

Capítulo 11

Locking, patch test

No presente capítulo apresentamos alguns aspectos sobre as patologias típicas do método de elementos finitos, incluindo o fenômeno de locking, sub integração, modos espúrios de deformação, e o *patch test*. A apresentação é puramente fenomenológica, através da ilustração de diversos casos comuns nas formulações mais usuais do MEF.

11.1 Locking nos elementos de estado plano

11.1.1 Elemento triangular linear

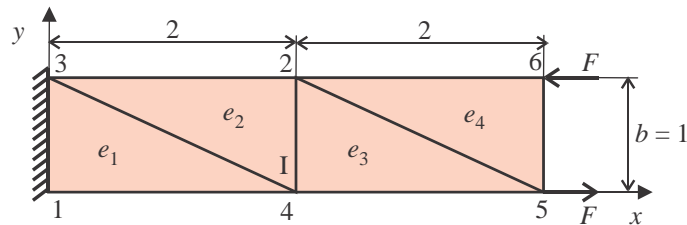


Figura 11.1: Problema de flexão de viga analisado com estado plano de tensões.

Consideremos a malha mostrada no Exemplo 1, seção 8.2.3, na página 191, dada por elementos triangulares lineares, num problema de estado plano de tensões. A placa encontra-se submetida a um binário de forças nodais nos nós 5 e 6 da extremidade, como na Figura 11.1. Isso simula a **flexão pura** (cisalhamento transversal nulo) de uma viga de seção retangular. Para o elemento 1, a matriz de deformação é mostrada em (8.59), de forma que as deformações no elemento se relacionam aos deslocamentos nodais por

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{array} \right]}_{\mathbf{B}^{e_1}} \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\}. \quad (11.1)$$

Considerando o vetor de deslocamentos no elemento, $\mathbf{U}^{e_1} = \{0, 0, u_4, v_4, 0, 0\}^T$, obtém-se as deformações

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} u_4/2 \\ 0 \\ v_4/2 \end{array} \right\}.$$

Então o elemento apresenta cisalhamento não nulo, em vez de zero. É uma **deformação par-**

paralelos aos eixos de coordenadas, submetida a um par de momentos fletores. A figura (a) ilustra o modo de **deformação exata**, que consiste nas deformações

$$\text{Exato} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = -\frac{ty}{a}, \quad \varepsilon_y = -\nu\frac{ty}{a}, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad (11.2)$$

onde t é o ângulo de rotação da seção normal.

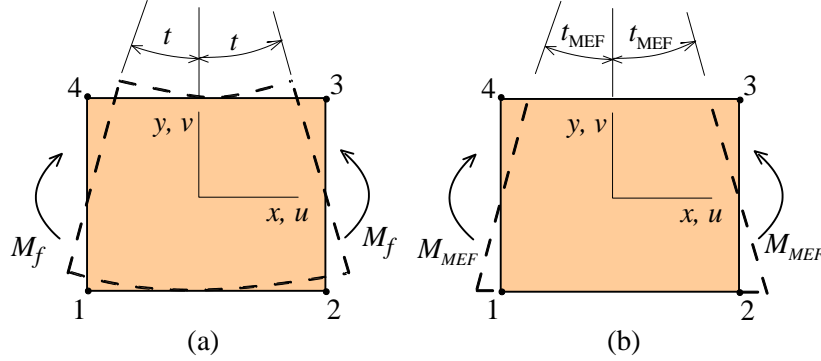


Figura 11.3: Modo de deformação exata para flexão pura em (a) e obtido por um elemento finito bilinear em estado plano de tensões, em (b).

Consideremos agora o mesmo problema modelado por um único elemento finito bilinear, como na Figura 11.3b. Uma vez que as funções de forma são lineares ao longo de cada eixo, a única resposta possível do modelo é aquela mostrada em linhas tracejadas na figura, isto é, os segmentos entre os nós 1-2 e 3-4 permanecem retos, sem flexão. Então, os valores nodais possíveis são

$$\begin{aligned} \text{MEF} \quad \rightarrow \quad \mathbf{U}^e &= \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}^T, \\ &= t_{MEF} b \{-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0\}^T, \end{aligned}$$

isto é, os deslocamentos axiais são definidos pela rotação t_{MEF} produzida na resposta, e os deslocamentos transversais são nulos. As deformações são obtidas da matriz de deformação mostrada em (8.79), página (198):

$$\varepsilon_{xMEF} = -\frac{t_{MEF}}{a}y, \quad \varepsilon_{yMEF} = 0, \quad \gamma_{xyMEF} = -\frac{t_{MEF}}{a}x. \quad (11.3)$$

Qualitativamente, a estimativa de ε_x é correta, a estimativa de ε_y também é correta para o caso de coeficiente de Poisson nulo, porém surge uma deformação cisalhante transversal não nula, espúria. O problema pode ser resolvido por simples balanço de energia da deformação com trabalho do momento aplicado. Para o **problema exato**,

$$\begin{aligned} U &= W, \\ \frac{1}{2} \int_{y=-b}^b \int_{x=-a}^a \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}^t \boldsymbol{\varepsilon} \, dx dy &= M_f t, \end{aligned}$$

onde \mathbf{C}^t é a matriz elástica para estado plano de tensões, eq.(8.71). E analogamente para o modelo de elementos finitos, $U_{MEF} = W_{MEF}$. Realizando analiticamente as integrações se obtém

$$\begin{aligned} \text{Exato} \quad \rightarrow \quad & \frac{2b^3 E(1+3\nu^2)}{3a(1-\nu^2)} t^2 = M_f t, \\ \text{MEF} \quad \rightarrow \quad & \frac{b^3 E(2b^2 + a^2(1-\nu))}{3a(1-\nu^2)} t_{MEF}^2 = M_{MEF} t_{MEF}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

A discussão a seguir pode ser feita com mais clareza para o caso $\nu = 0$, com $M_{MEF} = M_f$:

$$\begin{aligned}
\text{Exato} &\rightarrow (2b^3) \frac{E}{3a} t = M_f, \\
\text{MEF} &\rightarrow \left(2b^3 + \underbrace{a^2b}_{\text{Extra}} \right) \frac{E}{3a} t_{MEF} = M_f.
\end{aligned} \tag{11.5}$$

Nota-se que a solução de elementos finitos apresenta um termo extra, positivo, a^2b dentro do parênteses, que é originário do cisalhamento espúrio. Então, conforme a cresce, a aproximação t_{MEF} torna-se cada vez menor. É um caso típico de travamento por cisalhamento. Conforme o segundo termo cresce, ele vai se sobrepondo ao valor correto dado pelo primeiro termo. A energia de deformação cisalhante funciona como uma **penalização** sobre o termo de energia de deformação de flexão.

O processo pode ser visto também fazendo a relação entre o ângulo exato e o aproximado:

$$\frac{t_{MEF}}{t} = \frac{1}{\frac{1}{2} (a/b)^2 + 1} \tag{11.6}$$

Claramente, conforme a/b cresce, t_{MEF}/t tende a zero no limite. Para um valor finito de a/b , o travamento não será completo, mas a aproximação será pobre, com baixa taxa de convergência de refino de malha.

11.2 Subintegração e modos espúrios

O locking foi observado ainda no início do desenvolvimento do método de elementos finitos, e um dos primeiros procedimentos de solução do problema foi o uso de subintegração [1]. Como comentado na seção 9.1.3, página 240, o número de pontos de integração exata de um elemento não distorcido é denominado integração completa, e é usado mesmo nos elementos distorcidos. O uso de um ponto a menos em cada direção se constitui numa subintegração. Além de ser usado como uma solução para o locking, muitas vezes a subintegração era, e ainda é em algumas situações, vista como uma forma de reduzir o esforço computacional, principalmente em problemas não lineares, em que a matriz do elemento precisa ser calculada a cada iteração, e em problemas dinâmicos de integração direta. Entretanto, em geral a subintegração produz deficiências na matriz integrada, cujos efeitos são conhecidos na literatura por uma série de termos, como presença de *modos espúrios*, *modos singulares*, *modos "hourglass"*, *modos cinemáticos*, *mecanismos*, *instabilidade*, *modos de energia de deformação nula*. O motivo por tras de cada um desses nomes será brevemente ilustrado a seguir.

O processo de integração numérica pode ser visto como a representação da matriz através do somatório de uma quantidade de matrizes, uma em cada ponto de integração. Assim, cada parcela adiciona uma certa quantidade de rigidez ao conjunto. A redução no número de pontos de integração gera um somatório deficiente. Essa deficiência se traduz por uma redução no posto da matriz. Um elemento plano possui $c_r = 3$ movimentos de corpo rígido e um elemento sólido possui 6. Então a matriz do elemento possui c_r autovalores de corpo rígido, em que os correspondentes autovetores contém os deslocamentos nodais dos movimentos de corpo rígido (deformação nula). Conseqüentemente, a matriz de N_{gle} graus de liberdade bem integrada possui $N_{gle} - c_r$ autovalores não nulos, e os correspondentes autovetores são de campos de deformação. Isso pode ser visto no problema de autovalor associado no elemento

$$\mathbf{K}^e \mathbf{X} = \mathbf{X} \Lambda, \tag{11.7}$$

onde consideramos aqui \mathbf{X} o conjunto de N_{gle} autovetores, ortonormalizados ($\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{I}$), e Λ a matriz diagonal com os correspondentes autovetores. Se os autopares estiverem ordenados em ordem crescente, os c_r primeiros autovalores serão nulos. Por outro lado, a **energia de deformação** do elemento para o modo j é $(1/2) \mathbf{X}_j^T \mathbf{K}^e \mathbf{X}_j$. Claramente, para um dos modos de corpo rígido, $\mathbf{X}_j^T \mathbf{K}^e \mathbf{X}_j = 0$, para $j = 1, \dots, c_r$, isto é, os modos de movimento de corpo rígido possuem energia

de deformação nula, isto é, são modos em que o elemento não se deforma, apenas se translada e se rotaciona. A matriz do elemento bem integrado possui $m_d = N_{gle} - c_r$ modos de deformação. Então, a matriz de rigidez tem posto m_d , que é o posto correto.

Quando se considera o elemento obtido por **subintegração**, observa-se que ele apresenta mais de c_r autovalores nulos. Existem m_e modos espúrios, de autovalor nulo, cujos correspondentes autovetores são também modos de deformação, porém associadas a energia de deformação nulas. Isso significa $\mathbf{X}_j^T \mathbf{K}^e \mathbf{X}_j = 0$, para $j = c_r + 1, \dots, c_r + m_e$. Isso significa que o posto da matriz é menor que $N_{gle} - c_r$. É uma matriz com **posto deficiente**.

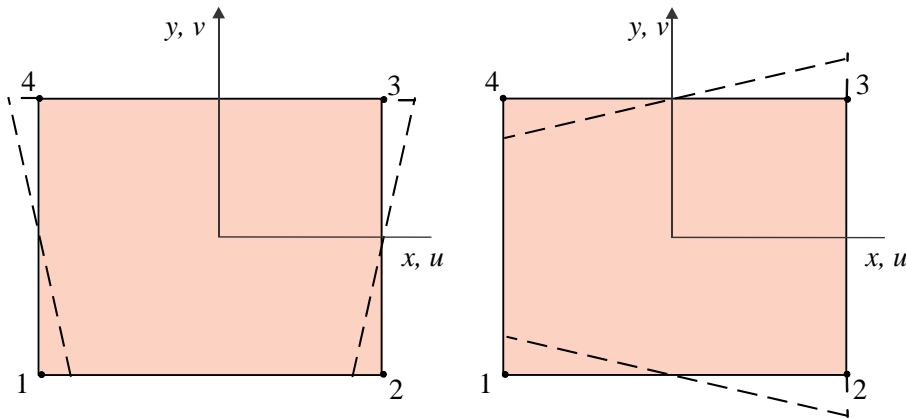


Figura 11.4: Modos de deformação do elemento bilinear que se tornam de energia de deformação nulas se a matriz for subintegrada.

Por exemplo, a Figura 11.4 mostra dois dos modos de deformação do **elemento bilinear** de estado plano. Se a matriz for integrada completamente, a energia de deformação será nula, como esperado. Esses modos são ilustrados na figura. Entretanto, se a matriz for obtida tomando apenas o ponto de integração central, ela não apresentará rigidez quanto a esses modos, pois **a deformação é nula nesse ponto**. Quaisquer valores de deslocamentos nodais associados podem ocorrer, gerando um campo de deformação de energia nula.

Os modos de energia nula do elemento bilinear são **ditos não comunicáveis**. Isso significa que numa malha desses elementos, após serem impostas as condições de contorno adequadas para restringir os movimentos de corpo rígido da peça, esses modos espúrios são suprimidos. Entretanto, a solução do modelo nos elementos distantes dos apoios pode apresentar resposta poluída por esses modos, com valores nodais enormes. Isso porque a matriz global de rigidez apresenta-se perturbada pelos modos espúrios dos elementos. Entretanto, mesmo nessa situação, deslocamentos e tensões nos centroides dos elementos (o ponto de subintegração), podem ser razoavelmente precisos. Isso se traduz por uma matriz de rigidez com uma quantidade de autovalores que são não nulos, porém bastante menores que os demais. A resposta em um problema estático pode ser boa, porém a presença desses modos quase singulares pode gerar dificuldades num problema dinâmico. O sistema dinâmico pode apresentar algumas frequências naturais inferiores à menor frequência natural verdadeira do modelo.

Um elemento biquadrático Lagrangiano de 9 nós em estado plano, quando subintegrado, apresenta 3 modos espúrios de energia nula, sendo dois deles **comunicáveis**, isto é, uma malha pode ter todos os elementos com esse modo espúrio. O elemento 'serendipity' de 8 nós apresenta apenas 1 modo espúrio, sendo não comunicável. Não comunicável significa que, numa malha com dois ou mais desses elementos, é impossível que dois elementos vizinhos se deformem com esse modo. Esse é o chamado modo "hourglass", (ampulheta em inglês), devido ao seu formato geral. A Figura 11.5 ilustra esses modos para os dois tipos de elementos. Observe que em todos esses modos o tensor de deformação é nulo em cada um dos 4 pontos de integração reduzida. Em **elementos sólidos** de baixa ordem, lineares ou quadráticos, os efeitos da subintegração são similares. Por exemplo, sólidos trilineares de 8 nós quando subintegrados com 1 ponto de integração apresentam 12 modos espúrios, e sólidos triquadráticos Serendipity de 20 nós com subintegração de $2 \times 2 \times 2$ pontos apresentam

considerar que o modelo numérico tranca como efeito de uma quantidade excessiva de restrições impostas, sendo que cada ponto de integração é uma restrição. A subintegração uniforme remove uma quantidade excessiva de restrições e a matriz \mathbf{K}^e fica demasiado flexível. A subintegração seletiva pode remover uma quantidade mais adequada de restrições, deixando a matriz com seu posto mais próximo do adequado, e com a flexibilidade ajustada. De fato, a escolha dos pontos de subintegração, e dos termos a serem subintegrados, também são feitas de maneira adequada. Ao final, o problema do locking pode ser resolvido, em muitos casos, mas em geral outros problemas surgem decorrentes da subintegração, principalmente em elementos de baixa ordem. Esses problemas só são resolvidos de forma completa pelo uso de formulações mais complexas, baseadas em **métodos de estabilização por campo de deformação assumida**. Assim existem os elementos estabilizados planos de 3 e 4 nós para elasticidade finita e flexão de placas e cascas, sólidos tetraédricos de 4 nós, hexaédricos de 8 nós, que são livres de todas as patologias numéricas. São usados principalmente em problemas não lineares de deformação/deslocamentos finitos, e em problemas dinâmicos de impacto, via integração direta. São situações que tornam atraentes elementos de baixa ordem.

11.3 Locking no elemento de viga de Timoshenko

O modelo de flexão de viga de Timoshenko pode ser visto, formalmente, como uma simplificação unidimensional do modelo de flexão de Mindlin. A relação dos modelos de viga de Timoshenko e de Euler-Bernoulli é a mesma entre os modelos de placa de Mindlin e de Kirchhoff, isto é, a inclusão ou não da energia de deformação de cisalhamento transversal. Na formulação de Timoshenko, o campo cinemático é descrito tomando a simplificação de (15.3) para o caso de deslocamento coplanar apenas no plano xz :

$$\begin{aligned} u_x(x, z) &= z\theta_x(x), \\ u_z(x) &= w(x), \end{aligned} \quad (11.9)$$

sendo u_x o deslocamento na direção axial x e u_z o deslocamento na direção transversal z . θ_x é a rotações de um segmento normal à superfície de referência em torno do eixo y . A cinemática é definida por duas funções independentes, unidimensionais, $w(x)$ e $\theta_x(x)$, que descrevem a translação e a rotação da superfície de referência, que se move como um corpo rígido. As deformações associadas são apenas duas componentes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, z) &= z\kappa_x(x), \quad \text{onde } \kappa_x = \frac{\partial\theta_x}{\partial x}, \text{ e} \\ \gamma_{xz}(x) &= \theta_x(x) + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Consideramos uma viga de seção uniforme de comprimento L , seção transversal com área e momento de inércia A e I , submetida a uma carga transversal distribuída $q_z(x)$ [N/m] e a uma força concentrada F em $x = L$. Usando a lei de Hooke 1D a energia potencial total da viga é dada por

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \left[\int_A (E\varepsilon_x^2 + G\gamma_{xz}^2) dydz \right] dx - \int_{x=0}^L q_z w dx - Fw(L). \quad (11.11)$$

A primeira parcela na primeira integral é a energia de deformação de flexão e a segunda energia cisalhante. Usando as relações cinemáticas (11.10), a parcela de flexão se torna

$$U_f = \frac{E}{2} \int_{x=0}^L \left[\int_A \varepsilon_x^2 dydz \right] dx = \frac{E}{2} \int_{x=0}^L \left[\int_A (z\kappa_x)^2 dydz \right] dx,$$

O limite em (11.16) significa que, localmente, deve-se ter

$$\theta_x \rightarrow -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (11.17)$$

Esse limite corresponde exatamente à hipótese básica do modelo de Euler-Bernoulli, onde apenas a primeira integral em (11.15) permanece. (11.16) é uma relação extra no modelo, **uma restrição no problema de minimização**. Seu efeito é o de reduzir a quantidade total de graus de liberdade do modelo. Em aproximações como as de elementos finitos de baixa ordem, a redução no número de graus de liberdade tende a prejudicar a convergência. É o **locking de cisalhamento**. Por exemplo, um elemento finito com dois nós, com aproximação linear para w e θ_x , dadas por

$$\begin{aligned} w(x) &= c_1 + c_2x, \\ \theta_x(x) &= d_1 + d_2x \end{aligned} \quad (11.18)$$

O campo de deformações é

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}(x) &= \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ &= (d_1 + c_2) + d_2x. \end{aligned} \quad (11.19)$$

No limite $h \rightarrow 0$, deve-se ter $d_2 \rightarrow 0$ e $d_1 \rightarrow -c_2$. Então, no limite, o modelo de EF tem apenas duas constantes para definir a cinemática do elemento, em vez de quatro. Uma redução de 50 % na quantidade total de g.l. Torna-se muito pobre.

De fato, a velocidade com que a segunda integral em (11.15) tende a zero deve ser maior que a de h^2 , isto é, uma aproximação numérica também deve ser tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_{x=0}^L \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = 0. \quad (11.20)$$

11.4 Patch test

O processo de criação de uma nova formulação de elementos finitos é, a princípio, bastante fértil. Trata-se, por exemplo, da identificação da base de funções e seu ajuste em coeficientes incógnitos nodais ou não nodais. De fato, existem literalmente milhares de formulações desenvolvidas, aplicadas aos mais diversos tipos de problemas. Cada formulação deve atender a requisitos básicas de desempenho, como convergir para a solução exata com um refino de malha adequado. No caso de elementos para problemas de elasticidade, desde o início verificou-se que qualquer formulação deve cumprir dois requisitos:

1. O elemento deve ser capaz de deslocar-se descrevendo qualquer movimento de corpo rígido esperado para a formulação (uma translação para elemento de barra, tres movimentos de corpo rígido em elasticidade plana, etc.);
2. Uma malha qualquer desses elementos, sob a ação de carregamento compatível deve ser capaz de reproduzir qualquer estado uniforme de deformações, isto é, $\varepsilon_x = const$, com as demais componentes nulas, e também apenas $\varepsilon_y = const$, etc, e combinações entre elas.

Nota-se que esses dois estados correspondem aos campos de deslocamentos constantes e lineares. Considera-se que se o elemento cumpre essas condições, ele será capaz de convergir para a solução exata em qualquer problema, em uma sequência de refinamentos de malha adequados. Com o passar dos anos, essas ideias foram progressivamente embasadas em argumentos matemáticos consistentes.

O chamado *patch test* foi concebido ainda nos anos 1960 [36] e foi desenvolvido desde então [98], para gerar um procedimento simples de verificar se uma formulação atende aos requisitos de convergência. De forma compacta, tem-se que