

## Capítulo 16

# MEF para materiais compostos laminados

Até esse ponto do texto tem-se considerado consistentemente apenas materiais homogêneo-isotrópicos. O presente capítulo fará a modelagem de materiais compostos, que se inserem na classe de materiais não-homogêneos e não isotrópicos (anisotrópicos). Sobre essa última propriedade, a anisotropia do material, deve-se lembrar que consiste numa dependência das propriedades termomecânicas com a orientação.

O termo “materiais compostos” indica, basicamente, um material que é constituído por uma junção de dois ou mais materiais distintos. Esse termo engloba uma multitude de tipos distintos de material, tanto materiais naturais (madeira, por exemplo), materiais tradicionais de engenharia (concreto armado), e materiais ditos de alto desempenho, modernos, que são mais especificamente tratados como materiais compostos. Dentre os materiais compostos, trataremos aqui da modelagem dos chamados **laminados**. Um laminado é uma viga, placa ou casca, constituída por uma quantidade  $N$  de **lâminas**, que são supostas serem coladas adequadamente, como ilustrado na Figura 16.1. Cada lâmina, num composto moderno, é constituída por uma **matriz** e um ou mais **reforços**. A matriz é o material base, geralmente de propriedades estruturais inferiores e mais barato, enquanto os reforços são de materiais mais rígidos e/ou resistentes. Tipicamente, num laminado de alto desempenho, a matriz é polimérica, metálica ou cerâmica e o reforço é de feito por fibras de vidro, carbono ou fibras orgânicas como o kevlar. Compostos especiais incluem combinações fibra/reforço do tipo carbono/carbono, inclusões de cerâmicos em metal, além de reforços de nanotubos de carbono. Em matrizes poliméricas são utilizados tanto os polímeros termofixos (principalmente o epóxi e o poliéster), quanto os termoplásticos. As fibras são disponíveis em diversas formas: contínuas ou picotadas em comprimentos que vão desde cerca de 15 mm até dimensões da ordem de algumas dezenas de micrometros. Os compostos podem ser formados por fibras contínuas paralelas, por mantas de fibras picotadas ou por tecidos. Esses últimos podem ter tramas simples como os tecidos cruzados, ou por tramas complexas como os setins.

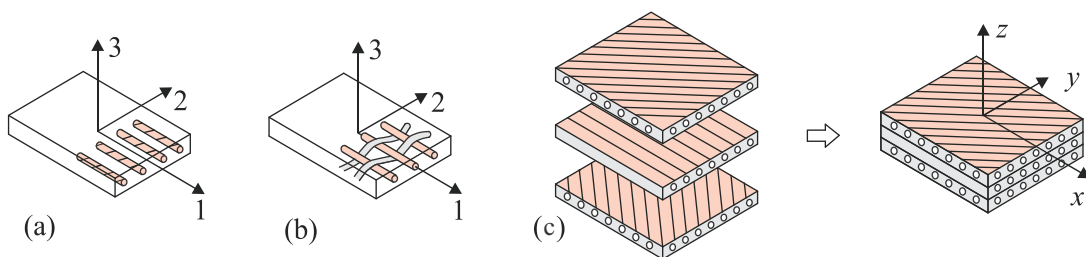


Figura 16.1: Visualização idealizada de alguns tipos clássicos de lâminas: (a) lâmina com fibras unidirecionais; (b) lâmina com fibras tecidas; (c) laminado composto por várias lâminas orientadas em diferentes direções.

Lâminas reforçadas por tecidos ou por fibras unidirecionais apresentam ortotropia, isto é, suas

propriedades termomecânicas variam com a direção. A Figura 16.1 ilustra os **eixos principais** de propriedades mecânicas, denominados eixos 1, 2 e 3. Em lâminas unidirecionais, a direção 1 é na direção da fibra, a direção 2 na direção transversal à fibra, e a direção 3 é normal à lâmina. Normalmente, as espessuras das fibras são muito menores que a espessura da lâmina, de forma que existem pelo menos dezenas de fibras ao longo da espessura, distribuídas aleatoriamente. Assim, se considera que no plano transversal, definida pelos eixos principais 23, as propriedades são isotrópicas, isto é, são as mesmas em qualquer direção nesse plano. Então esse tipo de lâmina é dito ser **transversalmente isotrópica**. Essa consideração permite uma grande simplificação na determinação experimental de propriedades mecânicas.

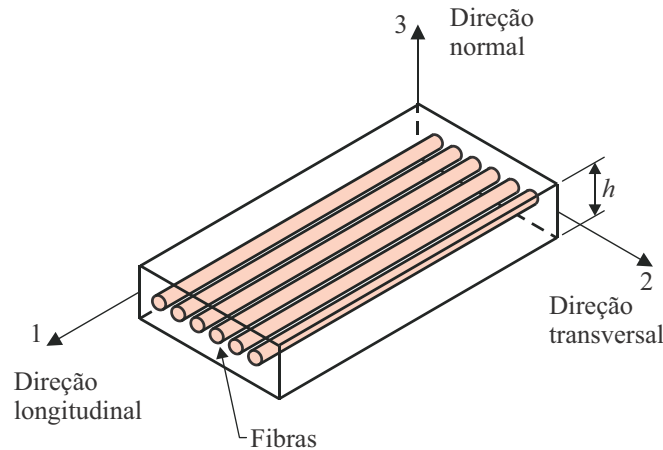


Figura 16.2: Idealização de um segmento de lâmina ortotrópica e indicação das direções principais de propriedades mecânicas.

No presente capítulo apresentamos nas primeiras seções um sumário bastante resumido da formulação de materiais compostos. Um tratamento completo pode ser visto em Mendonça [72]. As seções finais apresentam formulações de elementos finitos para compostos, em análise estática, dinâmica e de estabilidade de placas.

## 16.1 Relação tensão-deformação para materiais elástico-lineares anisotrópicos

Estruturas rígidas tipicamente apresentam pequenos deslocamentos e deformações durante sua operação. Então, grande parte da análise estrutural de estruturas de materiais compostos é feita utilizando uma relação tensão-deformação linear, isto é, uma versão generalizada da lei de Hooke para materiais anisotrópicos. O modelo anisotrópico incorpora, como casos especiais, os materiais ortotrópicos, e esses por sua vez incorporam os materiais isotrópicos. Para um material elástico, linear e anisotrópico, a relação tensão-deformação mais geral tem a forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{sim.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (16.1)$$

(“sim.” significa que a matriz é simétrica.) Em notação simbólica, isso será representado nesse capítulo por:

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{C}^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 \quad (16.2)$$

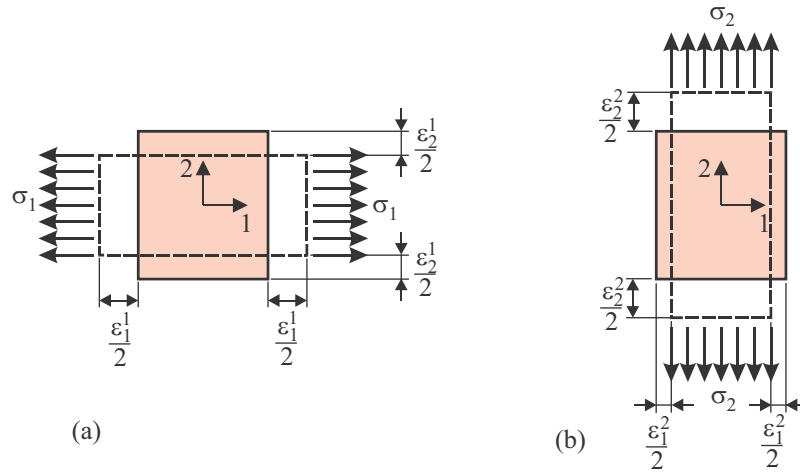


Figura 16.3: Ilustração do efeito de Poisson.

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2^1}, \quad \nu_{21} = -\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}, \quad \nu_{13} = -\frac{\varepsilon_3^2}{\varepsilon_1^2}. \quad (16.7)$$

O mesmo pode ser feito para a direção principal 3, gerando outras três constantes de engenharia,  $E_3$ ,  $\nu_{13}$  e  $\nu_{31}$ .

Observa-se agora a relação constitutiva (16.5), aplicada ao primeiro experimento, isto é, quando o estado uniaxial de tensões é dado por

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ sim. & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{31} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sigma_1 \quad (16.8)$$

Comparando as expressões de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  em (16.6) e (16.8), identificam-se as relações entre o conjunto de propriedades  $S_{ij}$  e as constantes de material:  $S_{11} = 1/E_1$ ,  $S_{21} = -\nu_{12}/E_1$  e  $S_{31} = -\nu_{13}/E_1$ .<sup>1</sup> As demais constantes são associadas de forma similar, de forma que a relação constitutiva para um **material ortotrópico** toma a forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ sim. & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad (16.9)$$

Uma vez que a matriz é simétrica, as constantes de engenharia são relacionadas por:

$$\boxed{\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2, 3} \quad (16.10)$$

<sup>1</sup>Essas relações podem ser facilmente obtidas. Por exemplo, de (16.6)<sub>2</sub>, tem-se  $\varepsilon_2^1 = -\nu_{12} \varepsilon_1^1$ . Usando (16.6)<sub>1</sub> essa relação fica  $\varepsilon_2^1 = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1$ . Comparando com (16.8), identifica-se  $S_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$ .

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{44} & 0 \\ 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}$$

Em forma simbólica essas relações são

$$\varepsilon^1 = \mathbf{S}\sigma^1 \quad \text{e} \quad \gamma^1 = \mathbf{S}_c\tau^1, \quad (16.17)$$

onde  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{S}_c$  são as **matrizes de flexibilidade reduzidas** para deformações coplanares e transversais respectivamente.

As formas inversas das relações são

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{23} & 0 \\ 0 & G_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}. \quad (16.18)$$

Em notação simbólica tem-se

$$\sigma^1 = \mathbf{Q}\varepsilon^1 \quad \text{e} \quad \tau^1 = \mathbf{C}_c\gamma^1. \quad (16.19)$$

$\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{C}_c$  são as **matrizes de rigidez reduzidas**, com as componentes de  $\mathbf{Q}$  dadas por

$$Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (16.20)$$

### Lâmina isotrópica sob estado plano de tensões

Um material isotrópico é tal que  $E_1 = E_2 = E_3 = E$ ,  $\nu_{ij} = \nu$ , e  $G_{ij} = G$  para  $i, j = 1, 2, 3$ . Então as componentes da rigidez reduzida para o material isotrópico são obtidas de (16.20):

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad \text{e} \quad Q_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G. \quad (16.21)$$

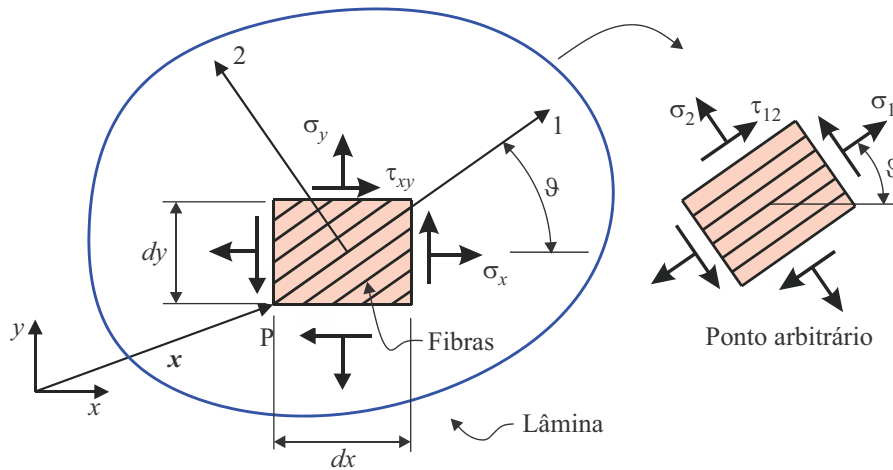


Figura 16.4: Estado de tensões planas num ponto arbitrário P, em dois sistemas de coordenadas.

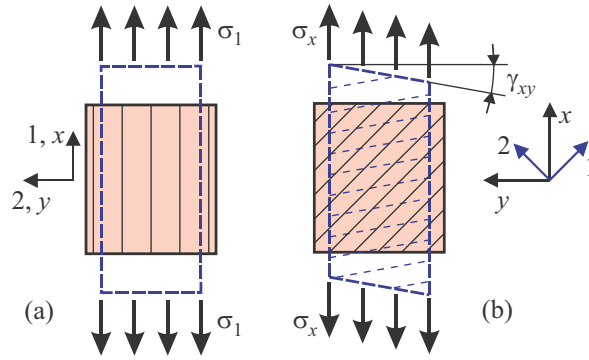


Figura 16.5: Efeito do acoplamento extensão-cisalhamento. (a) Tensão uniaxial na direção principal da lâmina; (b) numa direção oblíqua.

### Transformação da relação tensão-deformação cisalhante transversal

Substituindo as relações das transformações de tensão e de deformação transversais, eqs. (16.23)<sub>2</sub> e (16.25) na relação constitutiva, eq. (16.19)<sub>2</sub>, obtém-se a relação constitutiva nas direções oblíquas  $xyz$ :

$$\begin{aligned} \tau^1 &= \mathbf{C}_c \gamma^1, \\ \mathbf{T}_c \gamma^x &= \mathbf{C}_c \mathbf{T}_c \gamma^x, \\ \tau^x &= \underbrace{\mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{C}_c \mathbf{T}_c}_{\mathbf{C}_c^x} \gamma^x \implies \boxed{\tau^x = \mathbf{C}_c^x \gamma^x} \end{aligned} \quad (16.34)$$

em forma aberta se tem

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \text{ onde} \\ \mathbf{C}_c^x &= \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} \cos^2 \vartheta + C_{55} \sin^2 \vartheta & (C_{55} - C_{44}) \sin \vartheta \cos \vartheta \\ (C_{55} - C_{44}) \sin \vartheta \cos \vartheta & C_{55} \cos^2 \vartheta + C_{44} \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16.35)$$

## 16.2 Análise de um laminado

Um laminado arbitrário, constituído por diversas lâminas, cada uma com seu material, sua espessura e orientação, tem comportamento tal que sua análise só pode ser feita levando em conta simultaneamente os efeitos de membrana e flexão. Então, o campo de deslocamentos num ponto arbitrário de coordenadas  $(x, y, z)$  do laminado plano pode ser expresso em termos dos deslocamentos generalizados coplanares  $u^o = u^o(x, y)$  e  $v^o = v^o(x, y)$ , do deslocamento transversal de flexão  $w = w(x, y)$  e das rotações do segmento normal  $\theta_x = \theta_x(x, y)$  e  $\theta_y = \theta_y(x, y)$ . Esses deslocamentos generalizados são os mesmos utilizados no Capítulos 15, e são visualizados na Figura 15.2.

O campo de deslocamento num ponto arbitrário então fica modelado por<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^o(x, y) + z \theta_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v^o(x, y) + z \theta_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \quad (16.36)$$

<sup>3</sup>O modelo sendo descrito é conhecido como modelo de primeira ordem, ou modelo de Mindlin, por envolver apenas potência 1 em  $z$ . Uma simplificação pode ser obtida, bastante útil para obter soluções analíticas, é o modelo de Kirchhoff, ou Teoria Clássica de Laminação, em que  $\theta_x = -\partial w / \partial x$  e  $\theta_y = -\partial w / \partial y$ . Modelos mais sofisticados que o de Mindlin são os modelos de ordem superior [72] e os de camada discreta.

Tomando as relações deformação-deslocamento lineares obtêm-se as deformações coplanares e cisalhantes na forma  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^o + z \boldsymbol{\kappa}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$ , detalhadas em (15.43), em termos das deformações de **membrana**  $\boldsymbol{\varepsilon}^o$  e da variação de **curvatura**  $\boldsymbol{\kappa}$ . Os **esforços** normais  $\mathbf{N}$ , cortantes  $\mathbf{Q}$  e de momentos  $\mathbf{M}$  no laminado são os mesmos da teoria de placa isotrópicas, definidos em (15.13)-(15.16), na página 423, e ilustrados nas Figuras 15.4 e 15.5.

As tensões em uma lâmina arbitrária  $l_k$  são representadas como um estado de tensões em que  $\sigma_z = 0$ . Define-se um sistema de coordenadas do laminado,  $xyz$ , que naturalmente é distinto do sistema principal de cada lâmina, 123. Para uma lâmina arbitrária  $k$ , a relação tensão-deformação coplanar é aquela mostrada na eq.(16.32),  $\boldsymbol{\sigma}^x = \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\varepsilon}^x$ . Usando a decomposição da deformação na forma  $\boldsymbol{\varepsilon}^x = \boldsymbol{\varepsilon}^o + z \boldsymbol{\kappa}$ , tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{l_k} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (16.37)$$

As tensões cisalhantes transversais em cada lâmina  $k$  são dadas pelas eqs.(16.34)-(16.35),  $\boldsymbol{\tau}^x = \mathbf{C}_c^x \boldsymbol{\gamma}^x$ , isto é,

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{l_k} = \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{l_k}. \quad (16.38)$$

Nota-se que nesse modelo, tanto as deformações generalizadas  $\boldsymbol{\varepsilon}^o$  e  $\boldsymbol{\kappa}$ , quanto as cisalhantes transversais,  $\boldsymbol{\gamma}^x$ , são independentes de  $z$ . Substituindo as tensões na definição dos esforços, eqs.(15.13), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{l_k} dz, \\ \mathbf{M} &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{l_k} z dz, \\ \mathbf{Q} &= \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{-H/2}^{H/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{l_k} dz, \end{aligned} \quad (16.39)$$

onde  $z_{k-1}$  e  $z_k$  são as cotas  $z$  da superfícies inferior e superior da lâmina  $k$ . As cotas de um laminado são ilustradas na Figura 16.6.

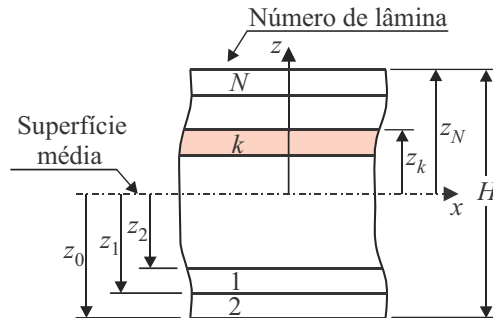


Figura 16.6: Notações para a numeração e cotas das lâminas de um laminado.

Substituindo as tensões de (16.37) e (16.38) em (16.39) tem-se as relações entre os esforços e as

### Laminado de uma lâmina isotrópica

Observa-se que a formulação acima, sintetizada na (16.43), incorpora como caso particular, os materiais homogêneo-isotrópicos, como o modelo de placa do Capítulo 15. Nesse caso, de uma única lâmina isotrópica, as propriedades de engenharia são isotrópicas, de forma que  $E_1 = E_2 = E$ ,  $G_{12} = G$  e  $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ . Como o material é isotrópico, a matriz de rigidez rotacionada deve ser igual à matriz original, isto é,  $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}$ . Simplificando a relação (16.43) tem-se

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (16.44)$$

A matriz de rigidez do laminado, definida em (16.43), pode ser expressa como

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} A & \nu A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu A & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)A}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)D}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (16.45)$$

onde  $A = EH/(1 - \nu^2)$  e  $D = EH^3/12(1 - \nu^2)$ , que são as chamadas **constantes de rigidez extensional e flexural de uma placa isotrópica**. Observa-se que a matriz de acoplamento é nula ( $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ), de forma que a relação torna-se desacoplada, isto é, o comportamento extensional fica definido de forma separada do comportamento de flexão, isto é:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \quad (16.46)$$

Isso é o que permite que se possa resolver os dois problemas de forma independente. Isso foi feito no texto, nos capítulos anteriores, desenvolvendo uma formulação de elementos finitos de membrana (estado plano de tensões), baseada na primeira das equações acima, e uma outra formulação, de flexão de placa, baseada na segunda equação. Entretanto, num problema de placa ou casca de material composto, de laminado anisotrópico não simétrico, qualquer formulação deve levar em conta os dois efeitos, de forma acoplada, como em (16.43). Isso é visto na próxima seção.

## 16.3 Análise de compostos por elementos finitos – 1ª ordem

### 16.3.1 Flexão estática de placas compostas

A formulação padrão do MEF para placas de material composto laminado, baseado no modelo cinemático de Mindlin, é idêntica à formulação para placas homogêneo-isotrópicas, desde que alguns aspectos sejam observados:

1. Ambos os comportamentos, de membrana (EPT) e de flexão, devem ser incorporados simultaneamente, devido ao acoplamento natural que esse tipo de material apresenta em seu comportamento;
2. A matriz constitutiva deve ser aquela adequada ao laminado anisotrópico, isto é, eqs.(16.43).
3. Isso é suficiente para a determinação dos deslocamentos nodais a partir do PTV, como pode ser visto de forma resumida na presente seção.
4. O pós-processamento para a determinação das deformações e tensões deve ser feito de forma adequada às características do material laminado.

$$\mathbf{u}(r, s)_h^e = \mathbf{N}^e(r, s)\mathbf{U}^e. \quad (16.52)$$

$\mathbf{N}(r, s)$  é uma matriz de ordem  $5 \times 5N_{ne}$  e  $\mathbf{U}^e$  é um vetor com os  $N_{gle} = 5N_{ne}$  deslocamentos nodais do elemento.

### 16.3.2 Matriz de rigidez e vetor força do elemento

Parte-se das relações **deformações-deslocamentos lineares**

$$\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{array} \right\}_h = \left\{ \begin{array}{c} u_{,x}^o \\ v_{,x}^o \\ u_{,y}^o + v_{,x}^o \\ \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{y,x} + \theta_{x,y} \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \theta_y + w_{,y} \\ \theta_x + w_{,x} \end{array} \right\}, \quad (16.53)$$

onde a notação  $u_{,x}^o$  significa  $\partial u^o / \partial x$ , etc. Substituem-se as aproximações dos deslocamentos, eq.(16.50), para obter as aproximações para as deformações na superfície de referência do elemento “e”:

$$\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{array} \right\}_h^e = \left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} \psi_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \psi_{N_{ne},x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{1,y} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \psi_{N_{ne},y} & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{1,y} & \psi_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \psi_{N_{ne},y} & \psi_{N_{ne},x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{1,x} & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \psi_{N_{ne},x} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{1,y} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{N_{ne},y} \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{1,y} & \psi_{1,x} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \psi_{N_{ne},y} & \psi_{N_{ne},x} \end{array} \right] \mathbf{U}^e \quad (16.54)$$

Nó 1
Nó 2
Nó  $N_{ne}$

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\}_h^e = \left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & \psi_{1,y} & 0 & \psi_1 & \cdots & 0 & 0 & \psi_{N_{ne},y} & 0 & \psi_{N_{ne}} \\ 0 & 0 & \psi_{1,x} & \psi_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \psi_{N_{ne},x} & \psi_{N_{ne}} & 0 \end{array} \right] \mathbf{U}^e.$$

Nó 1
Nó 2
Nó  $N_{ne}$

Em notação compacta ficam:

$$\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{array} \right\}_h^e = \mathbf{B}_f^e(x, y)\mathbf{U}^e \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\}_h^e = \mathbf{B}_c^e(x, y)\mathbf{U}^e, \quad \text{com } \mathbf{U}^e = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{no} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_{ne}} \end{array} \right\} \quad (16.55)$$

As **funções peso** no elemento são

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y)_h^e = \left\{ \hat{u}^o, \hat{v}^o, \hat{w}, \hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y \right\}^T, \quad (16.56)$$

e são aproximadas por:

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y)_h^e = \mathbf{N}^e(x, y)\hat{\mathbf{U}}^e. \quad (16.57)$$



### 16.3.3 Cálculo das tensões

Após a solução do sistema algébrico global,  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ , tem-se os deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$  em todo o modelo. Em cada elemento  $e$ , podem-se identificar seus deslocamentos nodais  $\mathbf{U}^e$ . As **tensões coplanares em cada lâmina**,  $\boldsymbol{\sigma}^x = \{\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}\}^T$ , são calculadas em cada ponto de integração, ou em qualquer outro ponto do elemento, e em cada lâmina  $l_k$ , utilizando as relações deformação-deslocamentos e a relação constitutiva:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}^o(x, y) \\ \boldsymbol{\kappa}(x, y) \end{array} \right\}^e &= \mathbf{B}_f^e(x, y) \mathbf{U}^e, \\ \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{xl_k}(x, y, z) &= \overline{\mathbf{Q}}^k(x, y) \{ \boldsymbol{\varepsilon}^o(x, y)^e + z \boldsymbol{\kappa}(x, y)^e \}, \\ \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{ll_k}(x, y, z) &= \mathbf{T}^k(x, y) \boldsymbol{\sigma}^{xl_k}(x, y, z). \end{aligned} \quad (16.64)$$

onde  $\mathbf{T}^k$  é a matriz de rotação da lâmina  $l_k$ , conforme eq.(16.24).  $z$  é uma cota pertencente à lâmina, isto é,  $z_{k-1} \leq z \leq z_k$ .  $\boldsymbol{\sigma}^{xl_k}$  e  $\boldsymbol{\sigma}^{ll_k}$  são as componentes de tensão em relação às direções do elemento,  $xy$ , e as direções principais de ortotropia da lâmina, 12, respectivamente. As tensões  $\boldsymbol{\sigma}^{ll_k}$  é que são, em seguida, utilizadas nos critérios de falha do material.

As **tensões cisalhantes transversais** podem ser obtidas também pela relação constitutiva, isto é,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{yz}(x, y) \\ \gamma_{xz}(x, y) \end{array} \right\}^e &= \mathbf{B}_c^e(x, y) \mathbf{U}^e, \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \tau_{yz}(x, y, z) \\ \tau_{xz}(x, y, z) \end{array} \right\}^{l_k} &= \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^{l_k} \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{yz}(x, y) \\ \gamma_{xz}(x, y) \end{array} \right\}, \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \tau_{13}(x, y, z) \\ \tau_{23}(x, y, z) \end{array} \right\}^{l_k} &= \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\text{sen } \vartheta \\ \text{sen } \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}^{l_k} \left\{ \begin{array}{c} \tau_{yz}(x, y) \\ \tau_{xz}(x, y) \end{array} \right\}^{l_k}. \end{aligned} \quad (16.65)$$

Entretanto, sabe-se que esses resultados são estimativas extremamente pobres para o cisalhamento transvesal num laminado sob flexão. Isso ocorre principalmente devido ao fato de que o modelo cinemático prevê deformações cisalhantes transversais uniformes ao longo da espessura, como pode ser visto na eq.(16.53), o que é bastante distinto da variação verdadeira. Essa distribuição uniforme de deformações não satisfaz sequer as condições de contorno de tensões nas faces do laminado e não é satisfatória sequer para materiais homogêneo-isotrópicos. Entretanto, o modelo apresenta resultados satisfatórios, dentro de certos limites, para o campo de deslocamentos e de tensões coplanares.

Em vez desse processo, o processo mais consagrado para obter o cisalhamento transversal é pela integração das equações diferenciais de equilíbrio, proposto por Chaudhuri [19] em 1987. Assim, consideram-se as duas primeiras equações locais de equilíbrio (2.25), página 32, com ausência de forças de corpo e de inércia. Nota-se que  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$  podem ser expressos como integrais em  $z$  das derivadas das tensões coplanares. Assim, numa lâmina genérica  $l_k$  tem-se para  $\tau_{xz}^{l_k}$ :

$$\tau_{xz}^{l_k}(x, y, z) - \tau_{xz}^{l_k}(x, y, z_{k-1}) = - \int_{z=z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y})^{l_k} dz, \quad \text{para } z_{k-1} \leq z \leq z_k. \quad (16.66)$$

O processo de integração considera o equilíbrio de tensões atuantes em duas lâminas contiguas, no ponto da superfície de contato entre elas. A tensão cisalhante na superfície inferior de uma lâmina deve ser igual à mesma componente no topo da superfície superior da lâmina anterior. Isso é resumido da seguinte forma para todas as componentes que devem ser idênticas devido ao equilíbrio local:

### 16.3.4 Resultados para laminado simétrico

Consideramos um problema teste que consiste em uma placa laminada quadrada, simplesmente apoiada nas quatro bordas, de lados  $a = b = 200$  mm, com espessura total  $H$ , de três lâminas ortotrópicas de espessuras e materiais idênticas, orientadas em  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  em relação ao eixo  $x$  global. Portanto, a sequência de empilhamento é simétrica. O sistema de coordenadas tem origem num dos vértices. A carga é distribuída, transversal, dada por

$$q_z(x, y) = q \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{b} \right). \quad (16.72)$$

Esse problema é interessante para verificações numéricas porque tem solução exata para o modelo de Mindlin [32][72]. As propriedades da lâmina usadas nos cálculos foram as seguintes:

$$\begin{aligned} E_1 &= 175 \cdot 10^5 \text{ MPa}, & G_{12} &= G_{13} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ MPa}, \\ E_2 &= 7 \cdot 10^3 \text{ MPa}, & G_{23} &= 1,4 \cdot 10^3 \text{ MPa}, \\ \nu_{12} &= \nu_{23} = 0,25. \end{aligned} \quad (16.73)$$

Considerou-se uma sequência de três malhas regulares de elementos finitos de flexão de placas laminadas conforme o modelo de Mindlin, com funções Lagrangeano biquadráticas de 9 nós em todos as componentes de deslocamento generalizado  $(u^o, v^o, w, \theta_x, \theta_y)$ . De fato, como o laminado é simétrico em relação à superfície de referência, não está sujeito a cargas coplanares, e o problema é linear, os deslocamentos de membrana são nulos.

A Figura 16.7 mostra resultados comparativos das tensões cisalhantes transversais obtidas diretamente pela relação constitutiva, (16.43), e por integração (seção 16.3.3), para malhas uniformes de  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  e  $8 \times 8$  elementos, além dos valores exatos. A figura mostra a variação das tensões ao longo da espessura do laminado. Os valores foram extraídos no meio da borda do laminado, na coordenada  $(x, y) = (0, a)$ . O fator de cisalhamento usado nos cálculos de MEF e na solução exata foi  $k_c = 0,75$ . Os valores brutos na posição  $(x, y, z) = (0, a, 0)$  são mostrados na Tabela 16.1. Nessa tabela também são mostrados o deslocamento transversal máximo e a tensão normal  $\sigma_x$  no centro do laminado, na superfície superior, posição  $(x, y, z) = (a/2, a/2, +H/2)$ .

Observando a Figura 16.7, observa-se que os tanto os resultados por relação constitutiva quanto os de integração aparentam convergência pontual. Entretanto, mesmo os valores da solução exata obtida por relação constitutiva não são coerentes fisicamente, embora sejam coerentes e exatos do ponto de vista do modelo de Mindlin. Trata-se de uma deficiência do modelo em relação ao comportamento físico do corpo. As soluções obtidas por integração são qualitativamente coerentes, satisfazendo ambas as condições de contorno e a continuidade inter-laminar das tensões. No presente problema, o processo de integração termina na superfície superior,  $z = +H/2$ , satisfazendo à condição de contorno nula ali. Isso não é garantido em todo problema. De fato, pode-se provar que essa satisfação ocorrerá sempre que a solução, exata ou aproximada, satisfizer exatamente as equações de equilíbrio local. É o que ocorre no presente problema, em que a solução de MEF apresenta solução coplanar nula, o que significa uma aproximação que satisfaz o equilíbrio coplanar. Essa situação é a mesma em todo problema linear de laminado simétrico, submetido apenas a carregamento transversal. Nos casos distintos, de laminado não simétrico, ou com carga coplanar, em que a solução aproximada não satisfaz exatamente o equilíbrio diferencial, o processo de integração, ao seu final, produzirá tensões não condizentes com a condição de contorno na superfície superior.

O efeito do fator  $k_c$  de cisalhamento é visto na Figura 16.8 usando resultados exatos da teoria de flexão de Mindlin [32]. São calculados o deslocamento transversal e a tensão normal  $\sigma_x$  no centro da placa, na coordenada  $(x, y, z) = (100, 100, +H/2)$  mm. São testadas espessuras  $H = 1, 5$  e  $40$  mm, o que resulta aspectos de placa  $a/H = 200, 40$  e  $5$ , sendo a primeira uma placa bastante delgada e a terceira bastante espessa. Os valores são normalizados pelos resultados obtidos com  $k_c = 1$  (ausência de correção). Como esperado, o efeito do valor usado no fator de cisalhamento torna-se bastante pronunciado conforme a placa se torna espessa. De fato, esse efeito é o mesmo em placas homogêneo-isotrópicas. A Tabela 16.2 mostra os resultados brutos para uma carga transversal senoidal como em (16.73), definida por  $q = 0,001$  MPa.

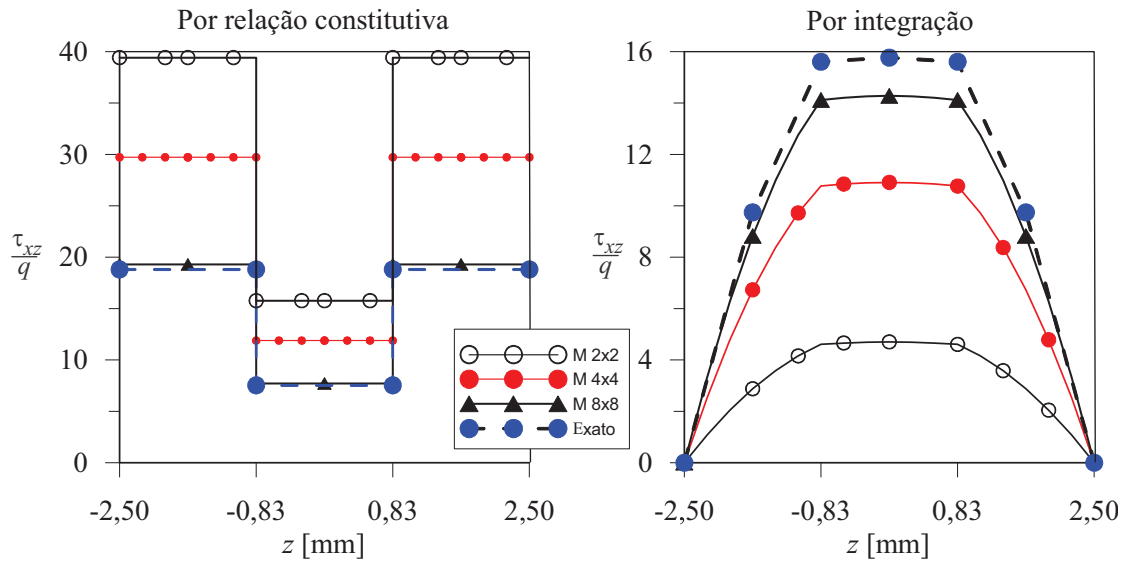


Figura 16.7: Tensões cisalhantes transversais obtidas pela relação constitutiva e por integração, para malhas uniformes de  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  e  $8 \times 8$  elementos Lagrangeanos de 9 nós para modelo de Mindlin. Placa laminada quadrada.  $k = 0,75$ .

Tabela 16.1: Deslocamento máximo e tensão normal no centro de placa laminada, e tensão cisalhante no meio da borda  $x = 0$ , e  $z = 0$ , para diferentes malhas uniformes.  $H = 5$  mm e  $k = 0,75$ ,  $q = 0,1$  MPa.

Malha	$w_{\max}$ [mm]	$\sigma_x$ [MPa]	$\tau_{xz}^c$ [MPa]	$\tau_{xz}^i$ [MPa]
$2 \times 2$	0,695499	71,42	1,57625	0,470309
$4 \times 4$	0,80009	86,70	1,18827	1,09069
$8 \times 8$	0,810927	86,76	0,771894	1,42751
Exato	0,819684	85,88	0,753	1,57602

Esse tipo de comparação mostra que a escolha do fator de cisalhamento é importante na modelagem de elementos finitos. Existe na literatura uma profusão de modelos e valores sugeridos para o fator  $k_c$ . A referência [72] mostra um levantamento parcial dos principais modelos. Uma dificuldade inicial na determinação desse fator é que ele busca fazer a equivalência de uma dada grandeza (tensão num certo ponto da espessura, energia de deformação, primeira frequência natural, etc), entre o valor obtido pela relação constitutiva e um outro valor obtido fazendo alguma hipótese sobre o campo cinemático exato no problema. Isso mesmo nas placas homogêneo-isotrópicas. Assim, podem-se listar:

1. Modelo de Timoshenko, adaptado de problemas de vigas, mas que gera os mesmos valores em laminados homogêneo-ortotrópicos. O valor  $k_c = 2/3$  é obtido de forma a que a tensão em  $z = 0$  na placa seja corrigida para aquela obtida por uma variação quadrática da tensão cisalhante transversal, considerada que seria a distribuição exata.
2. Modelo de Reissner [90], gera valores em laminados homogêneo-ortotrópicos. O valor  $k_c = 5/6$  é obtido de maneira a forçar uma equivalência entre a energia de deformação devido à relação constitutiva e à da integração transversal.
3. Modelo de Mindlin [74], que faz uma equivalência dinâmica e chega a  $k_c = \pi^2/12$ .
4. Cowper [29], [34], faz um levantamento de diversos procedimentos para vigas de Timoshenko de diversas formas de seção transversal.

5. Para laminados, porém, a situação é mais complexa, induzindo a necessidade de diferentes valores para  $k_c$ , conforme o tipo de carregamento. Além disso, uma correção adequada requer pelo menos dois fatores,  $k_x$  e  $k_y$ , um em cada uma das direções ortogonais (se o laminado for ortogonal). Neste sentido, Yang [112] determinou o fator  $k_c$  para o caso dinâmico enquanto Whitney [108] determinou expressões para o cálculo de  $k_x$  e  $k_y$  para o caso estático em laminados ortotrópicos não-simétricos.

O que se observa é que a equivalência usada na determinação de  $k_c$  torna o ajuste adequado, na melhor das hipóteses, apenas àquela situação. Isso torna necessário uma escolha cuidadosa. Por exemplo, um problema dinâmico pode se beneficiar do fator de Mindlin, ou de Yang, já num estático, o fator de Timoshenko, Reissner ou de Whitney. Nota-se que as tensões obtidas se tornarão diferentes em cada caso, principalmente em laminados mais espessos.

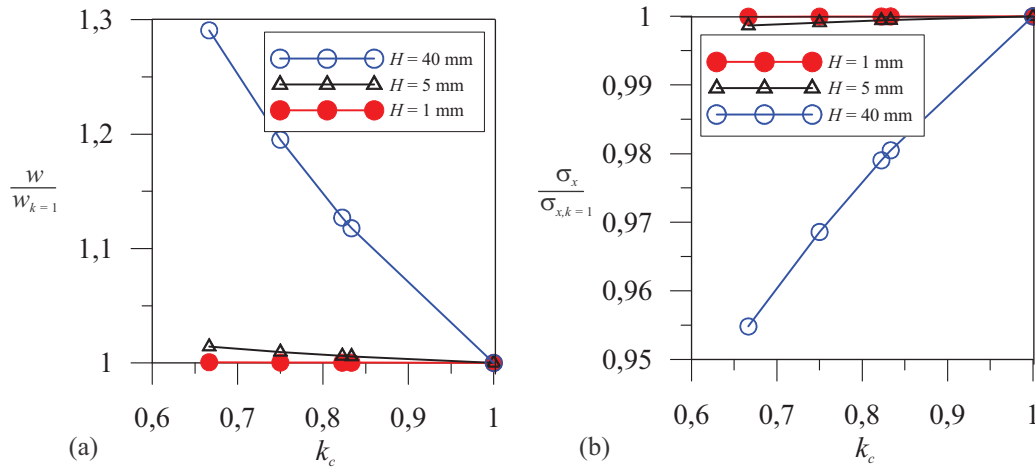


Figura 16.8: Resultados exatos da teoria de flexão de Mindlin para um laminado. Deslocamento transversal e tensão normal  $\sigma_x$  no centro da placa, na coordenada  $(x, y, z) = (100, 100, +H/2)$  mm. Valores para diferentes espessuras  $H$  e fator  $k_c$  de cisalhamento.

Tabela 16.2: Valores analíticos para deslocamento máximo e tensão normal no centro de placa laminada, em  $z = H/2$ , para diferentes malhas uniformes.  $q = 0,001$  MPa.

$k$	$H = 1$ mm		$H = 5$ mm		$H = 40$ mm	
	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$
2/3	0,987461629	21,5443317	0,00823564	0,858414	0,0000545019	0,0112445
3/4	0,9872667	21,54472401	0,00819684	0,858799	0,0000504662	0,0114065
$\pi^2/12$	0,98712932	21,545000554	0,00816948	0,859072	0,0000475902	0,0115294
5/6	0,987110779	21,5450378	0,00816579	0,859109	0,0000471999	0,0115466
1	0,9868768707	21,545508712	0,00811919	0,859573	0,0000422286	0,0117764

### 16.3.5 Segundas derivadas das funções de forma

A determinação das primeiras derivadas foi detalhada na seção 8.7.2 para elementos triangulares, e na seção 8.8.6 para elementos quadriláteros.

Consideremos o vetor de funções de forma nodais  $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_{ne}}\}$  do elemento, definido em termos das coordenadas intrínsecas  $(r, s)$ . Devido ao mapeamento, tem-se que  $r = r(x, y)$  e  $s = s(x, y)$ , onde  $(x, y)$  são as coordenadas físicas no elemento em relação a um sistema global de coordenadas. Então, cada função  $\psi_{no}$ , pode ser escrita como uma função implícita: (eliminamos aqui o subscrito 'no' para simplificar a notação)

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} & \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} & \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \end{bmatrix}. \quad (16.82)$$

Nota-se que os termos calculados em (16.81) são  $\{\psi_{,xr}, \psi_{,yr}\}$  e  $\{\psi_{,xs}, \psi_{,ys}\}$ , respectivamente. Por outro lado, de (16.77), a relação entre os gradientes de uma função contínua qualquer  $\phi$  é dada por  $\nabla_r \phi = \mathbf{J} \nabla_x \phi$ . Então,

$$\nabla_r \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \mathbf{J} \nabla_x \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \nabla_r \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \mathbf{J} \nabla_x \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (16.83)$$

cujas inversas produzem as segundas derivadas que buscamos:

$$\nabla_x \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \mathbf{J}^{-1} \nabla_r \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \nabla_x \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \mathbf{J}^{-1} \nabla_r \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (16.84)$$

Os termos calculados à esquerda são  $\{\psi_{,xx}, \psi_{,xy}\}$  e  $\{\psi_{,xy}, \psi_{,yy}\}$ , respectivamente. O procedimento geral de cálculo para as segundas derivadas das funções de forma é sumarizado por

O procedimento de cálculo consiste em

- (a) Determinar  $\psi_{,x}$  e  $\psi_{,y}$  de (8.175);
- (b) Calcular  $\mathbf{J}_{,r}$  e  $\mathbf{J}_{,s}$  de (16.82);
- (c) Calcular  $\psi_{,rr}$ ,  $\psi_{,rs}$  e  $\psi_{,ss}$  das funções de aproximação; (16.85)
- (d) Determinar  $\psi_{,xr}$ ,  $\psi_{,yr}$ ,  $\psi_{,xs}$  e  $\psi_{,ys}$  de (16.81), e
- (e) compor  $\nabla_r(\psi_{,x})$  e  $\nabla_r(\psi_{,y})$ ;
- (e) Determinar  $\{\psi_{,xx}, \psi_{,xy}\}$  e  $\{\psi_{,xy}, \psi_{,yy}\}$  de (16.84).

Essa determinação é feita para cada termo do vetor de funções nodais  $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_{ne}}\}$  do elemento. De posse desses valores num determinado ponto da superfície de referência do laminado, as derivadas da matriz de deformação  $\mathbf{B}_f$  são computadas, conforme (16.54), e usando (16.68) e (16.69), as derivadas das tensões coplanares numa cota através da espessura podem ser calculadas.

## 16.4 Frequências naturais e carregamentos dinâmicos

A presente seção pode ser vista após o estudo dos Capítulos 17-19 onde é apresentada uma introdução à análise dinâmica pelo MEF. Tomando alguns dos pressupostos detalhados ali, inicialmente consideremos o PTV para placa, na forma estática vista até esse ponto do texto, e usamos o Princípio de D'Alembert para incorporar as forças de inércia como forças de corpo:

$$\int_{\Omega} \left\{ \left\{ \begin{matrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}} \end{matrix} \right\} + \mathbf{Q}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} -q \hat{w} d\Omega + \underbrace{\int_{\Omega} \left\{ F_x \hat{u} + F_y \hat{v} + F_z \hat{w} + F_{mx} \hat{\theta}_x + F_{my} \hat{\theta}_y \right\} d\Omega}_I = 0 \quad (16.86)$$

$F_x, F_y, F_z, F_{mx}$  e  $F_{my}$  são as forças de origem inercial definidas por: (ver uma dedução detalhada em Mendonça [72])