h$. A linha tracejada indica o erro obtido por qualquer outra função $\mathbf{v} \in Var_h$ distinta de \mathbf{u}_h . Nota-se que sua norma é maior que $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$.

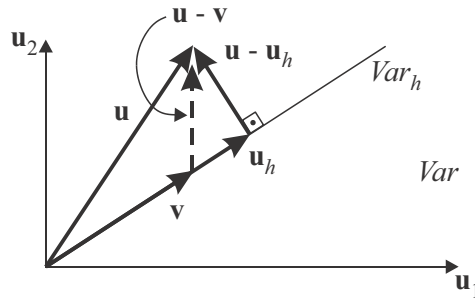


Figura 14.1: Plano de funções do espaço Var , subespaço Var_h .

“Teorema de Pitágoras” para a solução aproximada

Consideremos o quadrado da energia de deformação exata, $a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Como $\mathbf{u} = \mathbf{e} + \mathbf{u}_h$, tem-se

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= a(\mathbf{e} + \mathbf{u}_h, \mathbf{e} + \mathbf{u}_h), \\ &= \underbrace{a(\mathbf{e}, \mathbf{e})}_{>0} + \underbrace{2a(\mathbf{e}, \mathbf{u}_h)}_0 + \underbrace{a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}_{>0}, \end{aligned} \tag{14.70}$$

$$\Rightarrow \boxed{a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}$$

onde se usou à direita da igualdade a condição de ortogonalidade (14.61) a a positividade de a . Então,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) &\leq a(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \text{ i.e.,} \\ \|\mathbf{u}_h\|_{E(\Omega)} &\leq \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)} \end{aligned} \tag{14.71}$$

As expressões (14.70) e (14.71) são bastante gerais. A primeira significa que a **energia do erro é igual ao erro da energia** ($a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)$). A relação (14.71) significa que a **solução aproximada do MEF subestima a energia de deformação exata**, no caso elastostático. Em outros problemas, as relações entre as quantidades continuam as mesmas das equações mostradas, apenas que sem um significado físico evidente.

14.4 Estimativas de erro *a-priori* no MEF

O objetivo nessa seção é esboçar relações que indiquem como o erro da solução do MEF, medido por alguns tipos de normas, se relaciona ao tamanho dos elementos na malha. Dessas relações surgirão, naturalmente, de forma matemática, *a priori*, o conceito de **taxa de convergência**, que pode ser medido empiricamente em testes numéricos em malhas e problemas específicos.

14.4.1 Estimativa de erro *a-priori* no problema de MEF-1D

Consideremos o problema 1D de barra cuja forma de Galerkin pode ser extraída de (14.19) com condições homogêneas em ambos os extremos da barra, i.e., $u(0) = u(L) = 0$:

$$\boxed{\text{Dado } b : \Omega_h \rightarrow R, \bar{u} : \Gamma_u \rightarrow R, \text{ determine } u_h \in Var_h \text{ tal que}} \quad (14.72)$$

$$a(u_h, \hat{u}_h) = l(\hat{u}_h) \quad \forall \hat{u}_h \in Var_h.$$

A estimativa do erro $e(x) \equiv u - u_h$ é feita considerando que, como u_h deve pertencer a Var_h , pode-se considerar uma função \tilde{u}_h aproximativa de u_h , também pertencente a Var_h , que seja o que se chama **interpolante** de u . Dada uma malha definida por nós de coordenadas x_j , é dito que uma função $\tilde{u}_h(x)$ interpola $u(x)$ se

$$\tilde{u}_h(x_j) = u(x_j) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N_{nos}. \quad (14.73)$$

A função interpolante tem o mesmo valor que a função interpolada nos nós da malha. Entre cada dois nós, a função interpolante pode ser um polinômio de grau pré-definido. A figura 14.2 ilustra o uso de $\tilde{u}_h(x)$ definido por funções lineares par partes entre cada par de nós contíguos. Normalmente, cada elemento finito 1D é modelado por uma função contínua de derivadas contínuas, geralmente um polinômio de grau $N_{ne} - 1$, (N_{ne} é o número de nós do elemento). No texto que segue, usaremos, por simplicidade, a notação N em lugar de N_{ne} .

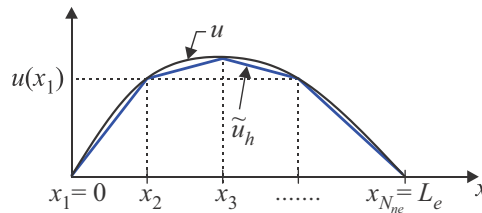


Figura 14.2: Interpolante linear por partes em um elemento 1D.

A estimativa de erro que buscamos será obtida a partir do Teorema 1, cuja prova usa o Teorema 2 [25].

Teorema 14.1 - Seja Ω um intervalo com fechamento $\bar{\Omega}_e = [x_1, x_N] \in R$, contendo N pontos interpoladores de coordenadas distintas x_1, x_2, \dots, x_N . Seja $u(x)$ uma função contínua e que possua derivadas contínuas até ordem N em todo $x \in \bar{\Omega}_e$. Seja $\tilde{u}_h(x)$ o polinômio que interpola $u(x)$ nos pontos interpoladores. Então prova-se que, em qualquer $x \in \Omega$, o erro é dado por:

$$\boxed{u(x) - \tilde{u}_h(x) = \frac{\Psi(x)}{N!} \frac{d^N u}{dx^N} \Big|_{\zeta \in \bar{\Omega}_e},} \quad (14.74)$$

onde $\Psi(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N)$.

ζ é algum ponto no intervalo fechado $[x_1, x_N]$ e Ψ é um polinômio de grau N .

Teorema 14.2 - (Teorema de Rolle). Seja $f(x)$ uma função contínua em $a \leq x \leq b$ e derivável em $a < x < b$. Se $f(a) = f(b)$, então existe, no mínimo, um ponto ζ entre a e b tal que $df/dx|_{\zeta} = 0$ (isto é, um ponto de máximo ou mínimo local).

Prova do Teorema 14.1

Considerem-se dois casos. O primeiro, se x for igual a algum ponto nodal x_j . Então, $u(x_j) = \tilde{u}_h(x_j)$ e $\Psi(x_j) = 0$ e a igualdade (14.74), é satisfeita. O segundo caso é se $x \neq x_j$ e é analisado com o auxílio da seguinte função auxiliar

$$\phi(s) = u(s) - \tilde{u}_h(s) - g(x)\Psi(s) \quad (14.75)$$

O polinômio interpolador entre os pontos (x_1, \tilde{u}_1) e (x_2, \tilde{u}_2) é:

$$\tilde{u}_h(x) = \frac{(x_2 - x)\tilde{u}_1 - (x_1 - x)\tilde{u}_2}{x_2 - x_1}. \quad (14.81)$$

Assim, (14.74) fica:

$$u(x) - \tilde{u}_h(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2!} \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{\zeta}. \quad (14.82)$$

Como a solução exata $u(x)$ não é conhecida, suas derivadas à direita de (14.74) também não podem ser calculadas exatamente. Entretanto, frequentemente se pode afirmar que eles sejam limitadas por algum número real M , isto é,

$$\left| \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x \in \bar{\Omega}_e} \right| \leq M. \quad (14.83)$$

Tomando o valor absoluto de ambos os lados de (14.82) e usando (14.83) tem-se:

$$\begin{aligned} |u(x) - \tilde{u}_h(x)| &= \frac{|(x - x_1)(x - x_2)|}{2} \left| \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{\zeta} \right|, \\ &\leq \frac{M}{2} |(x - x_1)(x - x_2)|. \end{aligned} \quad (14.84)$$

Nota-se que o máximo de $q(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2)$ ocorre em $x_0 = (x_1 + x_2)/2$, onde $q(x_0) = (x_2 - x_1)^2/4$. Entretanto, $x_2 - x_1$ é o comprimento h_e do elemento e . Então, o erro máximo do polinômio interpolador linear no elemento, entre x_1 e x_2 é:

$$|u(x) - \tilde{u}_h(x)| \leq \frac{h_e^2}{8} M \quad \text{para } x \in [x_1, x_2]. \quad (14.85)$$

Se considerarmos todos os N_{el} elementos de uma malha, em que cada elemento tenha comprimento h_e , o erro próximo na malha é associado ao elemento de maior tamanho, h_{\max} :

$$\boxed{|u(x) - \tilde{u}_h(x)| \leq \frac{h_{\max}^2}{8} \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{d^2u}{dx^2} \right|} \quad (14.86)$$

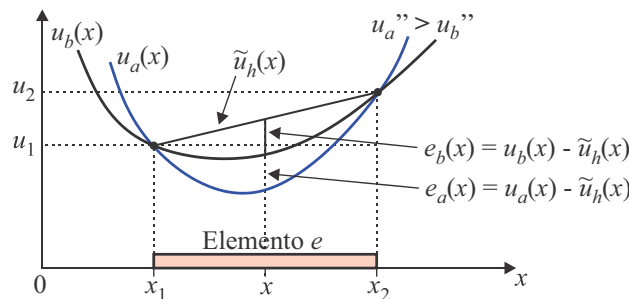


Figura 14.3: Erro do interpolador \tilde{u}_h num elemento em duas funções exatas u_a e u_b de distintas segundas derivadas.

Observação 1

Para um dado elemento, a expressão (14.84) pode ser entendida com o auxílio da Figura 14.3, que, ilustra a função interpoladora linear entre os nós de coordenadas x_1 e x_2 , e o erro que ela gera para duas funções $u_a(x)$ e $u_b(x)$, quando $d^2u_a/dx^2 > d^2u_b/dx^2$. Quanto maior for a segunda derivada, “mais funda” é a função, e maior será seu afastamento em relação ao interpolador linear. Isso explica graficamente a equação (14.84): **quanto mais côncava a função analítica que se**

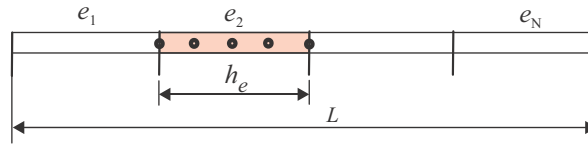


Figura 14.4: Elemento típico com nós internos, de grau p .

Essas estimativas a-priori mostram que o erro no deslocamento e na deformação (e na tensão) decai com a redução do tamanho do maior elemento, a taxas $p+1$ e p , respectivamente. Isso sugere duas formas de refino de malha, o chamado refino h e o refino p . No refino h utilizam-se uma sequência de malhas com elementos de mesmo grau, onde cada malha possui uma quantidade maior de elementos, que são, conseqüentemente menores. O refino p consiste em gerar uma sequência de modelos, em que cada um é definido por polinômios de graus distintos, isto é, cada modelo tem grau $p = 1, 2, 3, \dots$, progressivamente. Todos os modelos possuem idênticas topologias de malhas (mesmos elementos).

Considera-se uma barra de comprimento $L = 1$, modelada por N_{el} elementos idênticos como na Figura 14.4. Por simplicidade, consideramos que as funções elementares são polinômios de Lagrange de grau p . Assim, o número de nós na malha é $N_{nos} = pN_{el} + 1$. Como os elementos são iguais, o comprimento de cada elemento é $h_e = L/N_{el}$. Assim, o erro na deformação, de (14.98)₂, é

$$\left| \frac{de}{dx} \right| = kh_e^p = k \left(\frac{pL}{N_{nos} - 1} \right)^p. \quad (14.99)$$

O valor da constante k não pode ser determinado a priori. Depende de $\max_{z \in \Omega} \left| \frac{d^{p+1}u}{dx^{p+1}} \right|$, de p , e da própria solução exata $u(x)$. Entretanto, a taxa de convergência pode ser visualizada arbitrando valores de k para cada p , o que gera as curvas mostradas na Figura 14.5. Tem-se a estimativa do erro na deformação uniaxial para diversos valores de grau de polinômio no elemento, em função do número de nós da malha. O valor de k representa uma translação em cada curva, sem afetar sua forma ou inclinação. Fazendo o logaritmo decimal em (14.99), para $L = 1$, tem-se

$$\log \left| \frac{de}{dx} \right| = \log k + p [\log p - \log(N_{nos} - 1)]. \quad (14.100)$$

Nota-se que os gráficos não são retos. Entretanto, conforme a malha se torna mais refinada, isto é, $N_{nos} \rightarrow \infty$, a eq.(14.100) tende a sua **forma assintótica**

$$\boxed{\log \left| \frac{de}{dx} \right| = -p \log N_{nos}} \quad (14.101)$$

Essa é a equação de uma reta no gráfico log-log, com inclinação $-p$, que é a **taxa assintótica de convergência a priori do MEF** em problemas de barra.

14.5 Cálculo Variacional

As deduções e argumentos usados no âmbito do Princípio da Energia Potencial Total Mínima, seção 7.3, página 155, pertencem a um universo amplo de conceitos e estruturas que são conhecidas por Cálculo Variacional. Fazemos aqui algumas definições fundamentais e apresentamos os principais aspectos gerais de tal estrutura.

Consideremos dois espaços vetoriais \mathcal{X} e \mathcal{Y} com respectivas normas $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$, e uma função f que opera sobre vetores em \mathcal{X} e os transforma em vetores em \mathcal{Y} . Esta função é definida formalmente como

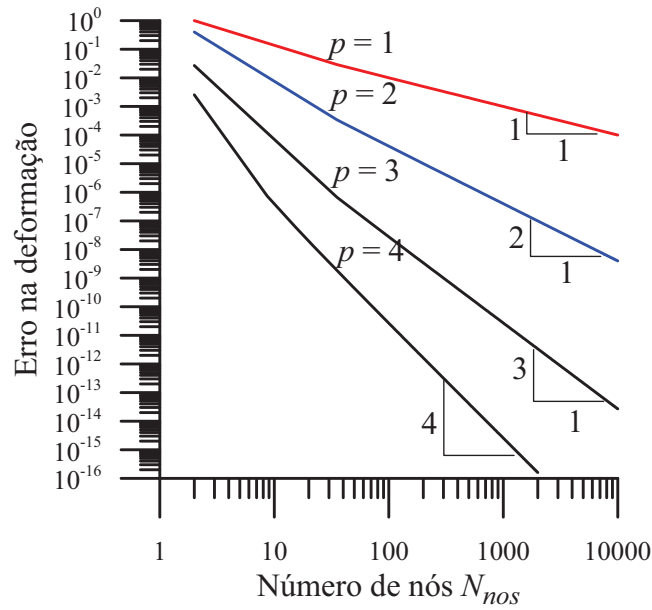


Figura 14.5: Ilustração qualitativa da eq.(14.98)₂.

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}. \quad (14.102)$$

Podemos observar que esta função é extremamente genérica. Um dos casos particulares mais simples é aquele em que \mathcal{X} e \mathcal{Y} são o espaço dos números reais R^1 . Nesta condição, f é a clássica função de valor real definida na reta: $y = f(x)$. Outros exemplos típicos são campos escalares, como a distribuição de temperatura num corpo tridimensional, $T : \Omega \rightarrow R^1$, ou campos vetoriais como a distribuição de deslocamentos num problema de elasticidade, $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow R^3$.

Os operadores $a(\cdot, \cdot)$ e $l(\cdot)$, definidos em (14.18), também se encontram na classe de funções definidas por (14.102). Entretanto, os vetores argumentos de tais operadores são funções (campos) e o resultado é um número real:

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) &: Var \times Var \rightarrow R^1, \\ l(\cdot) &: Var \rightarrow R^1. \end{aligned} \quad (14.103)$$

Em forma genérica, operadores que mapeiam funções para um número real são conhecidos como **funcionais**, isto é, um funcional é uma função de funções, com resultado em R^1 . Em particular, as formas $a(\cdot, \cdot)$ e $l(\cdot)$ são funcionais lineares em relação aos seus argumentos, como visto em (14.30). Já a função $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u})$ é um funcional não linear (quadrático) em relação ao argumento $\mathbf{u} \in Var$.

Consideremos uma função $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow R^c$, $c = 1, 2, 3$, e uma família de funções definidas por

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}), \text{ para } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (14.104)$$

onde ϵ é um parâmetro real, positivo, arbitrariamente pequeno, e $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow R^c$ é uma função diferenciável arbitrária.³ Nota-se que uma quantidade infinita de funções $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ pode ser gerada para cada função $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathcal{X}$, bastando ajustar o parâmetro ϵ . $\tilde{\mathbf{u}}$ é frequentemente denominada função

³Note que parte da literatura impõe, desde o início, uma restrição de que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ em \mathbf{x} pertencente a parte do contorno. Entretanto, essa restrição só é adequada em formas fracas em que a função teste satisfaz a priori as condições de contorno essenciais, como nas formulações do MEF baseadas em deslocamento, usadas em todos os casos no presente livro.

perturbada de \mathbf{u} devido à perturbação $\epsilon\mathbf{v}$. Diz-se que perturbação $\epsilon\mathbf{v}$ é admissível se a função perturbada $\tilde{\mathbf{u}}$ pertence ao mesmo conjunto \mathcal{X} que \mathbf{u} . Por exemplo, tomemos o caso da Figura 14.6, onde a função \mathbf{u} pertence ao conjunto \mathcal{X} de funções nulas em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. A função \mathbf{v} define a “forma” da variação (perturbação), enquanto ϵ define sua amplitude. A adição da perturbação à função \mathbf{u} define $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{X}$, o que obriga \mathbf{v} ser também nula na origem.

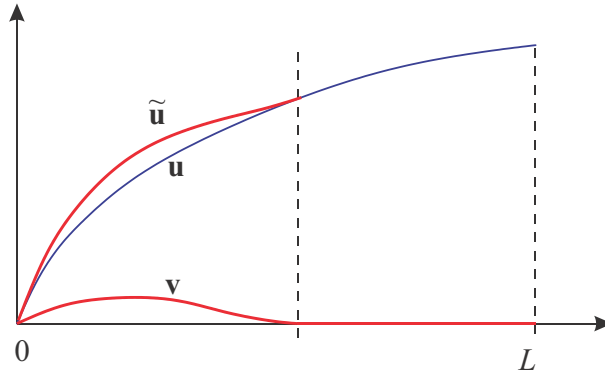


Figura 14.6: Ilustração de função $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, uma direção $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, e a função \mathbf{u} variada $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$.

Dado um funcional $F(\mathbf{u})$, consideramos sua representação em série de Taylor em torno de \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= F(\tilde{\mathbf{u}}) = F(\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{v}), \\ &= F(\mathbf{u}) + \left. \frac{dF(\tilde{\mathbf{u}})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon + \left. \frac{d^2F(\tilde{\mathbf{u}})}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} \frac{\epsilon^2}{2!} + O(\epsilon^3). \end{aligned} \tag{14.105}$$

O símbolo $O(\epsilon^3)$ é lido como “da ordem de ϵ^3 ”. Ele contém termos $\epsilon^3, \epsilon^4, \dots$. **Claramente, as operações acima pressupõem que F seja suficientemente regular para que as derivadas sejam definidas.** Note que, para \mathbf{u} e \mathbf{v} fixos, embora arbitrários, \tilde{F} é uma função apenas de ϵ . Então, a série de Taylor mostrada acima é, até certo ponto, a série usual de cálculo de funções de uma variável. Seus termos podem ser agrupados da seguinte forma:

$$\underbrace{F(\tilde{\mathbf{u}}) - F(\mathbf{u})}_{\Delta F} = \underbrace{\left. \frac{dF(\tilde{\mathbf{u}})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}}_{\delta F} \epsilon + \underbrace{\left. \frac{d^2F(\tilde{\mathbf{u}})}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0}}_{\delta^2 F} \frac{\epsilon^2}{2!} + O(\epsilon^3) \tag{14.106}$$

$\tilde{F} = F(\tilde{\mathbf{u}})$ é o funcional perturbado devido à perturbação em seu argumento. O termo $\Delta F = F(\tilde{\mathbf{u}}) - F(\mathbf{u})$ é denominado variação total de F devido à perturbação em seu argumento. Os termos δF e $\delta^2 F$ são denominadas primeira e, segunda variações de F , ou ainda variações de F de primeira e segunda ordem. Claramente se pode obter, caso necessário, a variação de ordem arbitrária $\delta^k F$. No que concerne ao presente texto, nos restringimos às aplicações da primeira variação.

A partir de (14.106), a primeira variação do funcional tem a seguinte definição:

$$\boxed{\delta F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} F(\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0} \epsilon} \tag{14.107}$$

A primeira variação δF de um funcional F pode ser entendida com ajuda do conceito de variação $\delta\mathbf{u}$ da função \mathbf{u} . Em (14.104), a função $\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{v}$ foi perturbada pela função $\epsilon\mathbf{v}$. Frequentemente é interessante representar a perturbação como $\delta\mathbf{u} = \epsilon\mathbf{v}$, de forma que

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u} = \mathbf{u} + \epsilon\mathbf{v}. \tag{14.108}$$

De forma reversa, a variação de \mathbf{u} tem o significado de

14.5.2 Operador delta

O operador δ é definido como uma entidade que permite uma formalização operacional do procedimento de obtenção da primeira variação de um funcional. Frequentemente ele é usado para obter a primeira variação através de operações sobre o funcional que lembram o processo mecânico de fazer diferenciação de funções. A seguir apresentamos as operações de variação de alguns tipos de funcionais comumente utilizadas nesse texto.

1. Relação entre variação e diferenciação, i.e., variação da função derivada.

Seja uma função $u : R \rightarrow R$. Buscamos a variação de sua derivada, $\delta(du/dx)$. Para isto, usaremos a definição de primeira variação em (14.107). Por definição, $\delta u = \epsilon v$. Logo,

$$\delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \epsilon \left. \frac{d}{d\epsilon} \frac{d(u + \epsilon v)}{dx} \right|_{\epsilon=0} = \epsilon \frac{dv}{dx} = \frac{d(\epsilon v)}{dx} = \frac{d(\delta u)}{dx}. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d(\delta u)}{dx}} \quad (14.121)$$

Assim se tem que as operações de variação e derivação são comutativas. Nota-se que a operação de variação é realizada mantendo a coordenada x fixa (perturbando a função), enquanto a derivação é feita sobre uma única função (perturbando a coordenada).[64].

2. Relação entre variação e integração. Consideramos uma função $g(f(x)) = \int_{\Omega} f(x) dx$ e buscamos δg . Podemos iniciar com a variação de uma função g , usando (14.107):

$$\begin{aligned} \delta g(f) &= \left. \frac{dg(f + \epsilon v)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon, \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_{\Omega} (f + \epsilon v) dx \right|_{\epsilon=0} \epsilon = \int_{\Omega} \left. \frac{d}{d\epsilon} (f + \epsilon v) dx \right|_{\epsilon=0} \epsilon, \\ &= \int_{\Omega} \epsilon v dx. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta \int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} \delta f(x) dx} \end{aligned} \quad (14.122)$$

Portanto, as operações de variação e integração são comutativas.

3. Variação de produto de funções. Sejam duas funções escalares u e w . Considere a função na forma de um produto $F(u, w) = uw$. Tomamos a expressão (14.115), com as perturbações dadas em (14.113):

$$\begin{aligned} \delta f(u, w) &= \left. \frac{df(\tilde{u}, \tilde{w})}{d\epsilon_1} \right|_{\epsilon_1=\epsilon_2=0} \epsilon_1 + \left. \frac{df(\tilde{u}, \tilde{w})}{d\epsilon_2} \right|_{\epsilon_1=\epsilon_2=0} \epsilon_2, \\ &= v_1 w \epsilon_1 + v_2 u \epsilon_2. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta(uw) = u\delta w + w\delta u} \end{aligned} \quad (14.123)$$

Portanto, a operação de **variação de um produto** de funções segue a mesma mecânica da derivação de um produto.

4. Variação da função gradiente. Seja $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow R^c$, $c = 1, 2$ ou 3 , e $\mathbf{G} = \nabla \mathbf{u}$ é o gradiente de \mathbf{u} . Devido à linearidade do operador gradiente, e à propriedade 1. de variação de derivada, segue-se que

$$\boxed{\delta \nabla \mathbf{u} = \nabla (\delta \mathbf{u})} \quad (14.124)$$

5. Variação de funcional dependente de gradiente. Consideremos um funcional com a seguinte dependência:

$$F = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad (14.125)$$

ser sintetizados como definição de um conjunto de funções Var . O enunciado então considera que f satisfaz a condição (14.135) para qualquer $\hat{u} \in Var$.

A demonstração é feita considerando, como hipótese, uma função f não nula, tal que $f > 0$ num ponto $\bar{x} \in \Omega$. Como f é contínua, existe uma região $\Omega_{\bar{x}} \subset \Omega$ que contém o ponto \bar{x} onde também $f > 0$. Uma vez que, pelo enunciado do teorema, \hat{u} é arbitrário, podemos escolher \hat{u} na forma de uma bolha, não nula em $\mathbf{x} = \bar{x}$, contínua, e nula fora de $\Omega_{\bar{x}}$. A Figura 14.7 ilustra uma função assim num caso unidimensional, em que $\Omega = (a, b)$, com $\Omega_{\bar{x}} = (p, q)$, tal que $a < p < q < b$. Por exemplo $f = (x - p)(\bar{x} - x)$ em $\Omega_{\bar{x}}$ e zero fora $\Omega_{\bar{x}}$. Então, $\int_{\Omega_{\bar{x}}} f \hat{u} d\Omega = \int_{\Omega} f \hat{u} d\Omega > 0$. Uma vez que essa desigualdade é contrária à hipótese que a integral é zero, o teorema fica provado.

A função f pode não ser contínua, porém precisa ser localmente integrável. Um caso de grande interesse é o de f contínua por partes, tal que $f \in L^2(\Omega)$. Neste caso, se (14.135) é satisfeito para toda função $\hat{u} \in C^\infty(\Omega)$ de suporte compacto, então $f = 0$ em $L^2(\Omega)$, i.e., $f = 0$ em todo lugar exceto nos pontos de descontinuidade de f .

14.6 Panorama dos métodos de resíduos ponderados

Essa seção mostra uma visão mais abrangente de algumas das variantes mais usadas do método geral dos resíduos ponderados. Essas formas se constituem na base de diversos métodos numéricos como o método de colocação, métodos de Boubnov-Galerkin, de Petrov-Galerkin, de elementos de contorno e de elementos de Green, dentre outros.

Inicialmente consideremos novamente, como exemplo, a equação diferencial de equilíbrio de barra e condições de contorno

$$\begin{aligned} r(x) &= Eu''(x) + b(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \equiv (0, L), \\ u &= \bar{u} \quad \text{em } x \in \Gamma_u \equiv \{0\}, \\ Eu' &= \bar{t} \quad \text{em } x \in \Gamma_f \equiv \{L\}. \end{aligned} \quad (14.136)$$

Fazendo a ponderação da função resíduo $r(x)$ com uma função peso $\hat{u}(x)$ e integrando, obtém-se

$$\int_{\Omega} E\hat{u}u'' d\Omega + \int_{\Omega} b\hat{u} d\Omega = 0, \quad (14.137)$$

onde as funções \hat{u} e u devem ter regularidade suficiente para tornar as integrais limitadas. Fazendo uma integração por partes na primeira integral se obtém

$$- \int_{\Omega} E\hat{u}'u' d\Omega + E\hat{u}u'|_{\Gamma} + \int_{\Omega} b\hat{u} d\Omega = 0. \quad (14.138)$$

Integrando por partes o primeiro termo mais uma vez, todas as derivadas ficam “transferidas” de u para \hat{u} :

$$- \int_{\Omega} Eu''\hat{u} d\Omega + E\hat{u}u'|_{\Gamma} = - \int_{\Omega} E\hat{u}'u d\Omega + E\hat{u}'u|_{\Gamma}, \quad (14.139)$$

(onde também se usou a equação diferencial $b = -Eu''$ para eliminar b). Dessa expressão se obtém todas as possíveis condições de contorno para \hat{u} e u que sejam consistentes com o problema diferencial:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \hat{u}^* & \text{ou } Eu' &= t & \text{em } \Gamma_u, \\ \text{e } E\hat{u}' &= \bar{t}^* & \text{ou } u &= \bar{u}. & \text{em } \Gamma_f. \end{aligned} \quad (14.140)$$

onde \hat{u}^* e \bar{t}^* são valores prescritos da função peso no contorno. Como \hat{u} é uma função arbitrária, ela pode ser escolhida de forma a ter valores convenientes no contorno.

O procedimento ilustrado acima pode ser generalizado para uma equação ou um sistema de d equações diferenciais que pode ser colocado em forma simbólica por um operador diferencial vetorial $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ como

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(\mathbf{x}), \quad (14.148)$$

onde a_j são constantes a serem determinadas e $\phi_j(\mathbf{x})$ são funções de uma **sequência completa de funções**. Essas funções são denominadas funções de aproximação ou **funções teste**.

Definição - Uma sequência de funções, linearmente independente ϕ_j é completa se, dada uma função $f(x)$ em Ω , existe um conjunto de constantes reais b_j tal que

$$\left| f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^N b_j \phi_j(\mathbf{x}) \right| < \varepsilon \quad (14.149)$$

para algum N e ε dados.

Para $u(\mathbf{x})$ aproximado, a função resíduo $r(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(u) - B \neq 0$ em parte de Ω . Os métodos de resíduo ponderados consistem em impor nulidade do resíduo apenas em média, i.e., em relação ao produto interno associado a um conjunto de funções peso

$$\int_{\Omega} r(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, N, \quad (14.150)$$

onde os ψ_k formam um conjunto de funções linearmente independente. Essa integral corresponde ao produto interno $\langle r, \psi_k \rangle_{\Omega} = 0$. Tem-se então que a componente de $r(\mathbf{x})$ na direção $\psi_k(\mathbf{x})$ é forçada ser nula. A eq. (14.150) forma um conjunto de N equações em que cada uma impõe a ortogonalidade de $r(\mathbf{x})$ em relação a $\psi_k(\mathbf{x})$. Então, quando se obtém as constantes a_j de (14.148), se tem um resíduo ortogonal a todo o conjunto ψ_k , isto é, o erro é ortogonal à base formada pelos ψ_k .

Note que, até este ponto da argumentação, não se impôs que ψ_k seja igual a $\phi_j(\mathbf{x})$, nem se impuseram condições de contorno para ψ_k . Exigem-se apenas que suas integrais sejam limitadas.

14.6.2 Métodos de colocação e de Bubnov-Galerkin

Possivelmente o método mais “intuitivo” proveniente dos resíduos ponderados é o **método de colocação**, em que se impõe a satisfação de equilíbrio diferencial em um conjunto limitado de pontos. Para isto, considere-se a aproximação (14.148) com as funções teste ϕ_j satisfazendo as condições de contorno essenciais (14.147). As funções peso ψ_k são distintas de ϕ_j , dadas pelo operador delta de Dirac: $\psi_k = \delta(\mathbf{x}_k)$. (Lembrar que $\delta(\mathbf{x}_k) = 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_k$ e $\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}_k) d\Omega = f(\mathbf{x}_k)$). Então, para o exemplo escalar, o resíduo ponderado (14.144) fica

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(u) \delta(x_k) d\Omega - \int_{\Omega} B(x) \delta(x_k) d\Omega = 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, M. \quad (14.151)$$

A princípio, define-se $M = N$, i.e., se tem o mesmo número de equações que de coeficientes a_j em (14.148), e com isto se tem um sistema algébrico que pode, dentro de certas condições, ser resolvido para os coeficientes.

O **método de Bubnov-Galerkin**⁵, também conhecido simplesmente como Método de Galerkin, é o caso particular do método de resíduos ponderados quando as funções peso são as mesmas da parte das funções teste que se anulam em Γ_u . Esta escolha é a base quase universalmente usada no MEF, e que usamos neste livro para os problemas de elasticidade e condução de calor. A forma mais usada do método é quando aplicado na forma fraca, formato que será visto na próxima seção. Aqui consideramos sua aplicação na forma obtida diretamente pela ponderação do problema diferencial (14.147), onde se considera que as funções teste satisfazem as condições de contorno essenciais. Pode-se decompor a aproximação em duas partes,

⁵Ivan G. Bubnov, Russia, 1872-1919. Boris G. Galerkin, Bielorrússia, 1871-1945.

$$u(\mathbf{x}) = u_g(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}), \quad \text{onde } u_0(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(\mathbf{x}), \quad (14.152)$$

onde $u_g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ e $u_0(\mathbf{x}) = 0$ em $\mathbf{x} \in \Gamma_u$. Substituindo em (14.144) tem-se

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(u_0) \hat{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} B \hat{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathcal{L}(u_g) \hat{u} \, d\Omega. \quad (14.153)$$

Tomando $\hat{u} = \phi_k$, para $k = 1, \dots, N$, tem-se um sistema de N equações algébricas em termos de a_j :

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \phi_k \mathcal{L}(\phi_j) \, d\Omega \right] a_j = \int_{\Omega} \phi_k b \, d\Omega - \int_{\Omega} \phi_k \mathcal{L}(u_g) \, d\Omega. \quad (14.154)$$

Uma forma similar de representar a função peso consiste em adotar a variação de u :

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \delta u_0(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \delta a_j. \quad (14.155)$$

Assim, a forma ponderada (14.153) fica

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(u_0) \delta u_0 \, d\Omega = \int_{\Omega} B \delta u_0 \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathcal{L}(u_g) \delta u_0 \, d\Omega \quad (14.156)$$

para qualquer δu_0 dado na forma (14.155).

As formulações conhecidas por **Petrov-Galerkin** se caracterizam por ter funções peso distintas das funções teste. Seu uso é indicado em certos problemas não auto adjuntos onde a distinção entre as duas bases de aproximação traz vantagens numéricas. Entretanto, seu detalhamento foge ao escopo do presente texto.

14.6.3 Formulações fracas e descontinuidade interelementar

Quando se observam os requerimentos de regularidade nas formas obtidas pela ponderação simples dos resíduos diferenciais, vistas na seção anterior, nota-se que são as mesmas exigidas do próprio operador diferencial. As chamadas formas fracas consistem em formas com os requerimentos de regularidade reduzidos devido às operações de integrações por partes na forma ponderada. Também, as condições de contorno naturais são satisfeitas apenas parcialmente. O detalhamento é visto a seguir.

Consideremos o problema diferencial

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}) &= \mathbf{B}, \text{ em } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{G}(\mathbf{u}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_u, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}) &= \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}), \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_f. \end{aligned} \quad (14.157)$$

Agora, se considera que as funções teste satisfaçam as condições essenciais, mas não as naturais. Assim, se tem dois resíduos, um no domínio e outro em Γ_f :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\equiv \mathcal{L}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}, \text{ em } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{r}_f &\equiv \mathbf{S}(\mathbf{u}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}), \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_f. \end{aligned} \quad (14.158)$$

Ambos os resíduos são ponderados por $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} (\mathbf{S}(\mathbf{u}) - \bar{\mathbf{t}}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma_f = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}}. \quad (14.159)$$

Descontinuidade interelementar

Quando se obtém uma solução aproximada via elementos finitos, além da não satisfação do equilíbrio em todos os pontos do domínio e do contorno de Neumann, tem-se também uma aproximação cujo gradiente é descontínuo nas interfaces dos elementos. Esse efeito foi mostrado no texto em exemplos numéricos, porém aqui será mostrado de maneira formal. Consideremos o problema de Poisson com a seguinte forma fraca discretizada proveniente de (13.33), para $u_h, \hat{u}_h \in Var_h$:

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \hat{u}_h \, d\Omega = \int_{\Omega} b \hat{u}_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{q} \hat{u}_h \, d\Gamma \quad (14.166)$$

onde \bar{q} é o fluxo prescrito na região Γ_f do contorno. Consideremos que o domínio seja discretizado em uma malha M de elementos finitos, onde cada elemento tem domínio Ω_e , isto é, $\Omega = \cup_{e=1}^{Nel} \Omega_e$, e contorno $\partial\Omega_e$. Subdividimos os domínios de integração do primeiro e do terceiro termos em integrais sobre os elementos:[2]

$$\sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \nabla u_h \cdot \nabla \hat{u}_h \, d\Omega = \int_{\Omega} b \hat{u}_h \, d\Omega + \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_f} \bar{q} \hat{u}_h \, d\Gamma. \quad (14.167)$$

Em seguida fazemos uma integração por partes no primeiro termo

$$-\sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \hat{u}_h \nabla^2 u_h \, d\Omega + \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\partial\Omega_e} \hat{u}_h \frac{\partial u_h}{\partial n} \, d\partial\Omega_e = \int_{\Omega} b \hat{u}_h \, d\Omega + \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_f} \bar{q} \hat{u}_h \, d\partial\Omega_e, \quad (14.168)$$

Nota-se que o termo $\nabla^2 u_h$ é suave dentro do elemento, embora possa ser singular nas interfaces, dependendo da continuidade de u_h . Isso permite que as integrais em cada elemento no primeiro termo sejam limitadas. Também, pode-se somar as integrais de cada elemento, formando uma única integral em Ω . Em seguida, as parcelas no contorno podem ser agrupadas, resultando o seguinte:

$$-\int_{\Omega} \hat{u}_h \nabla^2 u_h \, d\Omega = \int_{\Omega} b \hat{u}_h \, d\Omega - \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_f} \hat{u}_h \left(\frac{\partial u_h}{\partial n} - \bar{q} \right) \, d\partial\Omega_e - \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\partial\Omega_e \setminus \Gamma_f} \hat{u}_h \frac{\partial u_h}{\partial n} \, d\partial\Omega_e. \quad (14.169)$$

onde $\partial\Omega_e \setminus \Gamma_f$ é a parte do contorno do elemento e que não faz parte de Γ_f . O primeiro somatório pode ser coletado numa única integral em Γ_f

$$\int_{\Omega} \hat{u}_h \nabla^2 u_h \, d\Omega = - \int_{\Omega} b \hat{u}_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \hat{u}_h \left(\frac{\partial u_h}{\partial n} - \bar{q} \right) \, d\partial\Omega_e + \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\partial\Omega_e \setminus \Gamma_f} \hat{u}_h \frac{\partial u_h}{\partial n} \, d\partial\Omega_e. \quad (14.170)$$

O último termo engloba tanto os contornos de elementos internos quanto aqueles pertencentes a Γ_u . Essa última parcela é eliminada com a escolha da função peso homogênea em Γ_u , de forma que o último termo envolve apenas contornos internos ao domínio global.

Consideremos o **traço de** \hat{u}_h num certo elemento como os valores de \hat{u}_h no contorno deste elemento. Observa-se que os traços de \hat{u}_h em dois elementos vizinhos coincidem ao longo da interface γ entre eles, devido à continuidade de \hat{u}_h . Entretanto, pode-se definir o **salto de descontinuidade** do fluxo na interface γ entre os elementos e e e' mediante a seguinte expressão:

$$\boxed{\left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]_{\gamma} \equiv \mathbf{n}_e \cdot \nabla u_h|_e + \mathbf{n}_{e'} \cdot \nabla u_h|_{e'}} \quad (14.171)$$

Lembrando que $\mathbf{n}_{e'} = -\mathbf{n}_e$, o salto pode ser posto como

$$\left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]_{\gamma} = \mathbf{n}_e \cdot (\nabla u_{he} - \nabla u_{he'}) \quad (14.172)$$

Com a notação para o salto de descontinuidade, o último termo na forma ponderada (14.170) pode ser reorganizado para um somatório sobre todas as descontinuidades internas:

$$\int_{\Omega} \hat{u}_h (\nabla^2 u_h + b) \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \hat{u}_h \left(\frac{\partial u_h}{\partial n} - \bar{q} \right) \, d\partial\Omega_e - \sum_{\gamma \setminus \Gamma} \int_{\gamma} \hat{u}_h \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]_{\gamma} \, d\gamma = 0. \quad (14.173)$$

(A notação $\gamma \setminus \Gamma$ significa o conjunto das interfaces que não pertencem a Γ .) Uma vez que essa igualdade deve ser válida para todo $\hat{u}_h \in Var_h$, se a base de aproximação do MEF for refinado ao infinito, de forma que Var_h tenda a Var , tem-se que, pelo Lema fundamental do cálculo variacional, (seção 14.5.3), as seguintes relações são satisfeitas por u_h :

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_h + b &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u_h}{\partial n} - \bar{q} &= 0 \quad \text{em } \Gamma_f, \\ \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]_{\gamma} &= 0 \quad \text{em cada interface interna } \gamma. \end{aligned} \quad (14.174)$$

Entretanto, numa discretização finita, em que \hat{u}_h não é suave e pertence a um espaço de dimensão finita, estas relações locais não são exatamente satisfeitas. Considerando que, com o refino da modelagem, a solução do MEF converge, segue-se que os lados esquerdos dessas relações locais tendem a zero. Outra forma de interpretação é que a solução do MEF aproxima estas relações locais. Quando se considera o conjunto geral das equações locais do problema, observa-se que a solução do **MEF baseado em Galerkin aproxima as relações acima (equilíbrio e continuidade interelementar) e satisfaz exatamente as relações constitutivas e cinemáticas no domínio, e as condições de contorno essenciais**. Note que essa dedução e todas as suas conclusões podem ser aplicadas, com os devidos ajustes, ao problema elastostático, quando se considera a descontinuidade interelementar dos vetores tensão nas interfaces entre os elementos.

14.6.4 Métodos de elementos de contorno

Consideremos novamente o problema diferencial (14.157) e suas forma integral ponderada (14.144). Realizando uma quantidade adequada de integrações por partes, chega-se à forma (14.145):

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{G}}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{G}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{S}}(\hat{\mathbf{u}}) \, d\Gamma. \quad (14.175)$$

Nos métodos baseados em Galerkin, a função peso é escolhida entre as que satisfazem as condições de contorno essenciais nulas. Entretanto, existem diversas famílias de métodos baseados na escolha de $\hat{\mathbf{u}}$ que satisfaz condições do operador adjunto $\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{u}})$. São as famílias de métodos de elementos de contorno ou de Green.

Nos métodos de elementos de contorno a função peso pode ser escolhida para satisfazer o **problema adjunto**

$$\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{u}}) = 0 \quad (14.176)$$

em um domínio infinito, de forma que não satisfaz nenhuma condição pré definida sobre o contorno do problema real. Nesse caso, (14.175) fica

$$\int_{\Omega} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{G}}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{G}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{S}}(\hat{\mathbf{u}}) \, d\Gamma. \quad (14.177)$$

Então todas as incógnitas do problema ficam apenas no contorno, o que exige discretização apenas no contorno. Nota-se que o contorno possui uma dimensão a menos que o domínio. Por exemplo,

14.7 Princípios de mínimo e método de Rayleigh-Ritz

A demonstração da equivalência entre as soluções da forma fraca e o princípio de mínimo correspondente é sumarizada a seguir, partindo da forma ponderada de Galerkin (14.159) do problema diferencial (14.157):

$$\boxed{\int_{\Omega} (\mathcal{L}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} (\mathbf{S}(\mathbf{u}) - \bar{\mathbf{t}}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma_f = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}}} \quad (14.182)$$

onde é requerido que a aproximação \mathbf{u} satisfaça, a priori, $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ em Γ_u . Se o operador diferencial $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ for auto adjunto, então existe um princípio de mínimo associado ao funcional

$$F(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u}), \quad (14.183)$$

onde $a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ é a forma bilinear obtida integrando por partes cada termo de $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ uma quantidade adequada de vezes. O princípio de mínimo estabelece que a função \mathbf{u} que satisfaça $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ em Γ_u e minimiza $F(\mathbf{u})$ também é solução de (14.182), desde que \mathbf{u} tenha a diferenciabilidade necessária para $\mathcal{L}(\mathbf{u})$. Com isso, o **problema de minimização** toma a seguinte formatação:

$$\boxed{\text{Dado } \mathbf{B} : \Omega \rightarrow R, \text{ determine } \mathbf{u} \in Kin \text{ tal que } F(\mathbf{u}) \leq F(\mathbf{v}), \text{ para qualquer } \mathbf{v} \in Kin.} \quad (14.184)$$

Em elastostática, este é o **princípio da mínima energia potencial total**.

Por exemplo, consideremos (14.182) para o problema de equilíbrio de barra:

$$\int_{\Omega} (Eu'' + b) \hat{u} \, d\Omega - (Eu' - \bar{t}) \hat{u}|_{\Gamma_f} = 0, \quad (14.185)$$

para u satisfazendo a priori $u = \bar{u}$, e $\hat{u} = 0$ em Γ_u . A forma fraca correspondente é

$$\int_{\Omega} (Eu' \hat{u}' - b \hat{u}) \, d\Omega - \bar{t} \hat{u}|_{\Gamma_f} = 0. \quad (14.186)$$

Verifica-se que é possível construir o funcional

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E (u')^2 \, d\Omega - \int_{\Omega} b u \, d\Omega - \bar{t} u|_{\Gamma_f} . \quad (14.187)$$

tal que a função u que satisfaz $\delta F(u) = 0$ é a mesma que satisfaz a forma fraca (14.186). De fato, usando (14.107),

$$\begin{aligned} \delta F(u) &= \left. \frac{d}{d\epsilon} F(u + \epsilon v) \right|_{\epsilon=0} \quad \epsilon = 0 \quad \forall v \in Var, \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} E (u' + \epsilon v')^2 \, d\Omega - \int_{\Omega} b (u + \epsilon v) \, d\Omega - \bar{t} (u + \epsilon v)|_{\Gamma_f} \right] \right|_{\epsilon=0} \quad \epsilon = 0, \\ &= \left[\int_{\Omega} E u' v' \, d\Omega - \int_{\Omega} b v \, d\Omega - \bar{t} v|_{\Gamma_f} \right] \epsilon, \\ &= \left[\int_{\Omega} E u' \delta u' \, d\Omega - \int_{\Omega} b \delta u \, d\Omega - \bar{t} \delta u|_{\Gamma_f} \right] = 0 \quad \forall \delta u \in Var. \end{aligned} \quad (14.188)$$

que é o mesmo enunciado da forma fraca (14.186).

Note-se que não existe um processo direto de dedução do funcional de minimização a partir da forma fraca, como existe no caminho inverso. A operação é feita sempre com uma dose de indução para identificar qual é o funcional cuja variação fornece a forma fraca. Por exemplo, o fator 1/2 é introduzido de forma proposital para que a variação de F corresponda à forma fraca.

$$u(x) = -\frac{1}{2E}bx^2, \quad \sigma_x(x) = -bx \quad \text{e} \quad \sigma_x(L) = \bar{t}. \quad (14.193)$$

A solução exata é polinomial. Então, se usarmos uma base de funções teste polinomial, se teria a solução exata com apenas os três primeiros termos da série. Usaremos uma base distinta para ilustrar a convergência. A base usada é a seguinte:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{2L}. \quad (14.194)$$

Essa aproximação satisfaz à condição de contorno essencial para qualquer a_j . De (14.187), o funcional fica

$$F(u, u') = \frac{1}{2} \int_0^L E (u')^2 dx - \int_0^L bu dx - \bar{t}u(L). \quad (14.195)$$

Nota-se que $F = F(u, u')$. Logo, sua variação gera

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial a_i} = 0. \quad (14.196)$$

Então, as componentes do gradiente de F são

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = - \int_0^L b \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{2L} dx - \bar{t} \operatorname{sen} \frac{j\pi L}{2L} + E \int_0^L \frac{i\pi}{2L} u' \cos \frac{i\pi x}{2L} dx = 0. \quad (14.197)$$

$u' = \sum_{j=1}^N \frac{j\pi}{2L} a_j \cos \frac{j\pi x}{2L}$. O sistema algébrico resultante é

$$\sum_{j=1}^N \left[E i j \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \int_0^L \cos \frac{j\pi x}{2L} \cos \frac{i\pi x}{2L} dx \right] a_j - \int_0^L b \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{2L} dx - \bar{t} \operatorname{sen} \frac{i\pi L}{2L} = 0, \quad (14.198)$$

para $i = 1, \dots, N$, isto é,

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} a_j - F_j = 0. \quad (14.199)$$

A Tabela 14.1 mostra os valores do deslocamento e da tensão na extremidade da barra, obtidos para uma progressão quantidades de termos usados na série. Os valores analíticos são $u_{ex}(L) = 0,125$ mm e $\sigma_{ex}(L) = 50$ MPa. Os erros mostrados na tabela são relativos. Nota-se que a convergência não é monotônica. Também, a condição de contorno natural tem taxa de convergência muito menor que a do deslocamento. Este é um fenômeno típico deste tipo de aproximação.

14.8 Multiplicadores de Lagrange e restrições no funcional

No Capítulo 10 diversos aspectos qualitativos do método de multiplicadores de Lagrange foram apresentados no âmbito de incorporação de restrições escalares em funcionais matriciais apenas de maneira formal via exemplos. Na presente seção será mostrada uma dedução do formalismo do método de minimização via multiplicadores de Lagrange com restrição de igualdade para problemas discretos, aplicável a espaços vetoriais de dimensão finita. A dedução apresentada é clássica, e pode ser vista em forma um pouco mais simples em textos como o de Arora [5]. Deve-se observar que esse problema forma parte de um conceito mais amplo de condições de otimalidade de extremos de funções com restrições. Nas seções posteriores apresentamos, sem demonstração, a extensão do método para o caso de espaços vetoriais de funções, i.e., aqueles tipicamente encontrados nas expressões de meios contínuos.

14.8.1 Dedução do método de multiplicadores de Lagrange

Consideremos um funcional convexo $F = F(\mathbf{u})$, com $\mathbf{u} \in R^d$ é um n -uplo de parâmetros escalares, i.e., $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$. Assim, \mathbf{u} é apenas um arranjo de escalares, não necessariamente um vetor. Desejamos obter o ponto de mínimo de F , submetido a uma **restrição de igualdade**, $\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{g} \in R^m$, isto é, busca-se \mathbf{u} que

$$\begin{aligned} &\text{minimiza } F(\mathbf{u}), \\ &\text{submetido às restrições } \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (14.200)$$

De forma aberta, tem m restrições envolvendo as d coordenadas \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} g_1(u_1, \dots, u_d) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(u_1, \dots, u_d) &= 0. \end{aligned} \quad (14.201)$$

O número de restrições deve ser menor ou igual ao número de coordenadas \mathbf{u} , isto é, $m < d$. De um ponto de vista formal, é possível resolver o problema de mínimo com restrições usando o conjunto de equações de restrição para exprimir m coordenadas em termos das demais $d - m$. Por exemplo, podemos tomar as m primeiras coordenadas em termos das demais:

$$\begin{aligned} u_1 &= \phi_1(u_{m+1}, \dots, u_d), \\ &\vdots \\ u_m &= \phi_m(u_{m+1}, \dots, u_d), \end{aligned} \quad (14.202)$$

onde ϕ_j 's são funções adequadas obtidas das expressões das restrições (14.201). Note-se que em geral não é viável a identificação explícita dessas funções, e também não é necessário que se faça. Aqui elas são usadas apenas como etapa intermediária na dedução da formalização do processo de minimização via multiplicadores de Lagrange. Nesse caso, será suficiente apenas saber que essas funções existem. Em seguida, formalmente substituímos as coordenadas u_1 - u_m na função F :

$$\begin{aligned} F &= F(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_d), \\ &= F(\phi_1, \dots, \phi_m, u_{m+1}, \dots, u_d). \end{aligned} \quad (14.203)$$

Então agora, formalmente, F depende apenas das $d - m$ coordenadas u_{m+1} - u_d . Para simplificar a notação, continuaremos a dedução para um caso em que $d = 5$ e $m = 2$. Então as equações (14.202) se tornam

$$\begin{aligned} u_1 &= \phi_1(u_3, u_4, u_5), \\ u_2 &= \phi_2(u_3, u_4, u_5). \end{aligned} \quad (14.204)$$

E a função objetivo fica

$$F = F(\phi_1(u_3, u_4, u_5), \phi_2(u_3, u_4, u_5), u_3, u_4, u_5). \quad (14.205)$$

Assim, o problema foi reformulado num outro equivalente mais simples, dependente de $d - m$ variáveis, sem restrições. O argumento minimizador \mathbf{u} é aquele que satisfaz o sistema de $d - m$ equações:

$$\frac{dF(\mathbf{u})}{du_k} = 0, \quad \text{para } k = m + 1, \dots, d. \quad (14.206)$$

Devido à dependência implícita nas funções ϕ_j 's, essas equações se tornam (para o presente exemplo)

$$\begin{aligned} \frac{dF}{du_3} &= \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \bar{A}_{11} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \bar{A}_{21} \right)}_{\lambda_1} \frac{\partial g_1}{\partial u_3} + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \bar{A}_{12} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \bar{A}_{22} \right)}_{\lambda_2} \frac{\partial g_2}{\partial u_3} + \frac{\partial F}{\partial u_3} = 0, \\ \frac{dF}{du_4} &= \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \bar{A}_{11} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \bar{A}_{21} \right)}_{\lambda_1} \frac{\partial g_1}{\partial u_4} + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \bar{A}_{12} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \bar{A}_{22} \right)}_{\lambda_2} \frac{\partial g_2}{\partial u_4} + \frac{\partial F}{\partial u_4} = 0. \end{aligned} \quad (14.211)$$

Os termos entre parênteses envolvem a inversa de $\bar{\mathbf{A}}$, que dependem das funções teste ϕ_j 's. Essas funções dependem da solução \mathbf{u}^* , que é desconhecida. Então esses parênteses pode ser identificados como m novas funções incógnitas, (λ_1 e λ_2 no exemplo). Os termos entre parêntesis geram m equações que podem ser organizados em forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{21} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}^T} \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u_1} \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}, \quad (14.212)$$

o que gera uma solução

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u_1} \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} \end{Bmatrix} = -\mathbf{A}^T \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}. \quad (14.213)$$

Isso gera m equações na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \lambda_1 + \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \lambda_2 &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \lambda_1 + \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (14.214)$$

As equações (14.211) e (14.214) formam um conjunto de d equações que, junto às m restrições $\mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0$, formam as **condições necessárias de otimalidade** do problema. Essas condições podem ser colocadas como o ponto estacionário do funcional Lagrangeano, que é definido como

$$\boxed{L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = F(u_1, \dots, u_d) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(u_1, \dots, u_d)} \quad (14.215)$$

O argumento $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}\}$ onde $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ é estacionário, agora é um vetor com $d + m$ componentes, que satisfaz o sistema de equações

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L}{\partial u_j} \right|_{\{\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}\}} &= \frac{\partial F}{\partial u_j} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_j} = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, d, \\ \left. \frac{\partial L}{\partial \lambda_p} \right|_{\{\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}\}} &= g_p = 0, \quad \text{para } p = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (14.216)$$

14.8.2 Funcionais Lagrangianos para problemas de Poisson e de elastostática

De forma usual, as formulações de MEF vistas exigem que as funções teste satisfaçam, a priori, as condições de contorno essenciais, de forma que essas condições são satisfeitas exatamente. Entretanto, em diversas situações, é interessante a imposição dessas condições explicitamente no funcional, via multiplicadores de Lagrange. Nesses casos as funções teste não necessitam satisfazer as condições essenciais. Deve-se observar que a dedução vista na seção anterior foi feita para um

$$\begin{aligned} \delta L(u, \lambda) = & - \int_{\Omega} \nabla^2 u \delta u \, d\Omega - \int_{\Omega} b \delta u \, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_f} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} \right) \delta u \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \left(\lambda + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \delta u \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) \delta \lambda \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (14.222)$$

Para se ter $\delta L(u, \lambda) = 0$ em (14.222) $\forall \delta u$ e $\delta \lambda$, o Lema fundamental do cálculo variacional indica que os coeficientes de δu devem ser identicamente nulos. Seque que a solução de (14.222) representa a satisfação das três equações (14.217), além da condição

$$\lambda(x) = -\frac{\partial u}{\partial n} \text{ em } \Gamma_u. \quad (14.223)$$

Essa expressão produz o significado físico do multiplicador de Lagrange λ admissível no problema de Poisson. Em cada tipo de problema o multiplicador assume um significado físico adequado, dependendo do tipo de restrição associado a ele. Por exemplo no problema elastostático, o multiplicador de Lagrange associado à restrição de deslocamento é o vetor tensão.

Devido a que (14.221) deve ser satisfeito para todos δu e $\delta \lambda$ admissíveis, duas equações são obtidas:⁸

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \delta u \, d\Omega - \int_{\Omega} b \delta u \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \bar{q} \delta u \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \lambda \delta u \, d\Gamma = 0, & \forall \delta u \text{ admissível,} \\ \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) \delta \lambda \, d\Gamma = 0, & \forall \delta \lambda \text{ admissível.} \end{cases} \quad (14.224)$$

Estas duas equações, quando discretizadas via FEM, fornecem um conjunto de equações algébricas análogo a (14.216).

Observação: o problema estacionário para o funcional Lagrangiano associado ao problema de Poisson é: obter $u \in H^1(\Omega)$ e $\lambda \in H^0(\Gamma_f)$, tal que

$$L(u, \lambda) \leq L(v, l), \text{ para } v \in H^1(\Omega) \text{ e } l \in H^0(\Gamma_f), \quad (14.225)$$

isto é, a busca do ponto estacionário não se restringe ao conjunto de funções que satisfazem à condição de contorno essencial. A mesma observação se aplica ao princípio variacional (14.221). A única relação que deve ser satisfeita pelas funções teste, a priori, é a relação constitutiva $q = -\nabla u$, que deve ser satisfeita exatamente, devido à forma de equilíbrio térmico usado na dedução de (14.218)₁.

Funcional modificado para elastostática

Consideremos o funcional F para o princípio da mínima energia potencial total, dado em (14.183),

$$F(\mathbf{v}) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma, \quad (14.226)$$

e busquemos \mathbf{u} , argumento minimizador do problema

$$\min_{\mathbf{u} \in Kin} F(\mathbf{u}) \text{ ou, equivalentemente, } F(\mathbf{u}) \leq F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Kin. \quad (14.227)$$

A condição de contorno essencial imposta no conjunto Kin pode ser incorporada ao funcional F via multiplicador de Lagrange, gerando o funcional Lagrangiano

⁸Estas duas equações são obtidas aplicando $\delta u = 0$ e $\delta \lambda = 0$ alternadamente em (14.221).

$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \quad (14.228)$$

onde $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ é o campo vetorial de multiplicadores de Lagrange.⁹ Devido às propriedades de convexidade dos funcionais envolvidos, demonstra-se que o par $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}\}$ que satisfaz a condição de estacionaridade do Lagrangiano L ($\delta L = 0$) é aquela que resolve o problema de mínimo restrito (14.227):

A forma variacional correspondente é obtida fazendo a variação de $F(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$\delta L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma = 0 \quad (14.229)$$

Novamente, a arbitrariedade das variações $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \boldsymbol{\lambda}$ permite explicitar duas equações:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma, & \forall \delta \mathbf{u} \text{ admissível,} \\ \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma = 0, & \forall \delta \boldsymbol{\lambda} \text{ admissível.} \end{cases} \quad (14.230)$$

A discretização destas equações via MEF fornece um sistema algébrico na forma (14.216).

14.8.3 Princípio variacional modificado arbitrário de função vetorial

Note que (14.229) pode ser tomado como modelo para a construção de um princípio variacional modificado que incorpore **qualquer restrição de igualdade de funções vetoriais** em um problema variacional arbitrário. Consideremos o princípio variacional em sua forma geral: obter $\mathbf{u} \in Kin$ tal que

$$a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) - (\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}) - \langle \bar{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_f} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in Var, \quad (14.231)$$

onde

$$\begin{aligned} Kin &= Var = \{ \mathbf{u} \mid u_j \in H^1(\Omega), i = 1, \dots, d; d = 1, 2 \text{ ou } 3; \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u \}, \\ Var &= \{ \mathbf{u} \mid u_j \in H^1(\Omega), i = 1, \dots, d; d = 1, 2 \text{ ou } 3; \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_u \}. \end{aligned} \quad (14.232)$$

A condição $\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ em Γ_u é incorporada simplesmente adicionando duas integrais, de forma a ter o **princípio variacional modificado**: \mathbf{u} (sem restrições a priori) tal que $u_i \in H^1(\Omega)$, que satisfaz

$$a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) - (\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}) - \langle \bar{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_f} + \langle \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}} \rangle_{\Gamma_u} + \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\Gamma_u} = 0 \quad (14.233)$$

$\forall \hat{\mathbf{u}}$ tal que $\hat{u}_i \in H^1(\Omega)$ e $\forall \hat{\boldsymbol{\lambda}}$ tal que $\hat{\lambda}_i \in H^1(\Omega)$. A arbitrariedade das variações $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \boldsymbol{\lambda}$ permite explicitar duas equações:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) - (\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}) - \langle \bar{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_f} + \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\Gamma_u} = 0, & \forall \delta \mathbf{u} \text{ admissível,} \\ \langle \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}} \rangle_{\Gamma_u} = 0, & \forall \delta \boldsymbol{\lambda} \text{ admissível,} \end{cases} \quad (14.234)$$

e a discretização destas equações via MEF fornece um sistema algébrico na forma (14.216).

⁹Note que o sinal no último termo é arbitrário, uma vez que $\boldsymbol{\lambda}$ é uma incógnita a ser determinada.

Formulação de MEF para princípio variacional generalizado

Consideramos o princípio variacional do problema de Poisson com a modificação que incorpora as condições de contorno essenciais, dado em (14.221). Por comodidade de notação fazemos a conversão $\hat{u} = \delta u$ e $\hat{\lambda} = \delta \lambda$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \hat{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} b \hat{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \bar{q} \hat{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \lambda \hat{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) \hat{\lambda} \, d\Gamma = 0. \quad (14.241)$$

O formalismo para a sua solução via elementos finitos inicia-se com as discretizações

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{U}, \\ \lambda(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}_{\lambda}(\mathbf{x})\mathbf{\Lambda}, \end{aligned} \quad (14.242)$$

onde $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{N}_{\lambda}(\mathbf{x})$ são matrizes com as funções de forma associados a uma certa malha e \mathbf{U} e $\mathbf{\Lambda}$ são os correspondentes valores nodais. A partir dessa discretização obtém-se

$$\nabla u = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}, \quad \nabla \hat{u} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{U}} \quad \text{e} \quad \hat{\lambda} = \mathbf{N}_{\lambda}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{\Lambda}}. \quad (14.243)$$

Assim, a forma fraca discretizada fica

$$\hat{\mathbf{U}}^T \left\{ \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, d\Omega \right) \mathbf{U} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T b \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \bar{q} \, d\Gamma + \left(\int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_{\lambda} \, d\Gamma \right) \mathbf{\Lambda} \right\} + \hat{\mathbf{\Lambda}}^T \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_{\lambda}^T (\mathbf{N}\mathbf{U} - \bar{u}) \, d\Gamma = 0. \quad (14.244)$$

Considerando que a expressão é válida $\forall \hat{\mathbf{U}}$ e $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ admissíveis, obtém-se

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, d\Omega \right)}_{\mathbf{K}} \mathbf{U} - \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T b \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \bar{q} \, d\Gamma}_{\mathbf{F}} + \underbrace{\left(\int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_{\lambda} \, d\Gamma \right)}_{\mathbf{R}^T} \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{0}, \\ \underbrace{\left(\int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_{\lambda}^T \mathbf{N} \, d\Gamma \right)}_{\mathbf{R}} \mathbf{U} - \underbrace{\int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_{\lambda}^T \bar{u} \, d\Gamma}_{\mathbf{C}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (14.245)$$

A solução nodal $\{\mathbf{U}, \mathbf{\Lambda}\}$ é obtida do sistema algébrico modificado

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{C} \end{Bmatrix}, \quad \text{isto é,} \quad \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}}. \quad (14.246)$$

Nota-se que essa é a mesma expressão (10.34) obtida para imposição de condições de restrições pontuais via multiplicador de Lagrange.

14.9 Restrições na forma fraca via penalização

Consideremos como exemplo a forma fraca usual do problema elastostático: obter $\mathbf{u} \in Kin$ tal que

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\hat{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in Var \quad (14.247)$$

$\mathbf{u} \in Kin$, deve satisfazer, a priori, às restrições $\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ em Γ_u . A forma fraca pode ser modificada para incorporar essas restrições. Na seção anterior vimos essa incorporação ser feita via multiplicador de Lagrange. Aqui apresentamos a incorporação via penalidade. O princípio variacional modificado toma a forma: obter \mathbf{u} tal que $u_i \in H^1(\Omega)$ e

Determine a forma fraca associada. Mostre que o operador diferencial L associado é auto adjunto. Qual é o problema adjunto?

14.17 Para o problema do Exercício 16, determine o funcional $F(u)$. (Solução: $F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{-(u')^2 + u^2 + 2ux\} d\Omega + \bar{t}u|_{x=L}$.)

14.18 Obter uma solução aproximada para o problema de mínimo de $F(u)$ do Exercício 16, usando o método de Rayleigh-Ritz. Considere $\bar{u} = 1$, $\bar{t} = 5$, $L = 1000$. Use a aproximação dada em (14.236). Obtenha resultados de erro relativo em $x = L$ para u e para u' , para uma sequência de N 's na base. Use a solução exata do Exercício 19.

14.19 Obtenha a solução exata do problema do Exemplo 16. (Solução: $u(x) = \frac{\bar{t}+1+\bar{u}}{\cos L} \sin x + g \cos x - x$.)

14.20 No exercício 17, determine a norma $L_2(\Omega)$ do erro relativo, $e_{L_2(\Omega)}$, para uma sequência de valores de N , onde $e_{L_2(\Omega)}$ é definido por

$$e_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \left(\frac{u_{mef}(x) - u_{exato}(x)}{u_{exato}(x)} \right)^2 d\Omega} \quad (14.250)$$

Compare as taxas de convergência com aquelas obtidas por uma outra avaliação de erro, dada pelo erro relativo entre as normas L_2 :

$$\bar{e} = \left| \frac{\|u_{mef}\|_{L_2(\Omega)} - \|u_{exato}\|_{L_2(\Omega)}}{\|u_{exato}\|_{L_2(\Omega)}} \right|. \quad (14.251)$$

14.21 Obtenha a expressão (14.115) da primeira variação de um funcional de duas funções, usando a série de Taylor.

14.22 Obtenha (14.129) usando (14.112), considerando F como $F = F(u_1, u_2, u_{1,x}, u_{1,y})$.

