

Capítulo 6

Modos e critérios de falha e aplicações

O presente capítulo conceitua e exemplifica os modos de falha de material e de estrutura mais comuns. Em seguida, dois modos de falha, a ruptura frágil e o início de escoamento, são detalhados e são apresentadas as teorias mais usadas para ambos.

6.1 Modos de falha

Em geral, *modo de falha* é a maneira, o processo físico, pelo qual uma porção microscópica de material, um componente mecânico, uma peça estrutural ou todo um sistema venha a falhar.

Essa definição requer uma outra definição, daquilo que se entende por *falha*. De forma geral, *falha* é qualquer comportamento considerado indesejado para o material, componente, peça ou sistema.

Frequentemente o comportamento de falha é originário das opiniões e expectativas dos usuários do objeto. Por exemplo, é o usuário que considera que é falha se um automóvel não consegue desenvolver velocidade superior a 50 Km/h, embora essa velocidade fosse bastante aceitável no início da indústria automobilística. Esse é um exemplo de falha de sistema, cuja origem pode estar em diversos subsistemas do carro, ou ainda pode ter origem num componente.

Falhas estruturais em sistemas (um motor, uma ponte rolante, um veículo, uma tubulação, etc), geralmente têm origem numa falha de componente (barra, viga, placa, trecho de tubo ou casca), e essa falha, por sua vez, tem origem em falha de material, com algumas exceções.

O tipo de falha mais óbvia é a **fratura** de um componente, por exemplo a “quebra” de uma barra em duas partes, ou o aparecimento a olho nu de uma trinca numa chapa metálica. Uma falha desse tipo num componente pode levar todo o sistema a uma **falha catastrófica** (casos clássicos são a falha de uma coluna que pode gerar a queda de uma ponte).

Entretanto, antes que uma falha por ruptura possa ocorrer, uma série enorme de possíveis fenômenos indesejáveis, também classificados como falhas, podem ocorrer. A seguir listamos brevemente alguns dos modos de falha mais comuns em sistemas estruturais de engenharia mecânica, civil e elétrica. As descrições colocadas a seguir são bastante superficiais e incompletas. Cada um desses modos de falha geralmente necessita um livro inteiro e uma ou duas disciplinas apenas para cobrir seus aspectos mais básicos. Entretanto, é importante que todo engenheiro tenha algumas noções qualitativas de alguns desses modos de falha.

1. Falhas por fadiga

É uma falha que só ocorre com o passar do tempo, diferentemente das **falhas estáticas**, que ocorrem logo em seguida ao momento da aplicação da carga. Considere, por exemplo, uma barra de aço que seja dimensionada de forma a ser capaz de sustentar, em segurança, uma certa carga axial $F = f$, que gera uma tensão normal axial $\sigma_x = \sigma$. Então, ao longo do tempo, o histórico de tensão aplicada a cada ponto da barra é constante, como na Figura 6.1b.

Considere agora a mesma barra, porém submetida a uma carga que varia senoidalmente no tempo, com amplitude constante σ_a . Observação experimental mostra que, mesmo que a barra

máquinas ou prédios podem levar a falhas catastróficas, através do crescimento incontrolável e instável das amplitudes de vibrações, o que geram níveis excessivos de tensões em pontos críticos e sua ruptura final.

5. **Falha por plastificação** - escoamentos, deformações permanentes. Em geral, o desenvolvimento de deformações plásticas é indesejável em componentes mecânicos, pois o escoamento ocorre em níveis de deformação do material altos em relação às deformações elásticas usuais nos projetos. Adicionalmente, a região afetada da peça com uma deformação permanente de alto nível, é uma peça “amassada”, “empenada”, com forma e dimensão distintas daquelas necessárias ao correto funcionamento do equipamento ou estrutura.

Do ponto de vista de plastificação, diversos tipos de projetos existem:

- a. **Projeto elástico**, em que o início de escoamento em qualquer ponto da peça é considerado falha. Frequentemente é um critério utilizado junto aos cálculos de fadiga em peças sob carga variável no tempo.
- b. **Plastificação localizada**. Peças sob carga estática podem suportar tensões plásticas em regiões localizadas sem comprometer a integridade do conjunto, desde que partes consideráveis da seção transversal do componente permaneçam elásticas. Situação típica pode ser vista na barra com entalhe na Figura 6.3. A presença do entalhe torna a distribuição de tensões normais

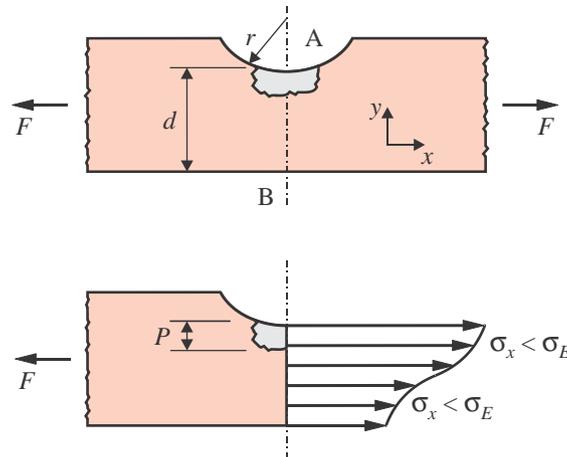


Figura 6.3: Região plastificada no fundo de um entalhe e distribuição de tensões na seção.

na seção mínima AB não uniforme, sendo as tensões no fundo do entalhe, no ponto A , maiores que na face oposta, ponto B , da seção. Se a carga F excede certo limite, a tensão numa porção de material no fundo do entalhe excede a tensão de início de escoamento do material, enquanto no resto da seção a tensão ainda é elástica. A profundidade plastificada é p e a região elástica remanescente tem profundidade $(d - p)$. Se o carregamento for alternante, é possível a nucleação de trincas de fadiga na região, possivelmente aceleradas pela presença da tensão plástica. Nesse caso é necessário o cálculo de vida da fadiga do componente. Entretanto, caso a carga seja estática, pode ser tolerável a plastificação localizada na peça. Nesse caso, o critério de falha é a plastificação total da seção, como comentado no tópico seguinte.

- c. **Plastificação total da seção**. Pressupõe que o material seja bastante dúctil, o suficiente para suportar plastificação da seção completa. Nesse ponto o material perde capacidade de suportar a carga. A peça apresenta deformações excessivas que podem levar ao colapso da estrutura. Pode também ocorrer ruptura pela falha final do material.

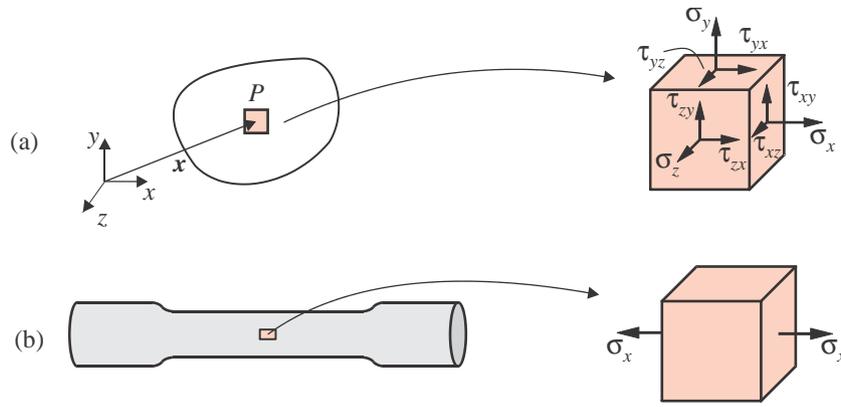


Figura 6.6: (a) Estado triaxial de tensões num ponto de uma peça e (b) num ponto de um corpo de provas em ensaio uniaxial.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Por outro lado, o material isotrópico-homogêneo é testado quanto ao início do escoamento por um **ensaio uniaxial**, através da determinação da tensão de início de escoamento, σ_E . Uma vez que o material é homogêneo e isotrópico, basta um teste uniaxial, em que o estado de tensões é

$$\boldsymbol{\sigma}_{CP} = \begin{bmatrix} \sigma_{CP} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e o escoamento inicia-se no **corpo de provas** quando $\sigma_{CP} = \sigma_E$.

Uma teoria de falha é uma teoria que propõe um critério para identificar se um dado estado triaxial de tensões atuando num ponto de uma peça leva o material nesse ponto ao escoamento. A dificuldade principal na elaboração de qualquer critério é o fato de que a sollicitação na peça é dada pelas seis componentes de tensão, enquanto a “resistência” do material é dada por apenas um valor, σ_E . O critério de falha deve fornecer uma comparação do tipo

$$\underbrace{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}}_{\text{solicitação, peça}} \longleftarrow \text{Critério de falha} \longrightarrow \underbrace{\sigma_E}_{\text{resistência, C.P., material}} \quad (6.2)$$

Observe que não se pode garantir que o material esteja elástico apenas pelo fato de que, por exemplo, $\sigma_x < \sigma_E$, e/ou $\sigma_y < \sigma_E$, etc. Mesmo que todas as componentes de tensão estejam abaixo do limite elástico, é possível ocorrer plastificação no ponto.

O que as teorias de falha fazem é fornecer uma formulação que calcula uma **tensão equivalente** σ_{EQ} . O objetivo é que essa tensão equivalente, caso fosse aplicada como estado uniaxial no material, como na Figura 6.7, produziria o mesmo dano no material que aquele provocado pelo estado triaxial de tensões. As diversas teorias existentes não conseguem determinar tensões perfeitamente equivalentes, mas apenas aproximação mais ou menos acuradas para os diversos tensores tensão possíveis.

Tendo então uma estimativa uniaxial para a sollicitação no material, o critério para identificar se o material no ponto considerado da peça está no campo elástico torna-se simplesmente uma comparação, i.e.,

$$\begin{aligned} \text{se } \sigma_{EQ} < \sigma_E &\longrightarrow \text{material elástico no ponto;} \\ \text{se } \sigma_{EQ} = \sigma_E &\longrightarrow \text{material no início do escoamento.} \end{aligned} \quad (6.3)$$

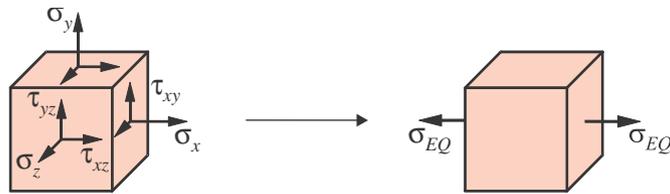


Figura 6.7: Estado de tensão triaxial no corpo e o estado de tensão uniaxial equivalente.

Nas próximas seções serão apresentadas duas teorias de início de escoamento e uma de ruptura de materiais frágeis.

6.3 Teoria da máxima tensão normal - TMTN

Essa é uma teoria de previsão de falha por ruptura em materiais frágeis. Apesar de ter sido enunciada em meados do século XIX, por W.J.M. Rankine, ainda é bastante aplicada, tanto em materiais como rochas, vidro, cerâmicos, quanto em materiais modernos frágeis como fibras de alto desempenho (como as fibras de vidro e de carbono, usadas nos materiais compostos).

A partir de observações experimentais, a teoria indica que a falha por ruptura, a separação, decorre diretamente da maior das tensões principais atuando no ponto.

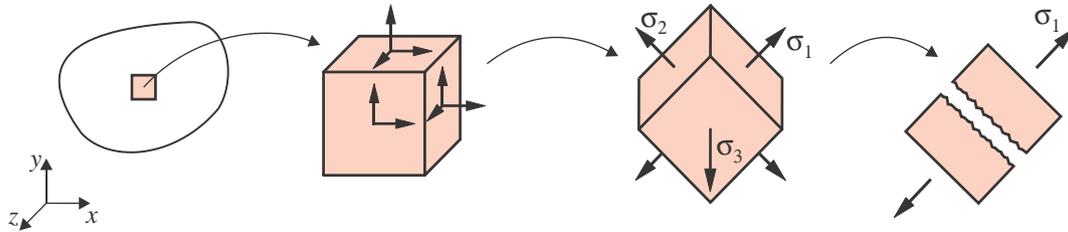


Figura 6.8: Tensões principais num elemento de material numa peça.

Por exemplo, se $\sigma_1 > \sigma_2$ e $\sigma_1 > \sigma_3$, quando σ_1 ultrapassa certo valor crítico deve ocorrer a ruptura, como ilustrado na Figura 6.8. O valor crítico é obtido num ensaio uniaxial: a tensão de ruptura do corpo de provas fornece o limite de ruptura σ_R do material.

As etapas de cálculo para verificação de segurança quanto a falha por ruptura usando essa teoria são as seguintes:

- *Etapa 1* - Determinar as componentes do tensor tensão solitante, num ponto da peça, $\sigma = \{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yz}\}$;
- *Etapa 2* - Determinar as tensões principais $\{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3\}$;
- *Etapa 3* - Determinar a tensão equivalente como

$$\sigma_{EQ} = \text{Max} \{|\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3|\} \quad (6.4)$$

- *Etapa 4* - Aplicar o critério de falha:

$$\text{se } \sigma_{EQ} < \sigma_R \longrightarrow \text{não há ruptura frágil naquele ponto da peça;} \quad (6.5)$$

$$\text{se } \sigma_{EQ} = \sigma_R \longrightarrow \text{o ponto da peça sofre ruptura.}$$

- O critério pode ser adaptado ao cálculo de um **coeficiente de segurança** n , dado por

$$n = \frac{\sigma_R}{\sigma_{EQ}} \quad (6.6)$$

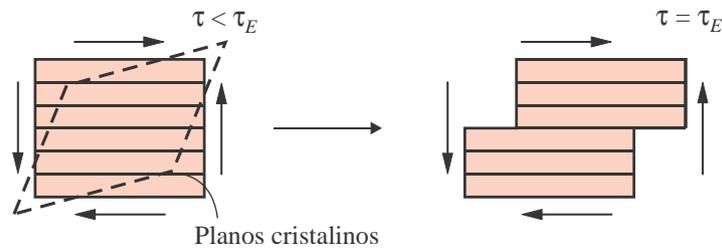


Figura 6.10: Idealização do deslizamento do plano cristalino em presença de tensão cisalhante.

atingir a tensão normal de início de escoamento σ_E . Nesse ponto a tensão cisalhante atinge seu valor crítico $\tau_E = \sigma_E/2$. Considera-se então que esse valor caracteriza o material quanto à falha por início de escoamento.

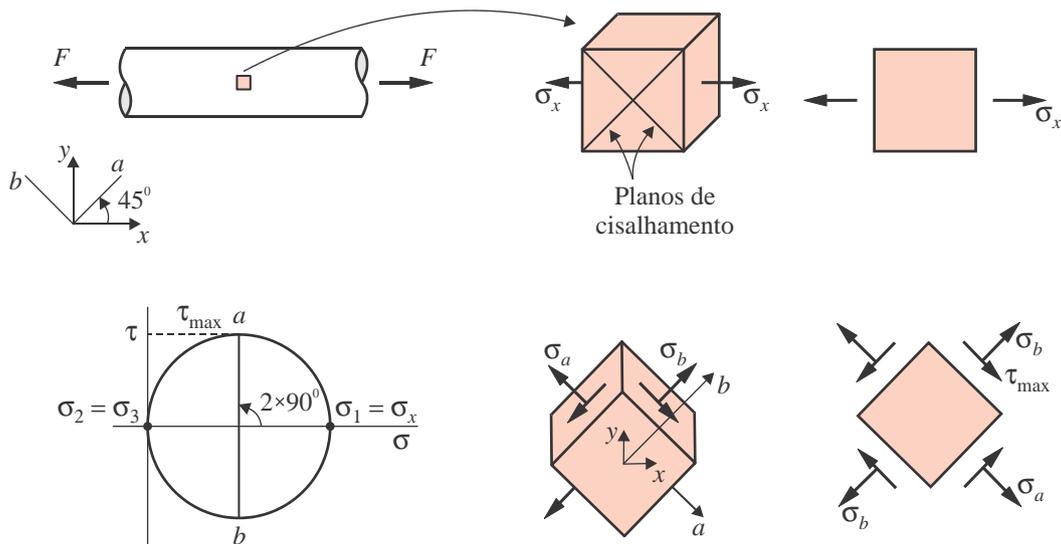


Figura 6.11: Estado de tensões no ensaio uniaxial, círculo de Mohr e tensão cisalhante máxima.

Para o material num ponto de uma peça, submetido a um estado triaxial de tensões, o critério para identificar se há falha por início de escoamento pode ser resumido nas seguintes etapas:

- *Etapa 1* - Determinar as componentes do tensor tensão solicitante no ponto em análise na peça, $\{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yz}\}$, em relação a um sistema de coordenadas cartesianas pré-estabelecidas, xyz ;
- *Etapa 2* - Determinar as tensões principais, σ_1, σ_2 e σ_3 . Caso seja de interesse, também os eixos principais 1, 2, 3.
- *Etapa 3* - Determinar a tensão cisalhante máxima por

$$\tau_{\max}^{abs} = \frac{1}{2} \text{Max} \{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1 - \sigma_3|; |\sigma_2 - \sigma_3|\}. \quad (6.8)$$

Essa é a tensão equivalente gerada pela TMTC.

- *Etapa 4* - Aplicar o critério de falha de início de escoamento:

se $\tau_{\max}^{abs} < \tau_E \longrightarrow$ o material no ponto de corpo é elástico se $\tau_{\max}^{abs} = \tau_E \longrightarrow$ o material inicia escoamento, sendo que $\tau_E = \sigma_E/2$.	(6.9)
--	-------

variação de volume (denominada energia de deformação volumétrica) e outra à variação de forma do elemento diferencial de massa, (denominada *energia deviatórica*). Note que o desenvolvimento da teoria que apresentaremos a seguir faz uso de conceitos de energia, que só serão apresentados no Capítulo 14, página 509 entre as eqs.(14.1) e (14.18). Entretanto, o desenvolvimento abaixo pode ser seguido em suas etapas principais.

Parte-se do estado de tensões triaxial no ponto, dado pelas componentes $\{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yz}\}$. Uma vez que nos restringimos a **materiais isotrópicos**, o efeito dessas componentes é o mesmo causado pelas tensões principais. Então pode-se trabalhar com as componentes do tensor tensão nas direções principais

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Um estado de tensões incorpora diferentes tipos de comportamento físico aplicado ao material. O tipo mais comum de identificação de comportamentos consiste na decomposição do tensor em uma soma de dois tensores, um representando o efeito de mudança de volume no elemento diferencial, σ^h , e outro associado à sua distorção angular, σ^d , i.e.:

$$\sigma = \sigma^h + \sigma^d. \quad (6.14)$$

A **tensão hidrostática** (ou volumétrica) é definida pelo escalar

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (6.15)$$

Define-se o **estado de tensões esféricas ou hidrostáticas** por

$$\sigma^h = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} = \bar{\sigma}\mathbf{I}, \quad (6.16)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Um elemento diferencial de material isotrópico submetido a essas componentes, que são iguais nas três direções, sofre apenas variação de volume. Não sofre variações de forma devida a cisalhamento (Figura 6.13a).

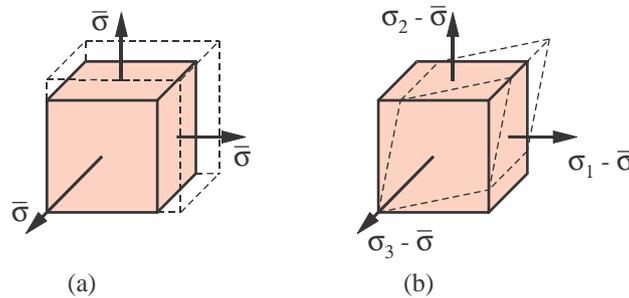


Figura 6.13: Deformação (a) volumétrica e (b) deviatórica.

Define-se em seguida o **tensor tensão deviatórico** como

$$\sigma^d = \sigma - \sigma^h = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{bmatrix} = \sigma - \bar{\sigma}\mathbf{I}. \quad (6.17)$$

O efeito dessas tensões é uma variação de forma, através de deformações cisalhantes, com volume constante. Isso é ilustrado na Figura 6.13b.

Com essas definições é possível representar o tensor tensão arbitrário (6.13) como uma combinação de um estado de tensão volumétrico e de outro deviatório, $\sigma = \sigma^h + \sigma^d$:

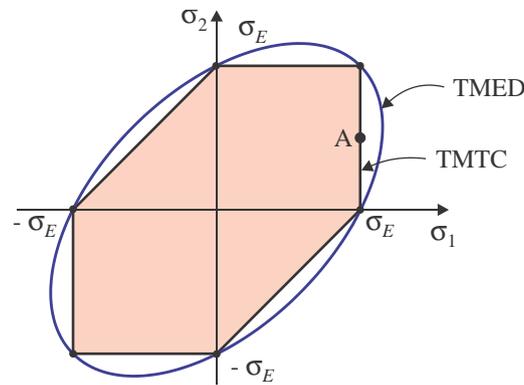


Figura 6.14: Domínios elásticos previstos pelas teorias de Tresca e de von Mises.

indicam que o material se comporta elasticamente, e pontos sobre a elipse indicam que o material está em escoamento.

Algumas observações podem ser feitas.

1. Nos casos uniaxiais, ($\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_2 = 0$), ambas as teorias (von Mises e Tresca) produzem o mesmo resultado;
2. A TMTC é o que se chama de teoria *mais conservativa* que a TMED. Isto significa que, para um ponto material submetido a um estado de tensões, dado por exemplo, por $\sigma_1 = \sigma_E$ e $\sigma_2 = \sigma_E/2$, (o ponto A na Figura 6.14), a TMTC já prevê início de escoamento, enquanto a TMED prevê que o material ainda é elástico. Como existem muitas incertezas, tanto na determinação experimental de σ_E quanto nas próprias teorias, a TMTC é mais segura que a TMED. Entretanto, os resultados experimentais para materiais dúcteis indicam que a TMED é mais precisa em prever o início do escoamento;
3. Ambas as teorias são correntemente usadas em projetos de engenharia;
4. Ambas as teorias consideram que o início do escoamento independe da parcela volumétrica do tensor tensão. Isso pode ser observado tomando a eq. (6.23) para a tensão equivalente associada a um estado de tensões dado por σ_1 , σ_2 e σ_3 . Se definirmos um segundo estado de tensões σ^* somando uma tensão hidrostática σ_h , teríamos

$$\sigma^* = \begin{bmatrix} \sigma_1 + \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 + \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 + \sigma_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^* & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^* & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^* \end{bmatrix}$$

Ambos os estados de tensão são visualizados no plano de Mohr na Figura 6.15. De fato, os três círculos associados a σ^* correspondem a uma translação σ_h dos círculos de σ . Observando

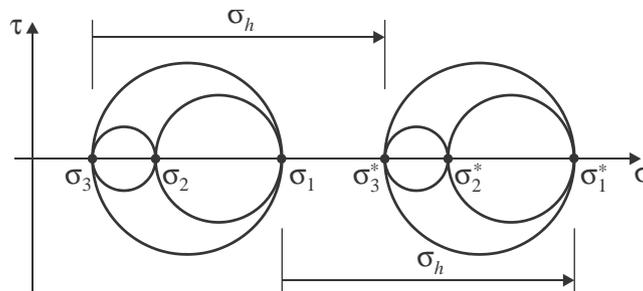


Figura 6.15: Círculos de Mohr sob efeito de tensão hidrostática.

a eq. (6.23) nota-se que a tensão equivalente não se altera pela adição da tensão hidrostática: σ_{EQ} é a mesma tanto para o tensor σ quanto para σ^* . Isso significa que não importa a posição do círculo de Mohr: pela teoria de von Mises, ele pode ser transladado arbitrariamente para $-\infty$ ou $+\infty$ sem que isso afete o início do escoamento.

5. Observando a expressão da tensão equivalente da TMTC, eq. (6.8), nota-se que o mesmo efeito do item anterior se aplica: não importa a posição do círculo de Mohr, apenas seu diâmetro máximo, que define τ_{\max}^{abs} .
6. Observações experimentais mostram que essa hipótese é aproximadamente correta para os metais dúcteis. Entretanto nota-se que os polímeros rígidos (PVC, PP, etc) têm o início do escoamento sensível à tensão hidrostática.
7. Outros tipos de materiais são sensíveis à tensão hidrostática, como os solos e materiais granulados. Para esses casos existem outras teorias adequadas, como a de *Mohr-Coulomb* e a de *Drucker-Prager*.

Exemplo 6.1 - Aplicação dos critérios de falha

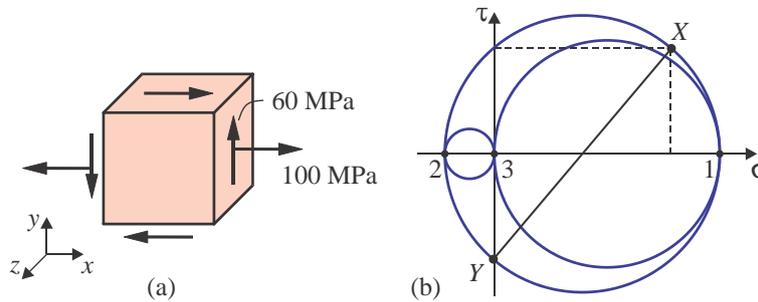


Figura 6.16: Dados e resultados do Exemplo 1.

Considere um ponto de uma peça submetido às tensões indicadas na Figura 6.16a. Determine o coeficiente de segurança para os seguintes casos. (a) Caso o material seja frágil, com tensão de ruptura $\sigma_R = 150$ MPa. (b) Caso o material seja dúctil, com tensão de escoamento $\sigma_E = 220$ MPa.

Solução:

O estado de tensões é plano, dado por $\{\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}\} = \{100; 0; 60\}$ MPa, $\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, i.e., o tensor tensão é

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 60 & 0 \\ 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A *primeira etapa* consiste em determinar as tensões principais, que são obtidas pela eq. (5.44), página (185):

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ &= \frac{100 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100 - 0}{2}\right)^2 + 60^2}. \end{aligned}$$

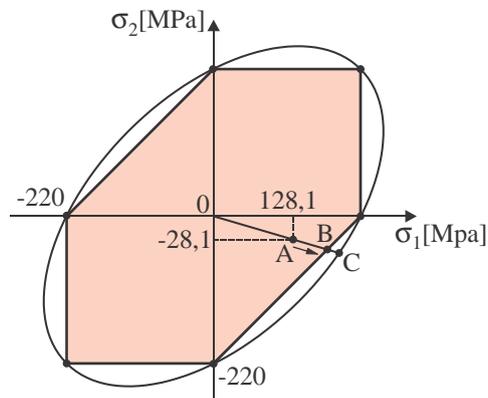


Figura 6.17: Pontos de solicitação e resistência ao início do escoamento pela TMTC e TMED, no Exemplo 1.

- Panelas de pressão usadas em cozinhas;
- Extintores de incêndio;
- Botijões de gás domésticos e comerciais;
- Containers pressurizados para transporte em caminhões tanque;
- Vasos de grandes dimensões usados em plantas industriais (Figuras 6.18b e 6.19);
- Vasos de contenção de usinas nucleares.



Figura 6.18: (a) Tubos de aço com flange; (b) parte de instalação industrial com tubulações e vasos de pressão.

O modelo matemático descrito a seguir tem as seguintes características:

1. **A parede do vaso é fina** em relação ao seu raio. Tipicamente isso significa relações espessura/raio da ordem $R/h \gtrsim 10$ ou maiores. Em geral os exemplos listados acima caem nessa categoria. Outros tipos de vasos, de paredes espessas, têm distribuições de tensão mais complexas e serão vistos no Capítulo 11.

2. O **comportamento** do vaso é inteiramente **de membrana**. Isso se caracteriza pela ausência de flexões localizadas na parede. Assim, a única carga admissível é a pressão, e não são admitidas cargas concentradas, que gerariam flexão.
3. A **geometria básica do vaso é de revolução**, com uma região cilíndrica e tampas em formatos esféricos (pouco usado), parabólicos ou toroidais. Existem também os vasos inteiramente esféricos. As tubulações são modeladas de forma similar aos vasos cilíndricos, com os cuidados adequados. A Figura 6.19 mostra vasos de pressão cilíndricos típicos de armazenamento de gás. Notam-se as extremidades fechadas em forma de calotas, e bocais com flange na parte superior, para eventual conexão com derivações.



Figura 6.19: Vasos de pressão cilíndricos de armazenamento de gás.

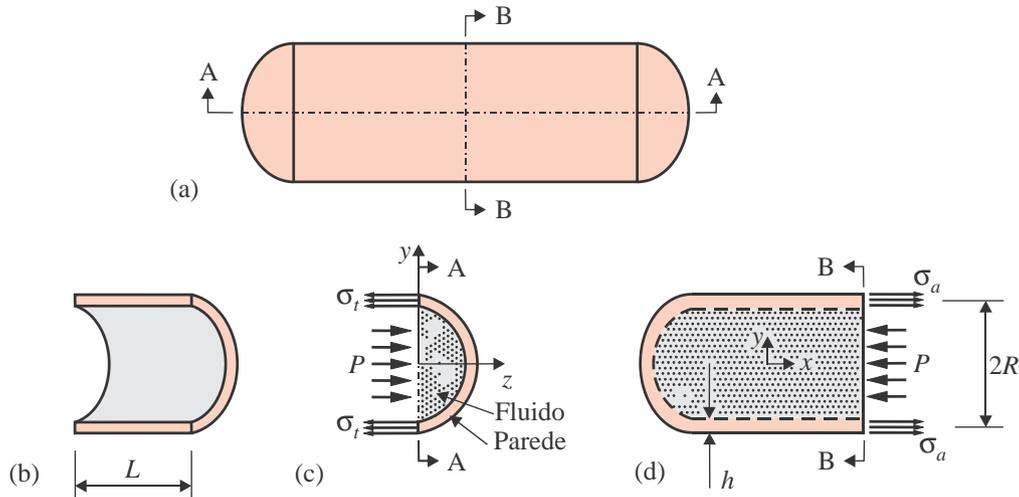


Figura 6.20: (a) Vista de um vaso arbitrário; (b,c) Tensões num corte longitudinal AA; (d) Tensões num corte transversal BB.

A determinação do estado de tensões no vaso pressurizado de paredes finas é feita por simples aplicação do **método das seções**. A Figura 6.20 mostra um corte longitudinal e um outro transversal da estrutura, e as pressões atuando no sistema casca-fluido delimitados pela superfície de controle.

Corte longitudinal AA, mostrado nas Figuras 6.20a e (b). Tem-se um segmento semi-cilíndrico de comprimento arbitrário L , raio da superfície média da parede R e espessura de parede h . A

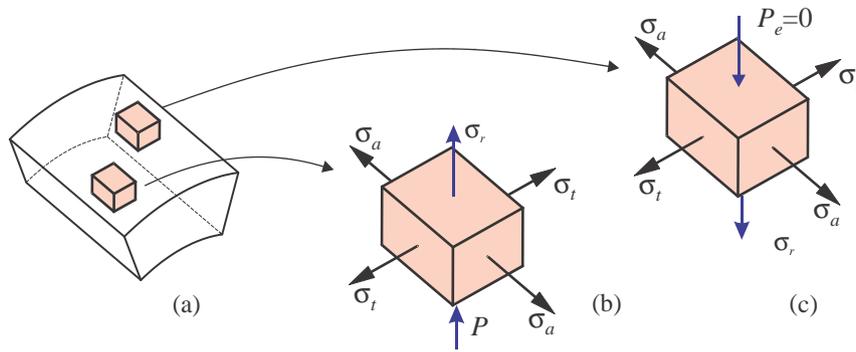


Figura 6.21: Tensões em elementos diferenciais localizados nas superfícies interna e externa de um tubo pressurizado, sendo a pressão na parede externa nula, $P_e = 0$. Componentes em relação ao sistema de coordenadas de eixos a - t - r , nas direções axial-tangencial-radial.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_a & \tau_{at} & \tau_{ar} \\ \tau_{at} & \sigma_t & \tau_{tr} \\ \tau_{ar} & \tau_{tr} & \sigma_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{PR}{2h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{PR}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Na presente análise todas as tensões cisalhantes são consideradas nulas. Os motivos se tornam claros apenas quando se observa a solução completa do problema, levando em conta as equações tridimensionais de elasticidade. Grosso modo, esses resultados são consequência da axisimetria do problema e da pequena espessura da parede.

Observa-se em (6.29) que as tensões σ_a , σ_t e σ_r são tensões principais em qualquer ponto do cilindro, pois nesse sistema de coordenadas todas as tensões cisalhantes são nulas. Então,

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{PR}{h}, \quad \sigma_2 = \sigma_a = \frac{PR}{2h}, \quad \sigma_3 = \sigma_r = 0. \quad (6.30)$$

Esse é então um problema de **estado plano de tensões**. A representação desse estado de tensões no plano de Mohr é vista na Figura 6.22.

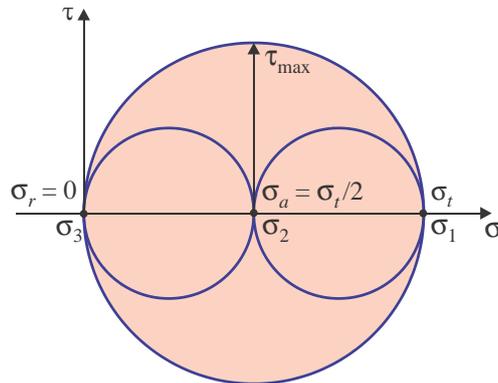


Figura 6.22: Círculo de Mohr para cilindro pressurizado.

A pressão crítica que leva ao **início do escoamento** pode ser estimada pelas teorias de Tresca e de von Mises.

- **Teoria da máxima tensão cisalhante.** A expressão do critério é que há segurança quanto ao início do escoamento se $\tau_{\max} \leq \sigma_E/2$. Da solução do problema de cilindro pressurizado, a tensão cisalhante aplicada máxima é:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_t}{2} = \frac{PR}{2h} \quad (6.31)$$

Logo, critério de falha de Tresca indica:

$$n = \frac{\sigma_E/2}{\tau_{\max}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{PR}{h} = \frac{\sigma_E}{n}} \quad (6.32)$$

onde n é o coeficiente de segurança.

- **Teoria da máxima energia de distorção.** A tensão equivalente de von Mises para estado plano vem de (6.24):

$$\begin{aligned} \sigma_{EQ}^2 &= \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2. \text{ Substituindo as tensões principais,} \\ &= \left(\frac{PR}{h}\right)^2 - \left(\frac{PR}{h}\right)\left(\frac{PR}{2h}\right) + \left(\frac{PR}{2h}\right)^2, \\ &= 3\left(\frac{PR}{2h}\right)^2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma_{EQ} = \sqrt{3}\frac{PR}{2h}} \end{aligned}$$

Logo, o critério de falha de von Mises fica

$$n = \frac{\sigma_E}{\sigma_{EQ}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{PR}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_E}{n} \approx 1,155\frac{\sigma_E}{n}} \quad (6.33)$$

Comparando as previsões de ambos os critérios, equações (6.32) e (6.33), observa-se que diferem por um fator de 15,5%.

6.6.1 Vasos de pressão esféricos

A Figura 6.23 mostra um vaso de pressão esférico de armazenamento de gás. Notam-se também as tubulações de transferência, acopadas num bocal flangeado no polo superior.



Figura 6.23: Vaso de pressão esférico de armazenamento de gás.

As tensões de membrana para um vaso de pressão esférico de paredes finas constituem um caso particular de casca cilíndrica. Pode-se seguir o mesmo procedimento usado na casca cilíndrica. Entretanto, a casca esférica é simétrica em relação a qualquer plano que passe pelo seu centro. Assim, existe apenas um corte possível, mostrado na Figura 6.24, com as tensões atuantes no conjunto casca-fluido delimitado pela superfície de controle. **Também como consequência da simetria, as tensões são iguais a σ_t em qualquer ponto da casca, e em qualquer direção tangencial.**

As tensões tangenciais σ_t são obtidas por equilíbrio, de forma similar ao caso do cilindro:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \longrightarrow \quad (\pi R^2) P = (2\pi R h) \sigma_t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sigma_t = \frac{PR}{2h}} \quad (6.34)$$

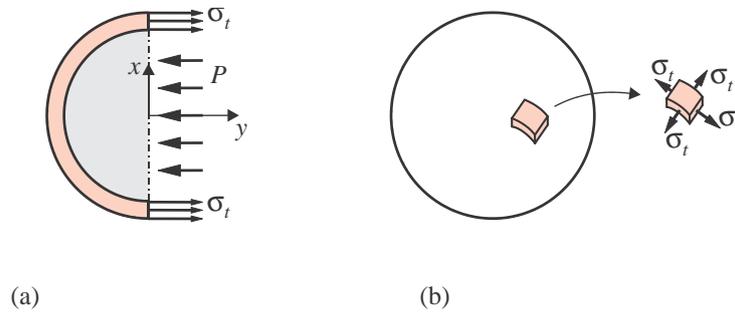


Figura 6.24: Corte diametral numa casca esférica e tensões num elemento diferencial arbitrário.

onde

$$\begin{aligned}
 P &= \text{pressão interna;} \\
 R &= \text{raio da superfície média da parede;} \\
 h &= \text{espessura da parede.}
 \end{aligned}$$

Nota-se que a tensão tangencial no vaso esférico é igual à tensão axial do vaso cilíndrico. Isso é esperado devido à necessidade de haver continuidade de tensões entre a parte cilíndrica e a parte esférica de um vaso, como ilustrado na Figura 6.25. Essa continuidade é necessária por equilíbrio, e deve ser satisfeita mesmo que a calota não seja esférica. No caso de calotas não esféricas, apenas em sua borda as tensões têm os valores mostrados na Figura 6.25, e as tensões nas demais partes devem ser obtidas por outras formulações, e serão dependentes de cada geometria.

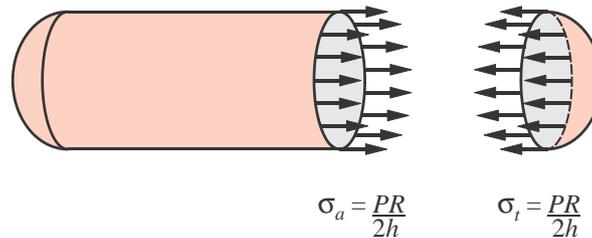


Figura 6.25: Continuidade de tensões entre a porção cilíndrica e sua calota.

6.6.2 Observações e limitações nas fórmulas

As fórmulas deduzidas utilizam a hipótese de ausência de flexão, i.e., são chamadas fórmulas de tensão de membrana. Entretanto, quando um segmento de tubo é soldado a uma calota, e pressurizado, inevitavelmente são desenvolvidas deformações de flexão na região da junção entre as duas partes. Isso pode ser visto na Figura 6.26. Sob o mesmo nível de pressão, a tensão tangencial na parte cilíndrica é o dobro daquela na parte esférica. Isso significa que, se as partes cilíndricas e esféricas estivessem desacopladas e livres para se deformarem, se teria que a variação de diâmetro da parte cilíndrica seria o dobro daquela da parte esférica. A Figura 6.26a ilustra, em escala exagerada, as variações de diâmetro que cada parte sofreria se fossem pressurizadas separadamente. Entretanto, as bordas estão soldadas, o que gera flexão na parede ao longo de uma certa extensão, tanto na região cilíndrica quanto na calota. O comprimento dessa extensão sob flexão é, via de regra, da ordem de duas a três vezes o valor da espessura. Nessa região, além das tensões de membrana, atuam tensões de flexão, que se caracterizam por variarem ao longo da espessura. Fora dessa região de flexão, i.e., em toda a extensão do cilindro e do calote, atuam as tensões bastante similares às calculadas pela teoria de membrana.

Com isso, o procedimento de cálculo consiste em primeiro determinar a espessura geral do vaso,

Exemplo 6.3 - Dimensionamento de vaso pressurizado

Determine as espessuras de parede de dois vasos cilíndricos de aço com $\sigma_{adm} = 350$ MPa com raio $R = 100$ mm, para suportar pressões de 200 atm e 2.000 atm.

Solução:

Nesse problema será arbitrado o uso do critério de Tresca, como poderia ter sido optado pelo do von Mises. Uma vez que foi especificada a tensão admissível, deve-se usar coeficiente de segurança unitário nas equações. Então, a espessura vem de (6.32) na forma

$$h = \frac{PR}{\sigma_{adm}}. \quad (6.36)$$

As pressões $P = 200$ atm e $P = 2.000$ atm, são equivalentes a 20 MPa e 200 MPa. Assim,

$$\begin{aligned} \text{para } P &= 20 \text{ MPa} && \longrightarrow h = \frac{20 \times 100}{350} = 5,71 \text{ mm}, \\ \text{para } P &= 200 \text{ MPa} && \longrightarrow h = \frac{200 \times 100}{350} = 57,1 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Observa-se que o primeiro vaso, para $P = 20$ MPa, tem relação $h/R = 5,71/100 = 0,057$, o que é uma relação adequada para caracterizá-la como casca de parede fina. Entretanto, a estimativa do vaso de $P = 200$ MPa mostra relação $h/R = 57,1/100 = 0,571$, o que o caracteriza uma casca de parede espessa, e não pode ser calculada pela presente formulação, i.e., o valor de espessura obtida, $h = 57,1$ mm não tem validade. Um modelo para tubos pressurizados de parede espessa é apresentado na seção 11.2.2.

6.6.3 Variação do diâmetro devido à pressurização

As tensões no tubo pressurizado foram obtidas em (6.28) como tensão tangencial $\sigma_t = PR/h$, tensão axial $\sigma_a = PR/2h$ e tensão radial $\sigma_r = 0$. A deformação de um elemento diferencial na direção tangencial pode ser obtida pela Lei de Hooke para estado plano de tensões, eqs.(4.89), pg. 126, construindo uma tríade de eixos ortogonais na superfície do tubo, nominando o eixo x como t e y como a . Então, obtém-se as deformações de um elemento diferencial de material nas direções circunferencial e axial do tubo:

$$\boxed{\varepsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu\sigma_a) \quad \text{e} \quad \varepsilon_a = \frac{1}{E} (\sigma_a - \nu\sigma_t)} \quad (6.37)$$

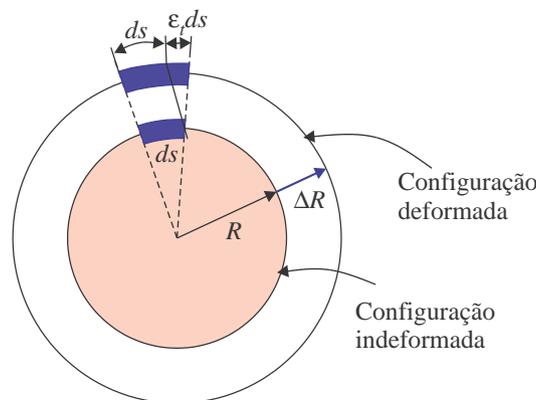


Figura 6.27: Aumento do perímetro, $\varepsilon_t ds$, associado ao aumento do raio ΔR da superfície média do tubo pressurizado.

Capítulo 7

Torção em eixos de seção circular

Depois do problema de barra sob carga axial, o próximo tipo de problema estrutural mais simples que existe é o de barra reta de seção circular sob torção. Uma visualização qualitativa do processo de torção pode ser obtida com a ajuda da Figura 7.1, onde se torce, manualmente, uma barra de borracha. O carregamento, no caso aplicado pelas duas mãos, consiste de forças tangenciais distribuídas numa certa área. O momento torçor provocado por essas forças distribuídas pode ser representado por dois binários de força, tal que o torque aplicado em cada extremidade seja $T = Fd$, onde d é o diâmetro da barra.

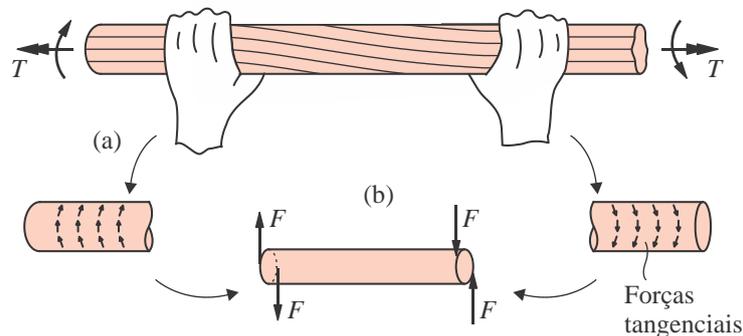


Figura 7.1: (a) Barra de borracha sendo torcida; (b) representação do torque aplicado de dois binários de força. As linhas inicialmente longitudinais na superfície tornam-se helicoidais.

Uma grande diversidade de sistemas em engenharias (tais como mecânica, elétrica, civil e naval) contém componentes submetidos a torção. Alguns desses sistemas são:

- Eixos de transmissão ou eixos motrizes usados em veículos e máquinas. Por exemplo, o sistema esquemático de propulsão da Figura 7.4 ou o sistema de eixo-polias da Figura 7.6, ou sistemas eixo-engrenagens em redutores de velocidade. A Figura 7.2 mostra a foto de um detalhe de uma das duas **juntas de um eixo cardan** de caminhão, que transmite potência da caixa de câmbio ao diferencial. Esses eixos transmitem o torque desenvolvendo unicamente esforços uniformes de momento torçor em suas seções transversais. As duas juntas nas extremidades permitem que os eixos conectados a ambas as juntas estejam desalinhados. A Figura 7.3 ilustra um conjunto completo desalinhado.
- Barras pertencentes a pórticos espaciais ou em pórticos planos sob certos tipos de cargas transversais.

No presente capítulo desenvolveremos duas fórmulas clássicas para barras de seção circular sob torção, uma delas para determinar a distribuição de tensões e outra para determinar o campo de deslocamento associado (o ângulo de torção).



Figura 7.2: Detalhe de uma das duas juntas de um eixo cardan de caminhão, que transmite potência da caixa de câmbio ao diferencial.



Figura 7.3: Vista de um conjunto completo de eixo cardan e juntas.

7.1 Hipóteses cinemáticas

A **cinemática** de um segmento reto de barra de seção circular sob torção pode ser obtida experimentalmente, inspecionando o comportamento de um modelo bastante flexível, como uma barra de espuma polimérica ou borracha, por exemplo. O processo consiste em desenhar linhas longitudinais e circunferenciais na superfície do modelo, como na Figura 7.4b. Quando aplicamos a torção, observamos um resultado como o da Figura 7.4c. **As linhas longitudinais inicialmente retas deformam-se tomando a forma de linhas helicoidais.** Medições cuidadosas indicam que, dentro de certas condições, **a seção transversal circular permanece circular e com mesmo diâmetro.**

Adicionalmente, outras hipóteses são tão facilmente visualizáveis e formuladas. Considera-se que:

- Cada seção transversal permanece indeformada, sofrendo apenas uma rotação de corpo rígido, i.e., move-se como um disco rígido de seção circular girando em torno de seu próprio centro.

Assim, **cada segmento reto de material ao longo da linha radial permanece reto e com o mesmo comprimento. Apenas sofre uma rotação.** Isso pode ser visualizado na Figura 7.5. Ali temos dois segmentos radiais, AB e CD , situados a uma distância axial Δx entre si. Com a aplicação do torque T , cada seção sofre uma rotação diferente. O segmento AB rotaciona-se para Ab e o CD rotaciona-se para Cd . Assim, a seção na coordenada x sofre um **ângulo de torção** $\varphi(x)$, enquanto na seção em $x + \Delta x$ o ângulo de torção é $\varphi(x) + \Delta\varphi$.

Análises mais precisas, usando solução tridimensional da teoria de elasticidade, indicam que essa hipótese é correta, dentro das seguintes condições:

- O material comporta-se no regime elástico-linear;

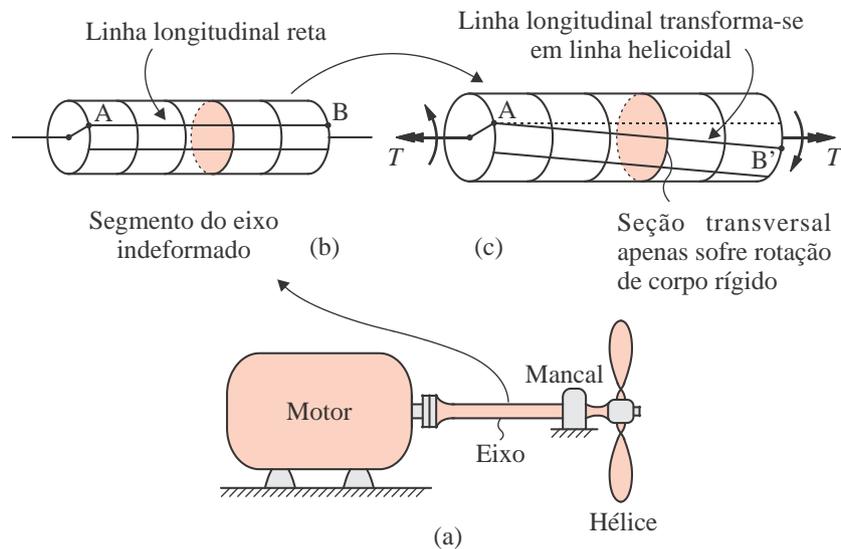


Figura 7.4: (a) Conjunto propulsor motor, eixo, mancal e hélice. Em (b) e (c) tem-se um segmento do eixo indeformado e torcido, respectivamente.

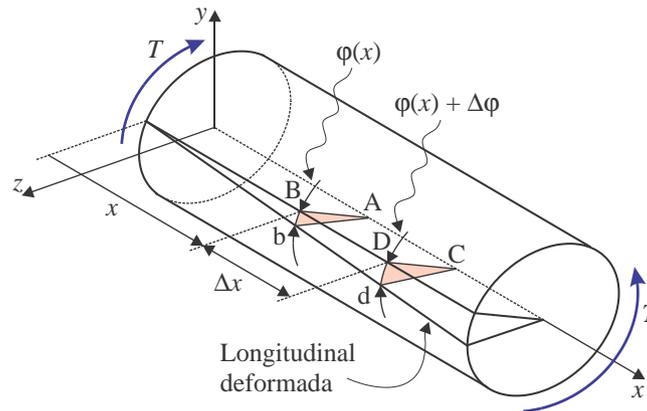


Figura 7.5: Ângulo de torção φ em duas seções vizinhas.

- O ângulo de torção e as deformações são pequenas;

Sem dúvida que todas essas hipóteses, tanto quanto a teoria sendo desenvolvida nesse capítulo, tem validade e **aplicabilidade apenas nos trechos da barra distantes dos pontos de aplicação das cargas e de irregularidades geométricas.**

7.2 Transmissão de potência

Como frequentemente as barras sob torção usadas no presente texto são eixos rotativos, faremos aqui uma revisão de algumas definições básicas. Um sistema de transmissão de potência consiste num conjunto que contém uma **unidade geradora de potência mecânica, o motor**, e uma ou mais **unidades consumidoras** daquela potência, como:

- Ventilador;
- Pás de hélices de barcos ou agitadores industriais de líquidos e pastas;
- Bombas hidráulicas e compressores;
- Equipamentos de elevação de carga (esteiras rolantes, elevadores, guindastes etc.)

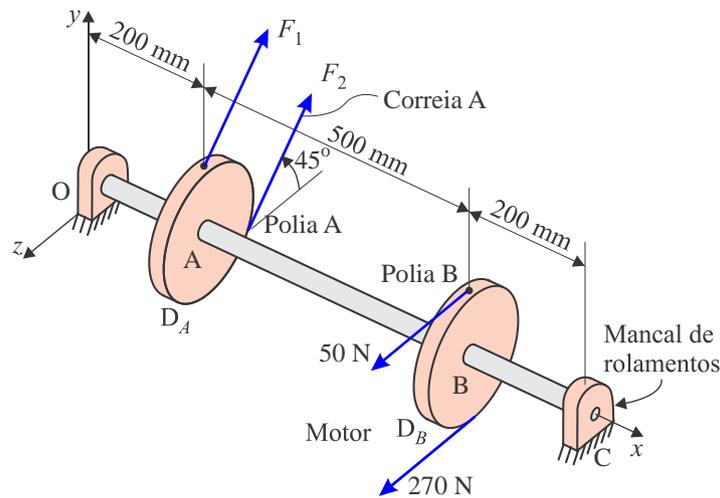


Figura 7.6: Eixo com polias e correias do Exemplo 7.1.

Exemplo 7.1 – Esforços em eixo de transmissão por polias

Considere o eixo OC (Figura 7.6) de seção transversal circular e uniforme, que suporta duas polias, A e B, para correias em V . O eixo é montado em mancais de rolamento nas extremidades O e C e gira a $N_w = 1.200$ rpm. Seu material é aço-carbono, com módulo de elasticidade cisalhante $G = 80$ GPa. A força de tração no lado frouxo da correia A é tomado como 15% da força de tração do lado distendido, i.e., $F_1 = 0,15F_2$. Um motor é acoplado à polia B, e sabe-se que as trações na correia são 50 N e 270 N, como indicado na figura.

- Determine a potência suprida pelo motor;
- Determine as trações na correia da polia A e os esforços de torção no eixo.

Ambos os lados da correia na polia B são paralelas ao eixo z e a correia em A faz um ângulo de 45° com z . Os diâmetros das polias são $D_A = 250$ mm e $D_B = 300$ mm.

Solução:

O torque aplicado pelo motor na polia B é:

$$T_B = (270 - 50) \frac{D_B}{2} = (270 - 50) \frac{300}{2} = 33.000 \text{ Nmm.}$$

A potência aplicada vem de (7.2)

$$P = T_B \omega = 33 \text{ Nm} \times \left(1.200 \frac{\text{rot}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rot}} \right) = 4.146,9 \text{ W}$$

ou, usando (7.8), a potência é $P_{hp} = 5,56$ hp.

O torque aplicado em A deve ser obtido por equilíbrio torcional do eixo. Note que o eixo é suportado em mancais de rolamento, de forma que não há reações de apoio de momento axial R_{mx} . Assim, os torques aplicados ao longo dos diversos pontos do eixo devem ser auto equilibrantes. O sistema da Figura 7.6 pode ser simplificado para aquele da Figura 7.7a, onde indicamos os torques aplicados em A e B da barra.

O equilíbrio de momento rotacional no eixo é:

$$\sum M_x = 0 \rightarrow T_A - T_B = 0.$$

Logo, o torque aplicado pela polia A é $T_A = 33$ Nm. As forças na correia A são obtidas de:

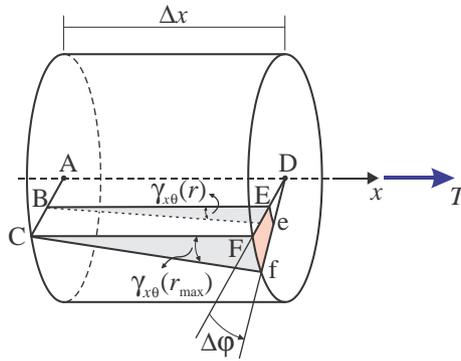


Figura 7.10: Relação entre o ângulo de torção $\Delta\varphi$ e o ângulo de cisalhamento γ .

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_t}{\partial r} - \frac{u_t}{r} \right) = \frac{1}{2} (\varphi - \varphi) = 0.$$

Com isso tem-se a forma final da relação deformação-deslocamento para um ponto arbitrário de uma barra de seção circular

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} \\ \text{Sim.} & \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} \\ \text{Sim.} & \text{Sim.} & \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} r \frac{d\varphi}{dx} \\ \text{Sim.} & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

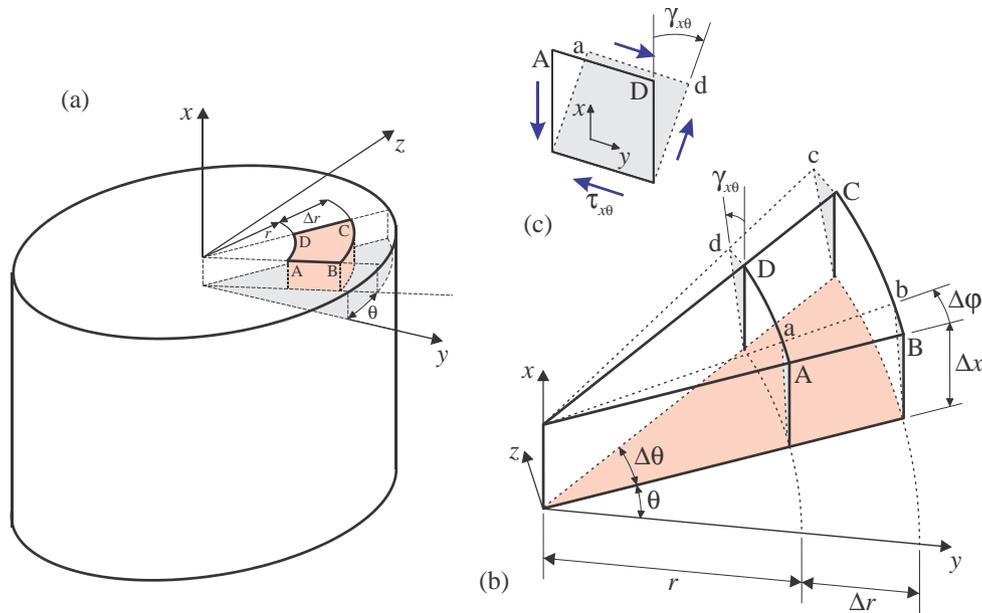


Figura 7.11: Ângulos de torção $\Delta\varphi$ e de cisalhamento γ . Sistema de coordenadas $x - r - \theta$, nas direções axial, radial e tangencial.

A Figura 7.11 ilustra o campo de deformação $\gamma_{x\theta}$ num elemento diferencial da barra. Nesse ponto é feita uma **última hipótese**, de que o **material é homogêneo, isotrópico e elástico-linear**. Isso significa que a relação tensão-deformação é dada pela Lei de Hooke generalizada (4.62):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)], & \gamma_{xr} &= \frac{1}{G} \tau_{xr}, \\
 \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_x + \sigma_\theta)], & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta}, \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_x + \sigma_r)], & \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{x\theta}.
 \end{aligned}
 \tag{7.16}$$

onde E , G e ν são os módulos de elasticidade normal e cisalhante e o coeficiente de Poisson do material, respectivamente. As componentes de tensão são visualizadas na Figura 7.12.

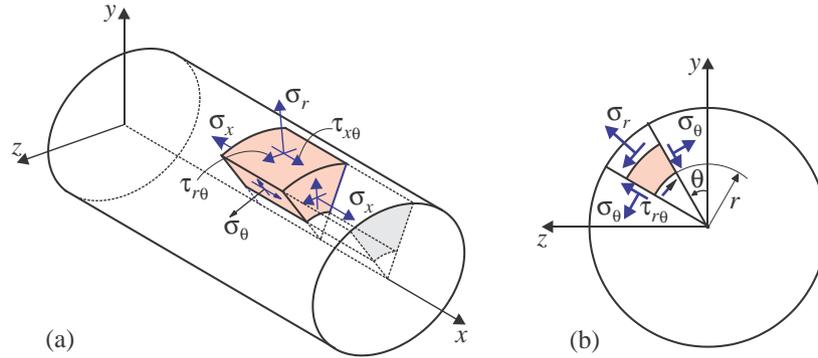


Figura 7.12: Componentes de tensão no sistema cilíndrico de coordenadas.

Substituindo as deformações (7.11) e (7.14) em (7.16), temos que o tensor tensão é todo nulo exceto por $\tau_{x\theta}$, i.e.,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xr} & \tau_{x\theta} \\ \text{Sim.} & \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ & & \sigma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{x\theta} \\ \text{Sim.} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix},
 \tag{7.17}$$

onde

$$\tau_{x\theta}(x, r) = G \frac{d\varphi(x)}{dx} r.
 \tag{7.18}$$

Isso mostra claramente que, numa seção de coordenadas x , a **tensão cisalhante varia linearmente com o raio**. A variação da tensão é ilustrada nas Figuras 7.12 e 7.13, onde também fica visível a independência de $\tau_{x\theta}$ (e conseqüentemente de $\tau_{x\theta}$) com θ .

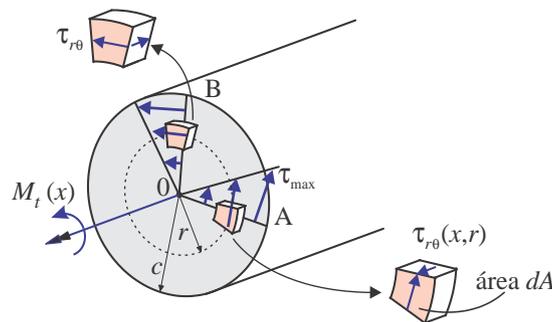


Figura 7.13: A tensão cisalhante varia linearmente com o raio, e independe de θ na seção $x = const.$

Observamos na Figura 7.13 que em cada elemento diferencial volumétrico com área dA sobre a seção transversal, atua uma força $\tau_{x\theta} dA$ na direção tangente. Essa força gera um momento em torno do eixo x , de valor $r\tau_{x\theta}dA$. Assim, somando as contribuições de todos os elementos diferenciais de área da seção, o momento torçor total na seção é dado por

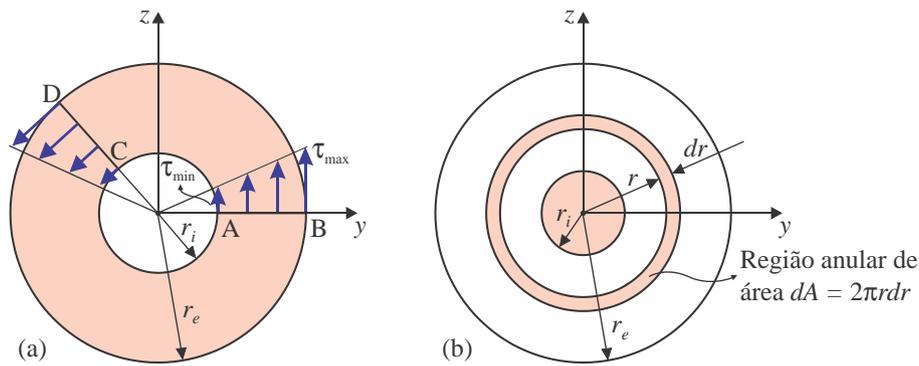


Figura 7.14: Distribuição de tensões numa seção tubular.

Para **seção maciça** de raio c e diâmetro d , basta usar $r_i = d_i = 0$:

$$J = \frac{\pi}{2}c^4 \quad \text{ou} \quad J = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (7.25)$$

Para uma **seção tubular de parede delgada** de espessura h , se pode obter uma expressão mais simples que (7.24). Para isso, definimos um diâmetro médio d , tal que os diâmetros interno e externo são $d_i = d - h$ e $d_e = d + h$. Substituindo em (7.24) se obtém

$$J = \frac{\pi}{4} (d^3 h + d h^3). \quad (7.26)$$

Fazendo o limite $h \rightarrow 0$ em $J/h = \frac{\pi}{4} (d^3 + d h^2)$, o último termo se anula e se obtém a estimativa para o momento polar de inércia de uma seção anular delgada:

$$J = \frac{\pi}{4} d^3 h = 2\pi r^3 h, \quad \text{onde } r = d/2 \text{ é o raio médio} \quad (7.27)$$

Exemplo 7.2 – Tensão máxima e coeficiente de segurança

Considere o eixo mostrado na Figura 7.15, suportado por dois mancais de rolamento e sujeito à ação de três torques aplicados através das engrenagens A, B e C, sendo $T_A = 100$ Nm, $T_B = 50$ Nm. O material do eixo é aço, com tensão de escoamento $\sigma_E = 600$ MPa. A seção é maciça, com diâmetro $d = 15$ mm. (a) Determine a tensão cisalhante máxima devida à torção; (b) Determine o coeficiente de segurança usando os critérios de Tresca e de von Mises.

Solução:

A **primeira etapa** consiste em determinar o diagrama de esforços internos de momento torçor. Como os mancais não oferecem reação à rotação axial, os torques externos aplicados, T_A , T_B e T_C , devem ser auto equilibrados. Assim, a equação de equilíbrio produz o valor de T_C :

$$\sum M_x = 0 \quad \rightarrow \quad T_A + T_B - T_C = 0 \quad \rightarrow \quad T_C = T_A + T_B = 100 + 50 = 150 \text{ Nm.}$$

Em seguida aplicamos o método das seções para os esforços em cada trecho. Como não há carga torcional distribuída, os esforços serão uniformes em cada trecho. Assim, basta realizar um corte em cada trecho.

Trecho OA - Realizando o corte s_1 (Figura 7.15) e tomando o lado esquerdo como na Figura 7.16a.

$$\sum M_x \quad \rightarrow \quad \boxed{M_x^{0A} = 0},$$

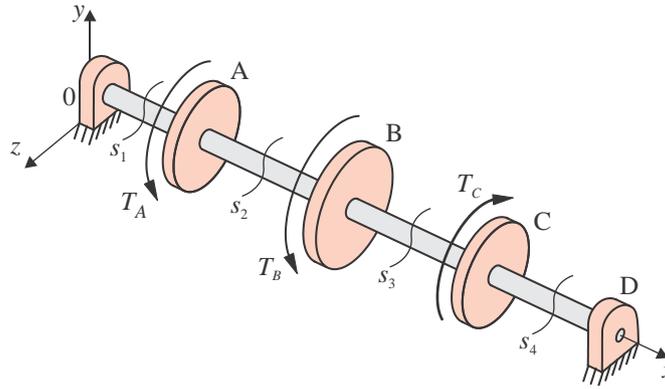


Figura 7.15: Eixo do Exemplo 7.2.

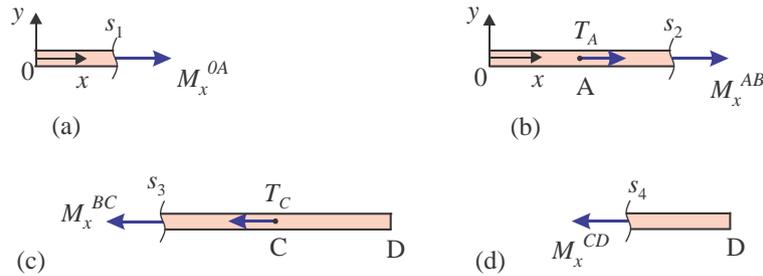


Figura 7.16: Cortes do método das seções para o Exemplo 7.2.

Trecho AB - Fazendo o corte s_2 e tomando o lado esquerdo como na Figura 7.16b,

$$\sum M_x \rightarrow M_x^{AB} + T_A = 0 \rightarrow M_x^{AB} = -T_A \rightarrow \boxed{M_x^{AB} = -100 \text{ Nm}}$$

Trecho BC - Na Figura 7.16c temos o lado direito do corte s_3 . O equilíbrio leva a

$$\sum M_x \rightarrow M_x^{BC} + T_c = 0 \rightarrow M_x^{BC} = -T_c \rightarrow \boxed{M_x^{BC} = -150 \text{ Nm}}$$

Trecho CD - Da figura 7.16d para o lado direito do corte s_4 , o equilíbrio produz

$$\sum M_x \rightarrow \boxed{M_x^{CD} = 0}$$

O diagrama de esforço de torção é ilustrado na Figura 7.17, e o máximo esforço ocorre em qualquer seção do trecho BC, dado por $M_{\max} = -150 \text{ Nm}$.

Como a seção da barra é uniforme, a tensão máxima ocorrerá na seção de maior esforço, i.e., em uma seção qualquer do trecho BC, com $M_t = -150 \text{ Nm}$. A tensão máxima na seção vem de (7.23), onde o raio é $c = d/2 = 15/2 = 7,5 \text{ mm}$ e o momento polar vem de (7.25):

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 15^4}{32} = 4.970 \text{ mm}^4.$$

Então o módulo da tensão é:

$$\tau_{\max}^t = \frac{|M_{\max}|}{J} c = \frac{150 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{4.970 \text{ mm}^4} 7,5 \text{ mm} = 226,3 \text{ MPa}.$$

O “ t ” em τ_{\max}^t indica torção.

Para a aplicação dos **critérios de falha** precisamos previamente determinar a tensão cisalhante máxima absoluta e as tensões principais. Plotando os pontos $X(\sigma_x; \tau_{\max}^t)$ e $T(\sigma_\theta; -\tau_{\max}^t)$ no plano $\sigma - \tau$, com $\sigma_\theta = \sigma_x = 0$ e $\tau_{\max}^t = 226,3 \text{ MPa}$, temos o círculo de Mohr externo mostrado na Figura 7.18. Esse círculo identifica duas das tensões principais, σ_1 e σ_2 . A outra tensão principal, σ_3 , é

tensões K_t , que é definido por

$$K_t = \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \quad (7.34)$$

A tensão nominal é calculada de forma que ignora o efeito da concentração de tensões. Dessa definição, se pode obter a estimativa da tensão máxima como

$$\tau_{\max} = K_t \tau_0 \quad (7.35)$$

Dentro das hipóteses, o valor de K_t depende apenas dos invariantes geométricos do entalhe. Por exemplo, na transição mostrada na Figura 7.19a, o K_t não depende dos valores individuais de D , d e r , ou mesmo do valor do carregamento T . Em vez disso, depende apenas dos invariantes D/d e r/d . Valores de K_t para presente geometria são vistas na Figura 7.20, e gráficos para outras geometrias e carregamentos são resumidos no Apêndice.

Observação - Deve-se observar que cada gráfico de K_t deve definir qual a forma adequada de determinar a tensão nominal. No caso da Figura 7.20, o K_t deve ser usado com τ_0 calculado pela seção mínima da transição, i.e., $\tau_0 = T(d/2)/J$, onde $J = \pi d^4/32$.

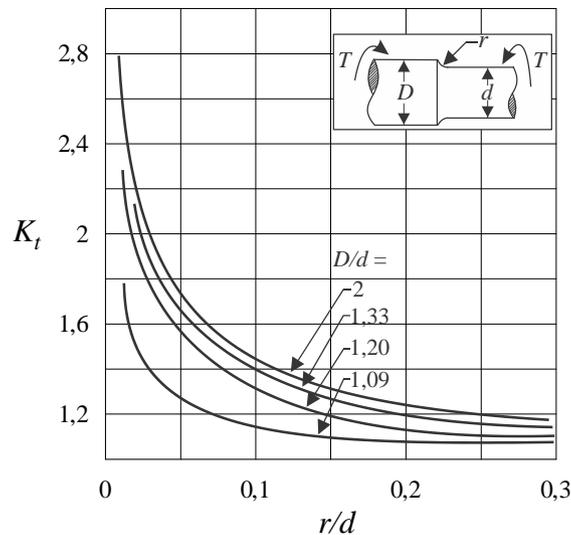


Figura 7.20: Fator de concentração de tensão para eixo de seção circular escalonado com filete. Tensão nominal baseada na seção mínima.

Exemplo 7.5.1 – Tensão concentrada em filete de eixo escalonado

Considere uma barra de aço, escalonada como na Figura 7.21, suportando torques $T_1 = 2.700$ Nm e $T_2 = 900$ Nm. Determine o coeficiente de segurança quanto ao início de escoamento, levando em consideração o efeito de concentração de tensões na seção B. Os diâmetros em cada trecho são $d_1 = 80$ mm, $d_2 = 50$ mm, e o raio de concordância em B é $r = 2$ mm. Use os dados: $L_1 = 5$ m, $L_2 = 2$ m, $G = 80$ GPa, $\sigma_E = 120$ MPa.

Solução:

Como o problema é isostático, a **primeira etapa** do processo de solução é a determinação da reação torcional no apoio, R_{mx} , e do diagrama de esforços. Por equilíbrio global,

$$\sum M_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{mx} - T_1 + T_2 = 0. \quad \rightarrow \quad R_{mx} = 1.800 \text{ Nm.}$$

Usando o método das seções temos que os **esforços** numa seção qualquer do trecho AB é $M_1 = 1.800$ Nm, e no trecho BC é $M_2 = -900$ Nm. Esses esforços são plotados na Figura 7.22.

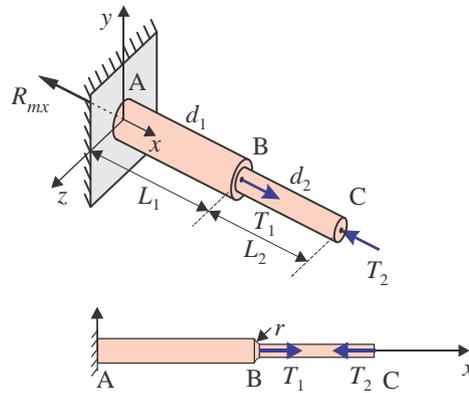


Figura 7.21: Barra escalonada com raio de concordância do Exemplo 7.5.1.

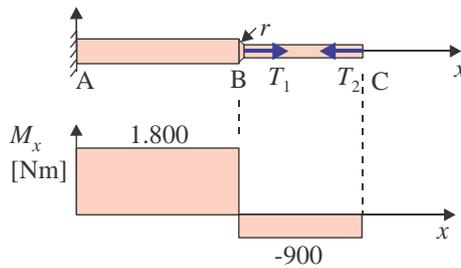


Figura 7.22: Esforços de torção na barra do Exemplo 7.5.1.

As tensões cisalhantes nominais devidas à torção são uniformes em cada trecho. Os momentos polares de inércia em cada trecho são:

$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32} = 4,02 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad \text{e} \quad J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32} = 0,614 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

Então, as tensões nominais em cada trecho, em módulo, são

$$\tau_1 = \frac{M_1}{J_1}(d_1/2) = 26,9 \text{ MPa} \quad \text{e} \quad \tau_2 = \frac{|M_2|}{J_2}(d_2/2) = 36,7 \text{ MPa}.$$

O cálculo da tensão máxima na seção B inicia com o cálculo de K_t , que pode ser feito pela Figura 7.20. Os valores adimensionais geométricos necessários são $r/d = 2/50 = 0,04$ e $D/d = 80/50 = 1,6$. Como resultado, temos aproximadamente $K_t = 1,8$. O mesmo gráfico indica como a tensão nominal deve ser calculada. No presente caso, ela deve ser obtida a partir da seção mínima em torno da seção B, i.e., devemos usar a tensão calculada à direita de B, $\tau_2 = 36,7$ MPa. Então, a tensão máxima no entalhe é obtida por (7.35)

$$\tau_{\max} = K_t \tau_2 = 1,8 \times 36,7 \text{ MPa} = 66,1 \text{ MPa}.$$

Essa é a tensão máxima na seção B, como na Figura 7.19b. Deve-se lembrar que esse é o valor máximo real apenas dentro das condições previstas na teoria. Caso alguma das hipóteses não seja satisfeita essa estimativa não é correta. Por exemplo, se o material não for linear, ou for anisotrópico, ou heterogêneo.

7.6 Ângulo de torção

Barras submetidas a torção precisam não apenas serem capazes de suportar o torque sem sofrerem plastificação ou outro tipo de falha dependente das tensões, mas também não devem apresentar

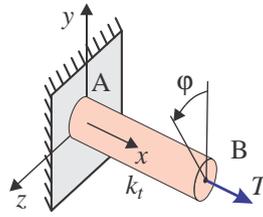


Figura 7.23: Barra sob torção como equivalente a uma mola torcional.

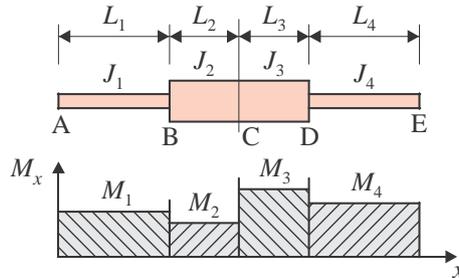


Figura 7.24: Barra escalonada.

Barra escalonada

Eixos em redutores de engrenagens são geralmente de forma “escalonada”, como na Figura 7.24, i.e., a seção não é totalmente uniforme, porém é constante ao longo de intervalos, como mostrado. Se o carregamento for constituído por torques concentrados nas seções marcadas, A, B, C, ..., o esforço de torção será uniforme em cada trecho. Então, definimos cada trecho por k , para $k = 1, \dots, n$, de forma que o momento polar é J_k , o esforço de momento torçor é M_k e o comprimento do trecho é L_k . Assim (7.38) pode ser integrada trecho a trecho, resultando na rotação da última seção (seção E no exemplo da Figura 7.24) em relação à seção A:

$$\Delta\varphi = \varphi(L) - \varphi(x_0) = \frac{M_1 L_1}{G J_1} + \frac{M_2 L_2}{G J_2} + \frac{M_3 L_3}{G J_3} \dots = \sum_{k=1}^n \frac{M_k L_k}{G J_k} \quad (7.41)$$

Observe que o número de termos no somatório depende da seção em que se deseja calcular a rotação. Por exemplo, para a seção C, teríamos que incluir apenas as rotações dos trechos AB e BC, de forma que a rotação de C relativa a A seria dada por:

$$\Delta\varphi_{CA} = \varphi_C - \varphi_A = \frac{M_1 L_1}{G J_1} + \frac{M_2 L_2}{G J_2}.$$

Exemplo 7.6 – Dimensionamento de barra de controlador por Rigidez Torsional

Considere uma barra utilizada num dispositivo de controle de posição de um mecanismo, em que as forças devem ser suportadas com deformações bastante pequenas. A barra é de aço, escalonada como na Figura 7.25, e suporta torques $T_1 = 2.700 \text{ Nm}$ e $T_2 = 900 \text{ Nm}$. Determine o diâmetro d_1 necessário no trecho AB, se $\tau_{adm} = 40 \text{ MPa}$ e a torção total entre A e C é limitada a 3° . (Dados: $L_1 = 5 \text{ m}$, $L_2 = 2 \text{ m}$, $d_2 = 50 \text{ mm}$, $G = 80 \text{ GPa}$.) Para o diâmetro determinado, qual o ângulo de torção das seções B e C?

Solução:

A **primeira etapa** do processo de solução é a determinação da reação torcional no apoio, R_t , e do diagrama de esforços. Por equilíbrio global, $\sum M_x = 0 \rightarrow R_t = T_1 + T_2 = 3.600 \text{ Nm}$. Usando o método das seções, como no Exemplo 7.2, temos os esforços, que são plotados na Figura 7.26. O

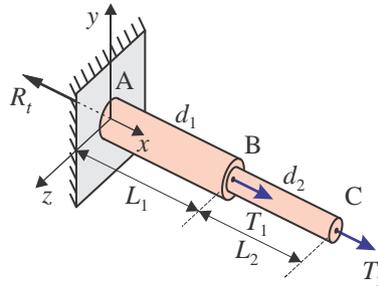


Figura 7.25: Barra escalonada do Exemplo 7.6.

esforço numa seção qualquer do trecho AB é $M_1 = 3.600 \text{ Nm}$, e no trecho BC é $M_2 = 900 \text{ Nm}$.

A **segunda etapa** é determinar o diâmetro em AB, d_1 , necessário para suportar as tensões. Usando (7.28) temos

$$d_1^3 = \frac{16M_1}{\pi\tau_{adm}} = \frac{16 \times 3.600 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{\pi \times 40 \text{ N/mm}^2} \rightarrow d_1 = 77,1 \text{ mm.}$$

Observe que usamos a tensão nominal para fazer o dimensionamento, ignorando o **efeito de concentração de tensões** no entalhe em B. Isso foi feito devido a termo usado τ_{adm} em vez de τ_E , que seria superior. A relação entre os dois deve ser capaz de absorver o erro incorrido no cálculo da tensão máxima aplicada usando o valor nominal.

A **terceira etapa** é a determinação do diâmetro d_1 necessário para satisfazer à condição de ângulo de torção máximo. Usando (7.36) e (7.41) temos

$$\Delta\varphi_{apl} \leq \Delta\varphi_{adm} \quad (7.42)$$

onde $\Delta\varphi_{adm} = 3^\circ \times \pi/180^\circ = 0,0524 \text{ rad}$, e

$$\Delta\varphi_{apl} = \frac{M_1L_1}{GJ_1} + \frac{M_2L_2}{GJ_2}. \quad (7.43)$$

No segmento BC, a seção é conhecida, tal que $J_2 = \pi d_2^4/32 = \pi 50^4/32 = 0,614 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$. No trecho AB, o diâmetro d_1 é a incógnita do problema, logo $J_1 = \pi d_1^4/32$. Juntando as equações (7.42) e (7.43) temos

$$\frac{M_1L_1}{GJ_1} + \frac{M_2L_2}{GJ_2} \leq \Delta\varphi_{adm}.$$

Substituindo os valores,

$$\frac{3.600 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \times (\pi d_1^4/32)} + \frac{900 \times 10^3 \times 2 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \times 0,614 \cdot 10^6} \leq 52,4 \cdot 10^{-3}.$$

Resolvendo, obtemos $d_1 \geq 110 \text{ mm}$. Comparando com o valor necessário para satisfazer o critério de tensão, $d_1 = 77,1 \text{ mm}$, tem-se que o diâmetro mínimo necessário para satisfazer ambos os critérios é definido pela rigidez: $d_1 \geq 110 \text{ mm}$, que pode ser arredondado para $d_1 = 84 \text{ mm}$.

Com isso podemos calcular os ângulos de torção relativos em cada trecho e a rotação em C para o diâmetro $d_1 = 110 \text{ mm}$. Para esse diâmetro, o momento polar de inércia no trecho AB é $J_1 = \pi d_1^4/32 = 14,70 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{BA} &= \frac{M_1L_1}{GJ_1} = \frac{3.600 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \times 14,70 \cdot 10^6} = 15,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad } (0,899^\circ). \\ \Delta\varphi_{CB} &= \frac{M_2L_2}{GJ_2} = \frac{900 \times 10^3 \times 2 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \times 0,614 \cdot 10^6} = 36,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad } (2,10^\circ), \end{aligned}$$

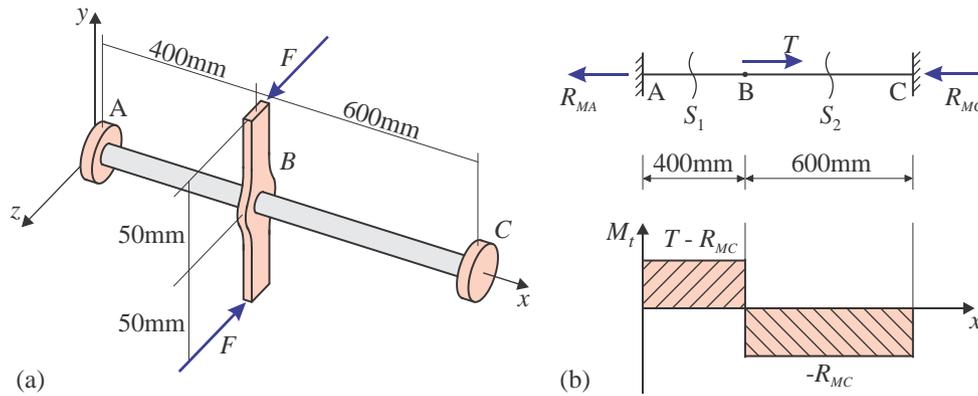


Figura 7.27: Barra do Exemplo 7.7.

$$R_{MA} = T - R_{MC} \quad (7.45)$$

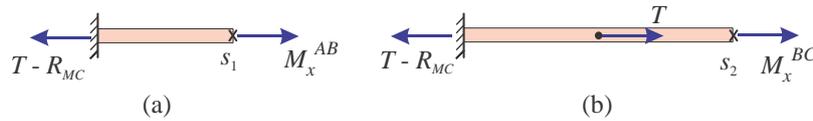


Figura 7.28: Aplicação do método das seções no Exemplo 7.7.

Os esforços de torção podem ser obtidos pelo método das seções. Fazendo dois cortes, s_1 e s_2 , como ilustrado na Figura 7.28, temos os esforços em cada trecho em termos de uma das reações:

$$\begin{aligned} \text{Trecho AB} &\rightarrow M_x^{AB} = cte = T - R_{MC}, & \forall x \in (0; 400 \text{ mm}), \\ \text{Trecho BC} &\rightarrow M_x^{BC} = cte = -R_{MC}, & \forall x \in (400 \text{ mm}; 1000 \text{ mm}). \end{aligned} \quad (7.46)$$

O diagrama é mostrado na Figura 7.27b, supondo $0 < R_{MC} < R_{MA}$.

Etapa 3 - Equação cinemática

Podemos usar (7.41) para determinar o ângulo de rotação da seção C em relação ao da seção A, $\Delta\varphi$, sabendo previamente que $\Delta\varphi = 0$:

$$\Delta\varphi = \frac{L_1 M_x^{AB}}{GJ} + \frac{L_2 M_x^{BC}}{GJ} = 0,$$

onde $L_1 = 400 \text{ mm}$, $L_2 = 600 \text{ mm}$, $M_x^{AB} = T - R_{MC}$ e $M_x^{BC} = -R_{MC}$. Logo,

$$400 (3 \cdot 10^5 - R_{MC}) + 600 (-R_{MC}) = 0. \quad (7.47)$$

As equações (7.45) e (7.47) formam então um sistema de duas equações e duas incógnitas, cuja solução são as reações: $R_{MA} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$ e $R_{MC} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$.

Etapa 4 - Tensões.

Os esforços podem agora serem calculados de (7.46): $M_x^{AB} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$ e $M_x^{BC} = -1,2 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$. Logo, o momento máximo é $M_{\max} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$, e ocorre em qualquer seção do trecho AB. Também aí é onde ocorre a máxima tensão cisalhante, na borda da seção, em $r = d/2 = 20 \text{ mm}$. De (7.28),

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\max}}{\pi d^3} = \frac{16 \times 1,8 \cdot 10^5}{\pi 40^3} = 14,32 \text{ MPa}.$$

O coeficiente de segurança quanto a tensão é: $n = \sigma_E / 2\tau_{\max} = 150 / (2 \times 14,32) = 5,24$.

Etapa 5 - Ângulo de torção em B. De (7.39), o ângulo de torção de B em relação a A é

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{L_1 M_x^{AB}}{GJ},$$

onde sabe-se que $\varphi_A = 0$ e de (7.25), $J = \pi d^4/32 = \pi 40^4/32 = 2,51 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$. Logo,

$$\varphi_B = \frac{400 \times 1,8 \cdot 10^5}{79,6 \cdot 10^3 \times 2,51 \cdot 10^5} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad (ou, } \varphi_B = 0,206^\circ).$$

O coeficiente de segurança quanto à rotação é $n = \varphi_{adm}/\varphi_B = 0,3^\circ/0,206^\circ = 1,45$.

7.7 Exemplos adicionais

Exemplo 7.8 – Torção em barra de seção variável.

Considere a barra tronco-cônica da Figura 7.29a, de aço, suportando o torque T na extremidade. Determine uma expressão para o ângulo torção em termos de T , G , L , r_o e r_1 .

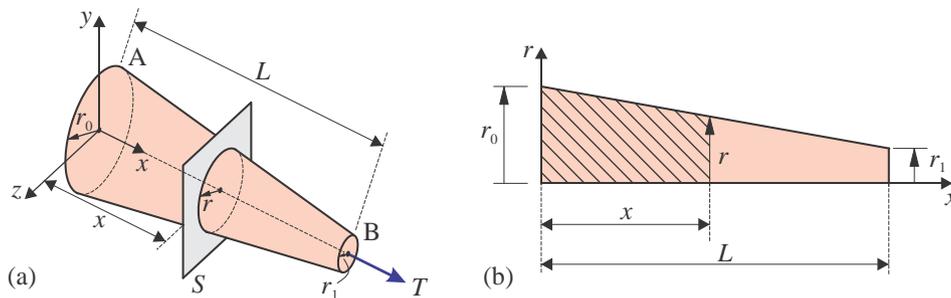


Figura 7.29: Barra de seção variável do Exemplo 7.8.

Solução:

Usaremos diretamente a expressão (7.38), onde apenas o momento polar de inércia é dependente de x . Então, a primeira tarefa consiste em determinar a função $J = J(x)$. Como a seção é maciça, (7.25) produz J , bastando determinar a expressão para o diâmetro, $d = d(x)$. A Figura 7.29b mostra a variação do raio r com x , para um segmento tomado desde o engaste até uma seção genérica de coordenadas x . Como a geratriz do tronco-cone é reta, a equação para o raio em termos de x é a equação de uma reta:

$$r(x) = r_o - \left(\frac{r_o - r_1}{L} \right) x. \quad (7.48)$$

De (7.25), $J = \pi r^4/2$, logo

$$J(x) = \frac{\pi}{2} \left[r_o - \left(\frac{r_o - r_1}{L} \right) x \right]^4 \quad (7.49)$$

que é a expressão para o momento polar de inércia de uma seção x de um tronco-cone de raios r_o e r_1 e comprimento L .

Aplicando (7.38) obtemos

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_{x=0}^L \frac{T}{G \cdot \frac{\pi}{2} \left[r_o - \left(\frac{r_o - r_1}{L} \right) x \right]^4} dx,$$

onde $\varphi_A = 0$. A integração pode ser realizada, resultando

$$\varphi_B = \frac{2T}{\pi G} \frac{1}{3 \left(\frac{r_o - r_1}{L} \right) \left[r_o - \left(\frac{r_o - r_1}{L} \right) x \right]^3} \Bigg|_{x=0}^L.$$

Simplificando temos

$$\boxed{\varphi_B = \frac{2TL}{3\pi G} \left[\frac{r_1^2 + r_o r_1 + r_o^2}{r_o^3 r_1^3} \right]} \quad (7.50)$$

Exemplo 7.9 – Perfuratriz - barra sob torque distribuído

Considere o tubo de aço AB usado numa perfuratriz, mostrado na Figura 7.30a, com raios interno/externo r_i/r_e e comprimento L . Durante a perfuração o atrito com o solo provoca um torque distribuído, que pode-se admitir variando linearmente como ilustrado, variando desde zero até t_o [Newton-metro/metro]. Adicionalmente, a broca encontra resistência torcional T_B . (a) Determine o torque necessário T_A a ser aplicado no topo; (b) O ângulo de torção relativo entre as extremidades.

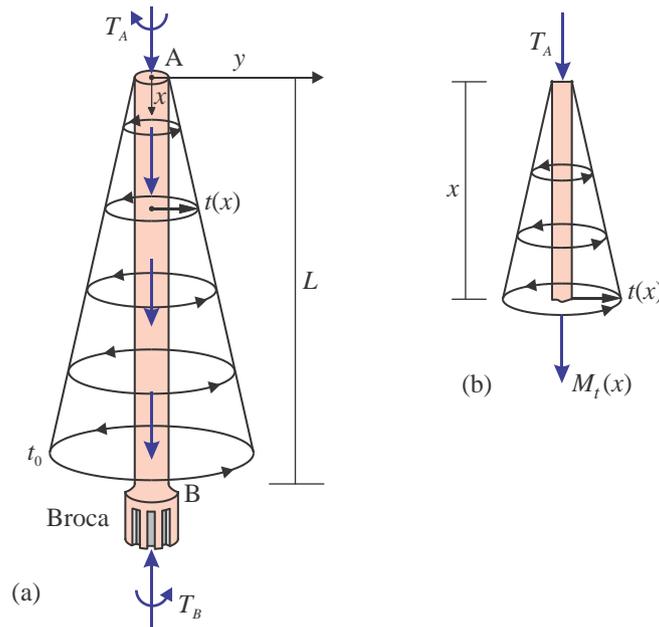


Figura 7.30: Tubo do Exemplo 7.9.

Solução:

Etapa 1 - Equação para o torque distribuído, que varia linearmente. Por semelhança de triângulos, ilustrados na Figura 7.30, tem-se o torque por unidade de comprimento numa seção arbitrária x :

$$t(x) = \frac{t_o}{L} x \quad [\text{Nm/m}]. \quad (7.51)$$

Etapa 2 - Torque aplicado T_A , que deve ser determinado de forma a satisfazer o equilíbrio torcional global:

$$\sum M_x = 0 \rightarrow T_A = T_B + \int_{\bar{x}=0}^L t(\bar{x}) d\bar{x}.$$

O último termo vem do fato de que $t(x)$ é um torque por unidade de comprimento de tubo, tal que

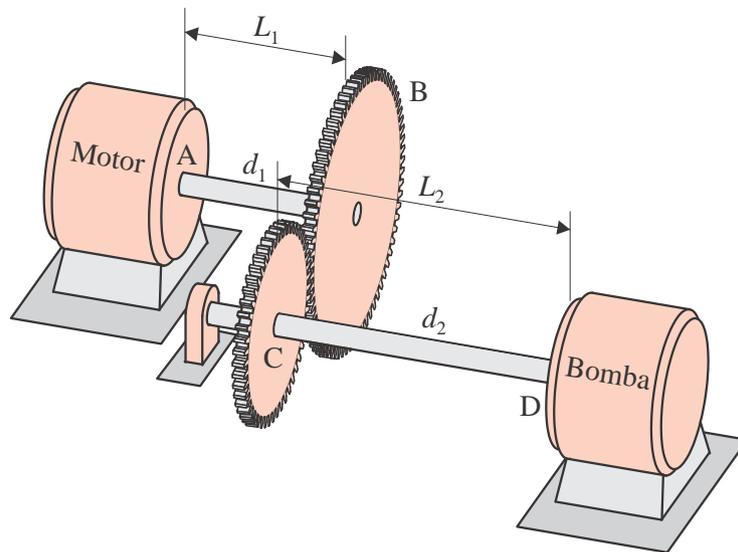


Figura 7.31: Transmissão do Exemplo 7.10.

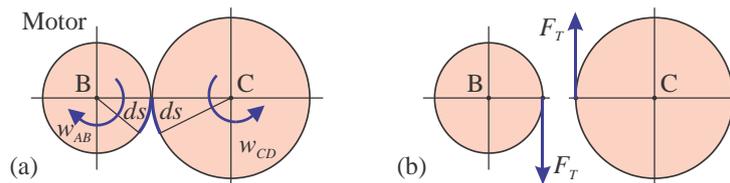


Figura 7.32: Segmento de contato ds e forças tangenciais num par engrenado.

Então, a relação entre as velocidades tangenciais num par engrenado é dada pela inversa da relação entre os diâmetros.

Da Figura 7.32b observa-se que, pela lei da ação e reação, as forças tangenciais que atuam no par de engrenagens são idênticas. Então, pode-se representar essa força em cada engrenagem, em termos de seus torques e diâmetros:

$$F_t = \frac{T_{AB}}{D_B/2} = \frac{T_{CD}}{D_C/2} \quad \rightarrow \quad \boxed{T_{AB} = \frac{D_B}{D_C} T_{CD}} \quad (7.57)$$

Então, a relação entre os torques num par engrenado é dada pela relação direta entre os diâmetros.

Substituindo os valores do problema obtém-se que a velocidade do eixo CD é $w_{CD} = (100 \text{ mm}) \times (188,5 \text{ rad/s}) / 250 \text{ mm}$, $w_{CD} = 75,4 \text{ rad/s}$. Com isso o torque transmitido no eixo CD pode ser obtido de (7.2):

$$T_{CD} = \frac{P}{w_{CD}} = \frac{7.457 \text{ Nm/s}}{75,4 \text{ rad/s}} = 98,9 \text{ Nm}.$$

Os esforços são obtidos pelo método das seções, e são: $M_t^{AB} = T_{AB} = 39,6 \text{ Nm}$ e $M_t^{CD} = T_{CD} = 98,9 \text{ Nm}$, em seções nos eixos AB e CD respectivamente.

A tensão torcional em cada eixo é: