

Capítulo 22

Plasticidade clássica

O estudo da plasticidade cobre uma variedade de fenômenos através de uma quantidade imensa de teorias e modelos que tentam se ajustar às peculiaridades de cada tipo de comportamento. Em sua forma mais geral, o termo “plasticidade” se refere, de um ponto de vista puramente fenomenológico (visto apenas pelos seus efeitos externos, macroscópicos), ao **desenvolvimento de deformações permanentes em uma porção de matéria sólida, após a aplicação e remoção de um carregamento**. Entretanto, o mecanismo físico da mudança que a estrutura do material sofre é diferente em cada classe de material. O estudo de plasticidade tem origem com a plasticidade de metais. Por outro lado, os polímeros apresentam mecanismos plásticos distintos dos metais, porém parte dos conceitos e modelos matemáticos desenvolvidos para metais são adaptados ao comportamento plástico dos polímeros.

A **velocidade do carregamento** também gera diferenças de comportamento e requer distintas teorias. Velocidades de carregamento muito altas, caracterizando velocidades de **impacto**, alteram os valores das propriedades do material. Por exemplo, na maioria dos materiais estruturais, tanto os metais quanto os polímeros, por exemplo, valores característicos do diagrama tradicional de ensaio tensão-deformação unidimensional, como os valores de módulo de elasticidade e de tensão de início de escoamento, se tornam maiores conforme a velocidade do carregamento no ensaio cresce.

No extremo oposto de carregamentos aplicados ao longo de tempos extremamente longos, o material exhibe comportamento viscoso, além de plástico. Isso requer modelos dependentes de taxas, os **modelos viscoelásticos e os viscoplásticos**.

Os modelos matemáticos distinguem-se também em modelos pequenas e de grandes deformações (também denominadas **plasticidade infinitesimal** e **finita**, respectivamente). Essa distinção ocorre principalmente devido à maior complexidade das formulações e das implementações computacionais do MEF para as formulações de plasticidade finita. Enquanto as formulações infinitesimais já tinham se desenvolvido até um ponto adequado em 1975, apenas no início dos anos 1990 diversas dificuldades fundamentais das formulações finitas encontraram soluções consideradas satisfatórias pela comunidade científica.

As teorias de plasticidade infinitesimal são tais que a única não linearidade presente no modelo é na relação constitutiva do material. As demais relações da mecânica do contínuo são tomadas como lineares. O conjunto completo de relações utilizadas na formulação infinitesimal é o seguinte:

- Relações constitutivas. Não linear, dada pela teoria da plasticidade.
- Relações cinemáticas de pequenas deformações. São as relações deformação-deslocamento, que são tomadas lineares.
- Pequenos deslocamentos. A configuração geral do corpo não muda com o carregamento. O equilíbrio é imposto na configuração indeformada e não é feita uma distinção entre formulações Euleriana e Lagrangeana.

É interessante ter um entendimento qualitativo claro entre grandes deslocamentos e grandes deformações. Um exemplo típico é o de uma viga longa, em balanço, com comprimento L muito maior

que sua altura h , submetida a uma carga transversal. Observa-se que para certos níveis de carga pequenas o suficiente, é possível ter deformação máxima (e correspondente tensão) ainda no nível considerado pequeno, por exemplo menor que 2 %, que ocorre na fibra extrema próxima do engaste. Entretanto, para essa mesma situação, dependendo do comprimento da viga, é possível que ela apresente deslocamentos transversais considerados grandes, por exemplo valores muito superiores a sua altura h . Numa situação como essa não é possível ignorar a existência de grandes deslocamentos na formulação, mesmo que junto a pequenas deformações, sob pena de se obter soluções excessivamente distante da realidade.

Assim não se pode, por exemplo, modelar uma placa plana sob carga transversal até que ela seja deformada num cilindro. Isso exigiria a utilização das teorias de plasticidade finita. Logo, a formulação infinitesimal não pode ser usadas em processos de conformação mecânica. De fato, numa placa, casca ou viga, os deslocamentos máximos devem ser, no máximo, da mesma ordem de grandeza da espessura, sob pena de gerar erros progressivamente crescentes na solução obtida conforme as deflexões se afastam desses limites.

Mesmo com a limitação de pequenas deformações (tipicamente $e \lesssim 0,10$), a teoria permite a análise de uma infinidade de situações em engenharia. Peças metálicas em máquinas, por exemplo, são tipicamente projetadas para trabalhos em regime elástico, sob níveis bastante estreitos de deslocamentos, deformações e tensões admissíveis. Entretanto, em situações excepcionais de trabalho, como numa sobrecarga, a peça pode sofrer deformações plásticas localizadas, não excessivas, que podem ser moldadas pelas teorias de plasticidade infinitesimal. Se o material tiver baixa ductibilidade, a falha pode ocorrer em pequenas deformações, ainda dentro da faixa de validade da teoria. Do contrário, num aço com alongamento de ruptura de 40%, o modelo não será capaz de simular o comportamento da peça até a ruptura. (Figura 22.1).

Deve-se notar, entretanto, que independentemente da faixa de aplicabilidade da teoria infinitesimal de plasticidade, os seus conceitos e estruturas matemáticas formam a base das teorias de plasticidade finita.

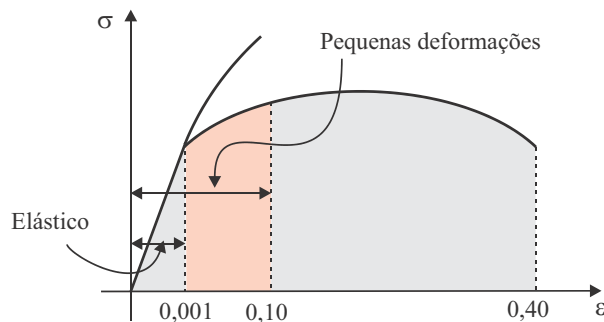


Figura 22.1: Classificação arbitrária de pequenas deformações.

No presente capítulo descreveremos a teoria clássica de plasticidade, adequada principalmente à metais, para pequenas deformações, independente da taxa de deformação. Inicialmente o formalismo matemático da teoria é descrito um problema unidimensional e, em seguida, é estendido ao caso tridimensional. As formas diferenciais da teoria são integradas incrementalmente, o que completa a teoria constitutiva. Em seguida é considerado o MEF para a discretização do problema global. Por último, o método de Newton-Raphson é descrito para a solução do problema algébrico não linear gerado pelo MEF.

As teorias descritas nesse capítulo são provenientes, principalmente, de Prager em 1951 [86] e em 1956 [87], Hill em 1950 [48] e Ziegler [113]. É uma teoria bastante conhecida e descrita com maior ou menor nível de detalhamento em diversos livros como o de Chen [20], Lubliner [66], Simo [94], Malvern [67], Fung [38], dentre outros. Aspectos físicos do fenômeno de plasticidade podem ser vistos em Lemaitre [65].

5. Tensões tais que $f(\sigma) > 0$, (isto é, $\sigma > \sigma_E$ ou $\sigma < -\sigma_E$) são inadmissíveis no modelo. Esse é um modelo matemático para um **material elasto-plástico perfeito (ou ideal)**, representado pela curva tensão-deformação da Figura 22.3.

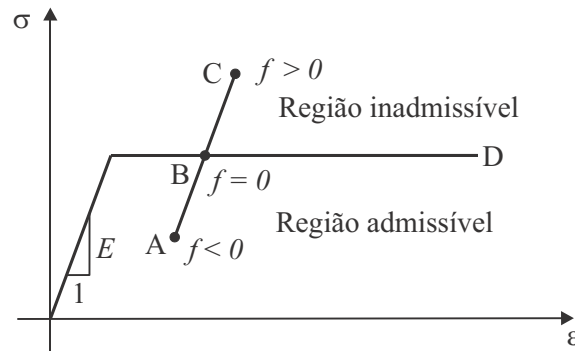


Figura 22.3: Material elasto-plástico perfeito.

6. Caso $f(\sigma) = 0$, isto é, $\sigma = \pm\sigma_E$, pode-se ter escoamento no elemento de atrito, com variação de ε^p , isto é, pode-se ter $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$.
7. Caso $f(\sigma) = 0$, tem-se que $\dot{\varepsilon}^p$ pode crescer ou decrescer conforme o sinal de σ , isto é,

$$\begin{aligned} \text{se } \sigma &= \sigma_E > 0 &\Rightarrow \dot{\varepsilon}^p &\geq 0, \\ \text{se } \sigma &= -\sigma_E < 0 &\Rightarrow \dot{\varepsilon}^p &\leq 0. \end{aligned} \quad (22.6)$$

A representação matemática do escoamento é feita introduzindo uma separação de variáveis em que se define um número real γ , sendo que $\gamma \geq 0$, como o valor absoluto de $\dot{\varepsilon}^p$. Porém, o sinal de $\dot{\varepsilon}^p$ é sempre o mesmo da tensão, de forma que

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (22.7)$$

onde $\text{sign}(\sigma)$ é a **função sinal**, definida por (ver Figura 22.4)

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma > 0, \\ -1 & \text{se } \sigma < 0. \end{cases} \quad (22.8)$$

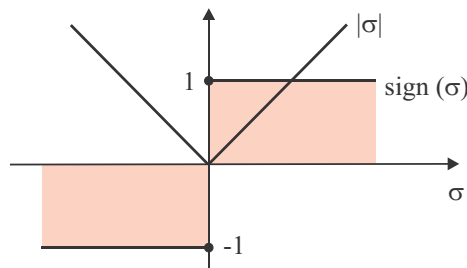


Figura 22.4: Funções $\text{sign}(\sigma)$ e $|\sigma|$.

8. Observa-se que

$$\begin{cases} \text{se } f(\sigma) < 0 \Rightarrow \gamma = 0 & \text{(item 4),} \\ \text{se } f(\sigma) = 0 \Rightarrow \gamma \geq 0 & \text{(item 7).} \end{cases}$$

Logo, qualquer que seja a condição, deve-se ter que

$$\boxed{\gamma f(\sigma) = 0} \quad (22.9)$$

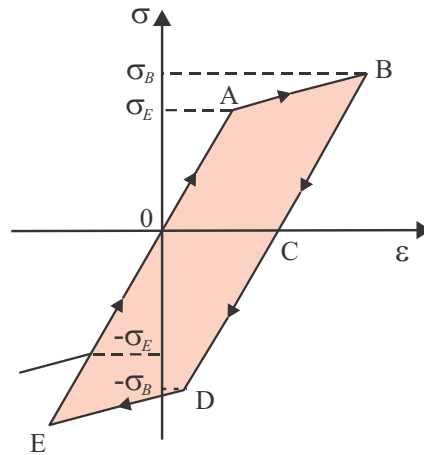


Figura 22.6: Material com encruamento isotrópico em reversão de carga.

encruamento cinemático, considerando que a faixa elástica BD tem o mesmo comprimento que FA, isto é, $2\sigma_E$. Assim, o centro da região linear BD cresce com a deformação plástica, ao longo da linha tracejada OC.

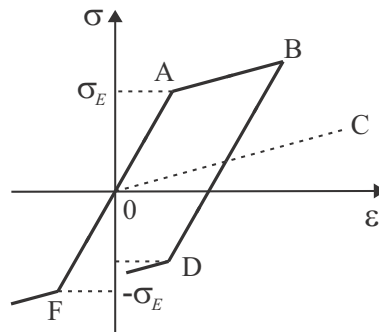


Figura 22.7: Material com encruamento cinemático em reversão de carga.

Observação 1 - Caso um dado problema não envolva reversão de carga, tanto o modelo de encruamento isotrópico quanto o cinemático produzem o mesmo resultado. Entretanto, com reversão da tensão em algum ponto do corpo, o modelo isotrópico tende a ser não satisfatório, e deve-se usar conjunto o cinemático.

Observação 2 - Os modelos de encruamento isotrópico e cinemático são detalhados individualmente, mas ambos os efeitos ocorrem simultaneamente, em maior ou menor grau, em cada material. Geralmente ambos os modelos são implementados em conjunto nos códigos comerciais de elementos finitos, quando são conhecidos por **encruamento misto**.

22.1.1 Modelo 1-D de plasticidade com encruamento

O **encruamento isotrópico** é frequentemente modelado de forma **linear** em relação à **quantidade de escoamento**, designada por α , de forma que sua evolução é definida por

$$\dot{\alpha} = |\dot{\epsilon}^p| = \gamma. \quad (22.11)$$

O critério de escoamento para o encruamento isotrópico toma a forma

$$f(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - (\sigma_E + h_i \alpha) \leq 0$$

$$\boxed{\frac{\partial |\sigma|}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)} \quad (22.17)$$

que pode ser obtida por inspeção da Figura 22.4. Então usando a regra da cadeia tem-se

$$\frac{\partial |\sigma - \beta|}{\partial \sigma} = \frac{\partial |\sigma - \beta|}{\partial (\sigma - \beta)} \frac{\partial (\sigma - \beta)}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma - \beta) \cdot 1. \quad (22.18)$$

Levando a (22.16), tem-se

$$\dot{f} = \text{sign}(\alpha - \beta)\dot{\sigma} + \text{sign}(\sigma - \beta)(-1)\dot{\beta} - h_i\dot{\alpha}.$$

Como $\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P)$, e $\dot{\beta}$ e $\dot{\alpha}$ vêm de (22.13) e (22.11), tem-se

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma - \beta)[E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P) - \gamma h_c \text{sign}(\sigma - \beta)] - h_i\gamma = 0.$$

Usando $\dot{\varepsilon}^P = \gamma \text{sign}(\sigma - \beta)$ e notando que $[\text{sign}(\cdot)]^2 = 1$, tem-se

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma - \beta)E\dot{\varepsilon} - \gamma[E + h_c + h_i] = 0 \quad \text{para } \gamma > 0.$$

Logo, pode-se resolver para γ :

$$\boxed{\gamma = \frac{\text{sign}(\sigma - \beta)E}{E + h_c + h_i}\dot{\varepsilon}} \quad (22.19)$$

22.1.2 Matriz elastoplástica

Em análise elastoplástica por elementos finitos é necessário o cálculo da chamada matriz elastoplástica, que no problema unidimensional se reduz a um escalar, E_T , definido por

$$E_T \equiv \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\varepsilon}}, \quad (22.20)$$

E_T depende do estado $(\sigma, \varepsilon, \varepsilon^P, \alpha, \beta)$. Nota-se que essa relação frequentemente é colocada em forma de diferencial:

$$E_T \equiv \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} = \frac{d\sigma/dt}{d\varepsilon/dt} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}. \quad (22.21)$$

Busca-se o incremento infinitesimal de tensão $d\sigma$ para um dado incremento infinitesimal $d\varepsilon$. Essa relação pode ser deduzida partindo da relação elástica (22.2)

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P).$$

Usando a expressão de γ em (22.19) e $\dot{\varepsilon}^P = \gamma \text{sign}(\sigma - \beta)$ de (22.14), tem-se

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \frac{[\text{sign}(\sigma - \beta)]^2 E^2}{E + h_c + h_i}\dot{\varepsilon}.$$

Comparando essa expressão com a definição (22.20), pode-se obter E_T para o processo plástico. Já para o processo elástico, E_T é simplesmente o módulo elástico. Então, para qualquer uma das duas situações se tem o módulo elastoplástico 1D, para encruamento misto bilinear, dado por:

$$\boxed{E_T \equiv \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} = \begin{cases} \frac{E(h_c + h_i)}{E + (h_c + h_i)}, & \text{se } \gamma > 0, \\ E, & \text{se } \gamma = 0. \end{cases}} \quad (22.22)$$

O módulo E_T é o **módulo elastoplástico**. É a rigidez do material na região de encruamento, como visto na Figura 22.5. Note que ele tem contribuição de ambos os encruamentos: isotrópico h_i

e cinemático h_c . Contudo, caso $h_c = h_i = 0$ segue-se que $E_T = 0$ e o modelo reverte-se ao modelo de plasticidade perfeita.

22.1.3 Algoritmos de integração

A formulação de plasticidade descrita acima está em forma diferencial, válida para intervalos de tempo dt infinitesimais. Entretanto, no processo de cálculo, o que se dispõe são de incrementos finitos, de tempo Δt , de carga, de tensão, etc. Assim, as equações diferenciais precisam ser discretizadas e integradas adequadamente no tempo, ao longo de um incremento finito Δt , do instante t ao instante $t + \Delta t$. Considera-se uma sequência de instantes de tempo, denotados por

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots \tag{22.23}$$

sendo que o instante inicial é $t_0 = 0$ e um intervalo típico é definido pelos instantes t_n e $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Para o processo de integração, considera-se que no ponto do corpo sob consideração (no MEF isso corresponde, tipicamente, à região em torno de um ponto de integração de um dado elemento) toda a solução seja conhecida no tempo t_n , designada por $\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \alpha_n$ e β_n . Note que esses valores são suficientes para determinar diretamente a tensão através de $\sigma_n = E(\varepsilon_n - \varepsilon_n^p)$.

Considera-se que seja dado um incremento na deformação total, $\Delta\varepsilon_{n+1}$, (obtido pelo processo iterativo de Newton-Raphson) que modifica a solução no ponto para o instante t_{n+1} , isto é:

Dados: $\varepsilon_n; \varepsilon_n^p; \alpha_n; \beta_n$ Dado: $\Delta\varepsilon_{n+1}$	\implies	Calcular para t_{n+1} : $\varepsilon_{n+1}; \varepsilon_{n+1}^p; \alpha_{n+1}; \beta_{n+1}$	(22.24)
-----------------------------------------------------------------------------------------------	------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------	---------

A integração entre t_n e t_{n+1} é feita por um **algoritmo de retorno**, como descrito a seguir. Essa família de algoritmos é baseada, em parte, no esquema clássico de integração numérica de equações diferenciais ordinárias denominada **regra do ponto intermediário**.

Regra do ponto intermediário

Considere o **problema de valor inicial** (PVI) definido por:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t)) \\ u(0) = u_o \end{cases} \tag{22.25}$$

isto é, um PVI dado por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem para a função $u = u(t)$, com $f(u)$ sendo uma função conhecida e u_o o valor inicial de $u(t)$. Observe na Figura 22.8 uma curva ilustrativa de $u(t)$. O valor de $u(t_n)$ em t_n , ponto C, é conhecido, e busca-se o valor $u(t_{n+1})$ em E. Inicialmente, arbitra-se um valor $\theta \in [0;1]$ e define-se um instante no intervalo $[t; t + \Delta t]$:

$$t_{n+\theta} = \theta t_{n+1} + (1 - \theta)t_n. \tag{22.26}$$

Nesse ponto, $f(t_{n+\theta})$ é igual a \dot{u} , isto é, $\dot{u}_{n+\theta} = f(t_{n+\theta})$. Essa é a inclinação de tangente à curva $u = u(t)$ no ponto A da Figura 22.8. Se essa reta é transladada para interceptar o ponto C em t_n , gera-se uma reta CD, que gera o ponto D em t_{n+1} . O ponto D é uma estimativa algébrica da solução correta (ponto E), e é o valor utilizado na integração numérica. Existe um valor θ^* que define uma tangente que é exata no sentido que faz o ponto D coincidir com E, gerando o valor correto $u_{n+1} = u(t_{n+1})$. Como esse θ^* é desconhecido, obtém-se uma estimativa u_{n+1} de $u(t_{n+1})$. O algoritmo é construído de forma que θ é usado para gerar linearmente o tempo intermediário $t_{n+\theta}$, e também o valor intermediário $u_{n+\theta}$. O resumo do esquema torna-se o seguinte:

$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \Delta t f(u_{n+\theta}), & \text{onde} \\ u_{n+\theta} &= \theta u_{n+1} + (1 - \theta)u_n, & \text{tal que} \\ u_{n+1} &\approx u(t_{n+1}). \end{aligned}$	(22.27)
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------

O processo de cálculo toma a solução conhecida em t_n , isto é, u_n . Resolve-se o sistema formado pelas duas primeiras equações em (22.27), e obtém-se u_{n+1} . Uma vez u_{n+1} determinado, calcula-se

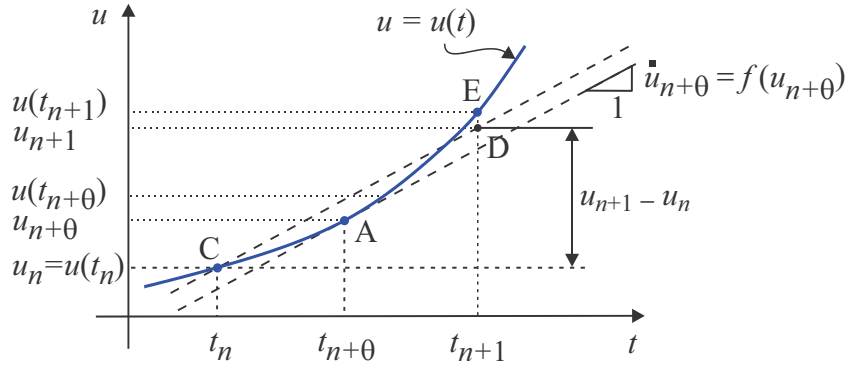


Figura 22.8: Ilustração da regra do ponto intermediário.

u_{n+2} , e assim por diante, até o instante final de interesse. A partida do processo é u_0 , que é valor inicial dado no problema, usado para obter u_1 . O algoritmo é tal que, conforme $\Delta t \rightarrow 0$, tem-se que $u_{n+\theta} \rightarrow u(t_{n+\theta})$ e $u_{n+1} \rightarrow u(t_{n+1})$. O algoritmo produz solução exata sempre que a solução exata for linear.

Para qualquer valor arbitrado $\theta > 0$, tanto o lado esquerdo de (22.27)₁ quanto o direito dependem da incógnita u_{n+1} , que deve ser extraída por um método numérico de determinação de raízes de equação algébrica (Newton-Raphson, por exemplo).

No caso particular em que $\theta = 0$ tem-se um **esquema explícito** (conhecido por **regra de Euler**). “Explícito” porque (22.27) fica na forma $u_{n+1} = u_n + \Delta t f(u_n)$, isto é conhecendo u_n obtém-se diretamente u_{n+1} , sem a necessidade de resolver a raiz de uma equação não linear como no caso $\theta > 0$.

Outros casos particulares de (22.27) bastante usados são para $\theta = 1$ (**esquema implícito de Euler**) e $\theta = 1/2$. A análise matemática desses esquemas mostram que para ocorrer **estabilidade incondicional** é necessário usar $\theta \geq 1/2$, quando então se pode usar qualquer tamanho de Δt . Isso significa que, se for usado $\theta < 1/2$, deve-se usar $\Delta t < \Delta t_{cr}$, para evitar crescimento descontrolado na solução. Δt_{cr} é um tamanho crítico de incremento de tempo, pequeno o suficiente para garantir a estabilidade do processo. A estabilidade não se confunde com precisão, que é máxima apenas em $\theta = 1/2$.

22.1.4 Forma incremental das equações de elastoplasticidade

As equações de plasticidade com encruamento misto, integradas usando a regra do ponto intermediário, com $\theta = 1$, são resumidas abaixo. (Sempre se tem que $\Delta \varepsilon_{n+1}$ é dado, tanto quanto a solução em t_n : $\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \alpha_n, \beta_n$).

(a) As equações diferenciais do problema são as **equações de evolução** (22.14), (22.11) e (22.13):

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = \gamma \operatorname{sign}(\sigma - \beta), \\ \dot{\alpha} = \gamma, \\ \dot{\beta} = H' \dot{\varepsilon}^p. \end{cases} \quad (22.28)$$

(b) Suas **formas incrementais** vem da aplicação de (22.27) a cada uma delas:

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}), \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta \gamma, \\ \beta_{n+1} = \beta_n + h_c \Delta \gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}), \end{cases} \quad (22.29)$$

onde $\Delta \gamma = \gamma_{n+1} \Delta t$ e foi tomado $H' = h_c = \text{const.}$

(c) As **equações complementares** são:

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon_{n+1} \\ \sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \end{cases}, \quad (22.30)$$

(d) No instante t_{n+1} as **condições de Kuhn-Tucker** tem que ser satisfeitas, agora em forma discreta:

Forma contínua:	Forma discreta:	
$f \leq 0$	$\longrightarrow f_{n+1} \equiv \sigma_{n+1} - \beta_{n+1} - (\sigma_E + h_i \alpha_{n+1}) \leq 0,$	(22.31)
$\gamma \geq 0$	$\longrightarrow \Delta\gamma \geq 0,$	
$\gamma f = 0$	$\longrightarrow \Delta\gamma f_{n+1} = 0.$	

Nota-se que esses testes dependem do conhecimento do valor de f_{n+1} , que não é previamente conhecido.

22.1.5 Algoritmos de retorno

As equações (22.29) a (22.31) são suficientes para se obter uma aproximação numérica ao problema elastoplástico num ponto do corpo. Entretanto, os diversos testes que precisam ser feitos para identificar se o incremento $\Delta\varepsilon_{n+1}$ envolve descarregamento, ou carregamento elástico, ou ainda carregamento plástico, tornam-se razoavelmente intrincados de serem implementados computacionalmente, principalmente considerando-se o fato que o algoritmo é implícito e não há uma forma direta de avaliar f_{n+1} e assim fazer os testes de Kuhn-Tucker. Os Algoritmos de retorno proporcionam uma maneira alternativa e elegante de realizar os cálculos e os testes.

Inicialmente é definido um **estado teste elástico** (*trial state*). Esse é um estado fictício, obtido por uma correção do estado em t_n como se $\Delta\varepsilon_{n+1}$ fosse completamente elástico. Observando a Figura 22.9, se a solução em t_n é o ponto A, com $(\varepsilon_n; \sigma_n)$, adicionando-se elasticamente $\Delta\varepsilon_{n+1}$ obtém-se o ponto teste em B. Esse ponto é fisicamente inatingível, fictício, sendo apenas uma etapa intermediária do procedimento. Posteriormente o algoritmo vai buscar a solução admissível sobre a curva de encruamento, no ponto C, isto é, $(\sigma_{n+1}; \varepsilon_{n+1})$.

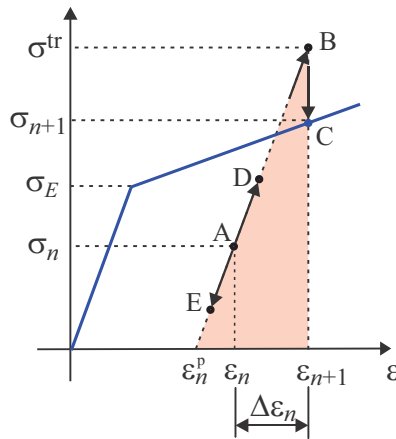


Figura 22.9: Estado em t_n em A, estado teste em B e estado final em C.

O estado teste é definido evoluindo elasticamente todas as variáveis:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n+1}^{tr} &\equiv \sigma_n + E\Delta\varepsilon_{n+1}, \\
 \varepsilon_{n+1}^{p,tr} &\equiv \varepsilon_n^p, \\
 \alpha_{n+1}^{tr} &\equiv \alpha_n, \\
 \beta_{n+1} &\equiv \beta_n, \\
 f_{n+1}^{tr} &= |\sigma_{n+1}^{tr} - \beta_n| - (\sigma_E + h_i \alpha_n).
 \end{aligned}
 \tag{22.32}$$

A primeira equação pode ser modificada por

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \sigma_{n+1} - \beta_{n+1}, \\ \delta_{n+1} &= \underbrace{(\sigma_{n+1}^{tr} - \beta_n)}_{\delta_{n+1}^{tr}} - \Delta\gamma(E + h_c)\text{sign}(\delta_{n+1}).\end{aligned}\quad (22.37)$$

Observe que sempre se pode representar um número real x por $|x|\text{sign}(x)$. Fazendo essa substituição em δ_{n+1} em (22.37) tem-se

$$|\delta_{n+1}|\text{sign}(\delta_{n+1}) = |\delta_{n+1}^{tr}|\text{sign}(\delta_{n+1}^{tr}) - \Delta\gamma(E + h_c)\text{sign}(\delta_{n+1}).$$

Coletando os termos tem-se

$$\underbrace{[|\delta_{n+1}| + \Delta\gamma(E + h_c)]}_{>0}\text{sign}(\delta_{n+1}) = |\delta_{n+1}^{tr}|\text{sign}(\delta_{n+1}^{tr}).\quad (22.38)$$

O colchete à esquerda é positivo desde que $E + h_c > 0$. Então obtém-se duas relações:

$$\begin{aligned}\text{sign}(\delta_{n+1}) &= \text{sign}(\delta_{n+1}^{tr}), \\ |\delta_{n+1}| &= |\delta_{n+1}^{tr}| - \Delta\gamma(E + h_c).\end{aligned}\quad (22.39)$$

A relação (22.39)₁ é um resultado fundamental na teoria, e sua importância se tornará evidente em sua versão adaptada ao problema 3D. Nesse ponto, sua importância reside no fato de que δ_{n+1} é incógnita mas não δ_{n+1}^{tr} . Assim, $\text{sign}(\cdot)$ pode ser simplificado em (22.38) resultando (22.39)₂. Uma expressão para a determinação de $\Delta\gamma$ pode ser finalmente obtido da condição de Kuhn-Tucker $\Delta\gamma f_{n+1} = 0$: uma vez que $\Delta\gamma > 0$, segue-se que $f_{n+1} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}f_{n+1} &= |\delta_{n+1}| - (\sigma_E + h_i\alpha_{n+1}) = 0, \\ &= \underbrace{|\delta_{n+1}^{tr}| - \Delta\gamma(E + h_c)}_{\delta_{n+1}^{tr}} - (\sigma_E + h_i\alpha_{n+1}), && \text{usando (22.39)}_2, \\ &= \delta_{n+1}^{tr} - \Delta\gamma(E + h_c) - [\sigma_E + h_i\alpha_{n+1} + h_i\alpha_n - h_i\alpha_n], && \text{usando (22.29)}_2, \\ &= \delta_{n+1}^{tr} - (\sigma_E + h_i\alpha_n) - \Delta\gamma(E + h_c) - \Delta\gamma h_i, \\ &= \underbrace{f_{n+1}^{tr}}_{f_{n+1}^{tr}} - \Delta\gamma(E + h_c + h_i), && \text{usando (22.32)}_5.\end{aligned}$$

logo,

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{tr}}{E + h_c + h_i}\quad (22.40)$$

Com isso se conclui todas as deduções necessárias. Os cálculos são feitos numa sequência diferente da dedução, e são resumidos a seguir.

22.1.6 Fluxograma 22.1 - Algoritmo de retorno do problema 1-D com encruamento misto linear

1. Dados ε_n , ε_n^p , α_n e β_n num ponto x do corpo. σ_n também está armazenado ou é calculado por $\sigma_n = E(\varepsilon_n - \varepsilon_n^p)$ e $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_{n+1}$.
2. A partir de cálculos do MEF, é dado $\Delta\varepsilon_{n+1}$ no ponto x .

3. Calcular o estado teste:

$$\begin{cases} \sigma_{n+1}^{tr} = \sigma_n + E\Delta\varepsilon_{n+1}, \\ \delta_{n+1}^{tr} = \sigma_{n+1}^{tr} - \beta_n, \\ f_{n+1}^{tr} = \delta_{n+1}^{tr} - (\sigma_E + h_i\alpha_n), \\ \alpha_{n+1}^{tr} = \alpha_n. \end{cases} \quad (22.41)$$

4. Teste. Se $f_{n+1}^{tr} \leq 0 \Rightarrow$ estado teste é elástico e real, e a solução em t_{n+1} é:

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr}, & \Delta\gamma = 0, & \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_{n+1}, \\ \beta_{n+1} = \beta_{n+1}^{tr}, & \alpha_{n+1} = \alpha_n, & \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \end{cases} \quad \boxed{\text{Ir para 6.}} \quad (22.42)$$

5. Teste. Se $f_{n+1}^{tr} > 0 \Rightarrow$ o incremento é plástico. Usar retorno:

$$\begin{cases} \Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{tr}}{E + h_c + h_i}, & \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr} - \Delta\gamma E \text{sign}(\delta_{n+1}^{tr}), \\ \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma E \text{sign}(\delta_{n+1}^{tr}), & \alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma, \\ \beta_{n+1} = \beta_n + h_c \Delta\gamma \text{sign}(\delta_{n+1}^{tr}) \end{cases} \quad (22.43)$$

6. Para os cálculos posteriores de MEF, é necessário o módulo tangente:

$$\begin{cases} \text{Se } \Delta\gamma > 0 \Rightarrow E_T = \frac{E(h_c + h_i)}{E + h_c + h_i} \\ \text{Se } \Delta\gamma = 0 \Rightarrow E_T = E. \end{cases} \quad (22.44)$$

22.1.7 Exemplo 22.1 - Ciclo de tensões

Considere um metal com as seguintes propriedades: $\sigma_E = 300$ MPa, $E = 200$ GPa, $h_i = 40$ GPa, $h_c = 30$ GPa. Determine a solução num ponto do corpo que é submetido, sequencialmente, aos seguintes incrementos de deformação:

- (a) $\Delta\varepsilon_1 = 0,8\%$;
- (b) $\Delta\varepsilon_2 = -0,8\%$;
- (c) $\Delta\varepsilon_3 = 0,8\%$;

A condição inicial do material é que ele nunca sofreu processo de plastificação.

Solução:

Seguimos as etapas de cálculo do Fluxograma 22.1. Inicialmente, no tempo $t_n = 0$, com $n = 0$, tem-se

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^p = \alpha_0 = \beta_0 = \sigma_0 = 0.$$

- **Incremento 1:** $\Delta\varepsilon_1 = 0,8\%$.

Passo 3 do fluxograma, para $n = 1$, com $\Delta\varepsilon_1 = 0,008$. O estado teste é:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{tr} &= \sigma_0 + E\Delta\varepsilon_1 = 0 + 200.000 \times 0,008 = 1.600 \text{ MPa}, \\ \delta_1^{tr} &= \sigma_1^{tr} - \beta_0 = 1.600 \text{ MPa}, \\ f_1^{tr} &= |\delta_1^{tr}| - (\sigma_E - h_i\alpha_0), \\ &= 1.600 - (300 - h_i \times 0) = 1.300 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Passo 4. Como $f_1^{tr} > 0$, segue-se que $\Delta\varepsilon_1$ gera plastificação.

Passo 5. Cálculo do retorno.

$$\begin{aligned}\Delta\gamma &= \frac{f_3^{tr}}{E + h_c + h_i} = \frac{432,6}{270 \cdot 10^3} = 1,602 \cdot 10^{-3}, \\ \sigma_3 &= \sigma_3^{tr} - \Delta\gamma E \operatorname{sign}(\delta_3^{tr}) = 1.092,5 - 1,602 \cdot 10^{-3} \times 200 \cdot 10^3(+1) = 772,0 \text{ MPa}, \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2 = 0 + 8 \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^{-3}, \\ \varepsilon_3^p &= \varepsilon_2^p + \Delta\gamma \operatorname{sign}(\delta_3^{tr}) = 2,538 \cdot 10^{-3} + 1,602 \cdot 10^{-3}(+1) = 4,140 \cdot 10^{-3}, \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + \Delta\gamma = 8,694 \cdot 10^{-3}, \\ \beta_3 &= \beta_2 + h_c \Delta\gamma \operatorname{sign}(\delta_3^{tr}) = 124,2 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

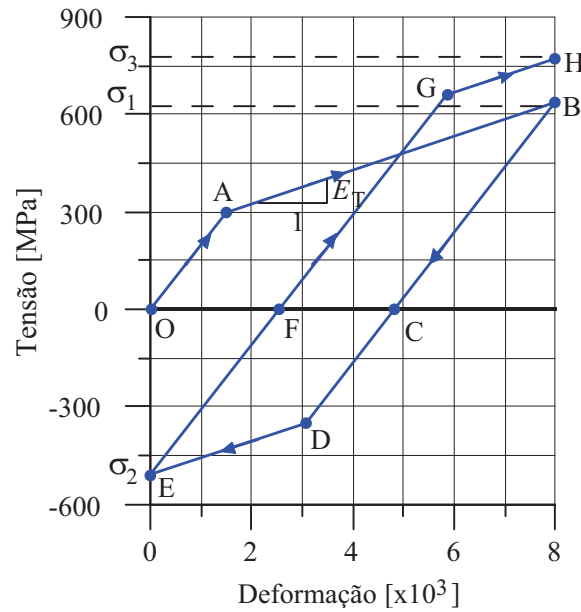


Figura 22.10: Curva tensão-deformação no ciclo de carga imposto no Exemplo 1.

As tensões e deformações ao final dos incrementos 1, 2 e 3 correspondem aos pontos B, E e H do diagrama da Figura 22.10. Os incrementos $\Delta\varepsilon_1$, $\Delta\varepsilon_2$ e $\Delta\varepsilon_3$ correspondem aos trechos OB, BE e EH, respectivamente. Os pontos de inflexão A, D e G podem ser obtidos por cálculos elásticos a partir dos pontos O, B e E, respectivamente.

- **Ponto A** - $\sigma_A = \sigma_E = 300$ MPa, e $\varepsilon_A = \sigma_A/E = 1,5 \times 10^{-3}$.
- **Ponto D** - O incremento de deformação $\Delta\varepsilon_{BD}$ entre B e D é elástico, e D é o início de escoamento. Logo, a função da superfície de escoamento deve ser $f_D = 0$. Então o Passo 3 do Fluxograma 22.1 pode ser usado para obter o valor de $\Delta\varepsilon_{BD}$ que faz $f_D = 0$:

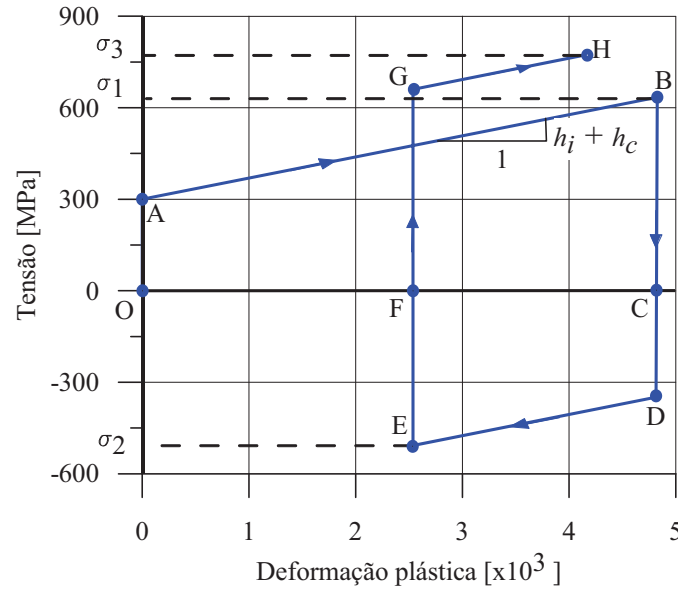
$$\begin{cases} \sigma_D = \sigma_1 + E\Delta\varepsilon_{BD} < 0, \\ \delta_D \equiv \sigma_D - \beta_1 = \sigma_1 + E\Delta\varepsilon_{BD} - \beta_1 < 0 \text{ (descarga)}, \\ f_D = |\delta_D| - (\sigma_E + K\alpha_1) = 0. \end{cases} \quad (22.45)$$

Logo,

$$f_D = -\sigma_1 - E\Delta\varepsilon_{BD} + \beta_1 - (300 + 40 \cdot 10^3 \times 4,818 \cdot 10^{-3}) = 0.$$

Então $\Delta\varepsilon_{BD}$ pode ser explicitado:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{BD} &= \frac{\beta_1 - \sigma_1 - 492,7}{E} = \frac{144,4 - 637,0 - 492,7}{200 \cdot 10^3} = -4,93 \cdot 10^{-3}, \\ \Rightarrow \varepsilon_D &= \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_{BD} = 3,074 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Figura 22.11: Curva $\sigma \times \varepsilon^p$ no Exemplo 1.

A tensão em D é calculada de (22.45)₁:

$$\sigma_D = \sigma_1 + E\Delta\varepsilon_{BD} = 637,0 + E(-4,93 \cdot 10^{-3}) = -349 \text{ MPa.}$$

- **Ponto G** - O incremento de deformação entre E e G, $\Delta\varepsilon_{BG}$, é calculado da mesma forma que $\Delta\varepsilon_{BD}$, por um incremento elástico de E (ponto $n = 2$) a G, tal que $f_G = 0$. Usamos então o Passo 3 do Fluxograma 22.1.

$$\begin{cases} \sigma_G = \sigma_2 + E\Delta\varepsilon_{BG} > 0, \\ \delta_G = \sigma_G - \beta_2 > 0 \quad (\text{carregamento}), \\ f_G = |\delta_G| - (\sigma_E + K\alpha_2) = 0. \end{cases} \quad (22.46)$$

Logo,

$$f_G = \sigma_2 + E\Delta\varepsilon_{BG} - \beta_2 - (\sigma_E + K\alpha_2) = 0.$$

Então $\Delta\varepsilon_{BG}$ pode ser explicitado:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{BG} &= \frac{\beta_2 - \sigma_2 + (\sigma_E + h_i\alpha_2)}{E} = \frac{76,13 - (-507,5) + (300 + 40 \cdot 10^3 \times 7,092 \cdot 10^{-3})}{200 \cdot 10^3}, \\ &= 5,837 \times 10^{-3}, \\ \Rightarrow \varepsilon_G &= \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_{BG} = 5,837 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

A tensão em G é dada a partir de σ_2 :

$$\sigma_G = \sigma_2 + E\Delta\varepsilon_{BG} = -507,5 + E(5,837 \cdot 10^{-3}) = 659,8 \text{ MPa.}$$

A Tabela 22.1 mostra o sumário dos valores nos pontos de inflexão do ciclo (as deformações estão em 10^{-3}). Nas Figuras 22.10 e 22.11 observam-se as inclinações das curvas de encruamento: E_T na curva $\sigma \times \varepsilon$ e $h_i + h_c$ na curva $\sigma \times \varepsilon^p$. Os resultados mostram que essas inclinações tem os seguintes valores:

Tabela 22.1: Sumário dos resultados do Exemplo 1. Tensões em MPa.

	ε	ε^p	α	σ	β
O	0	0	0	0	0
A	1,50	0,0	0,0	300	0,0
B	8,00	4,815	4,815	637	144,4
D	3,074	8,415	8,415	-349	144,4
E	0,0	2,538	7,092	-507,5	76,13
G	5,837	2,538	7,092	659,8	76,13
H	8,00	4,140	8,694	772	124,2

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_A}{\varepsilon_B - \varepsilon_A} = \frac{637 - 300}{(8 - 1,5) \cdot 10^{-3}} = 51,9 \text{ GPa} = E_T,$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_A}{\varepsilon_1^p} = \frac{637 - 300}{4,815 \cdot 10^{-3}} = 70 \text{ GPa} = h_i + h_c.$$

22.2 Plasticidade Clássica 3-D

A teoria clássica de elastoplasticidade em estados triaxiais de tensões é descrita nessa seção, seguindo a formulação de Hill [48]. As condições de carga/descarga são aquelas usadas por Koiter [58].

Inicialmente a teoria é descrita em sua forma geral, isto é, para funções de início de escoamento e de encruamento arbitrários, em seguida é feito um detalhamento apenas para um modelo associativo J_2 (von Mises), com encruamento isotrópico/cinemático linear ou isotrópico quadrático/cinemático linear.

22.2.1 Tensores de segunda e de quarta ordem

O equacionamento da teoria de plasticidade 3-D é mais facilmente deduzido tomando as grandezas na sua forma tensorial. Apenas ao final da dedução as expressões são convertidas para a forma vetorial, que facilitam a programação computacional.

As formas tensoriais para as componentes de tensão e deformação, e suas correspondentes formas vetoriais (também chamadas notação de Voigt) são:

$$\begin{array}{l} \text{Tensor de } 2^a \text{ ordem} \\ \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Notação de Voigt} \\ \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T, \end{array} \quad (22.47)$$

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}\}.$$

Observação 6 - Ao longo de todo o presente capítulo estaremos fazendo uso frequente da notação indicial e da regra do somatório. Caso o leitor não se sinta confortável, recomenda-se uma leitura detalhada do material das páginas 14 e seguintes, no Capítulo 1, e Exercícios 1 a 5 daquele capítulo.

Consideremos em seguida algumas definições úteis.

1 Tensor identidade 1 de 2^a ordem. Suas componentes cartesianas são $1_{ij} = \delta_{ij}$, isto é,

$$[\mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e sua representação tensorial é: } \mathbf{1} = \delta_{ij}(e_i \otimes e_j), \quad (22.48)$$

onde e_i , $i = 1, 2, 3$ são os vetores ortonormais da base cartesiana. Esse é o tensor identidade usual, que tem a propriedade de, para um vetor \mathbf{v} e um tensor de segunda ordem \mathbf{M} , arbitrários,

$$\boxed{\mathbf{1}\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{1}\mathbf{M} = \mathbf{M}} \quad (22.49)$$

2. Tensor identidade simétrico \mathbf{I} de 4ª ordem. Sua representação em componentes cartesianas é:

$$\boxed{\mathbf{I} = I_{ijkl}e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l, \quad \text{onde} \quad I_{ijkl} = \frac{1}{2} [\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}]} \quad (22.50)$$

Suas propriedades são as seguintes. Dado um tensor de segunda ordem \mathbf{M} e um de 4ª ordem \mathbf{Q} , arbitrários, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{I} : \mathbf{M} &= \text{Sim}(\mathbf{M}) \\ \mathbf{I} : \mathbf{Q} &= \frac{1}{2} [Q_{ijmn} + Q_{jimn}] e_i \otimes e_j \otimes e_m \otimes e_n \end{aligned} \quad (22.51)$$

isto é, ele produz a parcela simétrica dos tensores em que opera.

3. Produtos de tensores de 4ª ordem. Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são tensores de 4ª ordem e \mathbf{M} de 2ª ordem, todos arbitrários, tem-se os seguintes produtos:

1. $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ijkl} B_{klmn} e_i \otimes e_j \otimes e_m \otimes e_n$,
2. $\mathbf{A} : \mathbf{M} = A_{ijkl} M_{kl} e_i \otimes e_j$,
3. $\mathbf{M} : \mathbf{A} = M_{ij} A_{ijkl} e_k \otimes e_l$,
4. $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} : \mathbf{M} = \delta_{ij} M_{qq} e_i \otimes e_j = \mathbf{1} \text{tr}(\mathbf{M})$,
5. $\mathbf{I} : \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$,
6. $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} : \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = 3\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$,
7. $\mathbf{I} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{I} = \text{Sim}(\mathbf{B})$.

(22.52)

4. A relação tensão deformação isotrópica linear foi dada na seção 4.2 em notação de Voigt. Em notação tensorial ela é

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}, \\ \text{onde} \quad \mathbf{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\mathbf{I}, \\ \text{Componentes:} \quad C_{ijkl} = K\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{2G}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}, \text{ onde } K = \lambda + \frac{2}{3}G, \\ \text{Inversa:} \quad \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{9K}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{2G} \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] \end{array} \right. \quad (22.53)$$

22.2.2 Modelo contínuo de plasticidade infinitesimal

Os conceitos e a estrutura da formulação de plasticidade unidimensional vistas nas seções anteriores são completamente similares à sua extensão tridimensional. Os blocos constituintes da teoria são os mesmos do caso 1-D, como visto a seguir.

1. **Decomposição aditiva** do tensor deformação linear, numa parte $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ elástica e numa parte $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ plástica:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \text{isto é,} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (22.54)$$

Os modelos de plasticidade infinitesimal se caracterizam pelo uso das relações deformação-deslocamento lineares (mostradas em (3.27), página 54).

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \underbrace{q_\alpha, \boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{q}}) = \sqrt{(\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta})} - \sqrt{\frac{2}{3}} K_\alpha(\alpha), \quad (22.61)$$

onde \mathbf{s} é a parte deviatórica de $\boldsymbol{\sigma}$, ($\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}$). $q_\alpha = -K_\alpha(\alpha)$ é a tensão associada à deformação de encruamento α . No caso de encruamento isotrópico **linear**,

$$K_\alpha(\alpha) = \sigma_E + h_i \alpha, \quad (22.62)$$

onde h_i é o parâmetro do material para encruamento isotrópico linear.

As tensões de encruamento, q na formulação geral (22.57), foi desmembrado em uma função escalar q_α e uma tensorial $\boldsymbol{\beta}$.

A função central $\boldsymbol{\beta}$ é definida no espaço de funções devatóricas, isto é, $\text{tr}\boldsymbol{\beta} = 0$.

O termo na raiz em (22.61) pode ser expresso em termos do segundo invariante do tensor tensão deviatórica, (2.36), tal que a superfície de escoamento de von Mises frequentemente é representada na forma

$$f(\boldsymbol{\sigma}, K_\alpha, \boldsymbol{\beta}) = \sqrt{J_2(\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta})} - \sqrt{\frac{2}{3}} K_\alpha(\alpha), \quad (22.63)$$

Essa expressão reduz-se à forma (22.12) no caso de estado uniaxial de tensões.

Outras superfícies de escoamento existem, geradas por variações nessa forma, e são conhecidas por “teorias J_2 de plasticidade”.

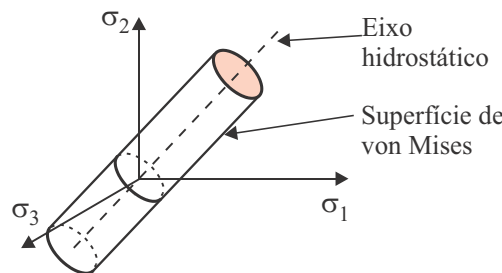


Figura 22.12: Superfície de escoamento de von Mises no espaço de tensões principais, com $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

As funções de escoamento f em materiais isotrópicos podem ser expressas em termos apenas das tensões principais de $\boldsymbol{\sigma}$, isto é, σ_1, σ_2 e σ_3 . Nesse espaço a superfície de von Mises, eq. (22.61), toma a forma de um cilindro de raio $\sqrt{2/3}K_\alpha(\alpha)$. A Figura 22.12 mostra uma visualização da superfície para o caso de ausência de encruamento cinemático, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$. É uma superfície cilíndrica, cujo eixo coincide com o chamado **eixo hidrostático**, que é definido pela linha $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Essa linha faz ângulos idênticos com os três eixos principais σ_1, σ_2 e σ_3 .

A Figura 22.13 ilustra os casos clássicos de encruamento. Note que a superfície de von Mises é um cilindro de seção circular, porém sua intersecção no plano $\sigma_3 = 0$ é uma elipse, como mostrado na figura. Na Figura 22.13a tem-se o modelo de plasticidade ideal, sem nenhum tipo de encruamento. Então a superfície de escoamento é fixa. Na equação (22.61), $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ e $K_\alpha(\alpha) = \text{const.} = \sigma_E$.

Na Figura 22.13b tem-se uma ilustração do **encruamento isotrópico**, em que a superfície de escoamento tem o centro fixo e expande-se uniformemente pela ação de $K_\alpha(\alpha)$. Na Figura 22.13(c) tem-se o **encruamento cinemático**, em que $\boldsymbol{\beta}$ representa a translação do centro da superfície. **Deve-se observar** que $\boldsymbol{\beta}$ é definido no espaço de tensões deviatóricas, de forma que $\boldsymbol{\beta}$ não representa exatamente a translação da superfície no espaço $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, (como ilustrado na figura apenas para fins de visualização).

5. As condições de Kuhn-Tucker para carga/descarga são

$$\gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (22.64)$$

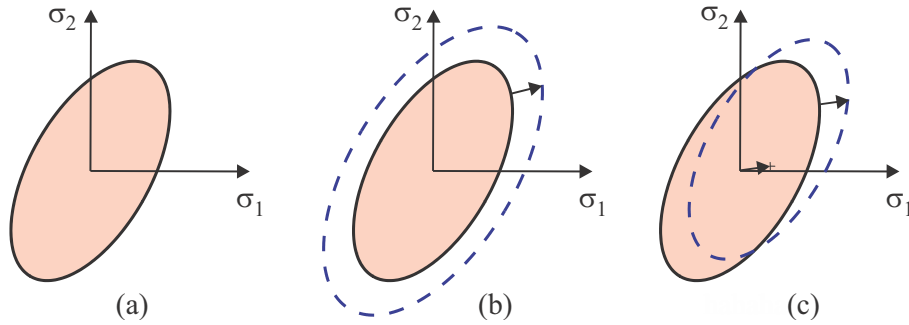


Figura 22.13: Representações da superfície de escoamento para modelos de encruamento; (a) sem encruamento (plasticidade perfeita); (b) encruamento isotrópico; (c) encruamento cinemático.

e a condição de consistência é

$$\boxed{\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0} \quad (22.65)$$

22.2.3 Detalhamento das condições de Kunh-Tucker e de consistência

Pode-se mostrar que as condições (22.64) identificam as condições de carregamento e descarregamento. Para isso, analisam-se as diversas situações possíveis

Caso 1 - Se o estado $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ no ponto do corpo for tal que $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$, de (22.64)₃ segue-se que $\gamma = 0$. Das regras de evolução (22.58) segue-se que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Isto significa que não há modificação no nível de plastificação ou de encruamento. Esse caso pode ser resumido por

$$f(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma = 0, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \end{cases} \quad (22.66)$$

O incremento de tensão é então puramente elástico.

Caso 2 - Se $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, (22.64)₃ implica $\gamma \geq 0$, então existem duas possibilidades: $\gamma = 0$ e $\gamma > 0$ (isto é, processo elástico ou plástico), que é identificado pela condição de consistência (22.65): o valor γ depende de que f esteja decrescendo ($\dot{f} < 0$) ou estável ($\dot{f} = 0$). Abrindo em detalhes tem-se:

Caso 2.1 - Se $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$, a condição de consistência $\gamma \dot{f} = 0$, de (22.65), implica que $\gamma = 0$. Então, das regras de evolução, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$. Então, apesar de $f = 0$, seu valor está decrescendo elasticamente (**descarregamento elástico**). Em resumo,

$$\dot{f} < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma = 0, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \end{cases} \quad (22.67)$$

Caso 2.2 - Se $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, a condição de consistência $\gamma \dot{f} = 0$, equação (22.65), gera dois casos possíveis: $\gamma > 0$ e $\gamma = 0$.

Caso $\gamma > 0$, então $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$, isto é, tem-se um **carregamento plástico**. Os valores de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ e $\dot{\mathbf{q}}$ são determinados pelas equações de evolução, eqs. (22.58), onde o valor de γ é determinado como na eq. (22.71) a seguir.

Caso $\gamma = 0$, então $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, e tem-se o chamado **carregamento neutro**, em que a solução é como em (22.66). O ponto move-se ao longo da superfície de escoamento.

A situação $\dot{f} < 0$ implica $\gamma = 0$. Para $f = 0$ e $\dot{f} = 0$, deve-se ter $\gamma \geq 0$. Como $B > 0$, segue-se que $A \geq 0$. Reversamente, se $A \geq 0$, segue-se que $\gamma \geq 0$ e $f = \dot{f} = 0$. Resumindo, se $f = \dot{f} = 0$,

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} \right]} \quad (22.71)$$

Tendo a expressão para γ , pode-se obter a expressão para o **tensor tangente elastoplástico** \mathbf{C}^{ep} . Esse tensor é tal que $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. No caso de $\gamma > 0$ ele é obtido levando γ de (22.71) à relação constitutiva linear (22.55), e usando (22.58)₁:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C} : [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] \\ &= \mathbf{C} : [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma \mathbf{r}], \\ &= \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{B} \mathbf{C} : \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (22.72)$$

Nesse ponto deve-se evitar a tentação de colocar $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ em evidência nos dois termos à direita da igualdade. Isso não é possível, uma vez que as operações a que $\boldsymbol{\varepsilon}$ é submetido são distintas em cada um dos dois termos. Torna-se necessário abrir a expressão em notação indicial, realizar simplificações e reorganizar o resultado de volta em forma simbólica. Assim, (22.72) em forma indicial (tirando os símbolos de somatório e usando a regra do somatório conforme (1.46), na página 14), é:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijrs} \dot{\varepsilon}_{rs} - \gamma C_{ijgt} r_{gt} = C_{ijrs} \dot{\varepsilon}_{rs} - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqrs} \dot{\varepsilon}_{rs} \right) C_{ijgt} r_{gt}.$$

(Existem símbolos de somatório para todos os índices, exceto i e j que são índices livres). Colocando $\dot{\varepsilon}_{rs}$ em evidência tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[C_{ijrs} - \frac{1}{B} \underbrace{C_{ijgt} r_{gt}}_{(\mathbf{C}:\mathbf{r})_{ij}} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqrs}}_{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}\right)_{rs}} \right] \dot{\varepsilon}_{rs}$$

Os parênteses são tensores de segunda ordem (ver equação (22.52)). Com isso, tem-se a relação elastoplástica:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \text{ onde} \\ \mathbf{C}^{ep} &= \begin{cases} \mathbf{C}, & \text{se } \gamma = 0, \\ \mathbf{C} - \frac{1}{B} (\mathbf{C} : \mathbf{r}) \otimes \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} \right), & \text{se } \gamma > 0, \end{cases} \\ \text{e } B &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (22.73)$$

Observação 7 - Em geral, para plasticidade não associativa, \mathbf{C}^{ep} é não simétrica. Em plasticidade associativa com $\mathbf{r} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ tem-se que \mathbf{C}^{ep} é simétrica.

Observação 8 - A condição $B > 0$ em (22.70) é automaticamente satisfeita no case de **plasticidade ideal associativa**, em que $\mathbf{h} \equiv 0$ e $\mathbf{r} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ conforme (22.60). Nesse caso, (22.70) fica:

$$B \equiv \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.$$

A condição do tensor elástico \mathbf{C} ser positivo-definido significa exatamente que $\mathbf{A} : \mathbf{C} : \mathbf{A} > 0$

para qualquer tensor de segunda ordem $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Ocorre que $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ é sempre não nulo. Logo, nesse caso, $B > 0$.

Observação 9 - A condição $A = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0$ em (22.69) possui uma interpretação geométrica quando se considera A um **produto escalar** entre dois tensores, \mathbf{R} e \mathbf{S} , com uma matriz peso \mathbf{C} , (definidos no espaço de tensões de dimensão 9), isto é, $A = \mathbf{R} : \mathbf{C} : \mathbf{S}$. Sendo um produto escalar, existe o conceito de ângulo entre os dois argumentos, tal que $A = a \cos \theta$, sendo a uma constante adequada. Esse ângulo é ilustrado na Figura 22.15. A condição $A \geq 0$ indica que o escoamento ocorre com $0 \leq \theta < \pi/2$, e o carregamento neutro ocorre com $\theta = \pi/2$, quando $\boldsymbol{\varepsilon}$ é perpendicular à normal, isto é, na direção tangente à superfície de escoamento e $\gamma = 0$.

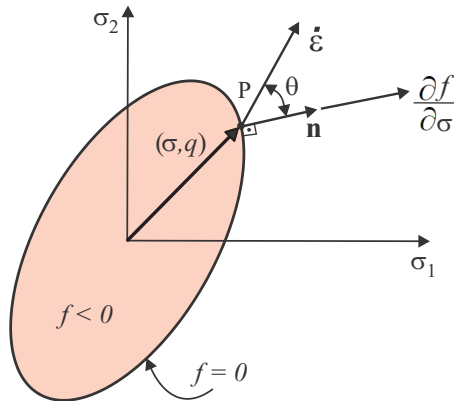


Figura 22.15: Ilustração do ângulo entre $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ na superfície de escoamento.

Observação 10 - A matriz elastoplástica independe de taxas, o que explica essa teoria ser chamada de plasticidade independente de taxas, em oposição às teorias de viscoplasticidade.

22.2.5 Plasticidade J_2 - superfície de von Mises

A teoria geral pode ser aplicada a uma diversidade de funções de escoamento f e de leis de evolução para \mathbf{r} e \mathbf{h} . Entretanto, a forma mais utilizada é a formulação associativa baseada na função de início de escoamento de von Mises, e suas muitas variações. Nessa seção a formulação baseada nessa função, também chamada **formulação J_2** , é detalhada, para encruamento misto (isotrópico/cinemático) em **plasticidade associativa**.

A superfície de escoamento é aquela vista em (22.61), que pode ser posta como

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \underbrace{q_\alpha, \boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{q}}) \equiv \sqrt{\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - \sqrt{\frac{2}{3}} K_\alpha(\alpha), \tag{22.74}$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ é a tensão relativa, definida por

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{s} - \boldsymbol{\beta} \quad \text{com} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}. \tag{22.75}$$

As tensões de encruamento isotrópico e cinemático são

$$\mathbf{q} = \left\{ \begin{matrix} q_\alpha \\ \boldsymbol{\beta} \end{matrix} \right\} \quad \text{e} \quad q_\alpha = -K_\alpha(\alpha). \tag{22.76}$$

A regra de escoamento associativa vem de (22.58)₁ e 22.60

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \tag{22.77}$$

Nota-se que nesse formato a notação torna-se irregular pois \dot{q}_α é uma função escalar, $\dot{\beta}$ e \mathbf{n} são tensores de segunda ordem e \mathbf{I} é de quarta ordem.

Os tensores da formulação geral (22.58) tomam as seguintes formas no modelo J_2 :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \begin{Bmatrix} \dot{q}_\alpha \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix}, & q_\alpha &= -K_\alpha(\alpha), \\ \mathbf{h} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}K'_\alpha \\ -\frac{2}{3}H'\mathbf{n} \end{bmatrix}, & \mathbf{r} &= \mathbf{n}. \end{aligned}} \quad (22.85)$$

Com isso se tem o conjunto de equações da teoria J_2 :

$$\boxed{\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}, q_\alpha, \beta) &\equiv \|\boldsymbol{\eta}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K_\alpha(\alpha), & \boldsymbol{\eta} &\equiv \mathbf{s} - \beta, \\ \dot{\alpha} &= \gamma\sqrt{\frac{2}{3}}, & q_\alpha &= -K_\alpha(\alpha), \\ \dot{q}_\alpha &= -\sqrt{\frac{2}{3}}K'_\alpha\gamma, & \mathbf{n} &= \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|}, \\ \dot{\beta} &= \gamma\frac{2}{3}H'\mathbf{n}, & \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C} : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p], \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \gamma\mathbf{r} = \gamma\mathbf{n}, & \gamma f &= 0, \quad \gamma \dot{f} = 0. \\ \gamma &\geq 0, \quad f \leq 0, & & \end{aligned}} \quad (22.86)$$

Tensor elastoplástico e γ para o modelo J_2

A complementação do equacionamento é feita com o detalhamento de γ e do tensor elastoplástico. γ vem de (22.71), usando $\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}$ para \mathbf{r} e usando (22.83) e (22.85):

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} K' \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\partial f}{\partial \beta} : \frac{2}{3} H' \mathbf{n}}. \quad (22.87)$$

A simplificação deve ser feita em notação indicial, tomando \mathbf{C} de (22.53),

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} : \mathbf{C})_{kl} &= n_{ij} C_{ijkl}, \\ &= n_{ij} [K \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{2G}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}], \\ &= K n_{mm} \delta_{kl} + G(n_{kl} + n_{lk}) - \frac{2G}{3} n_{pp} \delta_{kl}. \end{aligned}$$

\mathbf{n} é um tensor no espaço deviatórico, logo, $\text{tr } \mathbf{n} = n_{mm} = 0$. Também, \mathbf{n} é simétrico, logo,

$$\boxed{\mathbf{n} : \mathbf{C} = 2G\mathbf{n}} \quad (22.88)$$

Da definição de \mathbf{n} ,

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{n} : \mathbf{n} = 1} \quad (22.89)$$

O termo $\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pode ser simplificado decompondo $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ em sua parte volumétrica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v$ e deviatória $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$.

$$\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = n_{ij} \left[\frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij}^d \right],$$

Uma vez que $n_{ij} \delta_{ij} = n_{pp} = 0$, segue-se que

$$\boxed{\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d} \quad (22.90)$$

Usando (22.88)-(22.90) em (22.87), com $\partial f/\partial \beta = -\mathbf{n}$ e $\partial f/\partial q_\alpha = \sqrt{2/3}$ tem-se

Entidades e produtos de entidades tensoriais usadas na teoria de plasticidade podem ser convertidos em produtos de entidades vetor-matriz conforme a Tabela 22.2.

Tabela 22.2: Entidades e produtos tensoriais e suas conversões em entidades vetor-matriz em notação de Voigt.

Tensor		→	Vetor-matriz
$\boldsymbol{\sigma}$	σ_{ij}	→	$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T$,
$\boldsymbol{\varepsilon}$	ε_{ij}	→	$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}\}^T$,
\mathbf{n}	n_{ij}	→	$\bar{\mathbf{n}} = \{n_{11}, n_{22}, n_{33}, n_{23}, n_{31}, n_{12}\}^T$,
$\mathbf{n} : \boldsymbol{\varepsilon}$	$n_{ij}\varepsilon_{ij}$	→	$\bar{\mathbf{n}}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{n}_k \varepsilon_k, k = 1 \text{ a } 6$
$\mathbf{n} : \mathbf{n}$	$n_{ij}n_{ij}$	→	$\bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{n}} = \bar{n}_k M_{kl} \bar{n}_l, k, l = 1 \text{ a } 6$
		→	$\mathbf{M} = \text{Diag}[1, 1, 1, 2, 2, 2]$,
\mathbf{I}		→	$\mathbf{I} = \text{Diag}[1, 1, 1, 1, 1, 1]$,
$\mathbf{1}$		→	$\mathbf{1} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T$,
$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$	$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$	→	$\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_k \varepsilon_k, k = 1 \text{ a } 6$
$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$	$\sigma_{ij} = C_{ijrs}\varepsilon_{rs}$	→	Ver eqs. (22.94) e (22.96)

Observe que, por motivo de simplicidade, não foram criadas notações distintas para os símbolos da notação tensorial e vetorial, exceto por \mathbf{n} e $\bar{\mathbf{n}}$. Em geral o leitor saberá distinguir um tipo do outro pelo contexto. Em particular, as notações nunca são misturadas numa mesma expressão.

Taxa de deformação plástica equivalente

O termo $\|\boldsymbol{\eta}\|$ na definição de f em (22.86) pode ser interpretado como uma **tensão equivalente**,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}}. \tag{22.97}$$

Analogamente, existe a definição de **taxa de deformação plástica equivalente**,

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| \tag{22.98}$$

O motivo da introdução do fator $\sqrt{2/3}$ na definição é para que o valor de $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$ num problema uniaxial reverta-se exatamente no valor da taxa de deformação plástica axial aplicada. Para ver isso, considere-se um **estado uniaxial de tensões**, dado por $\dot{\sigma}_x$. Existe um **efeito de Poisson plástico**, que gera deformações plásticas laterais, $\dot{\varepsilon}_y^p$ e $\dot{\varepsilon}_z^p$, a partir da deformação axial $\dot{\varepsilon}_x^p$, tal que o tensor fica

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_x^p & & \\ & -v_p \dot{\varepsilon}_x^p & \\ & & -v_p \dot{\varepsilon}_x^p \end{bmatrix} \tag{22.99}$$

onde v_p é o **coeficiente de Poisson plástico**.

Um dos fundamentos físicos da teoria J_2 de plasticidade é a evidência experimental que o escoamento em certos materiais (metais, principalmente), em certas situações, ocorre com **preservação de volume**. Isso se traduz em

$$\text{tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0 \tag{22.100}$$

Aplicando o estado (22.99), o traço nulo resulta em $(1 - 2v_p)\dot{\varepsilon}_x^p = 0$, o que gera o tão conhecido valor do **coeficiente de Poisson plástico**:

Etapa 2 - O método de Newton-Raphson que é acoplado ao MEF produz uma estimativa da solução na interação k . Essa solução é o vetor de incrementos dos deslocamentos nodais $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$. A partir de $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$, as relações cinemáticas produzem $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i)}$ em cada ponto de integração.

Etapa 3 - Em cada ponto de integração de cada elemento é realizado um **cálculo local** de integração numérica das equações elastoplásticas do material, de forma que $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ é usado para calcular as novas estimativas de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(i)}$ e $\mathbf{q}_{n+1}^{(i)}$ para a iteração i , usando valores convergidos no **nível de carga** n .

Etapa 4 - Após o cálculo em todos os pontos de integração, as forças residuais das equações de equilíbrio são obtidas e o teste do equilíbrio é realizado. Se a convergência não é satisfeita, uma nova interação de Newton - Raphson é realizado, a partir da etapa 2.

As **etapas 1, 2 e 4** que concernem a solução dos problemas elastoplásticos pelo MEF e ao método de Newton-Raphson, serão descritos nas seções seguintes. A etapa 3, que consiste no cálculo local, é desenvolvido nessa seção, com a dedução dos algoritmos de integração das equações contínuas de elastoplasticidade vistas nas seções anteriores, em problemas tridimensionais.

Aqui descreveremos apenas o algoritmo para plasticidade J_2 , denominado **algoritmo de retorno radial**, em sua forma clássica obtida por Wilkins [62], com as extensões de Krieg e Key [62] para incluir encruamentos isotrópicos e cinemáticos lineares. Uma descrição detalhada é dada por Simo [94]. A presente seção faz toda a dedução do algoritmo, e a sequência de cálculo é sumarizada no Fluxograma 22.2, página 626.

22.3.1 Integração - Modelo J_2

As **equações contínuas** do modelo J_n com encruamentos não lineares vem de (22.86), das quais buscamos integrar as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \equiv \|\boldsymbol{\eta}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K_\alpha(\alpha), \\ \boldsymbol{\eta} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \mathbf{n}, \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = \gamma \frac{2}{3} H' \mathbf{n}, \quad \dot{q}_\alpha = -\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} K'_\alpha(\alpha) \\ \dot{\alpha} = \gamma \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \dot{\mathbf{q}} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_\alpha \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{array} \right\} = -\gamma \mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}. \end{array} \right. \quad (22.108)$$

A integração das taxas é feita pela regra de Euler implícita ($\theta = 1$ em (22.25) e (22.27)):

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \gamma \mathbf{n}_{n+1} \quad \text{com} \quad \mathbf{n}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{\|\boldsymbol{\eta}_{n+1}\|}, \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{com} \quad \Delta \gamma = \gamma \Delta t. \end{array}} \quad (22.109)$$

Tomando a discretização de $H'(\alpha)$ como $\Delta H / \Delta \alpha$, tem-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{n+1} &= \boldsymbol{\beta}_n + \gamma \Delta t \frac{2}{3} \frac{\Delta H_{n+1}}{\Delta \alpha} \mathbf{n}_{n+1}, \quad \text{onde} \\ \Delta H_{n+1} &= H(\alpha_{n+1}) - H(\alpha_n) \quad \text{e} \quad \Delta \alpha = \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (22.110)$$

$\Delta \gamma$ foi definido como $\boxed{\Delta \gamma = \gamma \Delta t}$. Então,

A **parcela deviatórica**, $\Delta \mathbf{e}_{n+1}$, que pode conter uma parcela elástica e outra plástica, é submetida ao algoritmo de integração. Então, $(22.109)_1$ gera

$$\mathbf{e}_{n+1}^p - \mathbf{e}_n^p = \Delta \gamma \mathbf{n}_{n+1}, \quad \text{isto é,} \quad \Delta \mathbf{e}_{n+1}^p = \Delta \gamma \mathbf{n}_{n+1}. \quad (22.119)$$

Considera-se nesse ponto a relação constitutiva elástica para a parcela deviatórica:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= 2G \mathbf{e}_{n+1}^e = 2G (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p), \\ \mathbf{s}_{n+1}^{tr} &= 2G \mathbf{e}_{n+1}^{tr} = 2G (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^p). \end{aligned}$$

Note que \mathbf{e} é a parcela deviatórica de $\boldsymbol{\varepsilon}$. Subtraindo ambas as relações, tem-se

$$\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_{n+1}^{tr} = 2G \mathbf{e}_n^p - 2G \mathbf{e}_{n+1}^p = -2G \Delta \mathbf{e}_{n+1}^p.$$

Finalmente, tomando (22.119), $\Delta \mathbf{e}_{n+1}^p = \Delta \gamma \mathbf{n}_{n+1}$, chega-se à importante relação

$$\boxed{s_{n+1} = s_{n+1}^{tr} - 2G \Delta \gamma \mathbf{n}_{n+1}} \quad (22.120)$$

Essa relação, junto à definição de \mathbf{s}_{n+1}^{tr} em (22.114), pode ser visualizada como uma composição vetorial na Figura 22.16. O nome “método de retorno radial” deve-se ao fato que, sendo a superfície de escoamento $f = 0$ de formato cilíndrico-circular na formulação J_2 , a correção (retorno à superfície) $2G \Delta \gamma \mathbf{n}_{n+1}$ é um vetor radial, pois é normal à superfície. Em outras formulações, baseadas em superfícies de escoamento distintas da J_2 , o método é simplesmente de retorno normal à superfície de escoamento.

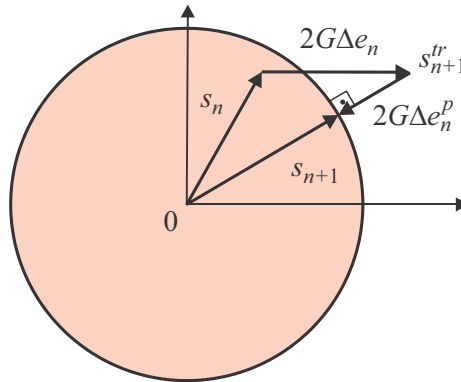
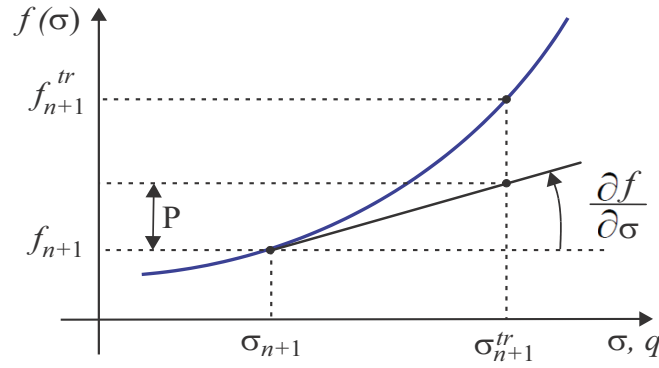


Figura 22.16: Visualização do método de retorno radial.

O método de retorno foi proposto por Krieg e Key em 1976 [62]. No caso de modelo J_2 , tem-se o retorno radial, e Krieg e Krieg em 1977 [63] mostraram que este método é superior aos métodos anteriores, como o método tangente, por exemplo.

A tensão relativa vem de (22.108):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{n+1} &\equiv \mathbf{s}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1} && \text{(usar (22.120))} \\ &= \mathbf{s}_{n+1}^{tr} - \boldsymbol{\beta}_{n+1} - 2G \Delta \gamma \mathbf{n}_{n+1} && \text{(usar (22.111))} \\ &= \underbrace{\mathbf{s}_{n+1}^{tr}}_{\left(\boldsymbol{\beta}_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta H \mathbf{n}_{n+1} \right)} - 2G \Delta \gamma \mathbf{n}_{n+1} && \text{(usar (22.115))} \\ \boldsymbol{\eta}_{n+1} &= \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{tr} - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta H_{n+1} + \Delta \gamma 2G \right) \mathbf{n}_{n+1}. && (22.121) \end{aligned}$$

Figura 22.17: Ilustração de função convexa n -dimensional.

Substituindo em (22.125) tem-se

$$f_{n+1}^{tr} - f_{n+1} \geq \Delta\gamma \left[\underbrace{\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma}}_{\left\| \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma} \right\|_{\mathbf{C}}} + \underbrace{\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{q}} : \mathbf{D} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{q}}}_{\left\| \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{q}} \right\|_{\mathbf{q}}} \right] \quad (22.128)$$

Os dois termos à direita são as normas dos tensores baseados nos tensores peso \mathbf{C} e \mathbf{D} . O tensor elástico \mathbf{C} é positivo-definido. Considera-se a condição que \mathbf{D} também seja positivo-definido. Consequentemente, uma vez que $\Delta\gamma \geq 0$, o lado direito é sempre ≥ 0 , o que demonstra a condição (22.124). Com a condição (22.124), as condições de carga e descarga discretizadas de Kuhn-Tucker, em termos apenas de f_{n+1}^{tr} , são:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f_{n+1}^{tr} < 0 & \Leftrightarrow \Delta\gamma = 0 \text{ (passo elástico)} \\ f_{n+1}^{tr} > 0 & \Rightarrow \Delta\gamma > 0 \text{ (passo plástico)} \end{array}} \quad (22.129)$$

Essas condições podem ser demonstradas da seguinte forma. Primeiro, se $f_{n+1}^{tr} < 0$, de (22.124) segue-se que $f_{n+1} < 0$, o que significa incremento elástico. A outra opção, se $f_{n+1}^{tr} > 0$, então o estado teste não é fisicamente viável, então ocorre plastificação com $\Delta\gamma > 0$. Também, como $\Delta\gamma f_{n+1} = 0$, segue-se que $f_{n+1} = 0$.

Observação - 12: a conclusão de (22.124) e de (22.129) é que todas as decisões tomadas através de f_{n+1} , são as mesmas que seriam tomadas com f_{n+1}^{tr} .

22.3.2 Cálculo do parâmetro de consistência $\Delta\gamma$

Caso $\Delta\gamma > 0$, de (22.123) tem-se $f_{n+1} = 0$, isto é,

$$f_{n+1} \equiv \|\boldsymbol{\eta}_{n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K_{\alpha}(\alpha_{n+1}) = 0. \quad (22.130)$$

O problema consiste em identificar o valor de $\Delta\gamma$ que faz $f_{n+1} = 0$. Fazendo o produto de (22.121) por \mathbf{n}_{n+1} tem-se

$$\begin{aligned} \underbrace{\boldsymbol{\eta}_{n+1} : \mathbf{n}_{n+1}}_{\text{usar eq.(22.122)}} &= \underbrace{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{tr} : \mathbf{n}_{n+1}}_{\text{usar eq.(22.122)}} - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta H_{n+1} + \Delta\gamma 2G \right) \underbrace{\mathbf{n}_{n+1} : \mathbf{n}_{n+1}}_1 \\ \|\boldsymbol{\eta}_{n+1}\| &= \|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{tr}\| - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta H_{n+1} + \Delta\gamma 2G \right). \end{aligned}$$

O lado esquerdo é eliminado com a segunda igualdade de (22.130), e pode-se gerar uma função $p(\Delta\gamma)$ definida por:

$$p(\Delta\gamma) \equiv -\sqrt{\frac{2}{3}}K_\alpha(\alpha_{n+1}) + \|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{tr}\| - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta H_{n+1} + \Delta\gamma 2G\right) = 0. \quad (22.131)$$

Nessa expressão a única incógnita é $\Delta\gamma$, que aparece explicitamente no último termo e implicitamente em $K_\alpha(\alpha_{n+1})$ ou ΔH_{n+1} . A próxima etapa consiste em determinar a raiz da função $p(\Delta\gamma) = 0$. Se houver encruamento não linear, expresso em $K_\alpha(\alpha_{n+1})$ ou ΔH_{n+1} dependentes não-linearmente de $\Delta\gamma$, a raiz só poderá ser obtida por interações locais de Newton-Raphson.

Método de Newton-Raphson para $\Delta\gamma$ com encruamento não linear

Inicialmente, revisamos o método de Newton-Raphson geral para a determinação da raiz de uma função escalar arbitrária $r(x)$, isto é, para obter uma aproximação da raiz do problema

$$r(x) = 0.$$

A série de Taylor em torno de um valor $x^{(i)}$, retendo apenas até o termo linear, é

$$r(x^{(i)} + \delta x^{(i)}) = r(x^{(i)}) + \left.\frac{dr}{dx}\right|_{x^{(i)}} \delta x^{(i)}.$$

As etapas de cálculo do método de Newton-Raphson são as seguintes.

Etapa 1 - Início das interações. Impondo $r(x^{(i)} + \delta x^{(i)}) = 0$, tem-se a correção $\delta x^{(i)}$ resolvendo

$$\boxed{\left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_{x^{(i)}} \delta x^{(i)} = -r(x^{(i)})} \quad (22.132)$$

Etapa 2 - Atualização. A estimativa da raiz é melhorada por

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \delta x^{(i)}. \quad (22.133)$$

Etapa 3 - Testes de convergência. Essa estimativa $x^{(i+1)}$ é satisfatória se o erro no resíduo $r(x^{(i+1)})$ e em $x^{(i+1)}$ são abaixo de certas tolerâncias prescritas tol e TOL :

$$\boxed{|r(x^{(i+1)})| \leq \text{tol} \quad \text{e} \quad \left|\frac{\delta x^{(i)}}{x^{(i+1)}}\right| \leq \text{TOL}} \quad (22.134)$$

Se a tolerância não foi atingida, voltar à **Etapa 1**, eq.(22.132), utilizando $x^{(i)} = x^{(i+1)}$. Inicialmente, antes da **Etapa 1**, um valor $x^{(0)}$ é arbitrado.

Para o problema plástico $p(\Delta\gamma) = 0$ em (22.131), o algoritmo de Newton-Raphson toma a forma mostrada no Fluxograma 22.1.

Fluxograma 22.1

Determinação de $\Delta\gamma$ em encruamento não linear pelo método de Newton-Raphson.

Etapa 0 - Inicialização. $\Delta\gamma^{(0)} = 0$ e $\alpha_{n+1}^{(0)} = \alpha_n$. Utilizar $\alpha_1^{(0)} = 0$.

Etapa 1 - Iterações

Encruamento isotrópico quadrático - forma fechada de $\Delta\gamma$

As formas de encruamento mais usadas são a linear, a multilinear e a potencial. A aproximação quadrática para o encruamento isotrópico, apesar de não ser comum, apresenta vantagem de aproximar a curva do material melhor que a linear, e também permite solução fechada para $\Delta\gamma$, sem depender do processo iterativo de Newton-Raphson.

Consideram-se os encruamentos nas formas

$$\boxed{\begin{aligned} H(\alpha) &= h_c \alpha \rightarrow \Delta H_{n+1} = h_c \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ K_\alpha(\alpha) &= \sigma_E + h_i \alpha + c_1 \alpha^2 \end{aligned}} \quad (22.139)$$

onde h_i , h_c e c_1 são constantes do material. Procedendo da mesma forma que no caso linear, tem-se que:

$$f_{n+1}^{tr} \equiv \|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{tr}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_E + h_i \alpha_n + c_1 \alpha_n^2). \quad (22.140)$$

Assim, $p(\Delta\gamma)$ em (22.131) fica

$$p(\Delta\gamma) \equiv \|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{tr}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sigma_E + h_i \left(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \right) + c_1 \left(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \right)^2 \right] - \left(\frac{2}{3} h_c \Delta\gamma + 2G \Delta\gamma \right) = 0.$$

Expandindo os produtos e usando (22.140), obtém-se

$$\boxed{c_1 \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma^2 + 2 \left[\frac{h_i}{3} + c_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_n + \left(\frac{h_i}{3} + G \right) \right] \Delta\gamma - f_{n+1} = 0} \quad (22.141)$$

Esse é um polinômio de segundo grau que pode ser resolvido para $\Delta\gamma$. Essa expressão incorpora o caso do encruamento linear, $c_1 = 0$, o que resulta na mesma expressão de $\Delta\gamma$ mostrada em (22.138).

22.3.3 Tensor tangente elastoplástico algorítmico

Na equação (22.73) tem-se o tensor elastoplástico contínuo, que é exato em relacionar incrementos diferenciais, isto é, $d\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt$ e $d\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dt$. Entretanto, no processo algorítmico, onde se realiza a computação usando incrementos finitos, $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, etc., esse tensor não mais é exato, e seu uso leva a que o processo geral de Newton-Raphson do equilíbrio global, usado no MEF (a ser visto na próxima seção), apresenta taxa de convergência inferior, da mesma ordem de um método de Newton-Raphson modificado. O conceito de tensor tangente algorítmico foi introduzido por Hughes e Taylor [51], e desenvolvido por Simo e Taylor em 1985 [92]. A descrição que se segue é um detalhamento das deduções de Hughes e Taylor e de Simo [94], e é válida para materiais isotrópicos em formulação J_2 .

Busca-se o tensor tangente algorítmico \mathbf{C}^{ep} que é tal que

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^{ep} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{C}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}. \quad (22.142)$$

Para obter sua expressão considera-se a relação elástica na forma (22.112):

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = K \varepsilon_{qq} \delta_{ij} + 2G (e_{ij} - \Delta\gamma n_{ij}), & \text{onde} \\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{pp} \delta_{ij} \text{ é a deformação deviatórica.} \end{cases} \quad (22.143)$$

Então, (22.142) fica (removemos os índices $n+1$ para enxugar a notação)

e $\theta_{n+1} \rightarrow 1$ e $\Delta \rightarrow 0$, isto é, ambos os tensores coincidiriam. Entretanto, na computação, Δt é finito, e deve-se utilizar o tensor algarítmico (22.162).

Observação: Todo o algoritmo de integração da formulação J_2 com encruamento misto não linear, detalhado nessa seção, é sumarizado no **Fluxograma 22.3**, na página **627**.

22.4 Elementos finitos em plasticidade

Nessa seção a formulação de plasticidade descrita nas seções anteriores é utilizada numa formulação de elementos finitos, gerando um problema de equilíbrio discretizado, algébrico, não linear, para um estado triaxial de tensões.

A formulação descrita aqui é clássica, e pode ser vista também em livros como o de Zienkiewicz [115] e Simo [94].

De forma similar ao problema linear, o ponto de partida é o **princípio dos trabalhos virtuais** (PTV), equação (8.12), cujo enunciado é: *determinar $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in Kim$ tal que:*

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}ar. \quad (22.164)$$

$\hat{\mathbf{u}}$ é uma função peso arbitrária, pertencente ao espaço das variações $\mathcal{V}ar$. $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é uma deformação virtual definida linearmente pela função peso. \mathbf{f} e \mathbf{b} são funções conhecidas, representando os carregamentos de superfície e de volume aplicados. Ω , Γ_f e Γ_u representam o domínio da função (o volume do corpo), a região do contorno em que forças são aplicadas e a parte do contorno em que condições de contorno de deslocamento são aplicadas, respectivamente. O domínio $\Omega \subset R^d$, onde d é a dimensão do espaço euclidiano, isto é, $d = 1, 2$ ou 3 para problemas uni-, bi- ou tridimensionais. $\boldsymbol{\sigma}$ é o campo de tensões físico, solução do problema, que deve satisfazer as condições de equilíbrio. Observa-se que essa expressão, de fato, não contém relação constitutiva, sendo portanto válida para uma grande variedade de modelos de materiais. Nos capítulos anteriores foi aplicado ao problema linear, mas agora será aplicada à relação constitutiva de plasticidade. Isso se reduz na forma não linear como $\boldsymbol{\sigma}$ se relaciona a $\boldsymbol{\varepsilon}$. A relação cinemática $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ utilizada aqui ainda será a relação linear, de forma coerente com a formulação de plasticidade infinitesimal.

Antes de prosseguir na dedução, é útil converter a expressão do PTV de notação tensorial para a **notação de Voigt**, já indicada nas equações (22.95), (22.96) e na Tabela 22.2.5. Então, o PTV em (22.164) é expresso nessa notação como:¹

$$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} \, d\Omega = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}ar. \quad (22.165)$$

A discretização pelo MEF para uma análise de pequenas deformações é feita por funções de aproximação contínuas em todo o domínio Ω , que aproximam os deslocamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \{u, v, w\}^T$ por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{U}, \quad (22.166)$$

onde $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ e \mathbf{U} são a matriz de função de interpolação e o vetor de deslocamentos nodais, como na análise linear das equações (8.103). Usando a relação deformação-deslocamento linear (8.106) e usando \mathbf{N} também para aproximar a função peso tem-se

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}, \quad \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{U}} \quad \text{e} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{U}}. \quad (22.167)$$

Substituindo (22.166) e (22.167) em (22.165) tem-se a forma discreta do PTV: *determinar $\mathbf{U} \in R^N$ tal que* (lembrar que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U})$ através de uma relação não linear elastoplástica):

¹A partir desse ponto do texto, todo o equacionamento está na notação de Voigt.

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \mathbf{f} \, d\Gamma \right\} = \mathbf{0} \quad (22.168)$$

onde já foi imposta a condição de que $\hat{\mathbf{U}} \in R^N$ tal que os deslocamentos virtuais sejam tais que $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{U}} \in Var^h$. Var^h é o espaço discretizado das variações, tal que $Var^h \subset Var$.

Definem-se as seguintes quantidades:

- N_{no} é o número de nós globais no modelo,
- n_{glno} é o número de graus de liberdade por nó (3 num modelo sólido tridimensional e 2 num problema plano, por exemplo),
- N é o **número de graus de liberdade no modelo**. Se todos os nós tem a mesma quantidade de graus de liberdade, tem-se que $N = n_{glno} \times N_{no}$.

Então (22.168) representa N equações de equilíbrio discretas. No problema linear com $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ a equação (22.168) se torna igual a (8.109), gerando a matriz de rigidez \mathbf{K} e o vetor força em (8.110). Já no caso do material elastoplástico, $\boldsymbol{\sigma}$ é uma função não linear de $\boldsymbol{\varepsilon}$, dada em forma incremental através da matriz elastoplástica incremental (22.162), $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{ep}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, onde $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ e \mathbf{C}^{ep} , de fato, dependem de \mathbf{U} . Isso torna necessário o uso de um método iterativo para a solução do problema. A próxima seção revisa o método de Newton-Raphson em sua forma geral e em seguida é feita sua aplicação ao problema (22.168) com material elastoplástico.

Note que além desse método, diversos outros existem, como o método Quase-Newton e os de comprimento de arco, que não serão revistos aqui.

22.4.1 O método de Newton-Raphson (N-R)

Problema uniaxial - Newton-Raphson completo

A situação mais simples consiste no caso de uma função $r = R(x) - F$ que se deseja determinar uma raiz x tal que

$$r(x) \equiv R(x) - F = 0 \quad (22.169)$$

Considera-se um processo iterativo para obter uma aproximação para a raiz x . Considera-se que se tenha uma aproximação para a raiz $x^{(i-1)}$. Então pode-se expandir r em série de Taylor em torno de $x^{(i-1)}$ e pode-se negligenciar os termos de ordem superior a 1, e faz-se $r(x^{(i)}) = 0$:

$$r(x^{(i)}) = r(x^{(i-1)}) + \left. \frac{dr}{dx} \right|_{x^{(i-1)}} \Delta x = 0,$$

onde $\Delta x = x^{(i)} - x^{(i-1)}$. Então,

$$\Delta x = - \left(\left. \frac{dr}{dx} \right|_{x^{(i-1)}} \right)^{-1} r(x^{(i-1)}). \quad (22.170)$$

O lado direito é todo conhecido, pois depende apenas de $x^{(i-1)}$. Tendo Δx , obtém-se uma nova aproximação, (melhorada, caso o processo esteja convergindo) por

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + \Delta x. \quad (22.171)$$

Testa-se a convergência verificando se o resíduo é suficientemente pequeno

$$\left| r(x^{(i)}) \right| \leq tol \quad \text{e/ou} \quad \left| \frac{\Delta x}{x^{(i)}} \right| \leq TOL. \quad (22.172)$$

Esse é o método de Newton-Raphson chamado **completo**, por que, a cada iteração, a tangente dr/dx é recalculado para uso em (22.170). Num problema uniaxial isso não envolve nenhum custo

22.4.2 Método BFGS

A classe de algoritmos quase-Newton se constitui em métodos que se pode considerar como intermediários entre os métodos de Newton-Raphson completo e modificado. O N-R consegue uma alta taxa de convergência, mas requer o cálculo de uma nova matriz tangente e sua fatoração a cada iteração. O N-R modificado economiza nessas operações mas apresenta baixa taxa de convergência. Nos métodos quase-Newton, apenas uma matriz tangente inicial é obtida e fatorada. A cada iteração sua inversa é apenas atualizada por operações de baixo custo. Essa matriz atualizada é uma matriz secante na iteração, em vez de tangente. Essa matriz secante tem inclinação intermediária entre a tangente do método de N-R e a matriz de varias iterações anteriores do N-R modificado. Em geral, sua taxa de convergência é intermediária entre quadrática e linear. O número de iterações para atingir determinado erro de convergência é, muitas vezes, apenas um pouco superior ao método N-R completo.

Entre os métodos quase-Newton, o mais usado e eficiente em aplicações gerais é o método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) que é sumarizado sem dedução a seguir [71]. Esse é considerado o método mais eficiente disponível em aplicações gerais quando se considera o tempo total de processamento em vez de apenas o número de iterações (quando a vantagem é o de N-R), ou o custo por iteração (quando a vantagem é o N-R modificado). O método é adequado para análise de sólidos elastoplásticos com encruamento, amolecimento ou plasticidade perfeita. Também não apresenta dificuldades no caso de descarregamento.

Considera-se o problema algébrico não linear definido pelo resíduo (22.172). Numa iteração i o resíduo $\mathbf{r}^{(i)}$ é

$$\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{r}(\mathbf{U}^{(i)}) = \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(i)}) - \mathbf{F}. \quad (22.176)$$

O incremento de deslocamento entre duas iterações é

$$\delta\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i)} - \mathbf{U}^{(i-1)}, \quad (22.177)$$

e o incremento entre dois resíduos é

$$\delta\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{r}^{(i-1)}. \quad (22.178)$$

Numa iteração $i = 2, 3, \dots$, considera-se disponível $\mathbf{U}^{(i-1)}$ e a inversa de uma matriz secante $(\mathbf{K}^{(i-1)})^{-1}$ obtida na iteração anterior (a iteração $i = 1$ será descrita ao final). Calcula-se

$$\delta\mathbf{U}^{(i)} = - \left(\mathbf{K}^{(i-1)} \right)^{-1} \delta\mathbf{r}^{(i-1)}, \quad (22.179)$$

o que produz a aproximação

$$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i-1)} + \delta\mathbf{U}^{(i)}. \quad (22.180)$$

O novo resíduo $\mathbf{r}^{(i)}$ é calculado de (22.176). O teste de convergência para uma tolerância prescrita tol do erro é feito por

$$\mathbf{U}^{(i)} \cdot \mathbf{r}^{(i)} \leq tol \mathbf{U}^{(i)} \cdot \mathbf{r}^{(i-1)}. \quad (22.181)$$

Sem dúvida que o desafio consiste em determinar $(\mathbf{K}^{(i)})^{-1}$ para a próxima iteração. O algoritmo consiste no seguinte

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}^{(i)})^{-1} &= \mathbf{A}^{(i)T} \left(\mathbf{K}^{(i-1)} \right)^{-1} \mathbf{A}^{(i)}, \text{ onde} \\ \mathbf{A}^{(i)} &= \mathbf{1} + \mathbf{v}^{(i)} \mathbf{w}^{(i)T}. \end{aligned} \quad (22.182)$$

$\mathbf{1}$ é uma matriz identidade de ordem N e $\mathbf{v}^{(i)}$ e $\mathbf{w}^{(i)}$ são vetores coluna dados por

As matrizes $(\mathbf{K}^{(i)})^{-1}$ em (22.182) são simétricas e positivas definidas desde que a matriz inicial também o seja. Entretanto, ao longo das iterações, os vetores de atualização podem indicar uma matriz secante mal condicionada. É provado que o **número de condição** da matriz atualizada é o fator $c^{(i)}$ usado no cálculo de $\mathbf{v}^{(i)}$. O procedimento usual é que se esse número de condição exceda um valor prescrito de tolerância (por exemplo 10^5), a atualização da matriz não é feita naquela iteração.

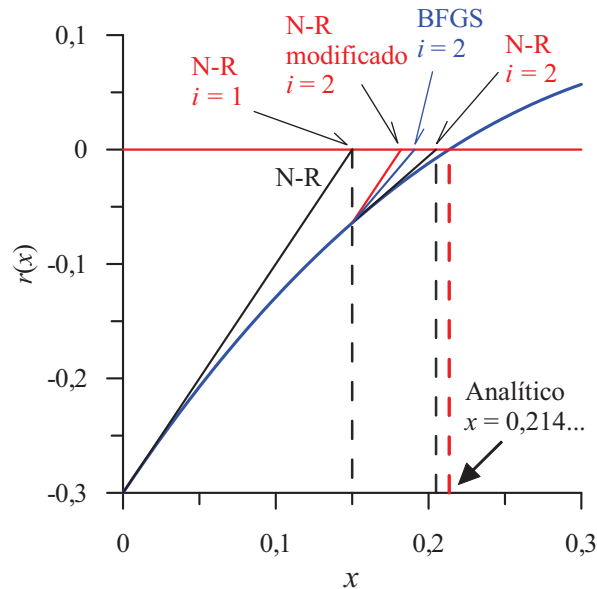


Figura 22.18: Resultados do Exemplo 2.

22.4.3 Exemplo 22.2 - Método de N-R completo, N-R modificado e BFGS em 1D

Considere o problema de determinação de uma das raízes da função $r(x) \equiv x(x-1)(x-2) - 0,3 = x^3 - 3x^2 + 2x - 0,3$. Usar o “chute” inicial $x^{(0)} = 0$. Note que a solução analítica é $x_{exato} = 0,213.517.458.838.372.84$.

Solução:

Seguindo o procedimento de Newton-Raphson, tem-se a expressão para a tangente $dr/dx|_{x^{(i-1)}} = 3(x^{(i-1)})^2 - 6(x^{(i-1)}) + 2$, que é utilizada no método de N-R completo. Para o método de N-R modificado, utiliza-se aqui a tangente inicial $dr/dx|_{x^{(0)}} = 3(x^{(0)})^2 - 6(x^{(0)}) + 2 = 2$. Assim, tem-se os resultados para as seis primeiras iterações na Tabela 22.3. A Figura 22.18 mostra os resultados para as duas primeiras iterações. Nota-se que, devido ao recálculo da tangente, a segunda estimativa do método de N-R completo já se aproxima melhor da raiz que a estimativa do método de N-R modificado. Na tabela, os termos entre parênteses nas iterações $i = 5$ e 6 , indicam o erro relativo ($e^{(i)} = (x^{(i)} - x_{exato})/x_{exato}$) atingido pela estimativa. A figura e a tabela mostram também os resultados para o método BFGS. Na figura aparecem as retas usadas na iteração $i = 2$ para os três métodos. A inclinação da reta mostrada para o BFGS é $\mathbf{K}^{(1)}$, e é intermediária às inclinações dos métodos de N-R e N-R modificado. Observando a tabela nota-se que um erro relativo na faixa de 10^{-4} é atingido no método de N-R na 3a iteração, e no método BFGS na 4a iteração. No método de N-R modificado esse erro só será obtido além da décima iteração.

Tabela 22.3: Resultados dos Exemplo 2. Os termos entre parênteses são erro relativo.

i	N-R completo			N-R Modificado		BFGS	
	$r^{(i-1)}$	$\frac{dr}{dx} _{i-1}$	$x^{(i)}$	$r^{(i-1)}$	$x^{(i)}$	$r^{(i-1)}$	$x^{(i)}$
0			0				
1	-0,3	2	0,150	-0,3	0,150	-0,3	0,150
2	-0,0641	1,168	0,204.9	-0,0641	0,182	-0,0641	0,1908
3	$-7,53 \cdot 10^{-3}$	0,8964	0,213.322	-0,0292	0,197	-0,0207	0,2102
4	$-1,68 \cdot 10^{-4}$	0,8566	0,213.517	-0,0151	0,204	$-2,86 \cdot 10^{-3}$	0,213.321 ($-9,2 \cdot 10^{-4}$)
5	$-9,03 \cdot 10^{-8}$	0,8557	0,213.517 ($4,9 \cdot 10^{-7}$)	$-8,15 \cdot 10^{-3}$	0,208	$-1,68 \cdot 10^{-4}$	0,213.516 ($-8,3 \cdot 10^{-6}$)
6	$-2,63 \cdot 10^{-14}$	0,8557	0,213.517 ($1,4 \cdot 10^{-13}$)	$-4,52 \cdot 10^{-3}$	0,211 (-0.0118)	$-1,52 \cdot 10^{-6}$	0,213.517 ($-4,5 \cdot 10^{-9}$)

22.4.4 Solução do problema elastoplástico de EF por N-R

O sistema (22.168) é o sistema algébrico de equilíbrio, de N equações não lineares, em que se busca a solução $\mathbf{U} \in R^N$ dos deslocamentos nodais. Esse sistema pode ser escrito em forma vetorial como

$$\mathbf{r}(\mathbf{U}) = \mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (22.187)$$

onde

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Gamma. \quad (22.188)$$

\mathbf{R} é o vetor de forças internas, \mathbf{F} o de forças externas e $\mathbf{r}(\mathbf{U})$ o vetor de resíduos. Dado um carregamento \mathbf{F} , a solução exata \mathbf{U} garante um resíduo \mathbf{r} nulo. Para uma solução aproximada, \mathbf{r} será não nulo.

Normalmente, numa análise elastoplástica, o carregamento não é aplicado em uma única etapa, mas dividido em diversos níveis de carga. Usando-se um contador para os níveis de carga se tem

$$\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n, \mathbf{F}_{n+1}, \text{ etc.} \quad (22.189)$$

Os contadores podem ser vistos como valores de tempo, embora esse tempo apenas indique a sucessão dos carregamentos e não seja o tempo físico, pela ausência de efeitos de inércia na formulação. Esses vetores não necessariamente precisam ser frações uns dos outros. Em vez disso podem ter componentes que crescem e decrescem de forma independentes ao longo do tempo.

Todo o processo de solução é baseado no fato de que toda a solução é completamente conhecida no nível de carga \mathbf{F}_n (são conhecidos $\mathbf{U}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \alpha_n$, etc), e, dado \mathbf{F}_{n+1} , busca-se uma estimativa da solução global de (22.187) dentro de um nível de tolerância de erro pré-estabelecida.

No nível de carga $(n+1)$, o vetor força é decomposto incrementalmente por

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_n + \Delta \mathbf{F}_n. \quad (22.190)$$

A solução buscada também é incremental:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n+1} &= \mathbf{U}_n + \delta \mathbf{U}, \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_n + \delta \boldsymbol{\sigma}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n + \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (22.191)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{U}_n) = \mathbf{R}(\mathbf{U}_n) - \mathbf{F}_n = \mathbf{0}.$$

Já em $n + 1$, o resíduo é

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n+1}^{(0)} &= \mathbf{R}(\mathbf{U}_{n+1}) - \mathbf{F}_{n+1} \neq \mathbf{0}, \\ &= -(\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_n). \end{aligned} \quad (22.202)$$

Observação: As tensões $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)}$ para o cálculo das forças internas em (22.200) são obtidas a partir de $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i)}$, integrando a relação constitutiva elastoplástica, a partir dos valores conhecidos, que satisfazem equilíbrio com o carregamento: \mathbf{F}_n , isto é, $\boldsymbol{\sigma}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$, α_n etc. Não são usados os resultados da iteração de N-R anterior, $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i-1)}$.

Na primeira iteração em $n = 1$, isto é, $i = 0$, o sistema a ser resolvido é

$$\mathbf{K}_{t1}^{(0)} \delta \mathbf{U}_1^{(0)} = -r_1^{(0)} = \mathbf{F}_1. \quad (22.203)$$

$\mathbf{K}_1^{(0)}$ é obtido de forma linear com a matriz elástica, isto é,

$$\mathbf{K}_{t1}^{(0)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (22.204)$$

Os critérios de convergência mais utilizados são os seguintes:

1. **Critério de deslocamento:**

$$\left\| \delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i)} \right\|_{L_2} \leq \epsilon_D \left\| \mathbf{U}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{U}_n \right\|_{L_2} \quad (22.205)$$

onde $\|\cdot\|_{L_2}$ é a norma Euclidiana do vetor e ϵ_D uma tolerância.

2. **Critério de equilíbrio, dado por**

$$\left\| \underbrace{\mathbf{R}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{F}_{n+1}}_{\mathbf{r}_{n+1}^{(i)}} \right\|_{L_2} \leq \epsilon_F \left\| \underbrace{\mathbf{R}_n^{(0)} - \mathbf{F}_{n+1}}_{\mathbf{r}_{n+1}^{(0)} = -\Delta \mathbf{F} = -(\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_n)} \right\|_{L_2} \quad (22.206)$$

A norma à direita é o resíduo inicial $\mathbf{r}_{n+1}^{(0)}$, que é sempre um valor não nulo, e a da esquerda é a norma do resíduo atual $\mathbf{r}_{n+1}^{(i)}$.

3. **Critério de energia interna**, que avalia simultaneamente tanto o erro em deslocamento quanto o desequilíbrio da força interna:

$$\delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i)T} \left(\mathbf{R}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{F}_{n+1} \right) \leq \epsilon_E \delta \mathbf{U}_{n+1}^{(1)T} \left(\mathbf{R}_n^{(0)} - \mathbf{F}_{n+1} \right) \quad (22.207)$$

O lado esquerdo é o trabalho realizado pelo resíduo sobre o incremento de deslocamento, e o lado direito é o trabalho inicial.

Em modelos com elementos estruturais, como vigas, placas ou cascas, que contém graus de liberdade de diferentes naturezas - translação e de rotação de flexão - frequentemente os critérios são desmembrados, sendo feitos testes independentes para cada conjunto de graus de liberdade, ou

22.4.5 Fluxograma geral de MEF elastoplástico

O problema geral de análise plástica de um corpo por elementos finitos é feito em dois níveis:

1. **nível global.** As equações algébricas de equilíbrio não lineares são resolvidas iterativamente por um método como o de **Newton-Raphson** ou outro. Nesse nível a estrutura da formulação independe do tipo de relação constitutiva ou de qual modelo utilizado. Esse processamento global depende apenas dos seguintes aspectos:
 - (a) Tipo de relação cinemática, isto é, do tipo de tensor de deformação usado (linear ou não linear), o que permite ou não o tratamento de grandes deformações;
 - (b) Análise em pequenos ou em grandes deslocamentos.
 - (c) A estrutura dessa etapa é a mesma para qualquer tipo de relação constitutiva. Entretanto, ela utiliza a matriz constitutiva algorítmica, e o campo de tensões (para o cálculo do resíduo). Esses dois tensores são calculados de forma separada, em cada ponto de integração, como parte do processamento em **nível local**, comentado no item 2 a seguir.

O Fluxograma 22.2 mostra as etapas nesse processamento.

2. **nível local.** É o processamento do **modelo constitutivo** em cada ponto de integração dos elementos. Aqui é aplicado um particular modelo ou outro para a relação constitutiva. Dessa etapa saem grandezas que serão utilizadas no **nível 1** do processamento (matriz elastoplástica e tensor tensão em cada ponto de integração), e grandezas que são de interesse do analista (deformações plásticas, tensões equivalentes e, eventualmente, valores das demais variáveis internas). No presente texto foi detalhado o modelo elastoplástico com as seguintes características:
 - (a) Pequenas deformações;
 - (b) Modelo associativo de von Mises (J_2);
 - (c) Encruamento isotrópico não linear e cinemático linear;
 - (d) Forma fechada para o encruamento isotrópico linear ou quadrático e cinemático linear;

O Fluxograma 22.3 mostra as etapas do processamento local da relação constitutiva no ponto de integração.

Fluxograma 22.2 - Análise de equilíbrio global, MEF/N-R

Etapa 1 - Dados do modelo de EF (coordenadas, conectividade dos elementos, propriedades do material, condições de contorno e de carregamento). Identificar o carregamento em níveis: $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, etc.

Inicializações:

- $\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{U}_0 = \mathbf{0}, n = 0,$
- $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^p = \boldsymbol{\sigma}_0 = \alpha_0 = \beta_0 = 0.$

Etapa 2 - Início dos níveis de carga

- $\mathbf{U}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{U}_n, \quad \mathbf{R}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{F}_n,$
- $\mathbf{r}_{n+1}^{(0)} = -(\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_n),$
- $i = 0.$

Etapa 3 - Início das iterações de N-R para t_{n+1} .

- $i = i + 1$ contador de iterações de N-R
- $\mathbf{C}_{n+1}^{ep(i-1)}$ Matriz elastoplástica (algébrica ou consistente)
- $\mathbf{K}_{t(n+1)}^{(i-1)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{n+1}^{ep(i-1)} \mathbf{B} d\Omega$.

Calcula:

- $\delta\mathbf{U}$ resolvendo $\mathbf{K}_{t(n+1)}^{(i-1)} \delta\mathbf{U} = -\mathbf{r}_{n+1}^{(i-1)}$,
- $\mathbf{U}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{U}_{n+1}^{(i-1)} + \delta\mathbf{U}$: correção,
- $\Delta\mathbf{U}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{U}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{U}_n$ incremento no nível de carga,
 - **Etapa local**, cf. Fluxograma 22.3:
 - $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(i), \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(i)}$
em cada ponto de integração,
 - $\mathbf{R}_{n+1}^{(i)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} d\Omega$: força interna
 - $\mathbf{r}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{R}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{F}_{n+1}$: resíduo.

Etapa 4 - Testes de convergência

- $\|\delta\mathbf{U}\|_{L_2} \leq \varepsilon_D \|\Delta\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}\|_{L_2}$, e/ou
 - $\|\mathbf{r}_{n+1}^{(i)}\|_{L_2} \leq \varepsilon_F \|\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_n\|$, e/ou
 - $\delta\mathbf{U} \mathbf{r}_{n+1}^{(i)} \leq \varepsilon_E \delta\mathbf{U}^{(1)} (\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_{n+1})$.
 - Se satisfatório, tem-se a solução de equilíbrio na carga \mathbf{F}_{n+1} :
 - $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_{n+1}^{(i)}$.
 - $n = n + 1$
 - se $n < n_{\max}$, ir para Etapa 2
 - Se não satisfatório, o equilíbrio ainda não foi satisfeito.
 - Ir para Etapa 3
-

22.4.6 Fluxograma 22.3 - Processamento local - Algoritmo de retorno (von Mises)

Processamento local da relação constitutiva no ponto de integração. Observações:

1. Usada notação de Voigt (vetor-matriz) como na seção 22.2.1.
2. Todas as grandezas em $n + 1$ se referem à iteração global (i) de N-R do Fluxograma 22.2.
3. O resultado final desse processamento, para o processo global, é \mathbf{C}_{n+1}^{ep} para uso na matriz de rigidez \mathbf{K}_t e $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ para o cálculo do vetor força interna.
4. Toda a formulação descrita é restrita a problemas de estado triaxial de tensões. Para estados planos tornam-se necessárias adaptações no método de retorno.
5. Utiliza algoritmo de retorno, superfície de escoamento de von Mises.

-
- Etapa 1** - Dados $\boldsymbol{\sigma}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$, α_n , $\boldsymbol{\beta}_n$ e $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i)}$.
Dadas as funções $K_\alpha(\alpha)$ e $H(\alpha)$ dos encruamentos isotrópico e cinemático.
- Etapa 2** - Calcular $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \mathbf{B}_n \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i)}$.
- Etapa 3** - Parcelas volumétricas: $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^v = \text{tr} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$,
 $\boldsymbol{\sigma}_n^v = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_n$.
Parcelas deviatóricas: $\Delta \mathbf{e}_{n+1} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \frac{1}{3} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^v \mathbf{1}$,
 $\mathbf{s}_n = \boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^v \mathbf{1}$.
- Etapa 4** - Estado teste: $\mathbf{s}_{n+1}^{tr} = \mathbf{s}_n + 2G \Delta \mathbf{e}_n$, eq.(22.114)
 $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{tr} = \boldsymbol{\beta}_n$,
 $\alpha_{n+1}^{tr} = \alpha_n$,
 $\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{tr} = \mathbf{s}_{n+1}^{tr} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{tr}$, eq.(22.115)
 $f_{n+1}^{tr} = \|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{tr}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K_\alpha(\alpha)$,
 $\mathbf{n}_{n+1} = \mathbf{n}_{n+1}^{tr} = \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{tr}}{\|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{tr}\|}$ eq.(22.122).
- Etapa 5** - Condições carga/descarga, eq.(22.129):
Se $f_{n+1}^{tr} \leq 0 \Rightarrow$ Incremento é elástico, $\Delta \gamma = 0. \Rightarrow$ Ir para Etapa 5.1
Se $f_{n+1}^{tr} > 0 \Rightarrow$ Incremento é plástico, $\Delta \gamma > 0. \Rightarrow$ Ir para Etapa 5.2
- Etapa 5.1** - Passo elástico: $\mathbf{C}_{n+1}^{ep} = \mathbf{C}$,
 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$,
 $\alpha_{n+1} = \alpha_n$,
 $\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_n$,
 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}_{n+1}^{ep} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$.
- Etapa 5.2** - Passo elastoplástico:
 \mathbf{C}_{n+1}^{ep} da eq. (22.162),
 $\Delta \gamma$ do Fluxograma 22.1 para encruamento não linear, ou da eq. (22.138)
ou (22.141) para encruamento linear ou quadrático.
 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \gamma \mathbf{n}_{n+1}$, eqs.(22.109)-(22.111),
 $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3}}$,
 $\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_n + \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} [H(\alpha_{n+1}) - H(\alpha_n)]$,
 $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{tr} - 2G \Delta \gamma \mathbf{n}_{n+1}$ eq.(22.120),
 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + 3 \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^v K_\alpha + \boldsymbol{\sigma}_n^v$, usada eq.(22.112).
-

22.4.7 Exemplo 22.3 - Plastificação parcial de tubo de parede espessa

Considera-se aqui um exemplo clássico de modelagem de comportamento plástico pelo MEF. Trata-se de um cilindro de parede espessa, de comprimento infinito, submetido a um valor de pressão interna que gera plastificação parcial na espessura da parede. Considera-se o problema como um

estado plano, em que a seção transversal do tubo encontra-se no plano xy . Os dados utilizados são os seguintes: $\sigma_E = 200$ MPa, $E = 200$ GPa, $\nu = 0,25$. Os raios interno e externo do tubo são $a = 100$ mm e $b = 150$ mm respectivamente. A pressão interna aplicada é $P = 75,184266$ MPa. Considera-se o material elasto-plástico ideal.

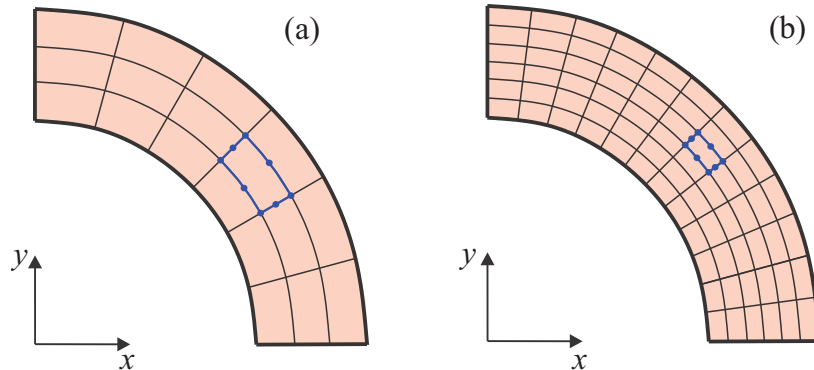


Figura 22.19: Malhas utilizadas no Exemplo 3.

Solução:

A solução analítica para a pressão que leva ao início do escoamento no tubo, que ocorre na superfície interna, obtida pelo critério de von Mises para início de escoamento, é dada por

$$P_E = \frac{\sigma_E (b^2 - a^2)}{\sqrt{(a^4 + 3b^4)}} = \frac{200 (150^2 - 100^2)}{\sqrt{(100^4 + 3 \times 150^4)}} = 62,137 \text{ MPa.} \quad (22.215)$$

Logo, a pressão aplicada é superior à de início de escoamento, e uma camada interna de material deve sofrer plastificação. Essa camada é delimitada pelos raios a e c , onde $a < c \leq b$. Um dos objetivos da análise de MEF é determinar o raio de plastificação c .

A modelagem foi feita utilizando elementos finitos planos biquadráticos serendipity de 8 nós. As malhas utilizadas tem 3 e 6 elementos ao longo da espessura da parede, como ilustrado na Figura 22.19. Apenas 1/4 da seção transversal foi modelada. As condições de contorno são de simetria em relação aos eixos $x = 0$ e $y = 0$, isto é, ao longo da linha $y = 0$ impõe-se a condição $u_y = 0$, e ao longo da linha $x = 0$ impõe-se a condição $u_x = 0$. É utilizada a superfície de von Mises para início de escoamento e para regra de escoamento.

Os resultados são apresentados na Figura 22.20 para as tensões radial e tangencial ao longo da espessura da parede do tubo. Adicionalmente, uma malha mais refinada, com 90 elementos ao longo da espessura foi utilizada para gerar uma solução de referência para o problema. Essa solução, também mostrada na figura, identifica claramente a superfície de transição entre as regiões plástica (interna) e elástica. O raio da interface é identificado como $c = 113,4$ mm. Essa superfície de transição é identificada pelo valor de raio em que a tensão tangencial apresenta uma descontinuidade na derivada radial.

Em problemas de plasticidade (assim como em todos os problemas de não linearidade material), uma das dificuldades é a identificação correta da interface. Isso é devido à dificuldade natural do MEF para calcular tensões. Durante as iterações no processo de solução, a relação constitutiva é implementada apenas nos pontos de integração de cada elemento. Logo, apenas nesses pontos é feita a identificação se o material se plastificou ou não. Adicionalmente, as tensões são descontínuas nas interfaces entre os elementos, sendo que o valor da descontinuidade tende a reduzir-se com o refino da malha. Normalmente, as tensões calculadas nas interfaces entre dois elementos vizinhos são feitas médias, gerando uma distribuição artificialmente suave das tensões aproximadas. Na Figura 22.20 os dois tipos de resultados são apresentados, um para as tensões da forma como são calculadas, apresentando descontinuidades nas interfaces dos elementos, e outro resultado para as tensões suavizadas. Nota-se que a interface na curva suavizada obtida pela malha de 6 elementos é aproximada pelo valor $r = 113,4$ mm. Os resultados das tensões descontínuas são mostrados na

Tabela 22.4: Tensões radial e tangencial [MPa] nas coordenadas $r = a, b$ e c ao longo da espessura, obtidas para o Exemplo 3. A tensão radial está multiplicada por (-1) . As malhas são de 3 e 6 elementos ao longo da espessura.

	Tensão radial			Tensão tangencial			
	c	$-\sigma_r(a)$	$-\sigma_r(c)$	$-\sigma_r(b)$	$\sigma_\theta(a)$	$\sigma_\theta(c)$	$\sigma_\theta(b)$
Referência	113,4	75,18	47,0	0,30	152,2	172,6	125,6
MEF malha 3×6		46,8	61,1	10,1	170,6	160,4	121,2
MEF malha 6×12	116,3	60,6	42,2	4,8	161,8	167,3	123,8

figura a partir de uma grade de pontos uniformemente distribuída ao longo da espessura, gerando o aspecto zig-zag mostrado.

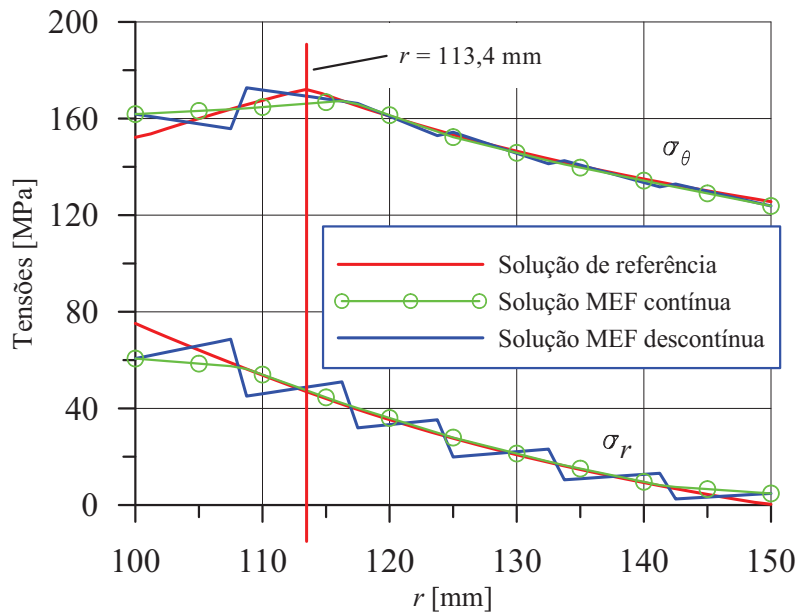


Figura 22.20: Tensões radial e tangencial obtidas para o Exemplo 3 ao longo de uma linha radial do cilindro. A tensão radial está multiplicada por (-1) . Malha de 6 elementos ao longo da espessura.

A Tabela 22.4 mostra um sumário dos pontos críticos das curvas. Nota-se que a malha grosseira e a refinada de MEF apresentam tensão radial na superfície externa com valores $-4,8$ MPa e $-10,1$ MPa respectivamente, em vez de zero que é o valor correto, uma vez que a superfície externa é livre de solicitações. Entretanto, um refinamento progressivo de malha faz com que esse valor se aproxime gradualmente do valor correto. Os resultados da malha de 3×6 são tão pobres que tornam difícil a identificação da superfície de interface plástico-elástico.

Uma vez que a posição da interface plástica é, a priori, desconhecida, a forma mais rústica de localizá-la consiste em utilizar uma malha bastante refinada em todo o domínio. Claramente essa opção computacionalmente é a mais custosa. Ao longo das últimas décadas, uma série de estratégias tem sido propostas e utilizadas para identificar esse tipo de descontinuidade (e outras), que sofrem translação ao longo do crescimento da carga. Uma estratégia, também tradicional, consiste em fazer remalhamento. Para um dado nível de carga, o processo iterativo gera uma estimativa da posição da descontinuidade. Então uma malha é construída com refinamento apenas na vizinhança da descontinuidade, o que permite obter solução com precisão adequada naquele nível de carga. Num segundo nível de carga, a descontinuidade se move, e a malha é desconstruída e reconstruída com refinamento na vizinhança da nova posição. O processo segue da mesma forma até o último nível de carga.

Outros procedimentos mais recentes envolvem uma malha fixa, sem refinamento localizado, mas utiliza funções de enriquecimento especiais, tanto locais aos elementos finitos quanto globais. Essa é a classe dos **método de elementos finitos generalizados**, que encontra-se fora do escopo desse livro.

