

# Capítulo 6

## Análise matricial - modelo de viga

### 6.1 Flexão de viga - Hipóteses geométricas e cinemáticas

Em engenharia civil é costumeiro denominar *viga* a uma haste submetida a esforços de flexão e *coluna* ou *pilar* ao elemento que, embora geometricamente seja semelhante, é submetido a esforços axiais. Da mesma forma, em engenharia mecânica, componente similar submetido a flexão e torção é conhecido como *eixo*, enquanto que os *rotores* são submetidos a rotação, flexão, torção e cargas axiais. Apesar de suas diferenças construtivas, de uso e de características geométricas, principalmente da sua seção transversal, todos estes componentes compartilham a propriedade geométrica que ter uma das dimensões (comprimento) sensivelmente maior que as outras duas.

Neste capítulo analisaremos o comportamento mecânico de uma haste quando submetida a esforços transversais e momentos fletores, isto é, vigas. Estes esforços não provocam (quando os deslocamentos e deformações do componente são pequenas) esforços resultantes axiais, que já foram vistos no modelo de barra. Posteriormente, veremos como acoplar os dois fenômenos, construindo um modelo que é capaz de representar esforços transversais e axiais simultaneamente, permitindo a simulação de estruturas reticuladas planas com transmissão de esforços de flexão.

Começamos pelo estudo do modelo conhecido como **modelo de viga delgada** ou **viga de Euler-Bernoulli**. Este modelo é o mais simples e utilizado, dentre vários outros existentes.

Como já apontado, uma viga, assim como uma barra, é um corpo sólido tridimensional que possui uma dimensão (comprimento), apreciavelmente maior que as outras duas (altura e largura ou diâmetro). Devido a esta característica, o comportamento mecânico da viga sob carregamentos transversais ao seu eixo longitudinal possui um padrão particular. O modelo de viga, buscando simular tal padrão, é construído baseado na abordagem de mecânica dos sólidos tridimensional junto a hipóteses adicionais que se ajustam a esta situação específica e ao mesmo tempo simplificam as equações diferenciais envolvidas.

Para a análise de vigas, inicialmente considera-se um sistema de eixos cartesianos, onde o eixo  $x$  estende-se ao longo da extensão da viga, passando pelo centroide de cada seção transversal. Os demais eixos são paralelos à seção transversal, tem origem no centroide, isto é, devem ser **eixos centroidais**. Além disso, esses eixos são requeridos serem **eixos principais de inércia da seção**, isto é, são eixos tais que o produto de inércia da seção é nulo:  $I_{yz} \equiv \int_A yz \, dA = 0$ . O motivo dessas restrições pode ser visto em textos padrão de resistência dos materiais. Pode-se lembrar que eles são necessárias para garantir a satisfação das equações de equilíbrio num segmento de viga sob flexão. Outras hipóteses são listadas abaixo.

- **Hipótese geométrica.** Uma vez posicionado o sistema de eixos, a viga pode ser representada por uma linha de referência ao longo do eixo  $\bar{x}$  e uma seção transversal que possui área  $A$  e momento de inércia  $I_{zz}$  em relação ao eixo  $\bar{z}$ . (Como estaremos inicialmente tratando de flexão plana, simplificaremos a notação do momento inércia usando apenas  $I$ .) Num caso mais geral, estes parâmetros são variáveis ao longo da viga possibilitando definir funções  $A(\bar{x})$  e  $I(\bar{x})$ .

Outra hipótese importante é admitir que o comprimento é muito maior que as dimensões

linha de referência, é (Figura 6.1):

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{Bmatrix} \bar{u}_x(\bar{x}, y, z) \\ \bar{u}_y(\bar{x}, y, z) \\ \bar{u}_z(\bar{x}, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{d\bar{u}_y(\bar{x})}{d\bar{x}}\bar{y} \\ \bar{u}_y(\bar{x}) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.1)$$

O campo de deformação que este deslocamento provoca pode ser calculada pela expressão (3.29). A única componente de deformação não nula é a deformação axial  $\varepsilon_{\bar{x}}$ :

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{d\bar{u}_x}{d\bar{x}} = \frac{d}{d\bar{x}} \left( -\frac{d\bar{u}_y(\bar{x})}{d\bar{x}}\bar{y} \right) = -\frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \bar{x}^2} \bar{y} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{\bar{x}} = -\frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \bar{x}^2} \bar{y}} \quad (6.2)$$

## 6.2 Equação diferencial de equilíbrio em vigas

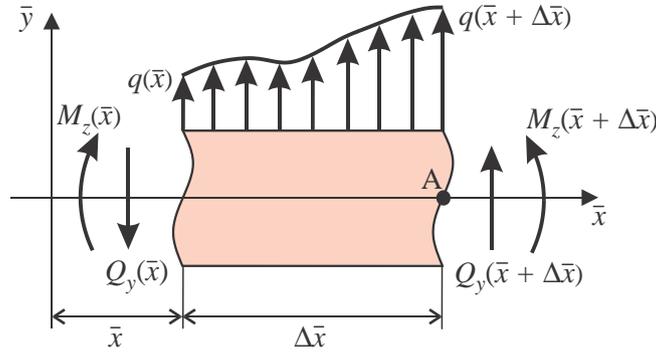


Figura 6.2: Esforços e carregamento distribuído num segmento de viga.

Observemos o segmento de viga de comprimento  $\Delta\bar{x}$  mostrado na Figura 6.2. Considerando que qualquer porção da viga se encontra em equilíbrio dinâmico, a região em estudo deve satisfazer a equação  $\Sigma F_y = \ddot{u}_y \Delta m$ , onde  $\ddot{u}_y$  é a aceleração transversal do segmento e  $\Delta m$  é sua massa, dada em termos da densidade  $\rho$  por  $\Delta m = \rho A \Delta\bar{x}$ . Então,

$$-\bar{Q}_y(\bar{x}) + \bar{Q}_y(\bar{x} + \Delta\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \Delta\bar{x}} q(\check{x}) d\check{x} = \rho A \ddot{u}_y \Delta\bar{x}, \quad (6.3)$$

onde  $\bar{Q}_y(\bar{x})$  é a o **esforço cortante** na seção de coordenada  $\bar{x}$  e  $q(\bar{x})$  é a carga transversal distribuída por unidade de comprimento. Aproximando o cortante por uma série de Taylor em torno do ponto  $\bar{x}$ , tem-se

$$\bar{Q}_y(\bar{x} + \Delta\bar{x}) = \bar{Q}_y(\bar{x}) + \frac{d\bar{Q}_y}{d\bar{x}}(\bar{x})\Delta\bar{x} + O(\Delta\bar{x}^2), \quad \text{onde} \quad \lim_{\Delta\bar{x} \rightarrow 0} \frac{O(\Delta\bar{x}^2)}{\Delta\bar{x}} = 0. \quad (6.4)$$

O **teorema de valor médio** do cálculo postula que existe uma posição  $\xi$  no intervalo  $(\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x})$  tal que a integral das cargas distribuídas é igual ao produto do valor da carga calculado neste ponto pelo comprimento do intervalo de integração:

$$\int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \Delta\bar{x}} q(\check{x}) d\check{x} = q(\xi) \Delta\bar{x}. \quad (6.5)$$

Substituindo esta relação em (6.3) e usando (6.4) temos

$$-\bar{Q}_y(\bar{x}) + q(\xi) \Delta\bar{x} + \bar{Q}_y(\bar{x}) + \frac{d\bar{Q}_y}{d\bar{x}}\Delta\bar{x} + O(\Delta\bar{x}^2) = \rho A \ddot{u}_y \Delta\bar{x}. \quad (6.6)$$

Substituindo em (6.14) obtém-se

$$\bar{M}_z(\bar{x}) = \int_A E \frac{d^2 \bar{u}_y}{d\bar{x}^2} \bar{y}^2 dA = E \frac{d^2 \bar{u}_y}{d\bar{x}^2} \int_A \bar{y}^2 dA \rightarrow \boxed{\bar{M}_z(\bar{x}) = EI_{zz} \frac{d^2 \bar{u}_y}{d\bar{x}^2}} \quad (6.16)$$

onde  $I_{zz}$  é o momento de inércia da seção transversal da viga em relação ao eixo  $\bar{z}$ .<sup>1</sup> Substituindo nas equações de equilíbrio dinâmicos (6.7) e (6.12) temos  $q(\bar{x}) = -\frac{d\bar{Q}_y}{d\bar{x}} + \rho A \ddot{v}$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_y(\bar{x}) &= -\frac{d\bar{M}_z}{d\bar{x}} = -EI \frac{d^3 \bar{u}_y}{d\bar{x}^3}, \\ q(\bar{x}) &= -\frac{d\bar{Q}_y}{d\bar{x}} + \rho A \ddot{v} = EI \frac{d^4 \bar{u}_y}{d\bar{x}^4} + \rho A \ddot{u}_y, \end{aligned} \quad (6.17)$$

Num problema estático, a equação diferencial da curva elástica é

$$\boxed{EI \frac{d^4 \bar{u}_y(\bar{x})}{d\bar{x}^4} - q(\bar{x}) = 0} \quad (6.18)$$

Esta última expressão é conhecida como a equação diferencial de equilíbrio da viga ou **equação diferencial da curva elástica** da viga. Para obter a chamada *curva elástica*, isto é, a função deslocamento  $\bar{u}_y(\bar{x})$ , deve-se resolver esta equação diferencial junto com as devidas **condições de contorno**. Isto envolve um processo de integração que, neste caso, devido a simplicidade da equação, pode ser feito de forma analítica:

$$EI \bar{u}_y(\bar{x}) - q \frac{\bar{x}^4}{4!} + C_1 \frac{\bar{x}^3}{3!} + C_2 \frac{\bar{x}^2}{2!} + C_3 \bar{x} + C_4 = 0, \quad (6.19)$$

cujas constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são facilmente determinadas com o auxílio das condições de contorno.

### 6.3 Matriz de rigidez para flexão de vigas - Método direto

Nesta seção vamos deduzir a matriz de rigidez do modelo de flexão de vigas, buscando relacionar de forma direta deslocamentos e esforços através da solução analítica da curva elástica de um segmento de viga obtida na seção anterior. Por este motivo o procedimento descrito aqui se denomina *abordagem direta*. De fato, diversos outros processos podem ser usados para a determinação das matrizes. Por exemplo, via princípio dos trabalhos virtuais ou pelo princípio da energia potencial mínima. Alguns desses métodos serão utilizados nos capítulos seguintes, quando do tratamento de problemas mais complexos como no caso de elementos finitos de elasticidade ou de placas, onde o método direto se torna inviável.

Consideramos aqui um elemento finito de viga, de comprimento  $L$ , descrito por dois nós, referidos como nós 1 e 2, (ou ainda I e J), como na Figura 6.3. O método direto é baseado no fato que a curva elástica do elemento de viga é completamente determinada por quatro condições de contorno que podem ser dadas pelos deslocamentos dos nós,  $\bar{u}_{y1} = \bar{u}_y(0)$ ,  $\bar{u}_{y2} = \bar{u}_y(L)$ , e pela rotação da linha tangente à curva elástica nestes pontos:  $\bar{\theta}_1 = d\bar{u}_y(0)/d\bar{x}$  e  $\bar{\theta}_2 = d\bar{u}_y(L)/d\bar{x}$ .

Neste desenvolvimento consideramos inicialmente, por simplicidade, que o carregamento transversal distribuído aplicado na viga é nulo, isto é, estamos considerando apenas carregamentos concentrados de força transversal e de momento fletor aplicados nos nós, as chamadas cargas nodais. (Posteriormente o tratamento de cargas distribuídas será introduzido.) Além disso, temos uma hipótese adicional, a de que o comportamento da viga é linear.

Uma função de deslocamento arbitrário no elemento pode ser obtido pela soma de quatro funções de deslocamentos padrão mais simples. Cada função de deslocamento padrão  $\phi_j(\bar{x})$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , é obtida como a solução de curva elástica de uma viga que tem um dos deslocamentos ou rotações

<sup>1</sup>Para simplificar a notação, em geral usaremos apenas  $I$  em lugar de  $I_{zz}$ .

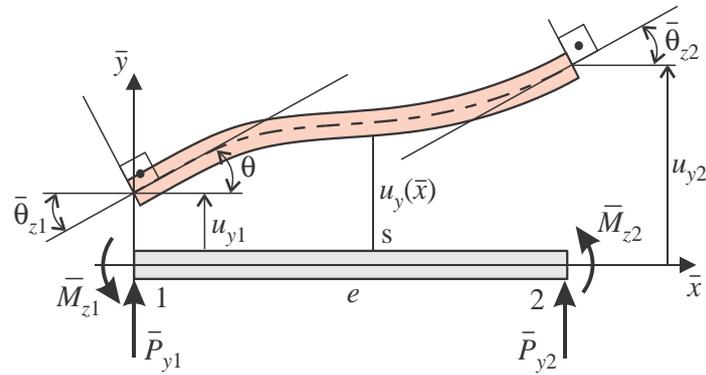


Figura 6.3: Deslocamentos e esforços nodais num elemento de viga.

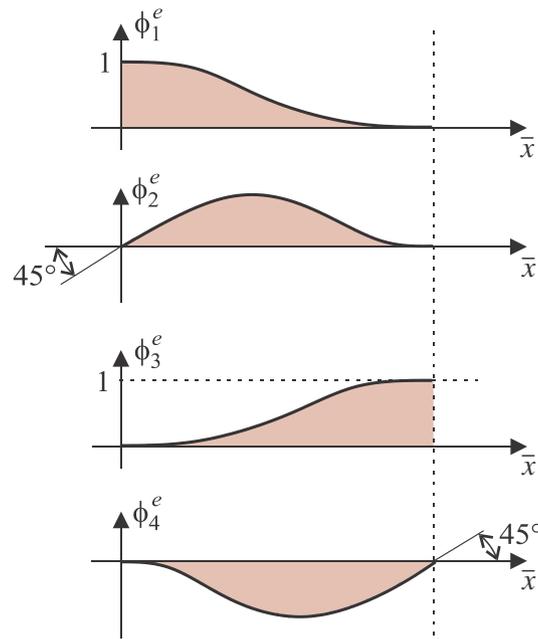


Figura 6.4: Funções de interpolação cúbicas 1D de viga de Euler.

nodais prescritos como igual à unidade em um dos nós e prescrevendo os deslocamentos e rotações nos demais nós como nulos, como mostrado na Figura 6.4b, onde são ilustradas as quatro funções possíveis. Por exemplo, se apenas o deslocamento no nó 1 é unitário, a curva elástica produz a função  $\phi_1(\bar{x})$ . De forma análoga, para deslocamentos unitários no nó 2, e para rotação unitária nos nós 1 e 3, as correspondentes curvas elásticas produzem as demais funções  $\phi_j(\bar{x})$  mostradas na Figura 6.4. A dedução dessas quatro funções é feita na próxima seção. Essas funções padrão, no âmbito do método de elementos finitos, são denominadas **funções de interpolação** ou **funções de forma**.

Uma curva elástica para um problema genérica de flexão de vigas, submetida a carregamento arbitrário (de cargas concentradas) e com apoios arbitrários nas duas extremidades, pode ser decomposta como uma combinação linear das funções de forma  $\phi_j(\bar{x})$ , isto é

$$\bar{u}_y(\bar{x}) = \bar{u}_{y1}\phi_1(\bar{x}) + \bar{\theta}_{z1}\phi_2(\bar{x}) + \bar{u}_{y2}\phi_3(\bar{x}) + \bar{\theta}_{z2}\phi_4(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in [0, L], \quad (6.20)$$

onde  $\phi_1(\bar{x})$ ,  $\phi_2(\bar{x})$ ,  $\phi_3(\bar{x})$  e  $\phi_4(\bar{x})$ , são as curvas elásticas padrão (funções de forma), e  $\bar{u}_{y1}$ ,  $\theta_1$ ,  $\bar{u}_{y2}$  e  $\theta_2$ , são os deslocamentos e rotações nodais do deslocamento no problema, (também simplesmente chamados **deslocamentos nodais** do elemento). Em (6.20) as funções  $\phi_i(\bar{x})$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , são conhecidas e, durante o processo de solução, as incógnitas do problema são os deslocamentos nodais

que definirão a solução. Entretanto, neste ponto, ainda falta determinar as funções  $\phi_i(\bar{x})$ , assim como os esforços associados a estas, o que é feito na seção a seguir.

### 6.3.1 Curvas elásticas para deslocamentos unitários

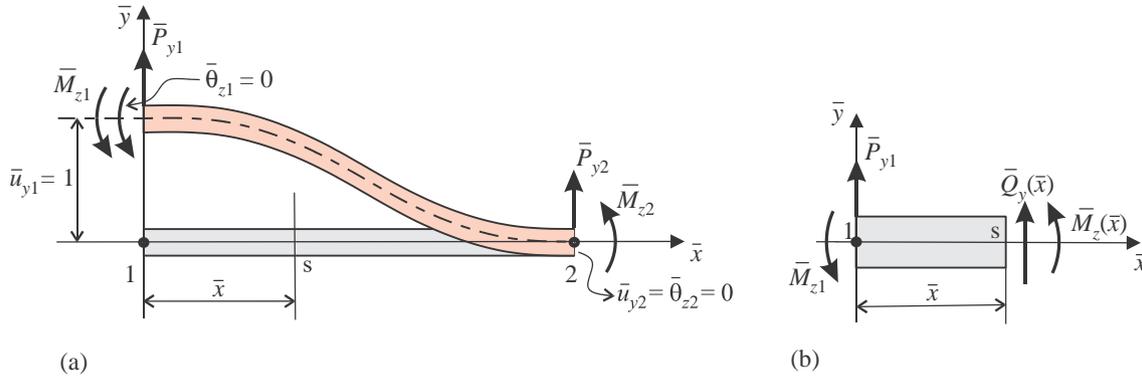


Figura 6.5: Diagrama de corpo livre para o lado esquerdo de um corte numa seção arbitrária  $s$ , e os esforços  $\bar{Q}_y(\bar{x})$  e  $\bar{M}_z(\bar{x})$ .

Vejamos inicialmente como obter a solução da primeira função, mostrada na Figura 6.4(b) e detalhada na Figura 6.5. As condições de contorno deste problema são:

$$\bar{u}_{y1} = \bar{u}_y(0) = 1, \quad \bar{\theta}_{z1} = \frac{d\bar{u}_y}{d\bar{x}}(0) = 0, \quad (6.21)$$

$$\bar{u}_{y2} = \bar{u}_y(L) = 0, \quad \bar{\theta}_{z2} = \frac{d\bar{u}_y}{d\bar{x}}(L) = 0. \quad (6.22)$$

Faz-se um corte numa seção genérica  $s$  do elemento, na coordenada local  $\bar{x}$ . Indicam-se os esforços nodais atuantes no nó 1 e os esforços na seção genérica, como indicado na Figura 6.5.<sup>2</sup> Fazendo equilíbrio de momentos temos uma expressão para o esforço de momento  $\bar{M}_z(\bar{x})$  na seção em termos dos valores nodais, isto é,  $\bar{M}_z(\bar{x}) = \bar{P}_{y1}\bar{x} - \bar{M}_{z1}$ . Da equação diferencial de equilíbrio, eq. (6.16) temos então que

$$EI \frac{d^2\bar{u}_y}{d\bar{x}^2} = \bar{M}_z(\bar{x}) = \bar{P}_{y1}\bar{x} - \bar{M}_{z1}. \quad (6.23)$$

Integrando duas vezes obtemos a solução

$$\begin{aligned} EI \frac{d\bar{u}_y}{d\bar{x}} &= \bar{P}_{y1} \frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{M}_{z1}\bar{x} + C_1, \\ EI \bar{u}_y(\bar{x}) &= \bar{P}_{y1} \frac{\bar{x}^3}{6} - \bar{M}_{z1} \frac{\bar{x}^2}{2} + C_1\bar{x} + C_2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Resta agora identificar os valores das quatro constantes,  $\bar{P}_{y1}$ ,  $\bar{M}_{z1}$ ,  $C_1$  e  $C_2$  com o uso das quatro condições de contorno disponíveis. Para  $\bar{x} = 0$ , e  $\bar{x} = L$  temos que a rotação  $d\bar{u}_y/d\bar{x}$  é nula. Da condição (6.21)<sub>2</sub> obtemos que  $C_1 = 0$  e usando (6.24)<sub>1</sub> temos  $\bar{M}_{z1} = \bar{P}_{y1}L/2$ . Substituindo obtemos

$$EI \bar{u}_y(\bar{x}) = \bar{P}_{y1} \frac{\bar{x}^3}{6} - \bar{P}_{y1} \frac{\bar{x}^2}{4}L + C_2.$$

<sup>2</sup>Observe os esforços indicados nas Figuras 6.2 e 6.5. Em ambos os casos o sentido mostrado indica valores positivos tanto para forças cortantes quanto para momentos, embora no nó 1 as orientações estejam invertida. Ocorre que na primeira figura estão indicadas as orientações usuais na teoria de resistência dos materiais, usada para obter, por exemplo, a equação diferencial de equilíbrio (6.18). Por outro lado, a Figura 6.5 indica a convenção usada para tratar valores nodais em elementos finitos. A convenção diz que valores nodais são positivos se associados a vetores orientados no sentido positivo dos eixos cartesianos. Assim, tanto no nó 1 quanto no 2, o cortante e momento nodais apontam para o lado positivo de  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$ .

o modelo de **flexão plana**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} & -12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} \\ 6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} & -6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} \\ -12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} & 12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} \\ 6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} & -6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Observemos que a matriz é simétrica, da mesma forma que a matriz de rigidez do modelo de barras, e também singular.

### 6.3.3 Exemplo 6.1 - Viga em balanço

Consideremos um exemplo simples, onde a viga ilustrada na Figura 6.6 é simulada com um único elemento engastado no primeiro nó. A viga possui as seguintes características: comprimento  $L = 100$  mm, seção transversal com dimensões  $h = 4$  mm e  $b = 2$  mm, momento de inércia  $I = 32/3$  mm<sup>4</sup> e módulo de elasticidade  $E = 2,0 \cdot 10^5$  N/mm<sup>2</sup>.

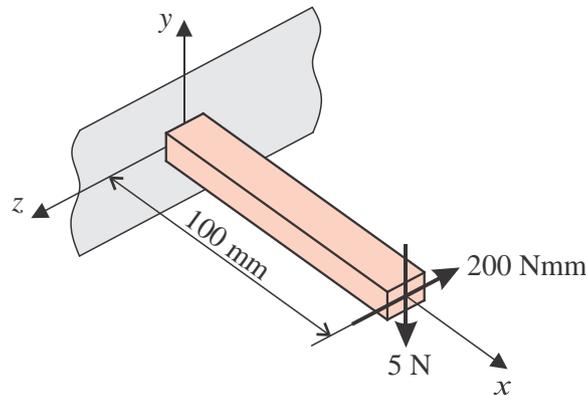


Figura 6.6: Dados do Exemplo 6.1.

*Solução:*

A Figura 6.7 mostra o modelo de elementos finitos para o problema, onde a viga foi modelada por apenas um elemento. Podem-se observar os nós globais  $(\bar{u}_{y1}, \bar{\theta}_{z1}, \bar{u}_{y2}, \bar{\theta}_{z2})$ , as forças e momentos aplicados  $(F_{y1}, M_{z1}, F_{y2}, M_{z2})$  e as reações incógnitas  $R_{y1}$  e  $R_{M1}$  no nó 1. Dos dados do problema na figura (a), as forças e momentos aplicados são  $F_{y1} = M_{z1} = 0$  e  $F_{y2} = -5$  N e  $M_{z2} = -200$  Nmm. Substituindo estes dados na matriz (6.31), o sistema de equações fica

$$\begin{bmatrix} 25,6 & 1280 & -25,6 & 1280 \\ 1280 & 85333 & -1280 & 42667 \\ -25,6 & -1280 & 25,6 & -1280 \\ 1280 & 42667 & -1280 & 85333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{y1} = 0 \\ \bar{\theta}_{z1} = 0 \\ \bar{u}_{y2} \\ \bar{\theta}_{z2} \end{Bmatrix} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R} \quad (6.32)$$

onde  $\mathbf{F}^a + \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} F_1 = 0 \\ M_{z1} = 0 \\ F_2 = -5 \\ \bar{M}_{z2} = -200 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{y1} = ? \\ R_{M1} = ? \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ .

Nesta equação já foram indicadas as condições de contorno que, neste caso, impõem deslocamento e rotação nulos no nó 1 (condição de engaste). Ao mesmo tempo essas condições introduzem duas

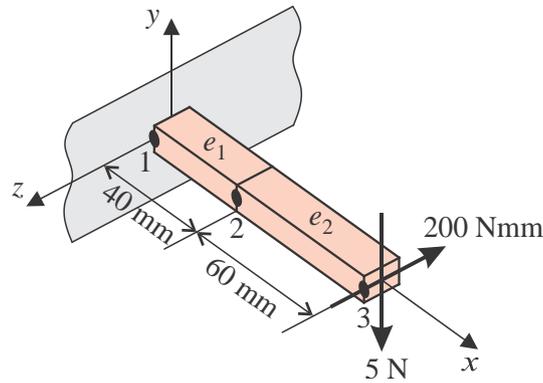


Figura 6.8: Dados do Exemplo 6.2.

este problema são:

Nó	$x$ [mm]
1	0
2	40
3	100

Elem.	Nó 1	Nó 2
1	1	2
2	3	2

Elem.	$E$	$N/\text{mm}^2$	$I$ [mm <sup>4</sup> ]
1	$2,0 \times 10^5$		$32/3$
2	$2,0 \times 10^5$		$32/3$

Nó	$\bar{u}_y$	$\bar{\theta}_z$
1	1	2
2	3	4
3	5	6

Elem.	Nó 1	Nó 2
	$\bar{u}_y$	$\bar{\theta}_z$
1	1	2
2	3	4
2	5	6

A construção do sistema de equações de equilíbrio se fundamenta em dois conceitos: no equilíbrio de cada um dos nós, e no equilíbrio de cada elemento. Nos nós podem ser aplicadas forças conhecidas são  $F_{y1}$ ,  $M_{z1}$ ,  $F_{y2}$ ,  $M_{z2}$ ,  $F_{y3}$ ,  $M_{z3}$  e atuam reações incógnitas  $R_{y1}$  e  $R_{M1}$  no nó 1. No exemplo, o equilíbrio dos nós fornece seis equações (Figura 6.9):

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{y1}^1 &= F_{y1} + R_{y1}, \\
 \bar{M}_{z1}^1 &= M_{z1} + R_{M1}, \\
 \bar{P}_{y2}^1 + \bar{P}_{y2}^2 &= F_{y2}, \\
 \bar{M}_{z2}^1 + \bar{M}_{z2}^2 &= M_{z2}, \\
 \bar{P}_{y3}^2 &= F_{y3}, \\
 \bar{M}_{z3}^2 &= M_{z3}.
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Para os esforços os sub-índices indicam o número do nó global do elemento, e o sobre-índice indica o número do elemento. O lado esquerdo dessas equações são os esforços, e esses esforços se relacionam aos deslocamentos nodais pelas equações algébricas de equilíbrio dos elementos, que são:

$$\begin{aligned}
 \text{Elem. 1: } \mathbf{K}^1 \mathbf{U}^1 = \mathbf{F}^1 &\Rightarrow \mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_{y2} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{y1}^1 \\ \bar{M}_{z1}^1 \\ \bar{P}_{y2}^1 \\ \bar{M}_{z2}^1 \end{Bmatrix}, \\
 \text{Elem. 2: } \mathbf{K}^2 \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^2 &\Rightarrow \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{y2} \\ \theta_{z2} \\ u_{y3} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{y2}^2 \\ \bar{M}_{z2}^2 \\ \bar{P}_{y3}^2 \\ \bar{M}_{z3}^2 \end{Bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

Substituindo essas expressões para os esforços em (6.34), obtém-se as equações globais de equilíbrio

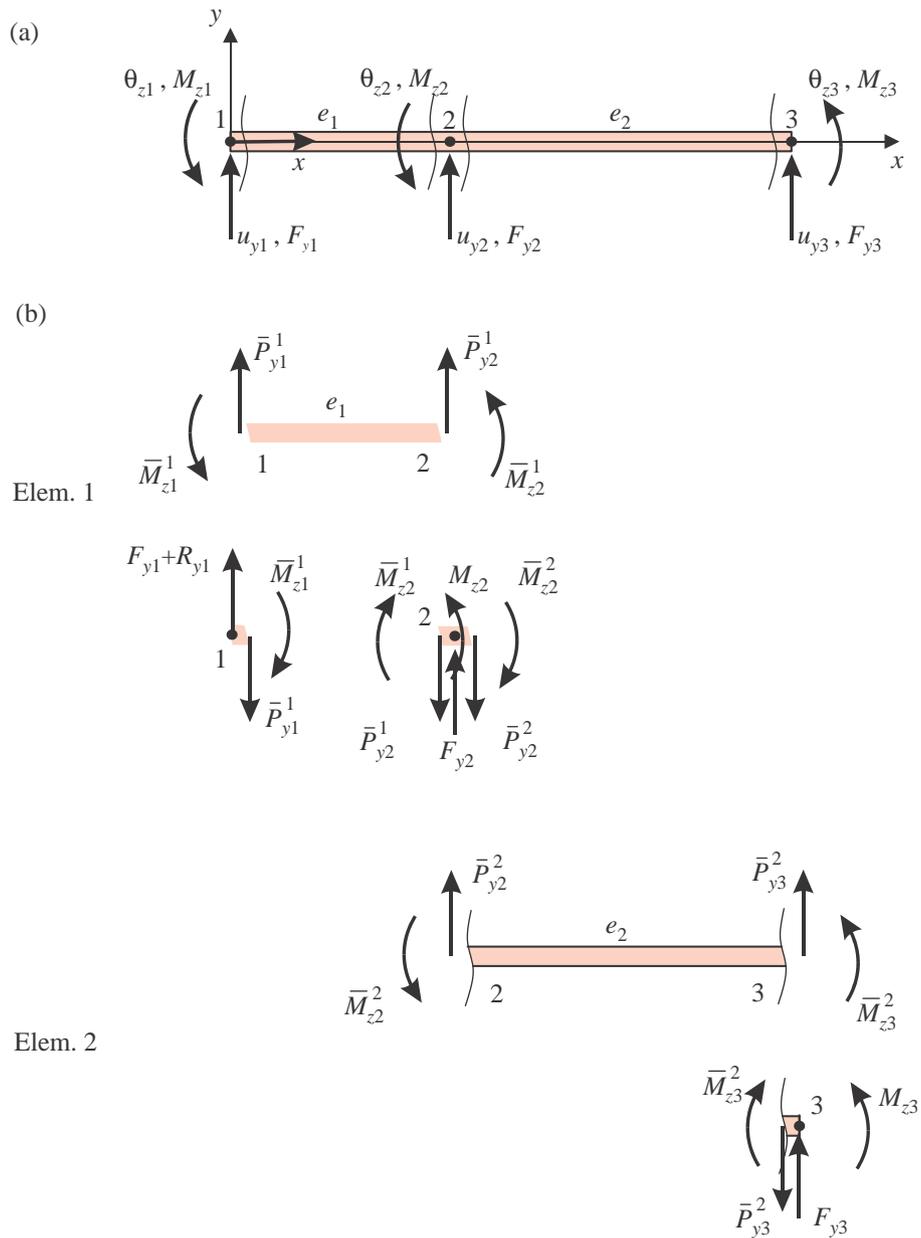


Figura 6.9: (a) Esforços nodais nos nós locais dos elementos do Exemplo 6.2. (b) equilíbrio dos nós globais e dos elementos.

e o sistema global de equações de equilíbrio, já eliminando os graus de liberdade restritos pelas condições de contorno, resulta em

$$\begin{bmatrix} 518,52 & -4444,4 & -118,52 & 3555,6 \\ -4444,4 & 3,5555 \times 10^5 & -3555,6 & 71111 \\ -118,52 & -3555,6 & 118,52 & -3555,6 \\ 3555,6 & 71111 & -3555,6 & 1,4222 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{y2} \\ \theta_{z2} \\ u_{y3} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -200 \end{Bmatrix}.$$

A solução deste sistema fornece os seguintes valores nodais de deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} u_{y2} \\ \theta_{z2} \\ u_{y3} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,2375 \text{ mm} \\ -1,125 \times 10^{-2} \text{ rad} \\ 1,25 \text{ mm} \\ -2,109 \times 10^{-2} \text{ rad} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} u_{y1} = 0, \\ \theta_{z1} = 0. \end{Bmatrix}.$$

### Observações

Podemos observar que os resultados são idênticos àqueles obtidos no exemplo anterior. O fato que o modelo de dois elementos do presente exemplo fornece, em forma direta, o deslocamento numa seção intermediária não é grande vantagem, dado que o mesmo valor pode ser obtido no exemplo anterior com um simples cálculo, a partir da equação da curva elástica do elemento, eq. (6.33). Em outras palavras, **no modelo de vigas com carregamento concentrado nos nós, (sem carga distribuída) os resultados do MEF são iguais à solução exata da equação diferencial.** Por isto não é preciso modelar uma viga com mais de um elemento para obter os resultados de forma exata (a menos que esta tenha seção transversal variável ou esteja submetida a carregamentos distribuídos). **Note que esta é uma situação particular dos elementos de barra, viga e alguns poucos outros. O método de elementos finitos, em geral, fornece apenas uma aproximação da solução exata.**

## 6.4 Aplicação de condições de contorno

O procedimento utilizado no capítulo de barras, e nos exemplos anteriores de vigas, para imposição das condições de contorno, pode ser sistematizado e ampliado para outros casos, gerando um procedimento padrão, válido para o método de elementos finitos em forma geral, isto é, aplicável à solução de qualquer problema na forma algébrica padrão  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ , de ordem  $N$ , independentemente de que o modelo envolva elementos de barras, vigas, placas, sólidos, ou qualquer outro.

Consideram-se os seguintes casos típicos de condições de contorno:

1.  $u_i = \bar{u}_i$ , onde  $\bar{u}_i$  é um valor conhecido. Esse é o caso de deslocamento prescrito num grau de liberdade  $j$ . Um caso particular bastante comum é  $\bar{u}_i = 0$ .
2.  $u_i = c_j u_j + c_k u_k + c_l u_l + \dots + c_p u_p$ , isto é,  $u_i$  é uma combinação linear de diversas outras componentes nodais. Essa condição é muito comum para impor condições como aquela ilustrada na Figura 10.1, onde um nó é obrigado a deslocar-se ao longo de uma direção predeterminada, tal que as componentes  $x$  e  $y$  do deslocamento não podem ser independentes, mas devem guardar a relação  $u_y = c u_x$ , onde  $c = \tan \phi$ .

Apenas o primeiro caso é tratado nesse capítulo, e os demais casos de restrição são detalhados no Capítulo 10.

### 6.4.1 Condição de contorno - caso $u_i = \bar{u}_i$

O procedimento consiste nas seguintes etapas.

O cálculo das reações é feito após a determinação dos deslocamentos  $\bar{\mathbf{U}}$ . Do sistema original,  $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R}$ , obtém-se as reações por

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}^a \quad (6.42)$$

onde  $\mathbf{F}^a$  é o vetor de forças aplicadas conhecidas. Ele será não nulo apenas nos graus de liberdade prescritos.

## 6.5 Viga com carregamento axial e flexão plana

Nesta seção vamos construir um modelo de viga adequado à simulação do comportamento de elementos submetidas simultaneamente tanto a esforços axiais quanto a transversais. É importante notar que, até este ponto, as hipóteses admitidas sobre geometria, deslocamentos e comportamento de material permitiram construir expressões que apresentam um comportamento mecânico desacoplado entre a parte axial (modelo de barras) e transversal (modelo de vigas): esforços axiais não produzem alterações na distribuição de esforços de flexão e vice-versa. Os deslocamentos são restritos a pequenos valores, a barra é reta e o material é isotrópico elástico-linear. Porém, se os deslocamentos forem maiores, se o material não for homogêneo-isotrópico (material composto, por exemplo) ou se a geometria não for reta (vigas curvas), os esforços de flexão podem induzir esforços axiais, assim como uma tração pode dar origem a deformações de flexão. Não sendo este o caso, podemos formular o equilíbrio de uma haste que se estende ao longo do eixo coordenado local  $\bar{x}$ , como na Figura 6.10, usando as expressões de barra e viga analisadas previamente de forma separada:

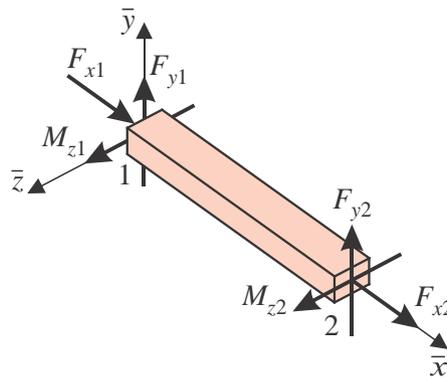


Figura 6.10: Definição de sinais para esforços nodais em elemento plano de viga.

$$\text{Barra} \quad \rightarrow \quad \frac{AL}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x1} \\ \bar{u}_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{x1} \\ \bar{P}_{x2} \end{Bmatrix}, \quad (6.43)$$

$$\text{Viga} \quad \rightarrow \quad \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{y1} \\ \bar{\theta}_{z1} \\ \bar{u}_{y2} \\ \bar{\theta}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{P}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix}. \quad (6.44)$$

Juntando essas seis equações numa matriz única, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x1} \\ \bar{u}_{y1} \\ \bar{\theta}_{z1} \\ \bar{u}_{x2} \\ \bar{u}_{y2} \\ \bar{\theta}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{x1} \\ \bar{P}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{P}_{x2} \\ \bar{P}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix}. \quad (6.45)$$

ou, em forma compacta,  $\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}}$ . A matriz nessa expressão é a matriz de rigidez de um elemento da viga que considera carregamentos axiais e transversais. O único inconveniente deste sistema de equilíbrio é que está escrito para uma posição particular, onde o eixo  $\bar{x}$  da viga coincide com a coordenada cartesiana global  $x$ . Logo, a modelagem de uma estrutura plana constituída por vigas (um pórtico plano, por exemplo) requer que primeiramente se obtenha a equação matricial de cada elemento escrita em relação ao sistema global de coordenadas.

Considere um **sistemas de coordenadas local**  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  e um **global**  $xyz$ , como na Figura 6.11. O sistema local tem o eixo  $\bar{x}$  orientado ao longo do elemento, com origem no nó local 1, e orientado na direção do nó 2. Os eixos local  $\bar{z}$  e global  $z$  são coincidentes, de forma que o sistema local é obtido a partir do global por uma rotação plana em torno do eixo  $z$ , do ângulo  $\alpha$ .

Para se obter uma expressão da equação matricial de equilíbrio de um elemento de viga arbitrariamente orientado no plano  $(x, y)$ , devemos fazer uso da mesma matriz de rotação utilizada no modelo de barras, com a única diferença que o grau de liberdade correspondente à rotação da seção não precisa ser rotacionado, uma vez que esta grau de liberdade é orientado na direção do eixo  $z$ , o mesmo eixo em torno do qual o sistema de coordenadas é rotacionado.

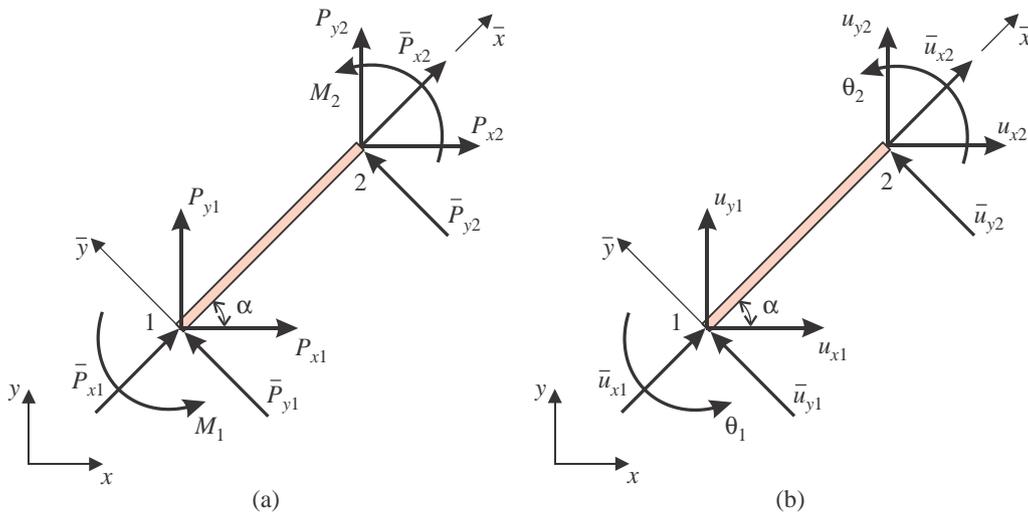


Figura 6.11: Deslocamentos e esforços em viga no plano.

Para efetuar a transformação das componentes será usada uma matriz de rotação similar àquela usada no modelo de barras em problemas coplanares. Esta matriz permite escrever as componentes dos deslocamentos no sistema local da da viga a partir dos deslocamentos no sistema de referência global. Seja  $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2\}$  e  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  os vetores unitários do sistema local e global respectivamente e sejam  $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\theta}\}$  e  $\{u, v, \theta\}$  as componentes de deslocamento de um nó da viga no sistema local e global de

## 6.6 Vetor força consistente para carga distribuída

Até esse ponto, consideraram-se apenas cargas concentradas, cuja incorporação às equações de equilíbrio é feita por simples adição no grau de liberdade adequado do vetor força aplicada  $\mathbf{F}^a$ . No caso de cargas transversais distribuídas sobre o elemento, torna-se necessário o uso de um procedimento de cálculo para a identificação dos valores nodais de carga a serem incorporados a  $\mathbf{F}^a$ . Apresentaremos aqui apenas os resultados, e deixamos sua dedução (que é baseada no princípio dos trabalhos virtuais), para a seção 18.5, página 499m, junto aos efeitos dinâmicos.

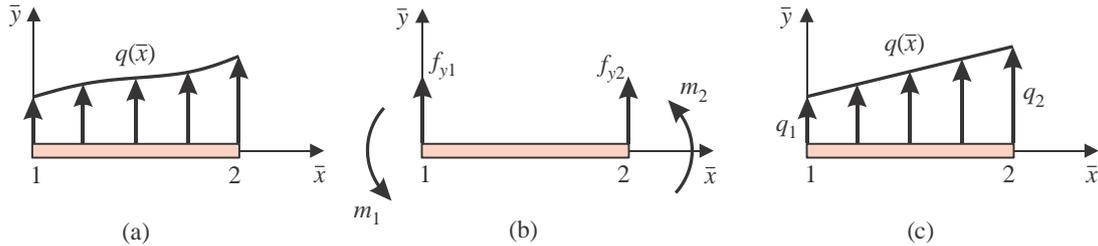


Figura 6.13: (a) Carga transversal distribuída arbitrária sobre um elemento de viga; (b) forças nodais equivalentes; (c) carga com variação linear.

Considere um elemento de viga submetido a uma **carga transversal arbitrária**  $q(\bar{x})$  como na Figura 6.13. O vetor de cargas nodais equivalentes a essa carga distribuída é obtida a partir das funções de forma  $\phi(\bar{x})$  (dadas em (6.28)), por

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \begin{Bmatrix} f_{y1} \\ m_1 \\ f_{y2} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \int_{\bar{x}=0}^L q(x) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} d\bar{x} \quad (6.52)$$

onde  $f_{y1}$ ,  $m_1$ ,  $f_{y2}$  e  $m_2$  são as forças equivalentes, como ilustradas na Figura 6.13b. Esse vetor deve ser sobreposto aos vetores dos demais elementos e às forças concentradas, somando todas as forças aplicadas a cada nó global.

No caso particular de **carga variando linearmente** ao longo do elemento, como na Figura 6.13c, efetuando as operações para  $q(\bar{x}) = q_1(L - \bar{x})/L + q_2(\bar{x}/L)$ , obtém-se o vetor de forças equivalentes do elemento como:

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \begin{Bmatrix} f_{y1} \\ m_1 \\ f_{y2} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{60} \begin{Bmatrix} 3(7q_1 + 3q_2) \\ L(3q_1 + 2q_2) \\ 3(3q_1 + 7q_2) \\ -L(2q_1 + 3q_2) \end{Bmatrix} \quad (6.53)$$

onde  $q_1$  e  $q_2$  são os valores nodais da carga distribuída. No caso final de **carga uniforme**,  $q(x) = q_0$ , tem-se

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \begin{Bmatrix} f_{y1} \\ m_1 \\ f_{y2} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{q_0 L}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} \quad (6.54)$$

### 6.6.1 Rotação do vetor força para uso em elementos inclinados

Todo o desenvolvimento acima é restrito ao sistema local de coordenadas do elemento. Se o elemento estiver rotacionado em relação ao sistema global, como na Figura 6.11, o vetor força consistente no sistema local do elemento, eqs. (6.52)-(6.54), precisa ser rotacionados ao sistema global. Isso é feito

como na seção 6.5, equação (6.47). Primeiro, o vetor (6.52) precisa ser expandido de forma a incluir as forças axiais. No caso de ausência de forças axiais distribuídas, tem-se o vetor local como:

$$\bar{\mathbf{F}}^e \equiv \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x1} \\ \bar{f}_{y1} \\ \bar{m}_{z1} \\ \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{y2} \\ \bar{m}_{z2} \end{Bmatrix}^e = \int_{x=0}^L q(x) \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_1 \\ \phi_1 \\ 0 \\ \phi_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} dx \quad (6.55)$$

Em seguida, o sistema local é rotacionado às direções globais por  $\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^{eT} \bar{\mathbf{F}}^e$  usando a matriz de rotação plana (6.46). Em forma aberta, no **caso particular de rotação plana**, essa relação fica

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x1} \\ \bar{f}_{y1} \\ \bar{m}_{z1} \\ \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{y2} \\ \bar{m}_{z2} \end{Bmatrix}^e \quad \text{isto é, } \mathbf{F}^e = \mathbf{R}^{eT} \bar{\mathbf{F}}^e \quad (6.56)$$

onde  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$ ,  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação,  $\alpha$  é o ângulo que o eixo local  $\bar{x}$  faz como o global  $x$ .  $\mathbf{F}^e$  e  $\bar{\mathbf{F}}^e$  são o vetor de força consistente do elemento no sistema global e no sistema local, respectivamente. Observe que a matriz de rotação é a mesma usada para rotacionar a matriz de rigidez do elemento. No caso geral de elemento com orientação arbitrária no espaço, não plana, a matriz de rotação é obtida da eq. (6.92).

No caso particular de **carga variando linearmente** ao longo do elemento, como na Figura 6.13c, o vetor de forças equivalentes no sistema local do elemento é dado em (6.53) e no sistema global fica:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{60} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(7q_1 + 3q_2) \\ L(3q_1 + 2q_2) \\ 0 \\ 3(3q_1 + 7q_2) \\ -L(2q_1 + 3q_2) \end{Bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}^e = \frac{L}{60} \begin{Bmatrix} -3(7q_1 + 3q_2)s \\ 3(7q_1 + 3q_2)c \\ L(3q_1 + 2q_2) \\ -3(3q_1 + 7q_2)s \\ 3(3q_1 + 7q_2)c \\ -L(2q_1 + 3q_2) \end{Bmatrix} \quad (6.57)$$

onde  $s = \sin \alpha$  e  $c = \cos \alpha$ .

## 6.7 Esforços e tensões nos elementos em problemas planos

Nos elementos de viga, é de interesse a determinação dos esforços e tensões máximas, além do deslocamento máximo. Essa determinação segue uma sequência de etapas, **aplicadas a cada elemento**, que segue um procedimento similar àquele visto no Exemplo 6.1. Deve-se ter claro que todos os cálculos de deformações, esforços e tensões **são feitos no sistema local de coordenada**

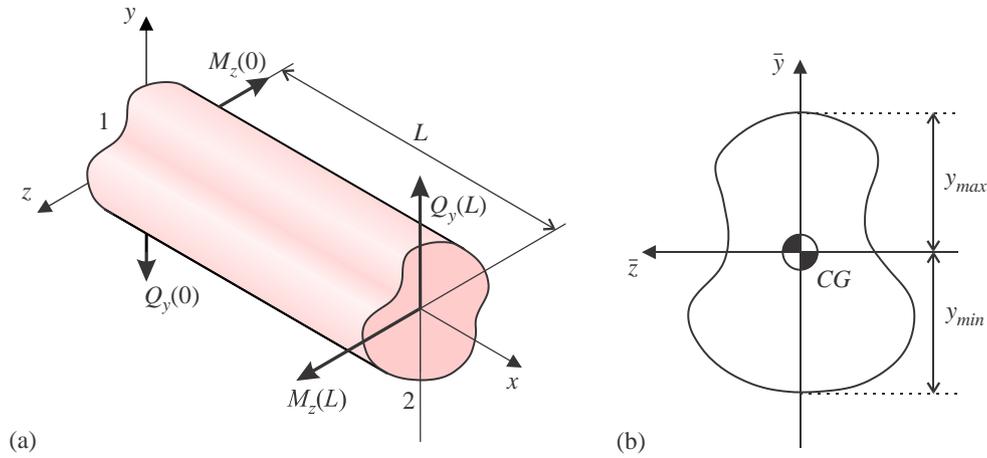


Figura 6.14: Esforços nodais positivos no elemento de viga e cotas na seção transversal para tensões normais.

e  $\bar{y}_{\min}$ , como visualizado na Figura 6.14 (em caso de seção simétrica,  $\bar{y}_{\max} = h/2$  e  $\bar{y}_{\min} = -h/2$ , onde  $h$  é a altura da seção transversal da barra, ao longo da direção  $y$ ). Observe que nesses dois pontos, as parcelas de tensão associadas a  $N_x$  são idênticas, mas as parcelas associadas a momento  $M_z$  são de mesmo módulo e sinais contrários. Tem-se assim as **tensões normais** nos dois nós do elemento:

$$\begin{array}{l}
 \text{Nó local 1} \\
 \text{Nó local 2}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{fibra superior:} \\
 \text{fibra inferior:} \\
 \text{fibra superior:} \\
 \text{fibra inferior:}
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \sigma_{\bar{x}}(0) = \frac{N_{\bar{x}}}{A} - \frac{M_{\bar{z}}(0)}{I_{\bar{z}\bar{z}}} \bar{y}_{\max}, \\
 \sigma_{\bar{x}}(0) = \frac{N_{\bar{x}}}{A} - \frac{M_{\bar{z}}(0)}{I_{\bar{z}\bar{z}}} \bar{y}_{\min}, \\
 \sigma_{\bar{x}}(L) = \frac{N_{\bar{x}}}{A} - \frac{M_{\bar{z}}(L)}{I_{\bar{z}\bar{z}}} \bar{y}_{\max}, \\
 \sigma_{\bar{x}}(L) = \frac{N_{\bar{x}}}{A} - \frac{M_{\bar{z}}(L)}{I_{\bar{z}\bar{z}}} \bar{y}_{\min},
 \end{array}
 \quad (6.65)$$

Os **esforços cortantes** no elemento são dados a partir da curva elástica ou do momento por  $Q_{\bar{y}} = -EI_{\bar{z}\bar{z}} d^3 \bar{v} / d\bar{x}^3 = dM_{\bar{z}} / d\bar{x}$ . Derivando (6.63) tem-se

$$\boxed{Q_{\bar{y}}(\bar{x}) = \frac{12}{L^3} (\bar{u}_{y2} - \bar{u}_{y1}) - \frac{6}{L^2} (\bar{\theta}_{z1} + \bar{\theta}_{z2})} \quad (6.66)$$

#### Observações:

1. Nota-se que o esforço cortante é uniforme no elemento, isto é, seus valores nodais são iguais,  $Q_{\bar{y}}(0) = Q_{\bar{y}}(L) = Q_{\bar{y}}(\bar{x})$ .
2. Deve-se enfatizar que os esforços obtidos nessa seção, de momentos e de cortante, são exatos se não houver carga distribuída transversal no elemento.
3. O cálculo das tensões usando a fórmula de flexão em (6.65) pressupõe que os eixos locais no elemento,  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$ , são **eixos principais de inércia da seção**.

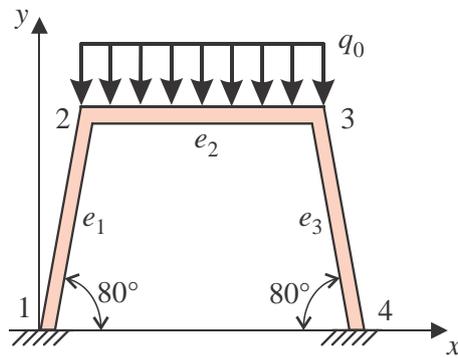


Figura 6.17: Pórtico plano do Exemplo 6.5.

de contorno. Numericamente, isto significa que os deslocamentos dos nós 1 e 3 sejam excluídos da contagem da tabela de graus de liberdade. A tabela indica assim que existem apenas seis graus de liberdade efetivos, que efetivamente comporão a matriz de rigidez global. Usando esta tabela e a tabela de conectividade, podemos construir a matriz ou tabela de indexação de cada elemento. Para isto identificamos os nós que formam o elemento e listamos os seus correspondentes graus de liberdade:

Tabela de Graus de Liberdade dos elementos

Elemento	$u_{x1}$	$u_{y1}$	$\theta_{z1}$	$u_{x2}$	$u_{y2}$	$\theta_{z2}$
1	-	-	-	1	2	3
2	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	-	-	-

Esta tabela será imprescindível para sobrepor corretamente as matrizes elementares na matriz global.

Calculando a partir destes parâmetros as matrizes de rigidez de cada elemento, temos:

- Elemento 1:

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 868450,75 & 4917357,2 & 983,52188 & -868450,75 & -4917357,2 & -983,52188 \\ 4917357,2 & 27889142 & 173,42122 & -4917357,2 & -27889142 & 173,42122 \\ 983,52188 & 173,42122 & 958,53988 & 983,52188 & -173,42122 & 479,26994 \\ -868450,75 & -4917357,2 & 983,52188 & 868450,75 & 4917357,2 & 983,52188 \\ -4917357,2 & -27889142 & -173,42122 & 4917357,2 & 27889142 & -173,42122 \\ -983,52188 & 173,42122 & 479,26994 & 983,52188 & -173,42122 & 958,53988 \end{bmatrix},$$

- Elemento 2:

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 621 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -621 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 6210 & 3105 & 0 & -6210 & 3105 \\ 0 & 3105 & 2070 & 0 & -3105 & 1035 \\ -621 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 621 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -6210 & -3105 & 0 & 6210 & -3105 \\ 0 & 3105 & 1035 & 0 & -3105 & 2070 \end{bmatrix},$$

- Elemento 3:

$$\mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} 868450,75 & -4917357,2 & 983,52188 & -868450,75 & -4917357,2 & -983,52188 \\ -4917357,2 & 27889142 & 173,42122 & -4917357,2 & -27889142 & 173,42122 \\ 983,52188 & 173,42122 & 958,53988 & 983,52188 & -173,42122 & 479,26994 \\ -868450,75 & 4917357,2 & 983,52188 & 868450,75 & 4917357,2 & 983,52188 \\ 4917357,2 & -27889142 & -173,42122 & 4917357,2 & 27889142 & -173,42122 \\ -983,52188 & 173,42122 & 479,26994 & 983,52188 & -173,42122 & 958,53988 \end{bmatrix},$$

Baseado na tabela de indexação, cada uma destas matrizes é inserida na matriz global, que possui a dimensão de número de graus de liberdade contabilizados pela tabela de indexação (no presente exemplo, são 6 graus de liberdade, aqueles correspondentes aos nós 2 e 3). Esta forma de trabalhar evita construir toda a matriz de rigidez (12 graus de liberdade correspondentes aos nós 1 a 4) para posteriormente eliminar aquelas equações associadas a graus de liberdade prescritos. No presente caso, ao tomar uma componente elementar cuja posição for nula na matriz de indexação (como por exemplo as componentes  $K_{11}^1, K_{12}^1, K_{13}^1, K_{14}^1, K_{15}^1, K_{16}^1$ ), esta é simplesmente não sobreposta no sistema. Após a inserção das matrizes elementares na matriz global, obtemos

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 62968451 & 4917357,2 & 983,52188 & -621 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 4917357,2 & 27895352 & 2931,5788 & 0 & -6210 & 3105 \\ 983,52188 & 2931,5788 & 3030,5399 & 0 & -3105 & 1035 \\ -621 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 62968451 & -4917357,2 & 983,52188 \\ 0 & -6210 & -3105 & -4917357,2 & 27895352 & -2931,5788 \\ 0 & 3105 & 1035 & 983,52188 & -2931,5788 & 3030,5399 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que os graus de liberdade nos apoios não foram incorporados, essa matriz é não singular.

O vetor de carga nodal equivalente ao carregamento distribuído no elemento 2 é obtido particularizando (6.57) para o caso  $q_1 = q_2 = q_o$  e orientação do elemento  $\alpha = 0$ :

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}^{e_2} = q_o \begin{Bmatrix} 0 \\ L/2 \\ L^2/12 \\ 0 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ -50/3 \\ 0 \\ -100 \\ 50/3 \end{Bmatrix}.$$

A solução do sistema  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$  fornece o vetor deslocamento que, anexado aos valores já conhecidos permite escrever a seguinte tabela de deslocamentos nodais do modelo:

Nó	$u_x$	$u_y$	$\theta_z$
1	0	0	0
2	$2,10158 \times 10^{-7}$ m	$-3,67462 \times 10^{-6}$ m	$-8,35238 \times 10^{-3}$ rad
3	$-2,10158 \times 10^{-7}$ m	$-3,67462 \times 10^{-6}$ m	$8,35238 \times 10^{-3}$ rad
4	0	0	0

## 6.8 Torção em Vigas

Nas seções anteriores foi vista a formulação de um elemento finito de viga que resiste a esforços axiais e transversais contidos num mesmo plano. Com este modelo é possível simular treliças ou pórticos planos, submetido a carregamentos coplanares. Porém se o carregamento possui componentes fora do plano ou a própria geometria da estrutura não for plana, e muito possível surjam esforços de torção. O modelo que considera os efeitos de flexão, de extensão e de torção atuando em conjunto permitirá simular estruturas de pórticos tridimensionais.

### 6.8.1 Equação diferencial de vigas em torção

A **hipótese fundamental** do modelo mais simples de torção (linear) é a de que *as seções perpendiculares ao eixo da viga permanecem planas após a deformação, e sofrem apenas uma rotação de corpo rígido, como se fosse um disco de espessura nula girando em torno do eixo*. **Esta hipótese só é válida em vigas de seção circular**. Entretanto o modelo é ainda utilizado em elementos finitos de seções não circulares através da incorporação de fatores de correção.

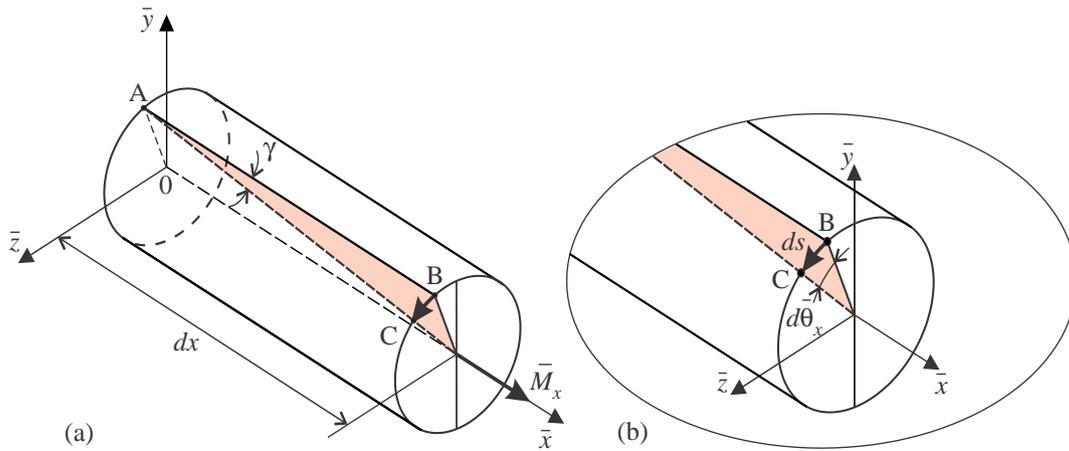


Figura 6.18: Ângulos de cisalhamento  $\gamma$  e de torção  $\theta$  num segmento de barra sob torção.

Considere um segmento de barra de seção circular como a da Figura 6.18a, onde duas seções transversais separadas por uma distância diferencial  $d\bar{x}$  sofrem uma rotação relativa  $d\bar{\theta}_x$ , provocando um cisalhamento  $\gamma$ . Considere-se um segmento axial AB definido numa coordenada radial constante  $r$ . Esse segmento deforma-se em uma curva helicoidal AC. O segmento AC tem comprimento diferencial  $ds$ . Esse segmento também define o ângulo de rotação relativa  $d\bar{\theta}_x$  por  $ds = r d\bar{\theta}_x$ . Então observa-se que, para pequenas deformações, o segmento  $ds$  entre os pontos pode ser visto como segmento de arco para dois arcos distintos ao mesmo tempo, o arco de raio  $r$  e o arco de raio  $d\bar{x}$ . Sumarizando, as seguintes relações geométricas podem ser formadas:

$$ds = r d\bar{\theta}_x = \gamma d\bar{x} \quad \rightarrow \quad \frac{d\bar{\theta}_x}{d\bar{x}} = \frac{\gamma}{r},$$

$$\text{tal que } \gamma(\bar{x}, r) = r \frac{d\bar{\theta}_x(\bar{x})}{d\bar{x}}. \quad (6.74)$$

Usando a Lei de Hooke 1D para cisalhamento puro, tem-se

$$\tau(\bar{x}, r) = G\gamma(\bar{x}, r) = Gr \frac{d\bar{\theta}_x(\bar{x})}{d\bar{x}}. \quad (6.75)$$

Aqui  $\bar{\theta}_x$  é o ângulo de rotação da seção transversal em torno do eixo axial da barra,  $\gamma$  é a deformação cisalhante,  $G$  o módulo elástico de cisalhamento,  $r$  a coordenada radial do ponto onde está se avaliando a deformação cisalhante e  $\tau$  a tensão cisalhante. Observe-se que a tensão e a deformação crescem linearmente com o raio, sendo nulos no centro e atingindo o valor máximo na superfície externa cilíndrica da barra.

O esforço de torção  $\bar{M}_x$  da seção é dado pela integral das tensões cisalhantes multiplicadas pelo raio  $r$  de atuação:

$$\bar{M}_x = \int_A \tau r dA = \int_A Gr^2 \frac{d\bar{\theta}_x}{d\bar{x}} dA, \quad (\text{usada a eq. (6.75)},$$

$$\bar{M}_x = G \frac{d\bar{\theta}_x}{d\bar{x}} \int_A r^2 dA = G \frac{d\bar{\theta}_x}{d\bar{x}} J \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_x = GJ \frac{d\bar{\theta}_x}{d\bar{x}}} \quad (6.76)$$

onde  $J$  é o momento polar de inércia da seção.

Consideramos aqui apenas o caso de uma barra submetida apenas a cargas concentradas de torção. (Momentos distribuídos podem facilmente ser incorporados.) A condição de equilíbrio de um segmento de haste de comprimento  $\Delta\bar{x}$  como na Figura 6.19, submetida a esforços de torção, é dada por:

é, é a solução exata, desde que a seção seja uniforme e o carregamento seja concentrado nos nós. Assim, o campo de rotações pode ser definido a partir de duas condições de contorno, que são as rotações dos extremos da barra.

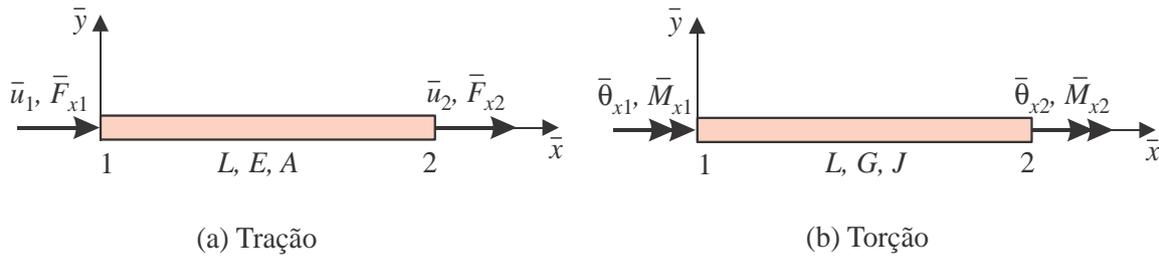


Figura 6.20: Rotações e esforços nodais de tração e de torção num elemento.

Consideramos um elemento de barra de comprimento  $L$ , como na Figura 6.20b, definido pelos nós 1 e 2, que sofrem rotações torcionais  $\bar{\theta}_{x1}$  e  $\bar{\theta}_{x2}$ , e onde os esforços de torção são  $\bar{M}_{x1}$  e  $\bar{M}_{x2}$  respectivamente. A derivada  $d\bar{\theta}_x/d\bar{x}$  pode ser calculada a partir da diferença entre as rotações dos nós 1 e 2:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_x}{d\bar{x}} &= \frac{\bar{\theta}_{x2} - \bar{\theta}_{x1}}{L}, \\ \bar{M}_{x1} &= GJ \left( \frac{\bar{\theta}_{x2} - \bar{\theta}_{x1}}{L} \right) \quad (\text{usada a eq. (6.76)}) \\ &= -\frac{GJ}{L}\bar{\theta}_{x2} + \frac{GJ}{L}\bar{\theta}_{x1}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Da condição de equilíbrio global do elemento de barra, temos que

$$\bar{M}_{x2} + \bar{M}_{x1} = 0,$$

e usando esta equação junto com (6.83), obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{GJ}{L}\bar{\theta}_{x2} - \frac{GJ}{L}\bar{\theta}_{x1} = \bar{M}_{x1}, \\ -\frac{GJ}{L}\bar{\theta}_{x2} + \frac{GJ}{L}\bar{\theta}_{x1} = \bar{M}_{x2}. \end{cases}$$

Colocando essas duas equações em forma matricial, temos a expressão algébrica do equilíbrio de um elemento finito de barra submetido a torção:

$$\boxed{\frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_{x1} \\ \bar{\theta}_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{M}_{x1} \\ \bar{M}_{x2} \end{Bmatrix}} \quad (6.84)$$

Estas são as equações de equilíbrio discretizadas, para a torção, e podem ser incorporadas aos modelos de tração e flexão com o intuito de formular o problema geral de uma viga no espaço submetida a um conjunto genérico de esforços.

## 6.9 Vigas no espaço tridimensional

Nesta seção vamos construir a matriz de rigidez de um elemento finito de viga que suporta esforços axiais, flexão em dois planos perpendiculares e torção. Em suma, os elementos necessários para a simulação de estruturas espaciais que transmitem esforços através dos seus nós. Consideremos para isto uma viga situada no seu sistema local de coordenadas, isto é, com a direção coordenada  $\bar{x}$  coincidente com o eixo da viga (Figura 6.21). **Note-se que os eixos locais  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  devem ser**

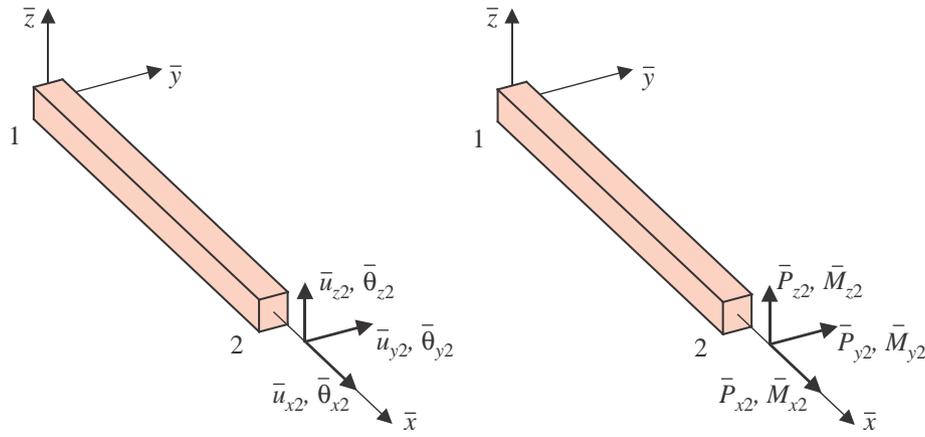


Figura 6.21: Deslocamentos e rotações nodais e forças e momentos nodais no elemento de viga 3D.

**eixos principais de inércia da seção.** Neste sistema, as equações de equilíbrio que a viga deve satisfazer são:

- Equilíbrio axial,

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x1} \\ \bar{u}_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{x2} \end{Bmatrix}. \quad (6.85)$$

- Equilíbrio à flexão no plano  $(\bar{x} - \bar{z})$ ,

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{y1} \\ \bar{\theta}_{z1} \\ \bar{u}_{y2} \\ \bar{\theta}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix}. \quad (6.86)$$

- Equilíbrio à flexão no plano  $(\bar{x} - \bar{y})$ ,

$$\frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{z1} \\ \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{u}_{z2} \\ \bar{\theta}_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{z1} \\ \bar{M}_{y1} \\ \bar{F}_{z2} \\ \bar{M}_{y2} \end{Bmatrix}. \quad (6.87)$$

- Equilíbrio à torção,

$$\frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_{x1} \\ \bar{\theta}_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{M}_{x1} \\ \bar{M}_{x2} \end{Bmatrix}. \quad (6.88)$$

Escrevendo todas estas equações numa única matriz, se tem o sistema de equações completo do elemento finito de viga no sistema local de coordenadas do elemento

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}}, \quad \text{onde} \quad (6.89)$$



de área  $A_s$ , mostrada na Figura 6.22a, em relação ao eixo principal  $z$ , e  $I_{zz}$  é o segundo momento da seção completa em relação ao eixo  $z$ .  $t$  é a espessura de material da seção na cota  $z = 0$ , e  $A$  é a área da seção completa. Lembrar que o momento estático de uma área em relação a um dado eixo pode ser calculado por  $\bar{P}_{z\max} = \bar{z} A_s$ , onde  $\bar{z}$  é a coordenada do centroide da área  $A_s$ .

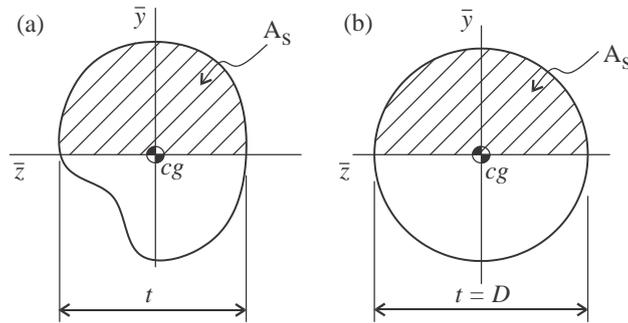


Figura 6.22: Parâmetros geométricos: (a) numa seção arbitrária e (b) numa seção circular, para o cálculo da tensão cisalhante máxima.

Para uma seção circular, textos de estática fornecem a expressão para o momento estático  $\bar{P}_s$  de uma área semicircular em relação à sua linha diametral como:

$$\bar{P}_s = \frac{2D}{3\pi} A_s, \quad (6.99)$$

onde  $A_s$  é área da região semi-circular. Isso permite o cálculo do momento do anel semicircular tubular da Figura 6.22b em relação ao eixo centroidal  $z$  como:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\max} &= \bar{P}_{ext} - \bar{P}_{int}, \\ &= \frac{2D_{ext}}{3\pi} \left( \frac{\pi D_{ext}^2}{8} \right) - \frac{2D_{int}}{3\pi} \left( \frac{\pi D_{int}^2}{8} \right). \end{aligned} \quad (6.100)$$

Finalmente, como a tensão cisalhante média na seção é  $\tau_{med} = Q_y/A$ , a expressão para o fator de cisalhamento na seção anelar fica

$$k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{med}} = \frac{\bar{Q}_y \bar{P}/I_{zz} t}{\bar{Q}_y/A} = \frac{A \bar{P}}{I_{zz} t}. \quad (6.101)$$

Note que na seção circular não é necessário distinguir entre os momentos de inércia nas direções  $y$  ou  $z$ , por serem idênticos.

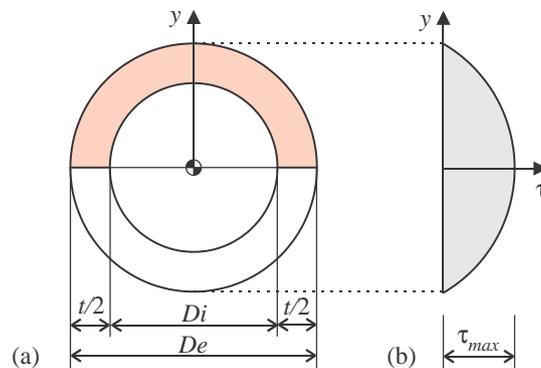


Figura 6.23: Seção anelar e tensões cisalhantes transversais.