

Capítulo 8

Flexão plana em vigas retas

As vigas são possivelmente os elementos estruturais mais utilizados em todos os sistemas de engenharia: pontes de aço ou de concreto, viadutos, passarelas, guindastes e outras máquinas de elevação, redutores de velocidades, enfim, máquinas e mecanismos de qualquer espécie, praticamente todas contam com vigas como elementos estruturais.

Quanto ao aspecto físico, as vigas têm a mesma forma que as barras: são corpos longos e retos¹ com seção transversal aproximadamente constante. O que caracteriza uma viga, e a distingue das barras, é que elas são submetidas a momentos fletores. Na quase totalidade dos casos práticos o campo de momentos fletores é proveniente de cargas transversais aplicadas à viga, que por sua vez geram deslocamentos transversais. Pelas equações de equilíbrio, eqs.(2.43), p. 40, sabemos que cargas transversais geram não apenas momentos fletores, mas também esforços cortantes (exceto em casos bastantes particulares). A teoria que descrevemos nesse capítulo é uma idealização denominada **teoria de flexão pura**, que considera apenas a existência dos momentos fletores, i.e., ignora momentaneamente os efeitos do esforço cortante, que são analisados de forma independente.

8.1 Teoria de flexão de vigas

A teoria vista aqui é baseada em uma série de hipóteses cinemáticas que podem ser razoavelmente visualizadas experimentalmente trabalhando com modelos construídos por materiais flexíveis como borracha ou espuma plástica. A **hipótese fundamental** pode ser entendida pela Figura 8.1. Na figura (a) uma viga é desenhada com linhas retas transversais e com uma linha reta longitudinal que formará uma **superfície de referência**. Sobre esta superfície definimos dois eixos cartesianos, x e z , e na direção transversal definimos o eixo y . (O correto posicionamento dos eixos e da superfície de referência será ainda assunto de detalhamento durante o desenvolvimento da teoria). Se todas as cargas estiverem contidas no mesmo plano, por exemplo o plano xy , então os momentos fletores estarão todos na direção z e teremos o chamado problema de **flexão plana**. Nesse caso a configuração deformada da viga é toda contida no plano xy .

A **hipótese fundamental da teoria de flexão pura** diz o seguinte:

“Seções inicialmente planas e perpendiculares à superfície de referência de uma viga permanecem planas e perpendiculares à superfície de referência flexionada da viga”.

Como ilustrado na Figura 8.1b, cada seção plana permanece plana com a flexão, apenas sofre uma **rotação de corpo rígido**. Além disso, a rotação é tal que a seção permanece perpendicular à superfície de referência deformada. Devemos observar que temos aqui, de fato, duas hipóteses: a de que as seções permanecem planas e a de que permanecem perpendiculares.

Quando se compara essas hipóteses com soluções exatas da teoria de elasticidade observam-se que essas hipóteses são aproximações da realidade, que são tão **mais acuradas quanto mais longa**

¹Existem teorias mais abrangentes para vigas curvas, mas inicialmente nos concentraremos em vigas retas.

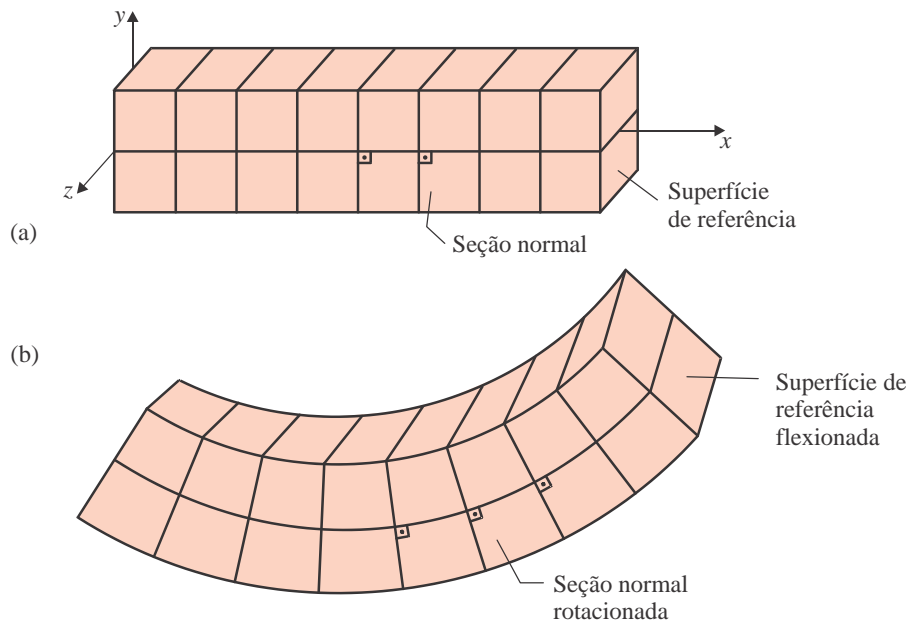


Figura 8.1: Visualização de uma barra sob flexão.

for a viga em relação à sua altura. Isso explica que essa teoria seja conhecida na literatura por diversos nomes como

- Teoria de flexão pura;
- Teoria de flexão de vigas longas;
- Teoria de flexão de vigas delgadas;
- Teoria de flexão de vigas de Euler-Bernoulli.

Empiricamente, a viga é considerada longa (ou delgada), se a relação comprimento/altura da seção for superior a, por exemplo, 20, i.e.,

$$\frac{L}{h} \gtrsim 20 \quad (8.1)$$

O nome de teoria “de flexão pura” deve-se ao fato de que a hipótese fundamental se realiza perfeitamente no caso de ausência de esforço cortante, i.e., quando se tem momento fletor puro. Note que, das equações diferenciais de equilíbrio temos que o cortante $V_y(x)$ é $V_y(x) = -dM_z/dx$. Então, $V_y(x)$ é nulo apenas se $M_z(x)$ for constante.

Além da hipótese fundamental temos algumas hipóteses adicionais:

- **Hipótese 1** - O coeficiente de Poisson é considerado nulo, o que implica que não há deformações na direção z proveniente do efeito de Poisson, i.e., $\varepsilon_z = 0$ em qualquer ponto (x, y, z) da viga.
- **Hipótese 2** - Os segmentos normais à superfície de referência permanecem inextensíveis, i.e., $\varepsilon_y = 0$ em qualquer ponto (x, y, z) da viga. Também aqui temos uma consequência da hipótese de coeficiente de Poisson nulo.

Como será visto ao final da dedução, essas hipóteses implicam que o estado de tensões na viga é considerado uniaxial, com $\sigma_y = \sigma_z = 0$ em todo ponto.

As hipóteses 1 e 2 podem ser substituídas por um conjunto alternativo de hipóteses, mas realista, de que $\sigma_y = \sigma_z = 0$, porém com o coeficiente de Poisson não nulo. Isso implicará num estado triaxial de deformações, em que $\varepsilon_y \neq 0$ e $\varepsilon_z \neq 0$ são provenientes do efeito de Poisson.

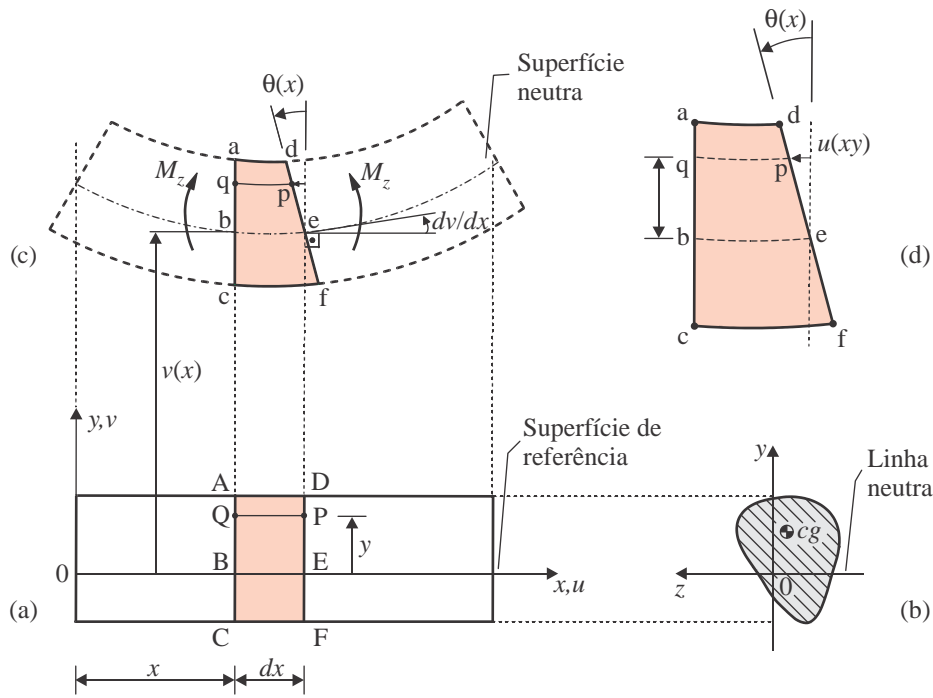


Figura 8.2: Flexão de um segmento de comprimento dx .

As hipóteses da teoria podem ser usadas para construir a formulação com a ajuda da Figura 8.2. Na figura (a) temos um segmento de viga, onde foi identificado um segmento de comprimento Δx definido por duas linhas retas paralelas \overline{AC} e \overline{DF} como indicado. A Figura 8.2c ilustra a configuração deformada do segmento. Pelas hipóteses, os comprimentos \overline{AC} e \overline{DF} são idênticos aos comprimentos \overline{ac} e \overline{df} . Por outro lado, os comprimentos longitudinais são alterados. Por exemplo, o segmento inferior \overline{CF} alonga-se para \overline{cf} e, na parte superior, \overline{AD} contrai-se para \overline{ad} . Então, se o esforço de momento M_z é positivo na seção de coordenada x como ilustrado, os segmentos na parte de baixo da viga serão tracionados e os segmentos em cima serão comprimidos, i.e., sofrerão deformações ε_x positivas e negativas respectivamente. Para que essas deformações ocorram, é necessário que os pontos ao longo da reta \overline{DF} sofram deslocamentos na direção axial. A essas componentes de deslocamento chamaremos de u . De fato, definimos o **campo de deslocamentos** $u = u(x, y)$ como a componente de deslocamentos de um ponto na coordenada (x, y) do corpo, na direção x . Então $u > 0$ para pontos na parte de baixo da viga e $u < 0$ em pontos em cima.

Uma das consequências imediatas da observação de que os segmentos longitudinais sofrem tração ou compressão é a de que deve existir, em algum lugar entre o topo e a base da seção da viga, um plano longitudinal onde os segmentos sofrem deformação nula. Esse plano é denominado **superfície neutra** da viga. A intersecção da superfície neutra em cada seção transversal gera a **linha neutra**, como indicado na Figura 8.2b.

Observe que, nesse momento, a posição da superfície neutra é desconhecida. Entretanto, a dedução é iniciada posicionando os eixos $x - z$ do sistema de coordenados sobre essa superfície neutra, e o eixo y perpendicular àqueles, como indicado na Figura 8.2a. As forças externas aplicadas são contidas no plano xy e o momento fletor é na direção z .

Como efeito do momento M_z , cada seção x sofre um deslocamento transversal v na direção y . Como resultado das hipóteses 1 e 2, v independe de y e de z , i.e., $v = v(x)$ apenas. Entretanto, além da translação $v(x)$, cada seção sofre também uma rotação de corpo rígido. Quando consideramos um ponto genérico P de cota y , este sofre, além de v , um deslocamento u na direção x , como consequência da rotação θ da seção. Essa componente de deslocamento é que provocará a deformação do segmento \overline{PQ} .

Como a seção permanece reta, a variação de u com y é linear, i.e., $u(x, y) = a(x)y$, onde $a(x)$ é uma função ainda desconhecida. Entretanto, para pequenos deslocamentos e rotações, o

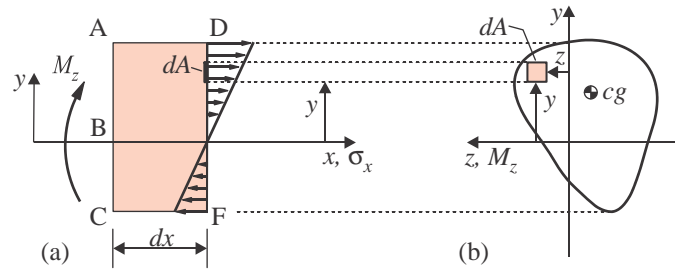


Figura 8.3: Distribuição linear de tensões na seção.

$$\Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0 \quad \text{e} \quad \Sigma M_x = 0 \quad (8.8)$$

As demais equações devem ser testadas uma a uma.

8.2 Fórmula de Flexão

8.2.1 Equilíbrio de forças em x e a linha neutra

A primeira equação de equilíbrio é $\Sigma F_x = 0$. Como no elemento diferencial de área dA na seção, Figura 8.3, atua a tensão σ_x , a força total na seção é $\int_A \sigma_x dA$. Como não há mais forças axiais aplicadas devemos ter

$$\int_A \sigma_x dA = 0.$$

Tomando σ_x de (8.7),

$$-E\kappa(x) \int_A y dA = 0.$$

Como $E \neq 0$ e $d^2v/dx^2 \neq 0$, o equilíbrio requer que $\int_A y dA = 0$. Porém, sabe-se que $\int_A y dA = Q_z$ é o **momento estático de inércia da seção**, e tem a propriedade de que

$$Q_z \equiv \int_A y dA = \bar{Y}A \quad (8.9)$$

onde \bar{Y} é a coordenada do centroide da seção a partir do eixo z e A é a área da seção. Com isso conclui-se o seguinte:

Para satisfazer o equilíbrio de forças precisamos ter $\bar{Y} = 0$ (já que $A \neq 0$), i.e., a origem do eixo y deve estar no centroide da seção. Como tínhamos posicionado a origem de y na linha neutra, agora sabemos que esta passa pelo centroide da seção.

A aplicação da primeira equação de equilíbrio nos diz que sempre a linha neutra passa pelo centroide da seção nos casos de flexão plana. Veremos ao longo do capítulo o caso mais geral, em que a flexão ocorre junto à tração na barra, o que gera uma translação da linha neutra para fora do centroide da seção.

8.2.2 Momentos em z e fórmula de flexão

A segunda equação de equilíbrio é $\Sigma M_z = 0$. A força que atua em dA na Figura 8.3b é $\sigma_x dA$, e o momento em relação ao eixo z é $y(\sigma_x dA)$. Assim, a condição de equilíbrio do corpo é dada por

$$M_z + \int_A y \sigma_x dA = 0.$$

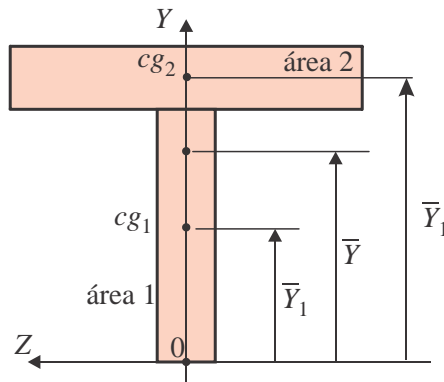


Figura 8.6: Exemplo de seção composta por regiões de geometria simples.

cada momento estático é dado por $Q_{Zj} = \bar{Y}_j A_j$. Então o momento da seção completa é obtido por

$$Q_Z = \sum_{j=1}^n \bar{Y}_j A_j \quad (8.25)$$

Uma vez que para a seção completa $Q_Z = \bar{Y} A$, o cálculo da posição do centroide global em relação ao eixo Z é dado por

$$\bar{Y} = \frac{Q_Z}{A} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^n \bar{Y}_j A_j \quad (8.26)$$

8.3 2º momento de inércia - casos básicos - seção retangular

Começaremos explorando o caso mais simples, de uma viga de seção retangular sob flexão plana, como na Figura 8.7a. Como a seção tem dois planos de simetria, não há dificuldades em **localizar o centroide** e em orientar os **eixos principais** yz .

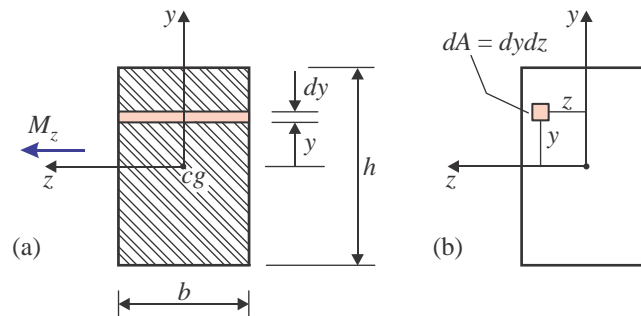


Figura 8.7: Seção retangular de lados $b \times h$.

Denominamos b o comprimento do lado da seção paralelo ao momento M_z , e h ao lado perpendicular a M_z . A dedução de uma expressão fechada para o momento de inércia I_{zz} em termos de b e h é feita a partir da definição (8.11): $I_{zz} = \int_A y^2 dA$. Como é usual nesses casos, tomamos um elemento diferencial dA numa forma adequada, nesse caso a forma do retângulo em negrito mostrado na Figura 8.7a onde $dA = b dy$. Assim,

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA = b \int_{y=-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{by^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} \implies I_{zz} = \frac{bh^3}{12} \quad (8.27)$$

retangular sendo considerada, este é dado diretamente pela equação (8.27):

$$I_{zz} = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \times 20^3}{12} = 6,67 \cdot 10^3 \text{ mm}^4.$$

A **terceira etapa** consiste na aplicação da fórmula de flexão (8.13) para um ponto y da seção considerada B (onde $x_B = 300 \text{ mm}$):

$$\sigma_x(x_B; y) = -\frac{M_z(x_B)}{I_{yy}}y = -\frac{6 \cdot 10^4}{6.67 \cdot 10^3}y \rightarrow \boxed{\sigma_x(x_B; y) = -9,0 y \text{ [mm e MPa]}}$$

Essa é a distribuição de tensões na seção B, que é ilustrada na Figura 8.10. Como a seção é simétrica em relação ao eixo z , os valores extremos de $|y|$ são iguais, i.e., $|y|_{\max} = h/2 = 10 \text{ mm}$ (ou $y_{\max/\min} = \pm h/2 = \pm 10 \text{ mm}$). Assim, a tensão normal tem extremos

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{\text{tração}} &= \sigma_x(x_B; y = -10 \text{ mm}) = -9,0 \times (-10 \text{ mm}) = +90 \text{ MPa (em baixo)}, \\ \sigma_{\max}^{\text{compr}} &= \sigma_x(x_B; y = +10 \text{ mm}) = -9,0 \times (+10 \text{ mm}) = -90 \text{ MPa (em cima)}, \end{aligned}$$

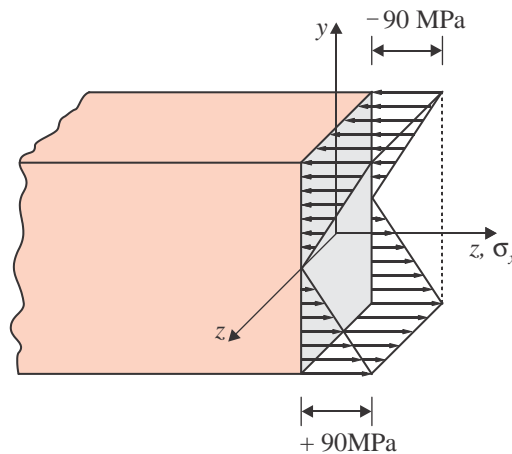


Figura 8.10: Distribuição de tensões normais na seção B do Exemplo 8.2.

8.3.1 Momentos de inércia de seção circular e tubular

As seções circulares e tubulares são possivelmente as mais usadas em componentes mecânicos, aparecendo em eixos, suportes e guias.

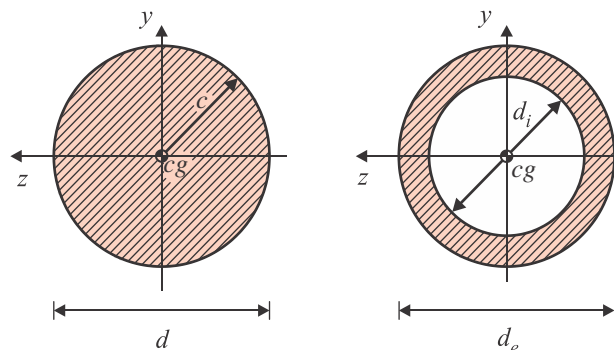


Figura 8.11: Parâmetros da seção circular maciça e tubular.

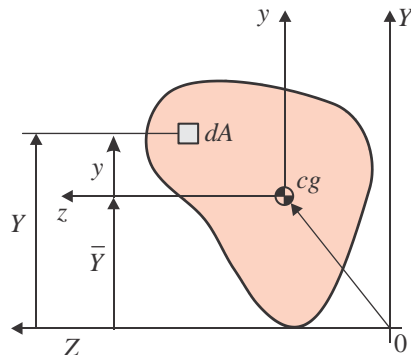


Figura 8.13: Eixos arbitrários YZ e centroidais yz numa seção.

$$I_{ZZ} \equiv \int_A (y + \bar{Y})^2 dA.$$

Expandindo a potência temos

$$I_{ZZ} = \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_{zz}} + 2\bar{Y} \underbrace{\int_A z dA}_{Q_{y=0}} + \bar{Y}^2 \underbrace{\int_A dA}_A.$$

A primeira integral é o momento de inércia da seção em relação ao eixo centroidal z . A segunda é o momento estático em relação ao eixo centroidal z , logo é igual a zero. A última integral é simplesmente o valor da área da seção. Assim temos

$$\boxed{I_{ZZ} = I_{zz} + A\bar{Y}^2} \quad (8.33)$$

que é a expressão do chamado teorema dos eixos paralelos.

8.5 Alguns exemplos

Exemplo 8.3 - Momento de inércia de seção retangular

Determine a expressão para o momento de inércia de uma seção retangular em relação ao eixo Z que passa pela base da seção, como na Figura 8.14. Use o teorema dos eixos paralelos.

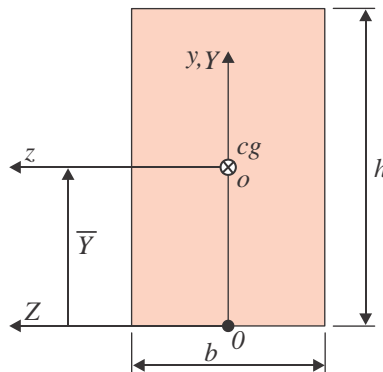


Figura 8.14: Dimensões e eixos do Exemplo 8.3.

Solução:

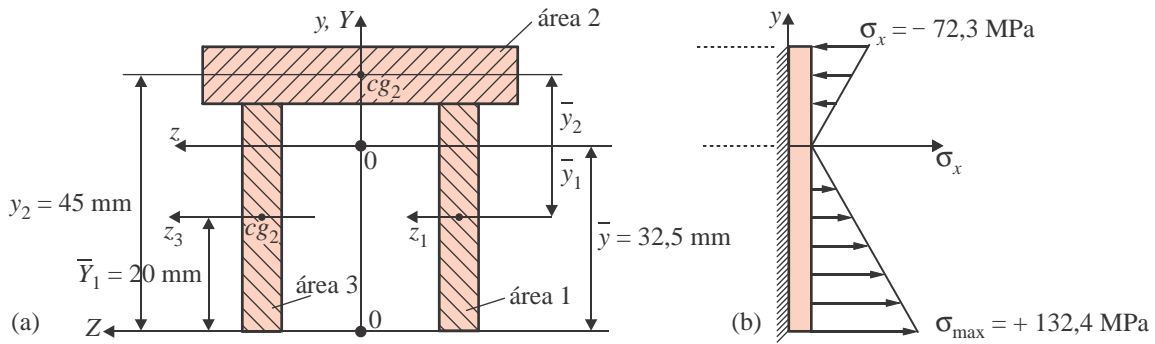


Figura 8.16: (a) Decomposição da seção em três áreas retangulares. (b) Distribuição de tensões na seção logo à direita do engaste.

$$\bar{Y} = \frac{1}{(2 \times 10 \times 40 + 10 \times 80)} [2 \times 20 (10 \times 40) + 45 (10 \times 80)] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{Y} = 32,5 \text{ mm}}$$

Como a seção possui um plano de simetria, o eixo y , segue-se que o eixo z passando pelo centroide é o outro eixo principal da seção.

Etapa 3 - Determinar o momento de inércia da seção

Como cada área é retangular, seus momentos de inércia em relação a seu próprio eixo centroidal (eixos z_1 , z_2 e z_3) são tomados como conhecidos: I_{z_1} , I_{z_2} e I_{z_3} , pela dedução já feita para o momento de um retângulo, eq.(8.27). Assim, o momento de inércia da seção completa em relação a seu eixo centroidal z é obtido aplicando o teorema dos eixos paralelos, (8.33₁, para transferir o momento de cada área ao eixo z :

$$\begin{aligned} I_z &= 2I_z^{(1)} + I_z^{(3)} \\ &= 2 [I_{z_1} + \bar{y}_1^2 A_1] + [I_{z_2} + \bar{y}_2^2 A_2] \end{aligned} \quad (8.35)$$

Na primeira expressão, estamos somando momentos de diversas áreas, todas calculadas em relação ao mesmo eixo, z . Esses momentos, na segunda equação, são primeiro obtidos em relação ao eixo da própria área, e em seguida transladados ao eixo z . Considerando o valor de \bar{Y} e os dados geométricos das Figuras 8.15b e 8.16, as distâncias entre os eixos z_1 e z_2 até z são: $\bar{y}_1 = \bar{Y}_1 - \bar{Y} = -12,5$ mm e $\bar{y}_2 = \bar{Y}_2 - \bar{Y} = 12,5$ mm. (Obs.: o fato desses dois valores serem idênticos é apenas uma coincidência resultante da conjunção dos parâmetros geométricos da seção.) Assim, (8.35) fica

$$I_z = 2 \left[\frac{10 \cdot 40^3}{12} + 12,5^2(10 \times 40) \right] + \left[\frac{80 \cdot 10^3}{12} + 12,5^2(80 \times 10) \right] = 3,63 \cdot 10^5 \text{ mm}^4.$$

Etapa 4 - Tensão máxima

A tensão máxima ocorre na seção do engaste, onde o momento máximo tinha sido obtido na Etapa 1 como $M_{\max} = 1,5 \cdot 10^6$ Nmm. A distribuição de tensões na seção localizada logo a direita do engaste é vista na Figura 8.16b. A tensão máxima em módulo sempre ocorre no ponto da seção mais distante da linha neutra, que nesse caso é o ponto de coordenadas $y_{\max} = -32,5$ mm. Assim, de (8.13),

$$\sigma_{\max} = -\frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max} = -\frac{1,5 \cdot 10^6}{3,63 \cdot 10^5} (-32,5) = +134,2 \text{ MPa}.$$

O coeficiente de segurança quanto ao início de escoamento, ignorando o efeito de concentração de tensões no engaste, é $n = \sigma_{adm}/\sigma_{\max} = 200/134,2 = 1,49$.

vigas constituídas por duas ou três fases de materiais homogêneos, isotrópicos e elástico-lineares, pode ser facilmente tratado, como descrito nessa seção.

Consideramos uma seção transversal com seção arbitrária, constituída por n regiões, cada uma com um material distinto, como na Figura 8.19a. Cada fase é um material homogêneo, isotrópico e elástico-linear, com módulo de elasticidade E_j , $j = 1, \dots, n$, e possui uma área transversal A_j .

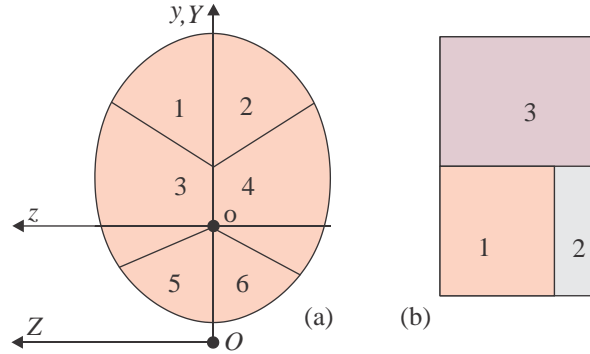


Figura 8.19: (a) seção composta por $n = 6$ materiais, com um plano de simetria (vertical); (b) seção com 3 materiais e sem plano de simetria.

A hipótese fundamental usada no tratamento desse tipo de viga é que a deformação axial $\varepsilon_x(x, y)$ varia linearmente ao longo de y , mesmo com a diferença de materiais. Essa hipótese é ilustrada na Figura 8.20 para o caso simples de duas fases. Análises mais detalhadas mostram que essa hipótese é aproximadamente correta no âmbito de pequenas deformações, como é o caso presente. A hipótese de deformação variando linearmente em y é a mesma usada na dedução da fórmula de flexão de vigas homogêneas, e foi representada por (8.6):

$$\varepsilon_x(x, y) = -\kappa(x)y. \quad (8.43)$$

Se cada fase é elástica linear, então a tensão numa cota y da seção depende da propriedade do material naquele ponto, de forma que numa seção x , a deformação varia linearmente em y na forma

$$\sigma_x(x, y) = E(y, z)\varepsilon_x(x, y) = -E(y, z)\kappa(x)y. \quad (8.44)$$

Em ambas as expressões acima, y deve ser a coordenada medida ao longo de um eixo de simetria (vertical nas figuras), com, cuja origem deve ser a linha neutra. No caso da seção homogênea, a linha neutra passa pelo centroide da seção. Entretanto, no presente caso, de seção heterogênea, a linha neutra não necessariamente passa pelo centroide, e deve-se deduzir novamente a forma de sua identificação.

8.6.1 Linha neutra

Inicialmente, consideramos que a seção possua um plano de simetria, e definimos um sistema de coordenadas temporário $OXYZ$, com Z perpendicular ao plano de simetria, como nas Figuras 8.19a e 8.20a. Note que a formulação desenvolvida a seguir não é aplicável a seções como a da Figuras 8.19b, que não possui um plano de simetria. Um segundo sistema de eixos, $0xyz$, é definido com y ao longo do plano de simetria, com origem na linha neutra, e z é normal ao plano. Então, os eixos Z e z são paralelos. A posição do eixo z é definida em relação ao eixo temporário Z por \bar{Y} . **A linha neutra é definida como a reta ao longo da qual as tensões e deformações normais são nulas.** A distribuição de tensões na seção é ilustrada na Figura 8.20c para o caso de duas fases. A posição da linha neutra define a região da seção sob tração e sob compressão. A resultante z de forças deve ser nula, para manter o equilíbrio do elemento diferencial de comprimento dx mostrado. Esse equilíbrio é representado por

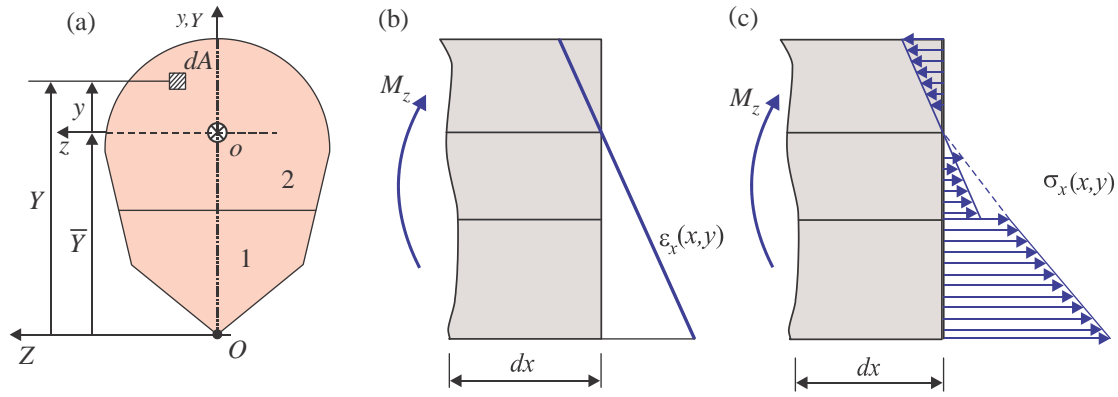


Figura 8.20: (a) seção transversal com duas fases, com plano de simetria; (b) elemento diferencial dx com esforço de momento fletor e distribuição das deformações; (c) distribuição qualitativa das tensões.

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_A \sigma_x dA = 0, \\
 &= -\kappa(x) \int_A E(y, z)y dA = 0.
 \end{aligned} \tag{8.45}$$

A origem da coordenada y é ainda desconhecida nesse ponto, porém o elemento diferencial de área dA pode ser localizado pela coordenada arbitrária Y , tal que $y = Y - \bar{Y}$, onde \bar{Y} é a distância, ainda incógnita, entre os dois eixos. Substituindo em (8.45) temos

$$\int_A E(Y)Y dA - \bar{Y} \int_A E(Y) dA = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{Y} = \frac{\int_A E(Y)Y dA}{\int_A E(Y) dA}} \tag{8.46}$$

Os termos do numerador e denominador podem ser explicitados por:

$$\begin{aligned}
 \int_A E(Y)Y dA &= \sum_{j=1}^n E_j \underbrace{\int_{A_j} Y dA}_{Q_{Zj}} = \sum_{j=1}^n E_j Q_{Zj}, \\
 \int_A E(Y) dA &= \sum_{j=1}^n E_j \underbrace{\int_{A_j} dA}_{A_j} = \sum_{j=1}^n E_j A_j.
 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^n E_j Q_{Zj}}{\sum_{j=1}^n E_j A_j}} \tag{8.47}$$

A_j é a área da fase j e Q_{Zj} é o momento estático da área A_j em relação ao eixo Z . Essa expressão determina a posição da linha neutra em seções com qualquer disposição e formato das fases. O momento estático pode ser colocado na forma

$$Q_{Zj} = A_j \bar{Y}_j, \tag{8.48}$$

onde \bar{Y}_j é a coordenada Y do centroide da área A_j . Então,

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^n E_j A_j \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^n E_j A_j}} \tag{8.49}$$

Note que numa viga homogênea, com uma única fase de módulo E , essa expressão se reduz àquela vista em (8.26): $\bar{Y} = \sum_{j=1}^n A_j \bar{Y}_j / A$, onde A é a área total da seção.

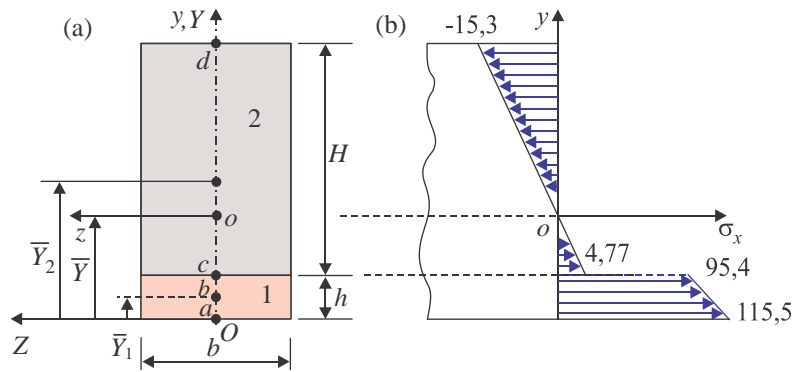


Figura 8.21: (a) parâmetros geométricos da seção; (b) distribuição de tensões.

isso se obtém a posição da linha neutra: $\bar{Y} = 86,3$ mm. Note que os momentos estáticos de cada fase em relação a Z são $Q_{Z1} = A_1\bar{Y}_1 = 16.875$ mm³ para a barra de aço, e $Q_{Z2} = A_2\bar{Y}_2 = 7,43 \cdot 10^6$ mm³ para a barra de madeira.

(b) O módulo equivalente E_{eq} é obtido por (8.54) para $n = 2$ fases:

$$E_{eq}I_z = \sum_{j=1}^n E_j I_{zj} = E_1 I_{z1} + E_2 I_{z2}. \quad (8.56)$$

Os momentos de inércia de cada fase são

$$\begin{aligned} I_{z1} &= \frac{bh^3}{12} + A_1 d_1^2 = 1,40 \cdot 10^7 \text{ mm}^4, \\ I_{z2} &= \frac{bH^3}{12} + A_2 d_2^2 = 61,7 \cdot 10^7 \text{ mm}^4. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Com isso, se obtém o momento de inércia da seção é $I_z = I_{z1} + I_{z2} = 63,1 \cdot 10^7$ mm⁴, o produto $E_{eq}I_z = 8,96 \cdot 10^{12}$ Nmm², e o módulo de elasticidade equivalente da viga $E_{eq} = E_{eq}I_z/I_z = 8,96 \cdot 10^{12}/63,1 \cdot 10^7 = 14,2$ GPa. Isso significa que a viga composta apresenta a mesma rigidez em flexão que uma viga homogênea de mesmas dimensões, com módulo $E_{eq} = 14,2$ GPa.

(c) As tensões podem ser obtidas (8.53), que pode ser separada para cada fase:

$$\begin{aligned} \sigma_{aco}(x, y, z) &= -E_1 \frac{M_z(x)}{E_{eq}I_z} y, & \forall y \in (y_a; y_b) &= (-\bar{Y}; h - \bar{Y}), \\ \sigma_{mad}(x, y, z) &= -E_2 \frac{M_z(x)}{E_{eq}I_z} y, & \forall y \in (y_c; y_d) &= (h - \bar{Y}; H + h - \bar{Y}). \end{aligned} \quad (8.58)$$

Os limites de validade de cada equação são os limites de y para as superfícies inferior e superior da camada de aço e de madeira. Os pontos a, b, c e d estão marcados na Figura 8.21a, e suas coordenadas valem $y_a = -\bar{Y} = -86,3$ mm, $y_b = y_c = h - \bar{Y} = -71,25$ mm, $y_d = 228,75$ mm. Note que os pontos b e c se encontram na interface entre as camadas, um em cada camada. Apesar da deformação em ambos ser a mesma, as tensões são diferentes devido à diferença de módulo de elasticidade entre as camadas. As tensões nos quatro pontos são:

$$\sigma_{fi} = -E_f \frac{M_z}{E_{eq} I_z} y_{fi}, \quad \sigma_{fs} = -E_f \frac{M_z}{E_{eq} I_z} y_{fs}, \quad \sigma_n = -E_f \frac{M_z}{E_{eq} I_z} y_n \quad (8.61)$$

Uma distribuição típica das tensões numa viga sanduíche é ilustrada na Figura 8.23a.

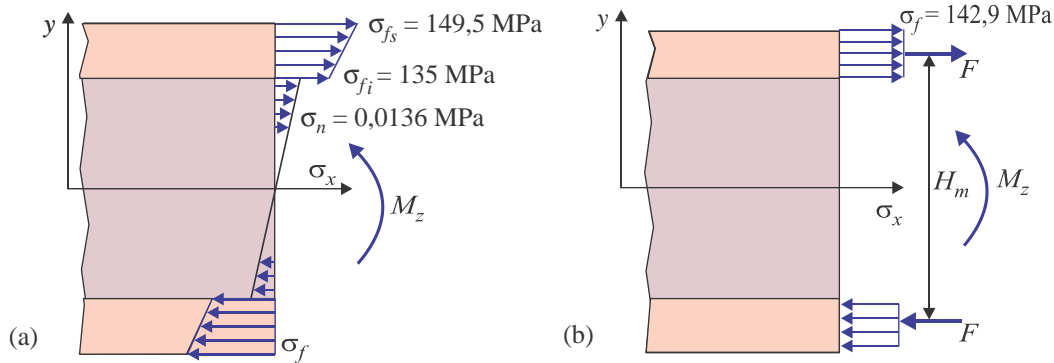


Figura 8.23: (a) Distribuição de tensões normais num sanduíche ao longo da espessura; (b) simplificação das tensões em sanduíches de faces delgadas e núcleo de baixo módulo.

Sanduíches de faces delgadas As eqs.(8.59)-(8.61) são adequadas a qualquer configuração simétrica de sanduíche, desde que as faces sejam idênticas, mesmo que elas sejam espessas. Entretanto, as configurações mais eficientes de sanduíche são tais que apresentam duas características:

1. a espessura das faces é pequena em relação à do núcleo, tipicamente,

$$0,02 \leq \frac{h}{H_n} \leq 0,2 \quad (8.62)$$

2. o módulo de elasticidade do núcleo é muito maior que o da face, tipicamente,

$$250 \leq \frac{E_f}{E_n} \leq 569 \quad (8.63)$$

3. a densidade do núcleo é muito pequena, da ordem de $\rho_n \approx 0,06 \text{ kg/m}^3$ a $0,12 \text{ kg/m}^3$, típicas em núcleos de colmeia, de corrugados ou de espumas polimérica expandida. Isso gera vigas e placas de baixíssimos pesos em relação às suas rigidezas.

Essas características permitem gerar uma formulação bastante simplificada, a partir das relações exatas nas eqs.(8.59)-(8.61). Isso é feito aplicando a condição $E_n = 0$ em (8.59)

$$E_{eq} I_z = 2E_f I_{zf}, \quad (8.64)$$

e abrindo I_z :

$$I_{zf} = \frac{bh^3}{12} + 3bh \left(\frac{H_n + h}{2} \right)^2.$$

Porém, $(H_n + h)/2 = H_m$, a distância entre os centroides das faces. Então,

$$I_{zf} = \frac{bh}{12} (h^2 + 3H_m^2).$$

No termo $(h^2 + 3H_m^2)$ usamos a hipótese de $h \ll H_m$ para desprezar o termo h^2 , de forma que se tem a simplificação

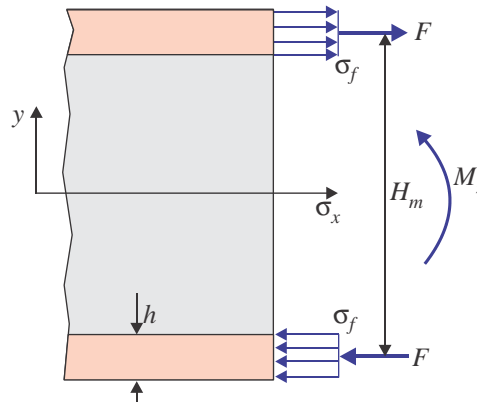


Figura 8.24: Estado de tensões normais num sanduíche considerado de faces delgadas e núcleo de baixa rigidez normal.

$$I_{zf} \approx \frac{bhH_m^2}{4} \quad (8.65)$$

Levando esse momento a (8.64), se obtém

$$E_{eq}I_z = E_f \frac{bhH_m^2}{2} \quad \text{e} \quad E_{eq} = E_f \frac{6h}{H_m} \quad (8.66)$$

A distribuição de tensões considera que a tensão normal no núcleo é nula, e nas faces são constantes na espessura, como na Figura 8.5b. O esforço interno de momento fletor numa seção é equilibrado pelo binário de forças F aplicadas no centroide de cada face como na figura. Esse equilíbrio é representado por

$$M_z = \underbrace{-\sigma_f(bh)}_F H_m \quad \rightarrow \quad \sigma_{fs} = -\sigma_{fi} = -\frac{M_z}{bhH_m} \quad (8.67)$$

onde σ_{fs} e σ_{fi} são as tensões nas faces superior e inferior, respectivamente, como ilustrado na Figura 8.24. Essa formulação simplificada é bastante útil em cálculos manuais de análise de vigas sanduíche, e em procedimentos de otimização de parâmetros, para minimizar massa ou maximizar rigidez, por exemplo. É provado (Mendonça, [6]) que, se as espessuras e módulos estiverem nas faixas indicadas em (8.62)-(8.63), os erros dos resultados da formulação simplificada são próximos de 1%.

Exemplo 8.8 - Viga sanduíche

Considere uma viga sanduíche com seção transversal como na Figura 8.4, constituída por um núcleo de espuma de poliuretano de módulo $E_n = 20$ MPa e duas faces de aço com $E_f = 200$ GPa. As dimensões são: $b = 100$ mm, $H_n = 200$ mm, $h = 10$ GPa. O esforço de momento fletor na seção é $M_x = 30$ kNm. (a) Determine o módulo de elasticidade equivalente da viga, (b) a distribuição das tensões normais na seção. Resolva usando a formulação completa e a simplificada.

Solução:

Usando a **formulação completa**, eqs.(8.59)-(8.61), temos

$$I_{zf} = \frac{bh^3}{12} + (bh) \left(\frac{H_m}{2} \right)^2 \quad \text{e} \quad I_{zn} = \frac{bH_n^3}{12}. \quad (8.68)$$

$H_m = (h + H_n)$ é a altura média da seção entre os centroides das faces. Então,

máximos de tensão normal. Os valores são: $E_c = 20$ GPa do concreto, $E_a = 200$ GPa, seção com $b = 250$ mm, $H = 550$ mm. São duas barras de aço, de seção circular com diâmetro $d = 28$ mm, que são alinhadas com centro a uma distância $\bar{Y}_a = 50$ mm a partir da base da seção, como na Figura 8.25a. O esforço de momento fletor na seção é $M_z = 60$ kNm.

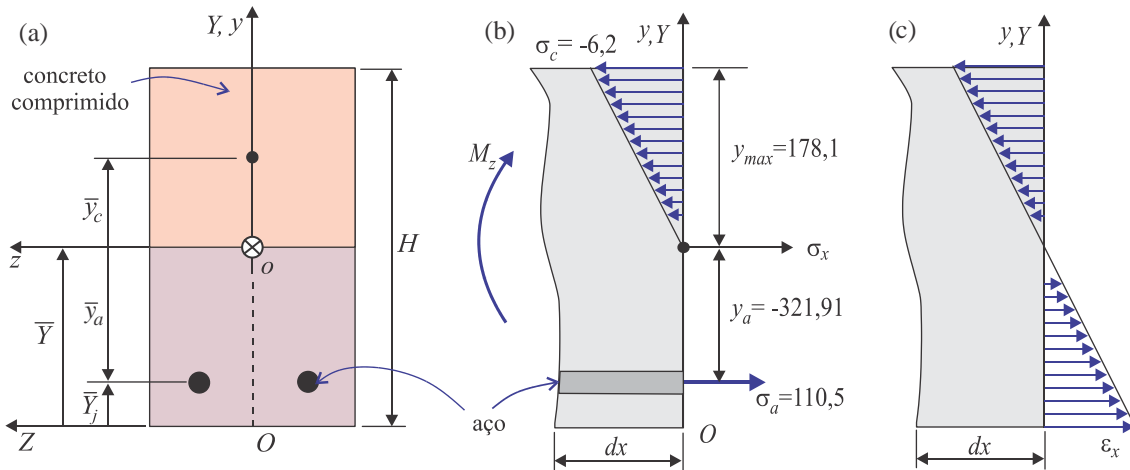


Figura 8.25: (a) parâmetros geométricos da seção; (b) distribuição de deformações; (c) distribuição de tensões.

Solução:

(a) A linha neutra. Inicialmente definimos um sistema de eixos temporário $OXYZ$, como na Figura 8.25a, e buscamos a posição \bar{Y} da linha neutra, que define os eixos $Oxyz$. No exemplo, o concreto será considerado apenas em sua região comprimida, i.e., acima da linha neutra. Isso gera uma situação distinta do exemplo anterior de viga de madeira-aço, pois aqui é como se houvesse concreto apenas acima da linha neutra, i.e., numa região ainda desconhecida. Por isso, retomamos as deduções feitas acima para materiais dúcteis, fazendo as adaptações necessárias.

Iniciamos com a adaptação da relação (8.45) de equilíbrio de forças axiais,

$$F_x = -\kappa(x) \int_{\bar{A}} E(y, z) y \, dA = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{\bar{A}} E(y, z) y \, dA = 0, \quad (8.72)$$

com a provisão que a integração será feita apenas sobre a área \bar{A} , que compreende o aço e a parte comprimida do concreto. Usamos a relação entre os eixos paralelos y e Y : $y = Y - \bar{Y}$:

$$\int_{\bar{A}} E y \, dA - \bar{Y} \int_{\bar{A}} E \, dA = 0. \quad (8.73)$$

Podemos particionar \bar{A} entre a parte comprimida do concreto, A_c^- , e a de aço A_a :

$$E_c \underbrace{\int_{A_c^-} Y \, dA}_{Q_{Zc}^-} + E_a \underbrace{\int_{A_a} Y \, dA}_{Q_{Za}} = \bar{Y} \left[\underbrace{\int_{A_c^-} dA}_{A_c^-} + \underbrace{\int_{A_a} dA}_{A_a} \right]. \quad (8.74)$$

$Q_{Zc}^- = A_c^- \bar{Y}_c^-$ é o momento estático da parte comprimida do concreto em relação ao eixo Z , e $Q_{Za} = \sum_{j=1}^m A_{aj} \bar{Y}_{aj}$ é o momento estático do conjunto das n barras, sendo A_{aj} e \bar{Y}_{aj} a área e a coordenada do centroide de cada barra j . Esses momentos e coordenadas podem ser obtidos em termos dos parâmetros geométricos da seção com auxílio da Figura 8.25a:

$$A_c^- = b(H - \bar{Y}) \quad \text{e} \quad \bar{Y}_c^- = \frac{1}{2}(H + \bar{Y}). \quad (8.75)$$

Substituindo em (8.74) temos

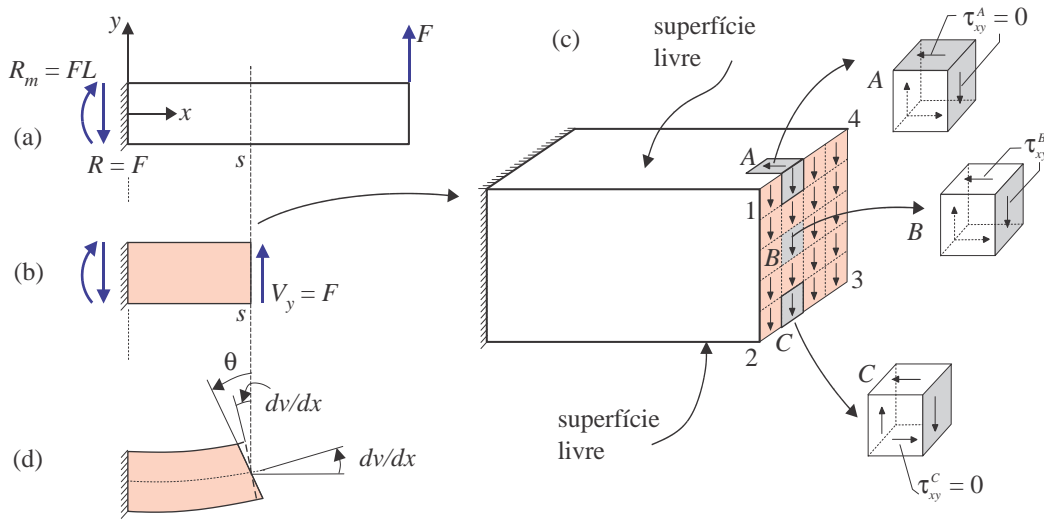


Figura 9.1: Tensões cisalhantes numa seção s em (c) e configuração deformada da seção em (d).

diferencial, i.e., τ_{xy} **sempre atua em quatro termos, de mesmo valor**, devido à condição de equilíbrio, como deduzido em (3.22). Observe o elemento diferencial volumétrico A: ele possui uma face orientada na direção x , i.e., pertence à seção transversal s , e tem outra face contida na superfície superior da viga. Note que a superfície superior é livre de carregamento tangenciais, o que significa cisalhamento nulo naquela face. Logo, no topo da seção transversal devemos ter também que $\tau_{xy}^A = 0$. O mesmo se aplica ao ponto C. De fato, todos os pontos nos contornos superior e inferior da seção devem ter $\tau_{xy} = 0$. Assim, os pontos nos segmentos 14 e 23 (Figura 9.1c) tem $\tau_{xy} = 0$, e os pontos em 12 e 34, tem $\tau_{xy} \neq 0$. Isso se aplica também a seção não retangulares, pelos mesmos motivos, mas a distribuição de tensões será também dependente de z , i.e., $\tau_{xy} = \tau_{xy}(y, z)$.

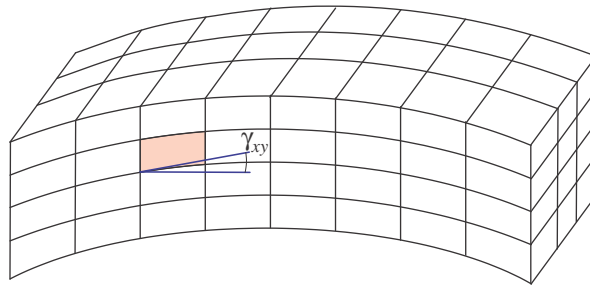


Figura 9.2: Ilustração da configuração deformada, isolando apenas a deformação devida ao cisalhamento transversal, ignorando o efeito do momento.

A configuração deformada da seção transversal da viga pelo efeito do cortante é ilustrada nas Figuras 9.1d e 9.2. A 9.2 ilustra a configuração deformada de um trecho de viga, tomando apenas a deformação devida ao cisalhamento transversal, ignorando o efeito do momento fletor. A deformação está exagerada (multiplicando por um fator de escala) para permitir a visualização. A visualização considera a hipótese que a seção permanece plana, i.e., que o cisalhamento é uniforme em cada seção. Então, o efeito do cisalhamento é apenas o de gerar uma translação vertical em cada seção, sem rotação, como na figura. O elemento diferencial colorido é retangular na configuração indeformada, e na configuração deformada apresenta deformação cisalhante γ_{xy} , que representa o afastamento do ângulo indeformado, que inicialmente era reto.

De fato, a hipótese de seção plana é apenas uma aproximação matemática para gerar uma formulação simples o suficiente para permitir soluções analíticas. Fisicamente, **a seção não se mantém plana**, mas assume uma forma empenada, aproximadamente uma função polinomial cúbica (isso é mais preciso no caso da seção retangular que em qualquer outro tipo de seção). Nesse

superfície neutra. O efeito do cisalhamento na deflexão transversal em relação a L/h é ilustrado no Capítulo 14, página 519, como o auxílio de conceitos de energia de deformação.

Dessa forma, o procedimento usual em engenharia consiste em:

- Determinar sempre σ_x usando a fórmula de flexão, qualquer que seja o aspecto L/h da viga. Isso é feito sob a hipótese que o cisalhamento transversal não afeta sensivelmente as tensões normais da teoria de flexão pura.
- Determinar τ_{xy} usando as teorias do presente capítulo, nos casos recomendados que serão listados posteriormente;
- Em problemas que assim o exijam, determinar a deflexão transversal usando a teoria de flexão de vigas longas, conforme descrito no Capítulo 12, i.e., levando em conta apenas o momento fletor;
- Caso a viga seja curta ($L/h \lesssim 10$), é provado que a presença do cortante faz com que a deflexão real seja superior àquela calculada pela teoria de vigas longas. Em algumas aplicações pode ser necessário calcular a correção no deslocamento devido ao cortante. Isso é mais importante, por exemplo, em cálculos dinâmicos de eixos de rotores de alta velocidade (acima de algo como 30.000 rpm) e vigas curtas de materiais compostos.

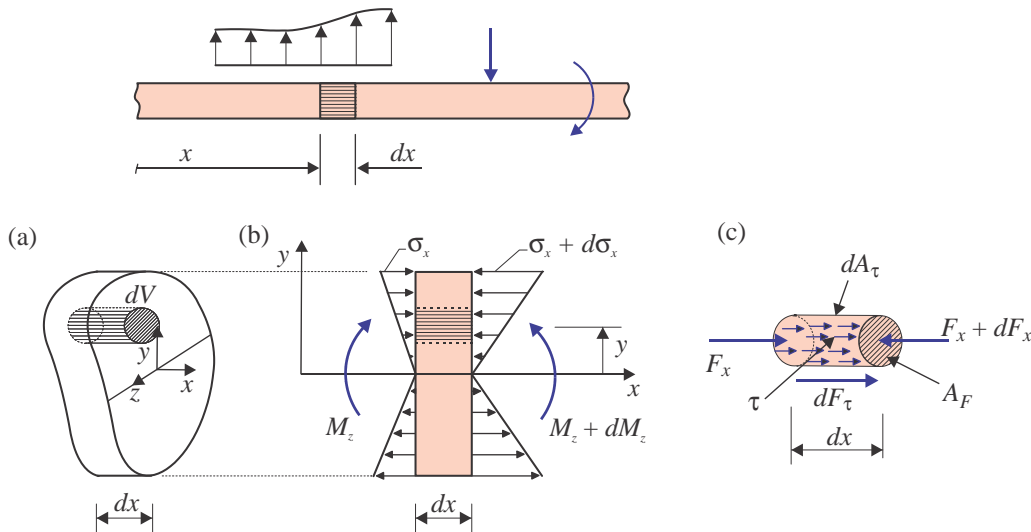


Figura 9.4: Tensões normais e cisalhantes num cilindro axial de seção arbitrária A_F imerso na viga.

9.2 Fluxo de cisalhamento e tensão cisalhante

Consideremos um segmento de **viga reta** submetido a um carregamento transversal arbitrário. Suponhamos que o problema seja isostático e que já determinamos a função de esforços cortantes $V_y(x)$ em cada seção, e de momentos fletores $M_z(x)$. Consideremos um elemento diferencial de volume da viga, de comprimento diferencial dx , i.e., o volume é um cilindro $dV = A dx$, onde A é a área da seção transversal, como ilustrado na Figura 9.4a. Como $M_z(x)$, no caso geral, não é constante, M_z varia de seção a seção. Então, nas duas faces de dV , de coordenadas x e $(x + dx)$, os momentos são M_z e $M_z + dM_z$ como na Figura 9.4b. Então, para cada cota y , as tensões normais σ_x em cada face são também diferentes numa e noutra face, dadas por σ_x e $(\sigma_x + d\sigma_x)$, através da **fórmula de flexão** (8.13), página 282, temos

A forma da área A_F pode ser qualquer, como ilustrado nas diversas regiões hachuradas na Figura 9.5. Qualquer que seja ela, o **momento estático é dado por**

$$Q_F = A_F \bar{Y}_F \quad (9.9)$$

onde \bar{Y}_F é a coordenada do centroide de A_F em relação ao eixo principal z . A Figura 9.5 mostra áreas hachuradas A_F definidas por cortes, horizontais, verticais e inclinados, todos retos, como também poderiam ter sido curvos. Em qualquer caso, a força axial de cisalhamento nas laterais longitudinais da área A_F podem ser obtidas como q calculado em (9.8).

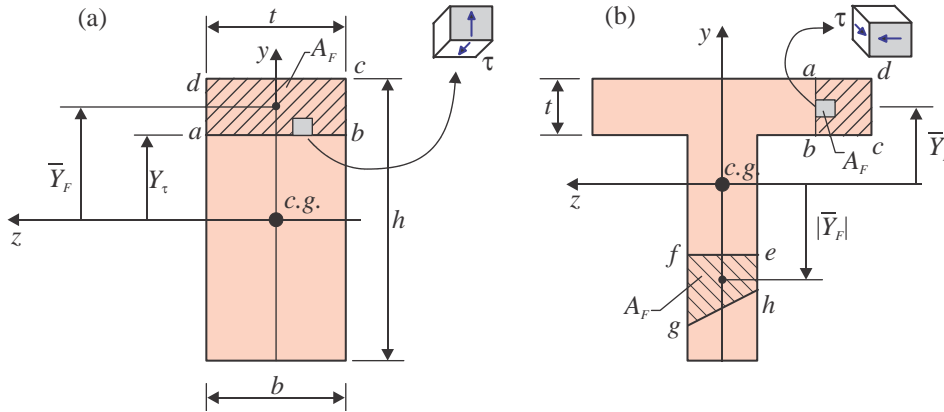


Figura 9.5: Algumas seções transversais de viga e diversas áreas onde se pode calcular o fluxo de cisalhamento q , que é associado ao momento estático Q_F , onde $Q_F = A_F \bar{Y}_F$.

9.2.1 Tensão cisalhante

Observemos novamente a Figura 9.4c do elemento cilíndrico axial de seção transversal arbitrária A_F . Na definição do fluxo de cisalhamento q em (9.5), dividimos a força total dF_τ pelo comprimento dx , o que nos dava uma força por unidade de comprimento de cilindro interno. **Esse valor é sempre exato para qualquer formato de A_F .** Por outro lado, podemos imaginar uma quantidade definida por dF_τ/dA_τ , onde dA_τ é a área da superfície lateral do cilindro como na Figura 9.4c. Essa quantidade dF_τ/dA_τ teria unidades de tensão, e de fato pode ser considerada uma **tensão cisalhante média**. Entretanto, essa quantidade possui pouca utilidade prática num caso geral, uma vez que as tensões cisalhantes variam fortemente em torno da superfície lateral dA_τ .

Em alguns casos particulares, entretanto, a definição será útil, como veremos a seguir. Definimos a **fórmula de cisalhamento** em vigas como

$$\tau \equiv \frac{dF_x}{dA_\tau} \quad (9.10)$$

onde dA_τ é a área da superfície lateral do cilindro onde a tensão é não nula.

As únicas situações em que (9.10) pode produzir valores úteis é quando o cilindro tem uma superfície lateral em que se prevê uma distribuição simples da tensão cisalhante. A Figura 9.5 ilustra alguns casos:

1. No caso da seção retangular, A_F na Figura 9.5a é definida na forma de um retângulo onde três lados (superfície bc , cd e da) coincidem com a superfície externa da própria viga, **onde sabemos, a priori, que a tensão cisalhante é nula**, uma vez que são superfícies livres de carregamento tangencial. Só a superfície ab de A_F possui interface com o resto da seção, de forma que toda a força dF_x usada em (9.10) no cálculo de τ é aplicada através da superfície ab . Aqui, **essa linha é tomada como reta, paralela ao eixo z** . Isso é feito assim de acordo com a previsão de que as tensões cisalhantes tenham pouca variação ao longo da linha ab (no caso particular da seção retangular τ é realmente quase uniforme ao longo de z).

$$\tau_{\max}(x) = \tau(x, y_{\tau} = 0) = \frac{3V_y}{2A} = 1,5\bar{\tau} \quad (9.15)$$

onde foi usado o fato que a área da seção completa é $A = bh$. Também, V_y/A é a **tensão cisalhante média** $\bar{\tau}$ na seção. **Então, (9.15) mostra que a tensão cisalhante máxima numa seção retangular é 50 % superior ao valor da tensão média.**

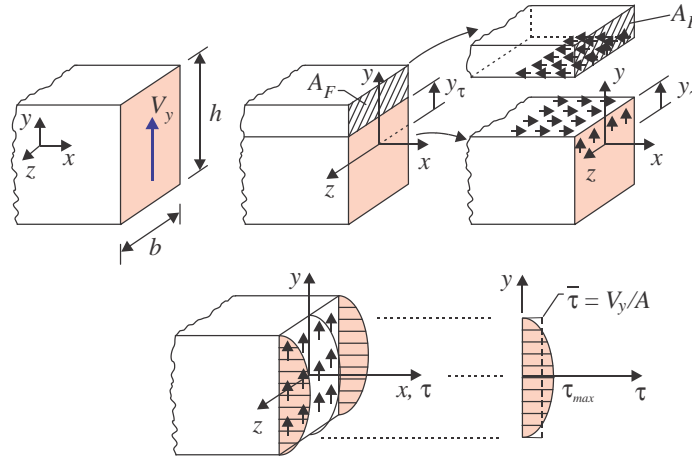


Figura 9.6: Distribuição de tensões cisalhantes numa viga reta de seção retangular.

9.3.2 Distribuição real de tensões cisalhantes na seção retangular

A solução dada pela presente teoria, sintetizada nas equações (9.14) e (9.15) para seção retangular, e Figura 9.6), representam uma distribuição independente de z , e dependente apenas de y numa dada seção. Entretanto, usando a teoria de elasticidade tridimensional, é possível verificar que na solução correta do problema τ varia também com z .

A Figura 9.7 mostra a solução de elasticidade para a distribuição de tensões cisalhantes numa seção retangular larga, com $b/h = 3$, comparada à a solução teórica da equação (9.15). **Em geral, quanto mais estreita for a seção (b/h pequeno), menor o erro da equação (9.15).** Por exemplo, para $b/h = 0,5$ o erro é de cerca de 3 %, enquanto para $b/h = 2$ o erro é aproximadamente 40 % [4].

A principal aplicação da presente teoria é na determinação de tensão média máxima que ocorre na linha neutra em perfis estruturais (T, I por exemplo), que ocorre na alma, onde a espessura é pequena e o erro é mínimo.

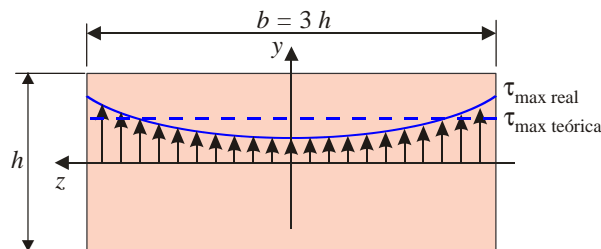


Figura 9.7: Distribuição teórica da equação (9.15) e real, obtida por elasticidade, ao longo da linha neutra de uma seção retangular.

9.3.3 Seção circular

Aplicaremos a teoria, equação (9.12), no problema de cisalhamento numa viga reta de seção circular. Os diversos parâmetros na fórmula são: I_z , que na seção circular é $I_z = \pi d^4/64$, V_y que é considerado pré-determinado, e Q_F e t que merecem tratamento próprio. Para isso considere a Figura 9.8a, onde identificamos na seção transversal uma região colorida A_F definida acima de uma linha reta ab paralela ao eixo z , com cota y_τ . Buscaremos então o valor médio de τ_{xy} na interface de material de cota y_τ . Então a largura t depende de y_τ , i.e., $t = t(y_\tau)$ e $Q_F = Q_F(y_\tau)$. As determinações dessas dependências são feitas usando trigonometria. Primeiro considerando o triângulo cfb , o teorema de Pitágoras gera $(d/2)^2 = y_\tau^2 + (t/2)^2$, de forma que

$$t(y_\tau) = \sqrt{d^2 - 4y_\tau^2}. \quad (9.16)$$

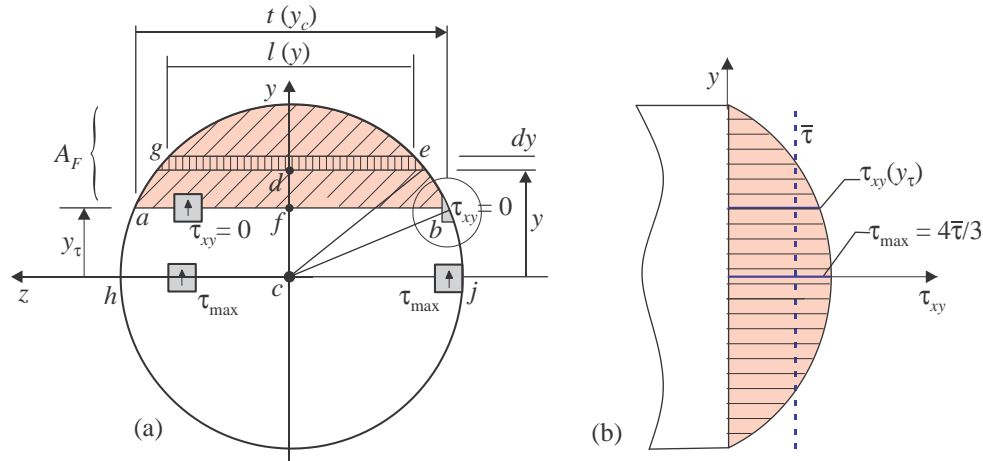


Figura 9.8: (a) Determinação dos parâmetros da fórmula (9.12) para τ_{xy} ; (b) distribuição teórica parabólica de τ_{xy} e tensão média $\bar{\tau} = V_y/A$.

Para o momento estático Q_F , partimos da definição (9.7), $Q_F \equiv \int_{A_F} y dA_F$, e definimos um elemento diferencial de área $dA_F = l(y)dy$ como na Figura 9.8a. Assim,

$$Q_F = \int_{y=y_\tau}^{d/2} yl(y) dy. \quad (9.17)$$

onde $l(y)$ é a largura da linha eg , de cota y como na figura. Novamente, usando o teorema de Pitágoras no triângulo ced temos $(d/2)^2 = y^2 + (l/2)^2$. Logo,

$$l(y) = \sqrt{d^2 - 4y^2}. \quad (9.18)$$

Levando (9.18) a (9.17), e integrando e simplificando, obtemos o momento estático:

$$Q_F(y_\tau) = \frac{1}{12} [d^2 - 4y_\tau^2]^{3/2}. \quad (9.19)$$

Finalmente, usando t e Q_F de (9.16) e (9.19), a tensão vem de (9.12) como:

$$\tau_{xy}(y_\tau) = \frac{V_y Q_F(y_\tau)}{I_z t(y_\tau)} = \frac{V_y}{(\pi d^4/64)} \frac{\frac{1}{12} [d^2 - 4y_\tau^2]^{3/2}}{[d^2 - 4y_\tau^2]^{1/2}}.$$

Simplificando, e observando que a área da seção é $A = \pi d^2/4$, temos finalmente

$$\boxed{\tau_{xy}(y_\tau) = \frac{\pi V_y}{3A^2} (d^2 - 4y_\tau^2)} \quad (9.20)$$

Esta é uma função parabólica de y_τ , como ilustrado na Figura 9.8b. O valor máximo ocorre ao

caso a seção não possua plano de simetria). No presente caso, entretanto, simplesmente obtemos os dados geométricos da seção usando uma norma adequada, que pode ser ABNT, ASME, ou ISO, por exemplo. Assim as dimensões obtidas são aquelas mostradas na Figura 9.10b, com área $A = 1.780 \text{ mm}^2$ e $I_z = 2,79 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.

Etapa 2 – Determinação das **reações e esforços** cortantes. Como o problema é isostático, se pode facilmente resolver o problema, obtendo a reação no apoio $R_A = 20 \text{ kN}$ e o diagrama de V_y mostrado na Figura 9.10c. Logo, o cortante máximo é $V_y = 20 \text{ kN}$, e ocorre na seção A.

Etapa 3 – Aplicação da teoria (equação(9.12)) à seção transversal A. Como se trata de um perfil, torna-se complicado determinar uma equação fechada para τ_{xy} em função de y_τ . Em vez disso, realizaremos os cálculos apenas para algumas posições na seção. Essas posições são as linhas horizontais 12, 34 etc., ilustradas na Figura 9.11.

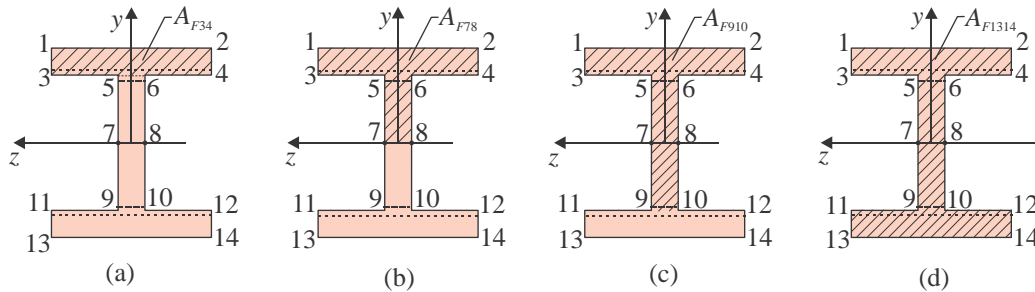


Figura 9.11: Identificação de cortes na seção para cálculo do momento Q_F .

Tensão no flange, linha 34. Na Figura 9.11a temos hachurada a área A_{F34} , que fica acima da linha 34 onde desejamos estimar τ_{xy} . Essa linha é posicionada infinitesimalmente próxima junção da alma com o flange, porém acima da junção. Então o corte 34 é feito de forma a interceptar a seção ao longo da linha tracejada de comprimento igual à largura do flange, e em (9.12) a largura t é $t_{34} = B = 71,0 \text{ mm}$. O momento estático é $Q_{F34} = A_{34}\bar{Y}_{34}$, onde \bar{Y}_{34} é a coordenada do centroide de A_{34} , dada por $\bar{Y}_{34} = (H - h_f)/2 = (101,6/2 - 4,7)/2 = 47,1 \text{ mm}$. Assim,

$$Q_{F34} = A_{34}\bar{Y}_{34} = (Bh_f)\bar{Y}_{34} = (71 \times 7,4)47,1 = 24.746 \text{ mm}^3.$$

Então, de (9.12), a tensão em qualquer ponto ao longo de 34 é **estimada** como

$$\tau_{xy}^{34} = \frac{V_y Q_{F34}}{t_{34} I_z} = \frac{20.000 \times 24.746}{71 \times 2,79 \cdot 10^6} = 2,5 \text{ MPa}.$$

Tensão no flange, linha 12. A tensão ao longo da linha superior da seção, 12, pode ser prontamente identificada como zero: uma vez que a área acima da linha, $A_{12} = 0$, o momento estático Q_{F12} também é nulo e $\tau_{xy}^{12} = 0$.

Tensão no flange, linha 56. Notamos que essa linha é feita de forma a interceptar a seção apenas na alma, i.e., as tensões são aplicadas apenas ao longo da largura da alma, de forma que em (9.12) a largura t é $t_{56} = h_a = 8,3 \text{ mm}$. A área acima de 56, A_{56} , é a mesma área acima de 34, i.e., $A_{56} = A_{34} = Bh_f$, uma vez que as linhas 34 e 56 são infinitesimalmente próximas. Assim, $Q_{F56} = Q_{F34} = 24.746 \text{ mm}^3$. Então, (9.12) produz a tensão $\tau_{xy}^{56} = \frac{V_y Q_{F56}}{t_{56} I_z} = \frac{20.000 \times 24.746}{8,3 \times 2,79 \cdot 10^6} = 21,4 \text{ MPa}$. A única diferença em relação à linha 34 é que agora a força cisalhante axial se distribui ao longo de uma largura menor, $t_{56} = 8,3 \text{ mm}$ em vez de $t_{34} = B = 71,0 \text{ mm}$.

Tensão no flange, linha 78. Para a área definida pela linha neutra, a área A_{F78} é aquela hachurada na Figura 9.11b. O momento Q_{F78} pode ser obtido somando o momento devido ao retângulo 5678 com Q_{F34} :

e varia de forma parabólica com y . Já em 12, τ_{xz} assume valores expressivos e varia linearmente com z . Assim, no cálculo do fluxo de cisalhamento é costumeiro considerar apenas a parcela de fluxo paralela ao flange e à alma, como ilustrada na Figura 9.14. No flange da Figura 9.13, por exemplo, despreza-se o fluxo q^{34} e considera-se apenas q^{12} . Na alma se considera o fluxo nas faces paralelas ao eixo y . Esses fluxos são ilustrados na Figura 9.14a para a seção I.

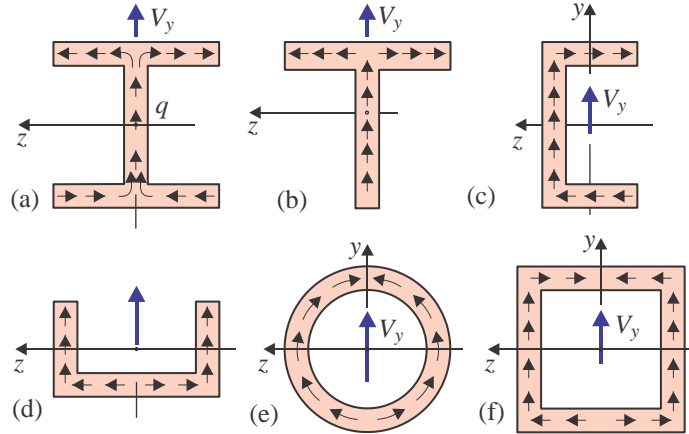


Figura 9.14: Orientação do fluxo de cisalhamento em diversos perfis de paredes finas.

A explicação da orientação do fluxo no perfil é como segue. Consideremos por exemplo o perfil T da Figura 9.14b, com o cortante V_y para cima como indicado. Então é de se esperar que o fluxo (e as tensões) na alma sejam também para cima, uma vez que V_y é a resultante do fluxo. Para entender a orientação de q no flange, consideremos os dois lados do flange superior como na Figura 9.15. Tomamos dois prismas definidos pelas áreas A_F^1 e A_F^2 e montamos seus diagramas de corpo livre. Observe que se V_y é para cima, i.e., $V_y > 0$, então pela equação de equilíbrio ($dM_z/dx = -V_y$), se tem que $dM_z/dx < 0$, o que significa que M_z diminui com x , i.e., $(M_z + dM_z) < M_z$. Então, nos extremos de cada prisma, a força axial devida à tensão normal σ_x orientada “para traz” ($F_x + dF_x$) é menor que a força “para frente” F_x , de forma que existe uma resultante axial dF_x para frente. Então, em ambos os casos, a força cisalhante atuando na interface é qdx , para traz, da mesma forma que a tensão cisalhante. Logo, na área A_F^1 a força q é para a direita e na área A_F^2 o fluxo q é para a esquerda, o que leva às orientações vistas na Figura 9.14b.

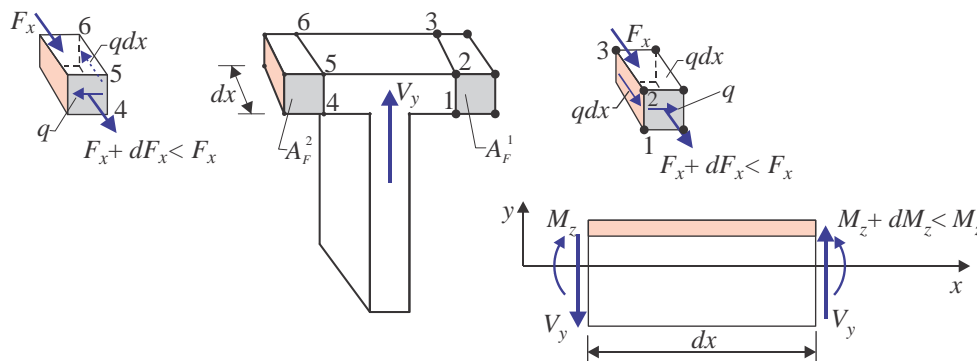


Figura 9.15: Orientação de fluxo de cisalhamento num perfil.

Observando os diversos casos da Figura 9.14 notamos o porquê do nome “fluxo” de cisalhamento. As forças comportam-se um pouco como um escoamento fluido num duto. A forma prática de determinar as orientações é a seguinte:

- (a) nas paredes verticais (paralelas ao cortante), colocar o fluxo na direção positiva de V_y ;

- (b) nos extremos da parede vertical o fluxo mantém a orientação quando entra ou sai da parede horizontal.

A determinação do fluxo de cisalhamento em alguns dos perfis da Figura 9.14 será discutida através de exemplos.

Exemplo 9.2 - Fluxo de cisalhamento em perfil I

Considere o perfil I do Exemplo 9.1, cuja geometria é dada na Figura 9.10c. Determine o fluxo de cisalhamento longitudinal aos flanges e à alma. Tentar obter primeiro expressões analíticas em termos dos parâmetros geométricos da seção.

Solução:

Para facilitar a dedução das equações, em lugar de usar a altura total da seção, H , usaremos a altura média $\bar{H} \equiv (H - h_f)$. Devido aos dois planos de simetria da seção, bastará a determinação de duas equações para q , uma para um lado de flange e outra para a alma.

Flange – Para a equação no flange usamos um corte transversal 12 numa posição genérica definida pela coordenada z , o que define uma área A_{F12} como na Figura 9.16a. O momento estático é $Q_{F12} = A_{F12}\bar{Y}_{12} = (B/2 - z)h_f \cdot (\bar{H}/2)$. Então o fluxo é

$$q_{\text{flange}}(z) = \frac{V_y Q_{F12}}{I_z} = \frac{V_y h_f \bar{H}}{2I_z} \left(\frac{B}{2} - z \right). \quad (9.24)$$

Claramente esta é uma função linear em z , com máximo em $z = 0$, i.e., $q_{\text{flange}}^{\max} = V_y \bar{H} B h_f / 4I_z$. Por simetria, no lado negativo de z a distribuição de q é reversa, como indicado na Figura 9.16c. Também por simetria, temos que $Q_{F78} = -Q_{F12}$, e a orientação do fluxo é invertida no flange inferior em relação ao flange superior.

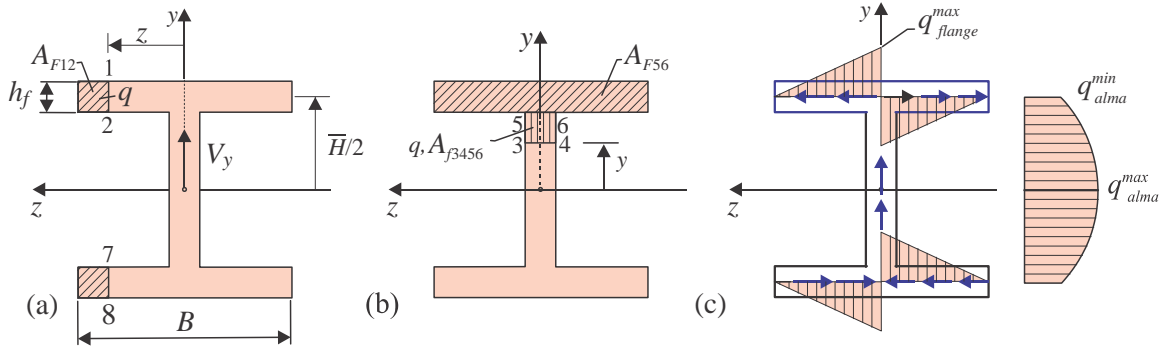


Figura 9.16: Cortes para determinação de equação de q no flange e na alma de perfil I.

Alma – Para a determinação do fluxo na alma usamos a área A_{F34} ilustrada na Figura 9.16b, onde o corte 34 tem cota variável y . O momento estático Q_{F34} é obtido adicionando o momento do pequeno retângulo 3456 ao momento do flange A_{F56} :

$$\begin{aligned} Q_{F34} &= Q_{F56} + Q_{F3456}, \\ &= A_{56}\bar{Y}_{56} + A_{3456}\bar{Y}_{3456}, \\ &= (Bh_f)\frac{\bar{H}}{2} + h_a \left[\frac{1}{2}(\bar{H} - h_f) - y \right] \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\bar{H} - h_f) + y \right], \\ \rightarrow Q_{F34} &= \frac{1}{2} \left\{ B\bar{H}h_f + h_a \left[\frac{1}{4}(\bar{H} - h_f)^2 - y^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

pontes metálicas, frequentemente necessitam vigas com alturas grandes, por exemplo um metro ou mais. Estas são construídas por chapas metálicas unidas por cantoneiras, como ilustrado na Figura 9.17e e (f). Em todos os casos o cálculo é feito através da determinação do fluxo de cisalhamento em cada superfície de contato entre as partes. O procedimento será visto a seguir através de exemplos.

Exemplo 9.3 - Montagem de perfil canaleta [

Considere uma viga como na Figura 9.18a, que desejamos construir unindo três placas de aço de espessura $h = 35$ mm de , usando parafusos que possuem capacidade de suportar 150 N de força cisalhante. Determine o espaçamento necessário dos parafusos nas interfaces L_1 e L_2 para que a viga suporte a carga $F = 400$ N, se a força admissível por parafuso for $F_{adm} = 150$ N/parafuso.

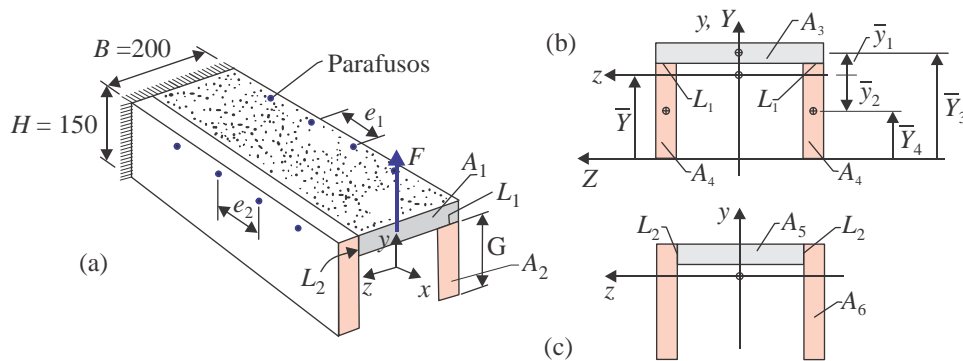


Figura 9.18: Dados e solução do Exemplo 9.3.

Solução:

Etapa 1 -- Posição \bar{Y} do centroide (Figura 9.18b). Subdividimos a seção numa área horizontal A_3 e duas paredes A_4 . A área total da seção é $A = A_3 + 2A_4$, onde $A_3 = Bh = 200 \times 35 = 7.000$ mm² e $A_4 = Gh = 115 \times 35 = 4.025$ mm². Então, $A = 15.050$ mm². As coordenadas do centroide de cada área em relação ao eixo Z são $\bar{Y}_3 = H - h/2 = 132,5$ mm e $\bar{Y}_4 = G/2 = 57,5$ mm. Seguindo o procedimento, usando os eixos temporários YZ , temos:

$$\begin{aligned} A\bar{Y} &= A_3\bar{Y}_3 + 2A_4\bar{Y}_4, \\ 15.050\bar{Y} &= 7.000 \times 132,5 + 2 \times 4.025 \times 57,5 = 1,39 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Logo, $\bar{Y} = 92,38$ mm.

Etapa 2 – Momento de inércia I_z . As coordenadas dos centroides das áreas A_3 e A_4 , (Figura 9.18b), em relação ao eixo principal z , são $\bar{y}_3 = \bar{Y}_3 - \bar{Y} = 132,5 - 92,38 = 40,1$ mm e $\bar{y}_4 = \bar{Y}_4 - \bar{Y} = 57,5 - 92,38 = -34,9$ mm. O momento de inércia é

$$\begin{aligned} I_z &= I_z^3 + 2I_z^4 = \left[\frac{Bh^3}{12} + A_3\bar{y}_3^2 \right] + 2 \left[\frac{hG^3}{12} + A_4\bar{y}_4^2 \right], \\ &= \left[\frac{200 \times 35^3}{12} + 7.000 \times 40,1^2 \right] + 2 \left[\frac{35 \times 115^3}{12} + 4.025 \times (-34,9)^2 \right], \\ I_z &= 30,65 \cdot 10^6 \text{ mm}^4. \end{aligned}$$

Etapa 3 – Fluxo de cisalhamento na interface em L_1 . Para isso usamos a mesma área A_3 da Figura 9.18b. Note que poderíamos pensar em usar a área hachurada A_1 da figura (a). Entretanto o valor q obtido não teria utilidade, uma vez que ele incorporaria as forças na interface L_1 mais as forças em L_2 . Como esses fluxos são diferentes, não teríamos como separá-los do total q . Por outro lado,

permitirá identificar aproximadamente a distribuição de tensões ao longo de y na seção do engaste. Considere apenas tensões nominais, i.e., ignore os efeitos da concentração de tensões na região do engaste.

- (b) Determine a tensão cisalhante máxima absoluta τ_{\max}^{abs} nesses pontos.
- (c) Observe que esta viga tem um aspecto $L/h = 1.000/333,3 = 3$, indicando que é bastante curta. Recalcule as tensões cisalhantes máximas absolutas nos pontos A e C, $\tau_{\max A}^{\text{abs}}$ e $\tau_{\max C}^{\text{abs}}$, respectivamente, para valores de altura da seção $h = \{333,3; 200; 150; 100; 75; 50\}$ mm. Plote as curvas L/h versus a relação $\tau_{\max C}^{\text{abs}}/\tau_{\max A}^{\text{abs}}$

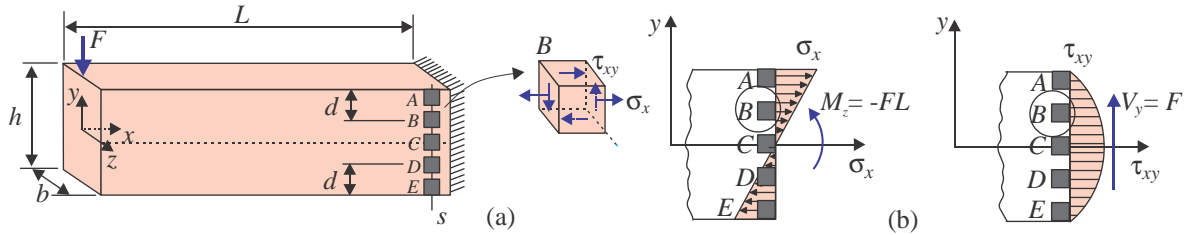


Figura 9.19: (a) Dados do Exemplo 9.4; (b) Tensões normais e cisalhantes em pontos da seção s do engaste e estado de tensões no ponto B .

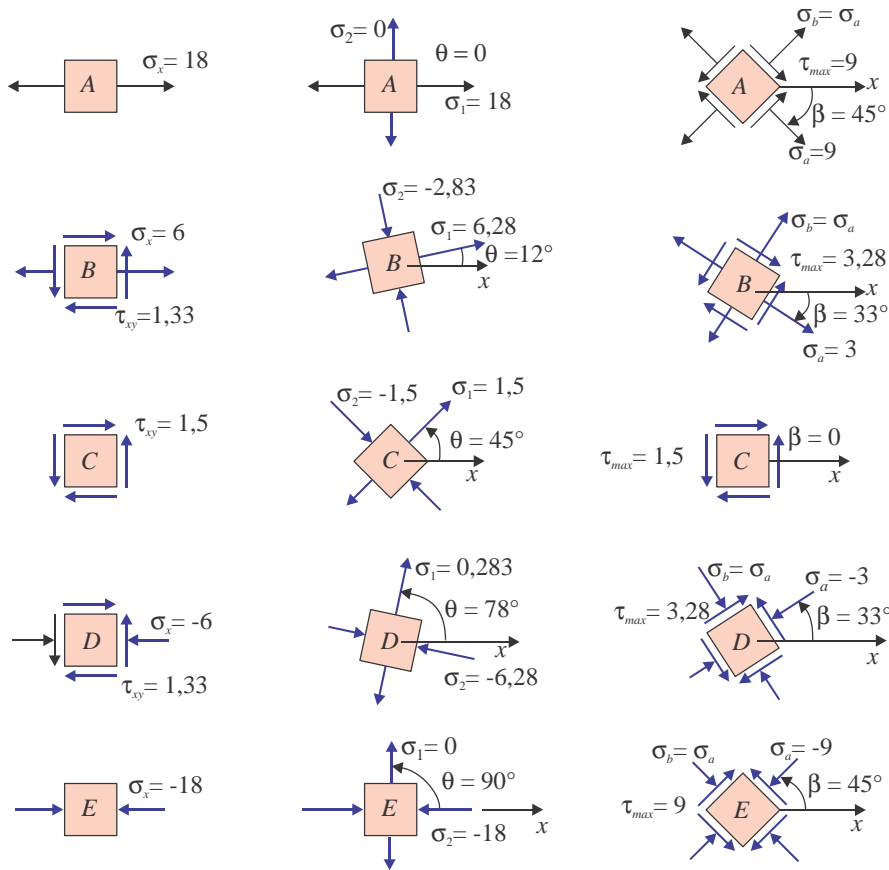


Figura 9.20: Estados de tensão nas direções xy , principais 12 e ab de cisalhamento máximo. Tensões em MPa.

Solução:

Etapas 1 – Os esforços na seção s do engaste são obtidos pelo método das seções como:

ponto de maior sollicitação ainda é a fibra externa, exatamente como previsto no caso de flexão pura, i.e., nos pontos A e E, onde a tensão $\tau_{\max}^{\text{abs}} = 18 \text{ MPa}$ é a maior em toda a seção.

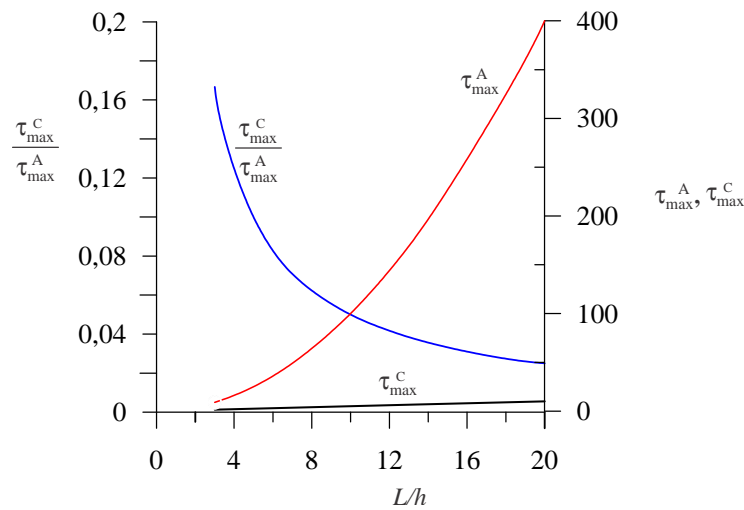


Figura 9.22: Variação da relação entre as tensões máximas equivalentes nos pontos A e C versus L/h . $L = 1 \text{ m}$, $b = 30 \text{ mm}$, $F = 10 \text{ kN}$.

Etapa 3 – A Figura 9.22 mostra a variação das tensões cisalhantes máximas absolutas nos pontos A (τ_{\max}^A) e C (τ_{\max}^C) da seção do engaste, versus o aspecto da viga L/h . A tensão τ_{\max}^A é unicamente definida pela tensão normal de flexão ($\tau_{\max}^A = \sigma_x^A/2$), e τ_{\max}^C é inteiramente definida pelo esforço cortante. Nota-se que, conforme a viga se torna mais fina (L/h crescente), τ_{\max}^C se torna progressivamente menor em comparação à tensão de flexão τ_{\max}^A , como se pode ver pela curva decrescente $\tau_{\max}^C/\tau_{\max}^A \times L/h$.

Exemplo 9.5 - Cisalhamento em viga de seção I

Considere a viga de aço ilustrada do Exemplo 9.1, com a seção transversal mostrada na Figura 9.23. Determine as tensões cisalhantes máximas absolutas no topo e no centroide da seção, os pontos 1 e 2 marcados na figura. Faça essa determinação para os seguintes valores de altura total da seção, $H = \{50; 101,6; 150; 200; 250\} \text{ mm}$, mantendo as outras dimensões como na Figura 9.23. Como se comporta a tensão no centroide com o crescimento de H ? Considere o esforço cortante $V_y = 20 \text{ kN}$ e esforço de momento fletor $M_z = 2 \text{ kNm}$.

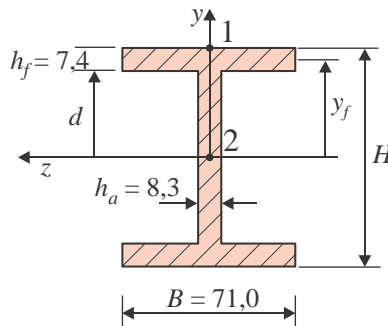


Figura 9.23: Seção transversal I do Exemplo 5. Dimensões em mm.

Solução:

A coordenada da superfície inferior do flange é $d = H/2 - h_f$ e a coordenada do centroide do flange é $y_f = d + h_f/2$. O segundo momento de inércia principal da seção é

Tabela 9.1: Variação de $\tau_{\max 1}^{abs}$ e $\tau_{\max 2}^{abs}$ nos pontos 1 e 2 da seção em função da altura total H .

H	σ_{x1}	τ_{xy2}	τ_{xy1}/τ_{xy2}
50	97,7	58	1,2
101,6	36,4	28,1	1,54
150	21,3	19,3	1,81
200	14,1	14,7	2,08
250	10,2	11,9	2,38

$$I_z = \frac{h_a (2d)^3}{12} + 2 \left[\frac{Bh_f^3}{12} + (Bh_f) y_f^2 \right]. \quad (9.32)$$

A área de um flange é $A_f = Bh_f$ e o momento estático da parte da seção acima da linha neutra, em relação ao eixo z é

$$Q_z = A_f y_f + (h_a d) \frac{d}{2}. \quad (9.33)$$

A tensão normal (em módulo) no ponto 1 da seção, e a tensão cisalhante no ponto 2, são obtidas por

$$\sigma_{x1} = \frac{M_z}{I_z} (H/2) \quad \text{e} \quad \tau_{xy2} = \frac{V_y Q_z}{h_a I_z}. \quad (9.34)$$

A tensão cisalhante máxima absoluta no ponto 1 é $\tau_{\max 1}^{abs} = \sigma_{x1}/2$, e no ponto 2 é $\tau_{\max 2}^{abs} = \tau_{xy2}$. Os resultados para diversos valores de altura da seção H são calculados na Tabela 9.6 e na Figura 9.24. Nota-se que o crescimento de H aumenta a área da seção e o momento de inércia, o que fazem com que ambas as tensões, cisalhante devida à flexão no topo da seção, $\tau_{\max 1}^{abs}$, e cisalhante máxima na linha neutra devida ao cortante, $\tau_{\max 2}^{abs}$, diminuam. Entretanto, **conforme H cresce, a queda da tensão de flexão é mais acentuada que a tensão devida ao cortante, de forma que a relação $\tau_{\max 2}^{abs}/\tau_{\max 1}^{abs}$ cresce. A partir de certo valor de H , a relação $\tau_{\max 2}^{abs}/\tau_{\max 1}^{abs}$ ultrapassa o valor 1, o que significa que o ponto crítico na seção ocorre na linha neutra em vez de na fibra extrema como no caso de flexão pura ou de seções maciças.**

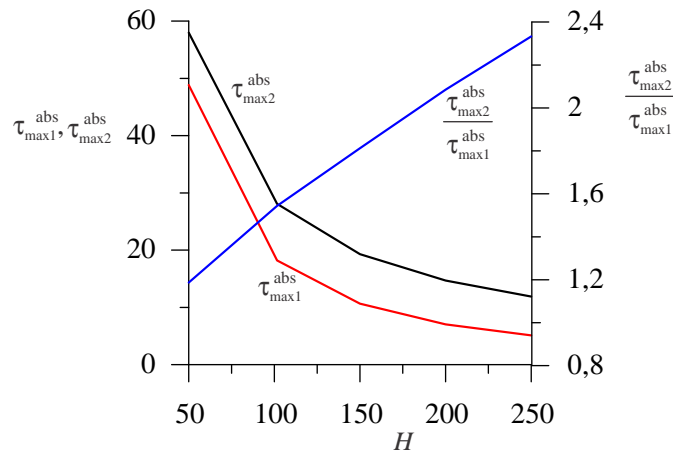


Figura 9.24: Variação de $\tau_{\max 1}^{abs}$ e $\tau_{\max 2}^{abs}$ nos pontos 1 e 2 da seção em função da altura total H .

A situação típica para a identificação dos pontos críticos em vigas sob flexão pode ser resumida por:

$$\tau_{\max}^c = \frac{4V_y}{3A} = \frac{4 \times 100}{3 \times 78,5} = 1,70 \text{ MPa, nos pontos } B \text{ e } D. \quad (9.37)$$

onde a área da seção é $A = \pi 10^2/4 = 78,5 \text{ mm}^2$. Os valores em A e C são nulos, como ilustrado na Figura 9.26b.

Podemos fazer a sobreposição dos valores de tensão cisalhante em cada ponto, $A - D$, simplesmente adicionando vetorialmente as componentes, uma vez que elas atuam sobre a mesma área.

$$\begin{aligned} \text{Pontos } A, C &\rightarrow \tau_A = \tau_{\max}^t = 127,3 \text{ MPa,} \\ \text{Ponto } B &\rightarrow \tau_B = -\tau_{\max}^t + \tau_{\max}^c = -127,3 + 1,70 = -125,6 \text{ MPa,} \\ \text{Ponto } D &\rightarrow \tau_D = \tau_{\max}^t + \tau_{\max}^c = 127,3 + 1,70 = \boxed{129 \text{ MPa} = \tau_{\max}} \end{aligned} \quad (9.38)$$

Essas tensões são o efeito combinado de torção e cortante mostrados na Figura 9.26c. Entretanto, a força transversal F gera também momento fletor $M_z = FL = 50 \text{ kNmm}$. A tensão normal máxima na seção, atuante nos pontos A e C , em módulo, é:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z}(d/2) = \frac{10^4}{490,9}(10/2) = 102 \text{ MPa,} \quad (9.39)$$

onde o momento de inércia $I_z = J/2 = 490,9 \text{ mm}^4$. A variação da tensão normal devida à flexão é mostrados na Figura 9.26d. As tensões cisalhantes máximas absolutas nos pontos $A - D$ pode ser calculadas por $\tau_{\max}^{abs} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$:

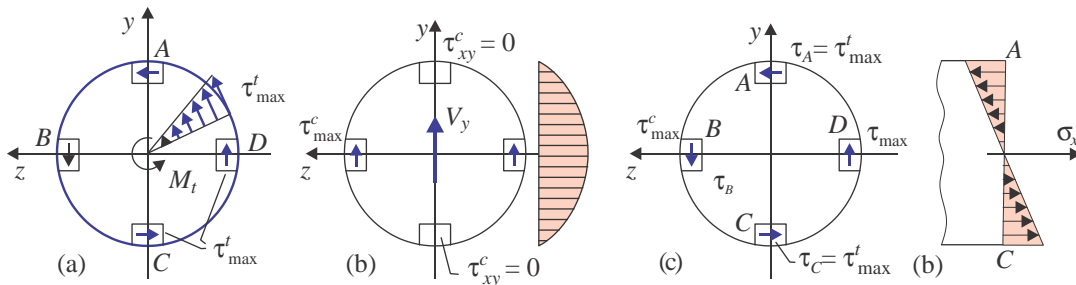


Figura 9.26: (a) tensão cisalhante de torção; (b) tensão devida ao cortante; (c) tensões resultantes de torção e cortante em alguns pontos da seção; (d) tensões normais de flexão.

$$\begin{aligned} \text{Pontos } A, C &\rightarrow \tau_{\max A}^{abs} = \sqrt{\left(\frac{102}{2}\right)^2 + 127,3^2} = \boxed{137,1 \text{ MPa} = \tau_{\max}^{abs}}, \\ \text{Ponto } B &\rightarrow \tau_{\max B}^{abs} = \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + 125,6^2} = 125,6 \text{ MPa,} \\ \text{Ponto } D &\rightarrow \tau_{\max D}^{abs} = \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + 129^2} = 129 \text{ MPa.} \end{aligned} \quad (9.40)$$

Então, mesmo com a torção, as tensões normais de flexão fazem o ponto crítico na seção se localizar no ponto mais distantes da linha neutra, $y = \pm d/2$, exatamente como no caso de flexão pura.

9.8 Centro de torção e perfis abertos não simétricos

Em todos os problemas considerados nas seções anteriores, as vigas eram de seção transversal com dois planos de simetria. Então, basta que o carregamento seja aplicado sobre os pontos da linha neutra, que deve ser a centroidal, para que a resposta da viga seja apenas de flexão, sem torção.

Entretanto a situação é distinta se a viga possui apenas um ou nenhum plano de simetria. **Nesses casos, uma força transversal pode sim gerar torção na viga**, além de flexão. Isso será entendido com o desenvolvimento mostrado a seguir.

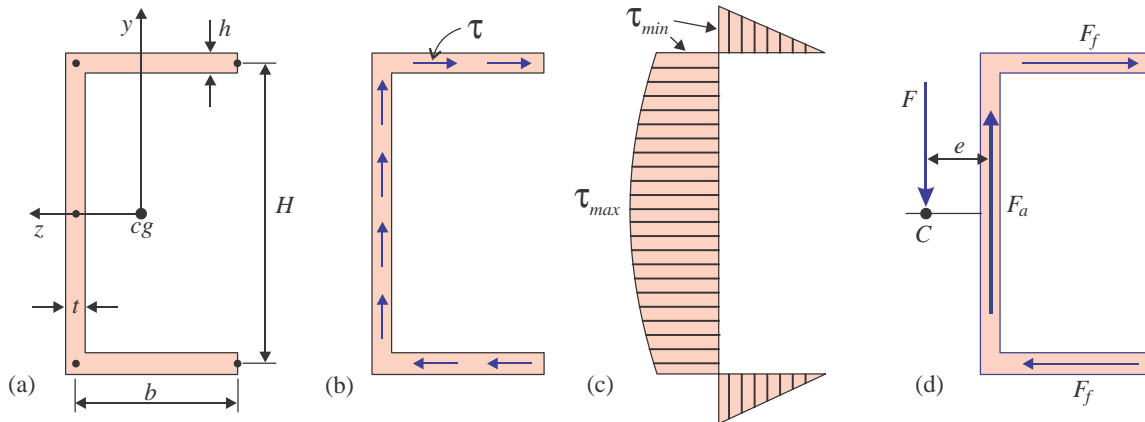


Figura 9.27: Tensões e fluxos cisalhantes numa canaleta e **centro de torção**.

Consideremos uma viga constituída por um perfil aberto de parede delgada, como ilustrado na Figura 9.27. Nesse primeiro caso, começamos por uma seção que possui um plano de simetria, o eixo principal z . Sob o efeito de um esforço cortante vertical, V_y , se desenvolvem o fluxo de cisalhamento e as tensões cisalhantes na seção, como nas figuras (b) e (c). A integração dos fluxos em cada flange gera duas forças resultantes horizontais F_f , e na alma gera uma força vertical F_a . Nota-se que existe uma força resultante vertical, F_f , atuante na alma, que deve ser igual ao cortante V_y , e as forças nos flanges geram um torque de valor HF_f , onde H é a altura da seção entre as linhas médias dos flanges.

Na presente dedução se considera que a parede do perfil seja delgada, de forma que as forças cisalhantes verticais desenvolvidas nos flanges são desprezíveis em relação às aquelas ilustradas na Figura 9.27b, que mostra apenas as forças horizontais nos flanges.

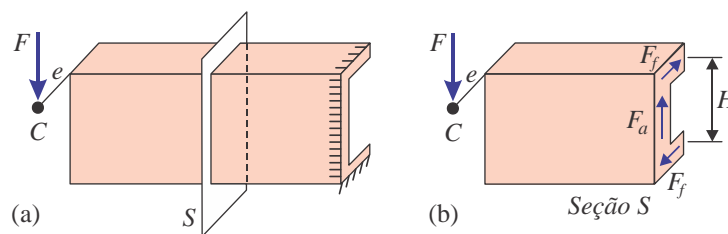


Figura 9.28: (a) Viga em balanço e (b) fluxos numa seção arbitrária s .

A Figura 9.28 mostra o caso de uma viga em balanço, com uma força F aplicada na extremidade. Como ilustrado em (b) e (c), essa força precisa ser aplicada a uma certa distância e do flange, de forma a gerar um binário Fe que equilibre o binário HF_f devido aos fluxos nos flanges. Com isso, podemos montar duas equações de equilíbrio do trecho da viga mostrado em (b), uma de forças verticais e outra de momentos torsores:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 & \rightarrow & V_y = F, \\ \sum M_x &= 0 & \rightarrow & Fe = HF_f. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Logo, a posição necessária para aplicação do carregamento transversal para que não ocorra torção é