

## Capítulo 4

# Macromecânica de uma lâmina

O termo *comportamento macromecânico* refere-se ao comportamento da lâmina apenas quando as propriedades mecânicas aparentes médias, em sua forma macroscópica, são consideradas. Essas propriedades são obtidas (1) diretamente de ensaios com corpos de prova, feitos com aquela lâmina, ou (2) de forma aproximada a partir das propriedades termomecânicas dos componentes da lâmina, as fibras e a matriz. O segundo processo é um dos objetos de estudo da micromecânica da lâmina, tratado no Capítulo 3. Conhecidas estas propriedades mecânicas, que são propriedades do material, estima-se agora o comportamento de uma lâmina sob um conjunto de carregamentos combinados, e geralmente aplicados fora das direções principais de ortotropia do material. Este é o objeto do estudo macromecânico de uma lâmina, visto neste capítulo.

A restrição básica da teoria apresentada é assumir um comportamento elástico-linear para os materiais tratados. Essa hipótese é bastante acurada até o ponto de ruptura nas lâminas de *vidro-E/epóxi* e *boro/epóxi*, exceto no cisalhamento, em que a aproximação é pobre. Entretanto, a linearidade encontrada é geralmente superior à dos metais, e a teoria, como descrita, é amplamente usada na engenharia.

### 4.1 Relação tensão-deformação para materiais elástico-lineares

A relação tensão-deformação de um material elástico-linear é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{sim.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.1)$$

que, em forma compacta, será representada por:

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{C}^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1, \quad (4.2)$$

onde “*sim.*” indica “simétrica”;  $\sigma_i$  e  $\tau_{ij}$  com  $i, j = 1, 2, 3$  são as **tensões normais** e **cisalhantes**, respectivamente;  $\varepsilon_i$  e  $\gamma_{ij}$  com  $i, j = 1, 2, 3$  são **deformações normais** e **cisalhantes**, respectivamente; e  $C_{ij}$ , com  $i, j = 1, \dots, 6$  são os elementos da **matriz de rigidez do material**  $\mathbf{C}^1$ . O expoente 1 indica o sistema de coordenadas usado, definido pelos eixos cartesianos 1 – 2 – 3.

Se existem dois planos ortogonais de simetria de propriedades no material, existirá necessariamente simetria relativa ao terceiro plano mutuamente ortogonal aos outros dois. A relação tensão-deformação

nas direções principais do material simplifica-se para:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ sim. & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (4.3)$$

Um material com essas características de tríplice simetria é dito **ortotrópico**. As direções principais de propriedades do material são paralelas às intersecções dos três planos ortogonais de simetria do material. Um material ortotrópico possui pelo menos um sistema de coordenadas em cada ponto em que as tensões normais provocam apenas deformações normais; as tensões cisalhantes provocam apenas deformações cisalhantes na direção do carregamento. Essa característica pode ser verificada na equação (4.3). A matriz  $\mathbf{C}^1$  possui apenas 9 constantes independentes; além disso, ela é não-singular, o que significa que pode ser invertida, resultando na relação deformação-tensão:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ sim. & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.4)$$

que em notação matricial fica:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \mathbf{S}^1 \boldsymbol{\sigma}^1, \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{S}^1$  é a **matriz de flexibilidade do material**. Se o material for ortotrópico, a relação constitutiva fica:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ sim. & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

#### 4.1.1 Efeito térmico e higroscópico

Deve-se notar que o estado de tensões num ponto não é o único fator capaz de gerar deformações no material. A dilatação devido a uma variação de temperatura e de umidade são efeitos importantes para grande variedade problemas estruturais. O efeito térmico é crucial em estruturas de materiais compostos laminados e o efeito da absorção de umidade é importante em compostos baseados em polímeros.

A relação linear entre incremento de temperatura e deformação de origem térmica, num material anisotrópico, é dada em forma matricial por

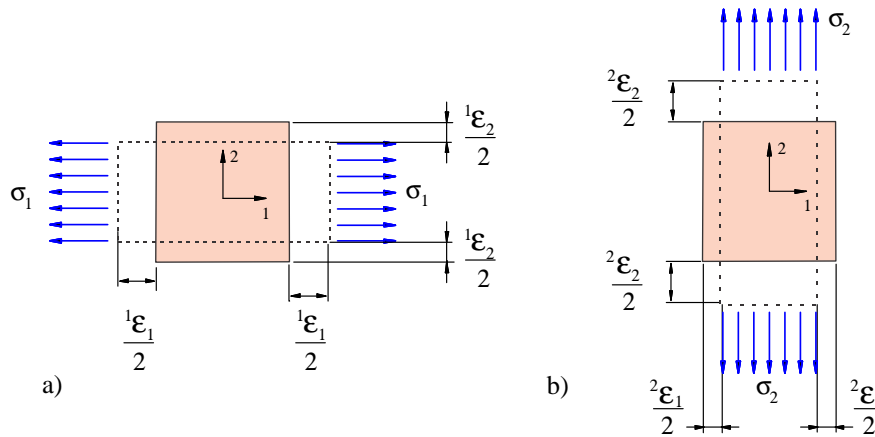
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

onde  $\alpha_{ij}$  são as componentes do tensor de coeficientes de dilatação térmica do material em relação aos eixos  $O12$ , dados em  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ . Note que aqui usamos a deformação cisalhante de engenharia, de forma que as matrizes acima não são componentes de tensores de segunda ordem.  $\Delta T = T - T_0$ , onde  $T$  é a temperatura de trabalho e  $T_0$  a temperatura de referência, geralmente a temperatura de cura em

$$\mathbf{S}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

onde:

1.  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  são os módulos de Young nas direções principais 1, 2 e 3;
2.  $\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$  são os seis valores de coeficientes de Poisson, obtidos da relação entre a deformação na direção  $j$  quando um elemento diferencial de volume é carregado apenas na direção  $i$ , isto é, com  $\sigma_i = \sigma$  e todas as outras tensões nulas. Estes coeficientes foram definidos nas eqs.(3.1) e (3.2) do Capítulo 3, página 48, e são ilustrados na Figura 4.1.
3.  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  e  $G_{31}$  são os módulos de elasticidade transversal cisalhante, nos planos 1-2, 2-3, e 3-1, respectivamente.



**Figura 4.1:** Deformações e efeito de Poisson associados aos ensaios de tração nas direções principais de ortotropia de uma lâmina.

Para estabelecer a matriz (4.11), considera-se a relação (4.6) com o seguinte procedimento. Suponha um ensaio de tração uniaxial em que se apliquem apenas tensões na direção principal 1, isto é, nas direções das fibras. Então, coloca-se em (4.6) as seguintes tensões:  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$ . O resultado do produto com a matriz serão as seguintes deformações extensionais no corpo de provas:

$${}^1\varepsilon_1 = S_{11}\sigma, \quad {}^1\varepsilon_2 = S_{21}\sigma \quad \text{e} \quad {}^1\varepsilon_3 = S_{31}\sigma, \quad (4.12)$$

onde o índice 1 à esquerda indica que as três componentes de deformação são provenientes de uma tensão uniaxial na direção 1 no corpo de provas como ilustrado na Figura 4.1. Neste ponto deve-se considerar a significação física das constantes de engenharia. Sabe-se que num ensaio uniaxial

$$E_1 = \frac{\sigma}{{}^1\varepsilon_1}. \quad (4.13)$$

**Material transversalmente isotrópico no plano 1-3**, ou em relação ao eixo 2:

$$\boxed{C_{11}^k = C_{33}^k, \quad C_{12}^k = C_{23}^k, \quad C_{44}^k = C_{66}^k, \quad 2C_{55}^k = C_{11}^k - C_{13}^k} \quad (4.22)$$

**Material transversalmente isotrópico no plano 1-2**, ou em relação ao eixo 3:

$$\boxed{C_{11}^k = C_{22}^k, \quad C_{13}^k = C_{23}^k, \quad C_{44}^k = C_{55}^k, \quad 2C_{66}^k = C_{11}^k - C_{12}^k} \quad (4.23)$$

Nota-se que as relações para a isotropia no eixo 2, (15.74), podem ser obtidas simplesmente as relações da isotropia no eixo 2, (15.72)-(15.73), e alternando os índices  $44 \leftrightarrow 55$  e  $1 \leftrightarrow 2$ . As relações para a isotropia em relação ao eixo 3 são obtidas permutando os índices  $55 \leftrightarrow 66$  e  $2 \leftrightarrow 3$  em (15.72)-(15.73). Adicionalmente, qualquer relação obtida para o material isotrópico no plano 2-3, pode ser diretamente convertida para as outras duas direções simplesmente alternando os índices como indicado.

## 4.2 Lei de Hooke para material ortotrópico sob EPT

Considere que uma lâmina no plano 1-2, como ilustrado na Figura 3.1, esteja sob um *estado plano de tensão* (EPT). Diz-se que um corpo está sob um estado de tensões plano se cada ponto está sujeito a tensões apenas num único plano, no caso o plano 1-2, isto é, apenas  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$  são não nulos e

$$\sigma_3 = 0, \quad \tau_{23} = 0, \quad \tau_{31} = 0, \quad \forall (x, y, z) \in \Omega. \quad (4.24)$$

Usando estas relações, parte das componentes de deformação em (4.11) torna-se:

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2, \quad \gamma_{23} = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_{31} = 0, \quad (4.25)$$

enquanto as demais ficam:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.26)$$

ou, em forma matricial,

$$\varepsilon^1 = \mathbf{S}\sigma^1, \quad (4.27)$$

onde  $\mathbf{S}$  é, agora, a chamada **matriz de flexibilidade reduzida** da lâmina ortotrópica sob estado plano de tensão, em relação aos eixos principais. Essa relação pode ser invertida resultando na relação tensão-deformação reduzida:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}} \quad (4.28)$$

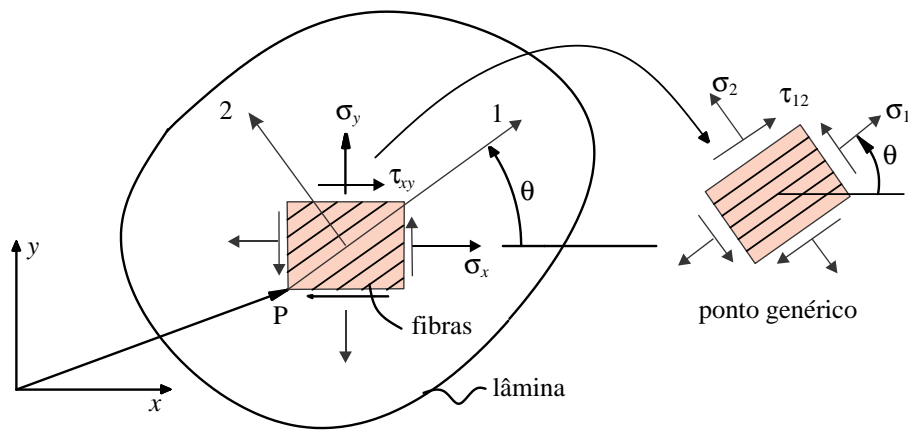
que ainda pode ser posta em forma simbólica como:

$$\sigma^1 = \mathbf{Q}\varepsilon^1, \quad (4.29)$$

onde  $Q_{ij}$  são os termos da **matriz de rigidez reduzida**. Em termos das constantes de engenharia, os valores de  $Q_{ij}$  são obtidos invertendo a matriz à direita de (4.26), o que produz:

$$\boxed{Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{66} = G_{12}} \quad (4.30)$$

Note que, agora, o comportamento de uma lâmina ortotrópica carregada em seu próprio plano, isto é,



**Figura 4.2:** Tensões coplanares num ponto genérico de coordenadas  $P$  de uma lâmina. Rotação positiva do sistema de eixos  $0xy$  para o sistema  $012$ , e correspondente rotação das tensões.

e  $\sigma^1$  em colunas, denotadas por  $\sigma^x$  e  $\sigma^1$ , tem-se a expressão da transformação plana das tensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.36)$$

ou ainda:

$$\sigma^x = \mathbf{T}^{-1} \sigma^1. \quad (4.37)$$

$\mathbf{T}$  é a **matriz de transformação**, dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

A matriz inversa de  $\mathbf{T}$ , é obtida simplesmente usando  $-\theta$  em lugar de  $\theta$  em  $\mathbf{T}$ , o que resulta numa simples troca de sinais nos termos não-quadráticos em  $\sin \theta$  fora da diagonal. Observe que esta é a chamada transformação de tensões. No Capítulo 2 foi apresentada uma outra forma de dedução destas fórmulas, mas as eqs.(4.37) são as mesmas já mostradas em (2.26), e as operações são as mesmas representadas pelo círculo de Mohr na Resistência dos Materiais.

As **deformações** transformam-se da mesma forma que as tensões, desde que a deformação cisalhante  $\gamma/2$  seja usada em vez da deformação de engenharia  $\gamma$ . Então:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}, \quad (4.39)$$

ou:

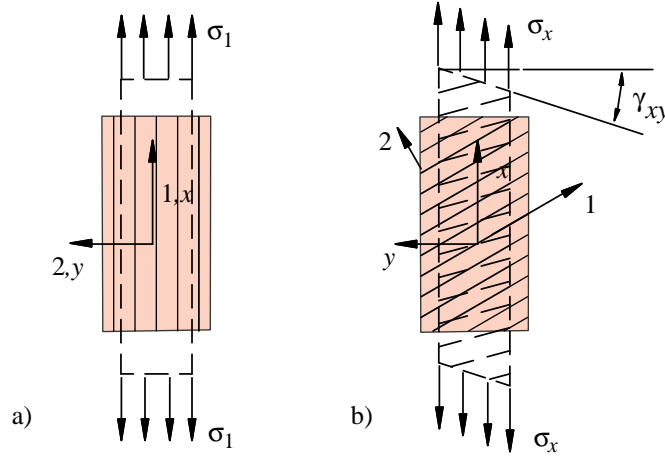
$$\varepsilon^{x/2} = \mathbf{T}^{-1} \varepsilon^{1/2}. \quad (4.40)$$

As notações “ $x/2$ ” e “ $1/2$ ” são usadas para indicar que a deformação cisalhante utilizada é  $\gamma_{xy}/2$  ou  $\gamma_{12}/2$ , respectivamente, enquanto no resto do texto os sobrescritos  $x$  e  $1$  indicam que se usa  $\gamma_{xy}$  e  $\gamma_{12}$ , respectivamente.

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta, \\
\bar{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta, \\
\bar{S}_{66} &= 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\
\bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\
\bar{S}_{16} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\
\bar{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Os termos  $\bar{Q}_{16}$  e  $\bar{Q}_{26}$ , tanto quanto  $\bar{S}_{16}$  e  $\bar{S}_{26}$ , representam o chamado **efeito de acoplamento extensão-cisalhamento**. Esse acoplamento não existe em materiais ortotrópicos carregados numa direção principal ou em materiais isotrópicos, em que  $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = 0$ . Um carregamento extensional uniaxial dado por  $\sigma_x = \sigma_1$  produzirá apenas as componentes de deformações extensionais  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ , como mostrado na Figura 4.3a.

Caso a lâmina ortotrópica seja carregada numa direção  $x$  diferente de uma das direções principais, como na Figura 4.3b, a tensão normal  $\sigma_x$  produz não apenas deformações extensionais  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ , mas também um cisalhamento  $\gamma_{xy}$ . Isto é representado pela terceira linha da eq.(4.54), que se reduz a  $\gamma_{xy} = \bar{S}_{16}\sigma_x$ . Note em (4.55) que  $\bar{S}_{16}$  se anula para  $\theta = 0^\circ$  e  $90^\circ$ , fazendo a lâmina se comportar como na Figura 4.3a, sem o acoplamento extensão-cisalhamento. Nesse caso, apesar de fisicamente a lâmina ser a mesma, tendo sido alterada apenas a direção do carregamento, ela é chamada de **ortotrópica angular** ou **lâmina oblíqua**. O fato de a matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  ser cheia significa que o esforço de cálculo na resolução de problemas com lâminas ortotrópicas angulares é o mesmo observado se ela fosse anisotrópica.



**Figura 4.3:** Efeito do acoplamento extensão-cisalhamento.

#### 4.4 Constantes de engenharia para lâminas angulares em EPT

As eqs.(4.26) mostram os termos da matriz de flexibilidade  $\mathbf{S}$  para a lâmina ortotrópica nas direções principais, sob um estado plano de tensões. Os quatro termos de  $\mathbf{S}$  são definidos pelas quatro constantes independentes de engenharia, em relação aos eixos principais 0123, ou seja,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  e  $\nu_{12}$ . Para um **corpo anisotrópico** carregado num sistema  $0xyz$  qualquer, surge a ideia de definir constantes de engenharia segundo esses eixos. Uma vez que a matriz  $\mathbf{S}$  em (4.4) é cheia, há necessidade de definir novas constantes de engenharia para serem adicionadas àquelas vistas para um corpo ortotrópico sob estado plano de tensões.

De forma geral, para um estado triaxial de tensões, foram definidas por Lekhnitsky os **coeficientes de influência mútua** para caracterizar o acoplamento extensão-cisalhamento num material anisotrópico. Os coeficientes são de dois tipos:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{11} &= \frac{1}{E_x} = S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta, \\
\bar{S}_{22} &= \frac{1}{E_y} = S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta, \\
\bar{S}_{66} &= \frac{1}{G_{xy}} = 4 \left( S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - \frac{1}{2} S_{66} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\
\bar{S}_{12} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\
\bar{S}_{16} &= \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\
\bar{S}_{26} &= \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

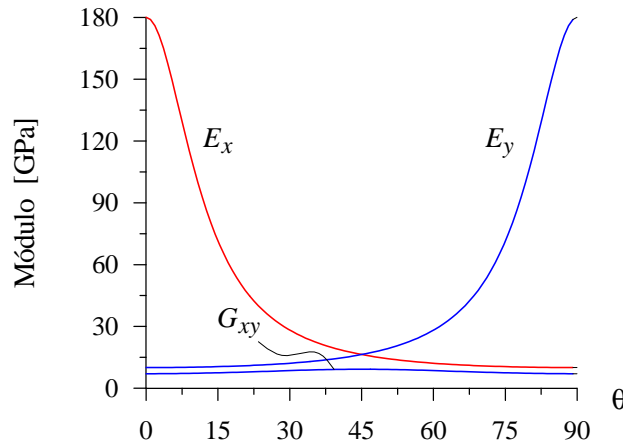
Os termos da matriz  $\mathbf{S}$  são em seguida tomados das eqs.(4.26) em termos das constantes de engenharia nas direções principais da lâmina,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  e  $\nu_{12}$ . Logo, é possível exprimir as constantes aparentes  $E_x$ ,  $E_y$ , etc. em função de  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  e  $\theta$  para um laminado ortotrópico angular sob estado plano de tensões como:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_x &= \left[ \frac{1}{E_1} \cos^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{E_2} \sin^4 \theta \right]^{-1}, \\
\Rightarrow E_y &= \left[ \frac{1}{E_1} \sin^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{E_2} \cos^4 \theta \right]^{-1}, \\
\Rightarrow G_{xy} &= \left[ 2 \left( \frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{12}} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \right]^{-1}, \\
\Rightarrow \nu_{xy} &= E_x \left[ \frac{\nu_{12}}{E_1} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right], \\
\Rightarrow \eta_{xy,x} &= E_x \left[ \left( \frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin \theta \cos^3 \theta - \left( \frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta \right], \\
\Rightarrow \eta_{xy,y} &= E_y \left[ \left( \frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta - \left( \frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin \theta \cos^3 \theta \right].
\end{aligned} \tag{4.67}$$

A variação dos módulos de elasticidade para uma lâmina de grafite/epóxi é ilustrada na Figura 4.4. Nota-se a simetria de  $E_x$  e  $E_y$  em torno de  $\theta = 45^\circ$ . É interessante observar que, para algumas combinações de  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  e  $\nu_{12}$ , existe uma faixa para o ângulo  $\theta$  onde  $E_x > E_1$  e  $E_x > E_2$ . Isso ocorre caso  $G_{12} > [(1 + \nu_{12}) E_1/2]$ . Existe também um outro ângulo  $\theta$  onde  $E_x < E_1$  e  $E_x < E_2$ , que ocorre caso  $G_{12} < [(E_1/E_2 + \nu_{12}) E_1/2]$ . (Veja alguns detalhes no Exercício 4.7).

## 4.5 Rotação da matriz de rigidez em torno do eixo 3

Na seção 4.3, eq.(4.51), foram deduzidos os termos da matriz reduzida de rigidez  $\bar{\mathbf{Q}}$  referente a um sistema de coordenada  $0xyz$ , resultante de uma rotação em torno do eixo 3 do sistema principal 123, em uma lâmina ortotrópica sob um estado plano de tensões. Pode-se, analogamente, obter a matriz de rigidez  $\mathbf{C}^x$  completa, para um estado triaxial de tensões qualquer, em relação ao sistema  $0xyz$ , aplicando uma rotação em torno do eixo 3 na matriz  $\mathbf{C}^1$ , definida no sistema 0123, para um material



**Figura 4.4:** Variação dos módulos de elasticidade  $E_x$ ,  $E_y$  e  $G_{xy}$  com o ângulo de orientação  $\theta$  de uma lâmina ortotrópica. A lâmina tem as seguintes propriedades de engenharia nas direções principais:  $E_1 = 180$  GPa,  $E_2 = 10$  GPa,  $G_{12} = 7$  GPa e  $\nu_{12} = 0,3$ . ( $G_{xy}$  tem máximo em  $\theta = 45^\circ$ ).

anisotrópico. Assim, parte-se da relação tensão-deformação no sistema  $O123$ , eq.(4.1):

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{C}^1 (\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \Delta T \boldsymbol{\alpha}^1). \quad (4.68)$$

onde  $\Delta T$  é a variação de temperatura e  $\boldsymbol{\alpha}^1$  é o vetor das componentes de constante de dilatação térmica do material nas direções 123.  $\Delta T \boldsymbol{\alpha}^1$  é a deformação de origem térmica.  $\Delta T \boldsymbol{\alpha}^1$  é mostrado em (4.10) para o caso particular em que as direções  $O123$  são principais de ortotropia. Procura-se a relação no sistema  $0xyz$ :

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{C}^x \boldsymbol{\varepsilon}^x \quad (4.69)$$

As **componentes de tensão** se transformam em uma rotação em torno do eixo 3 por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

Em notação matricial, se tem  $\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{T}_r \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{T}_r^T$ . Efetuando as operações e exprimindo os termos das matrizes  $\boldsymbol{\sigma}^x$  e  $\boldsymbol{\sigma}^1$  em colunas, denotadas por  $\boldsymbol{\sigma}^x$  e  $\boldsymbol{\sigma}^1$ , tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^1, \quad (4.71)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação. A inversa desta rotação é:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

A matriz nesta equação é a matriz de transformação  $\mathbf{T}$ .  $\theta$  é o ângulo de rotação, medido em torno do eixo  $z$ , a partir do eixo  $x$  até o eixo 1, positivo quando anti-horário como ilustrado na Figura 4.2. Para as componentes de um estado plano de tensões sob transformação plana, a relação (4.72) reduz-se àquela mostrada em (4.37).

As **deformações**  $\boldsymbol{\varepsilon}^1$  transformam-se de forma análoga, pela mesma matriz  $\mathbf{T}$ , porém com uma



(4.59) permitindo a obtenção das constantes de engenharia, de forma análoga a (4.67).

Note que as expressões (4.78) e (4.80) podem ser usadas para obter facilmente a matriz  $\mathbf{C}^x$  para uma rotação  $\theta$  em torno do eixo 1, bastando substituir os índices da notação de Voigt da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} 1 \longrightarrow 2, & 4 \longrightarrow 5, \\ 2 \longrightarrow 3, & 5 \longrightarrow 6, \\ 3 \longrightarrow 1, & 6 \longrightarrow 4. \end{array} \quad (4.81)$$

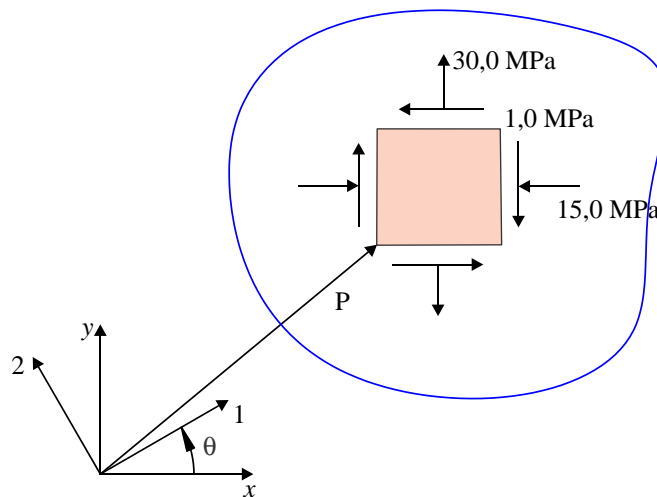
Da mesma forma, uma rotação de  $\mathbf{C}^1$  em torno do eixo 2 é obtida pela substituição dos índices em (4.78) e (4.79):

$$\begin{array}{ll} 1 \longrightarrow 3, & 4 \longrightarrow 6, \\ 2 \longrightarrow 1, & 5 \longrightarrow 4, \\ 3 \longrightarrow 2, & 6 \longrightarrow 5. \end{array} \quad (4.82)$$

### Exemplo 1 – Determinação das tensões nas direções principais

Considere um ponto P numa lâmina, sujeito às componentes de tensão como ilustradas na Figura 4.5. Para  $\theta = 30^\circ$  calcule as tensões e as deformações nas direções principais do material. A lâmina tem as seguintes propriedades elásticas:

$$\begin{array}{ll} E_1 = 39,0 \text{ GPa}, & G_{12} = 4,0 \text{ GPa}, \\ E_2 = 8,3 \text{ GPa}, & \nu_{12} = 0,26. \end{array}$$



**Figura 4.5:** Estado de tensões num ponto genérico P de uma lâmina, para o Exemplo 1.

*Solução:*

Da Figura 4.5, o estado de tensões no sistema de eixos  $0xyz$  é:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15,0 \\ 30,0 \\ -1,0 \end{Bmatrix} \text{ MPa.}$$

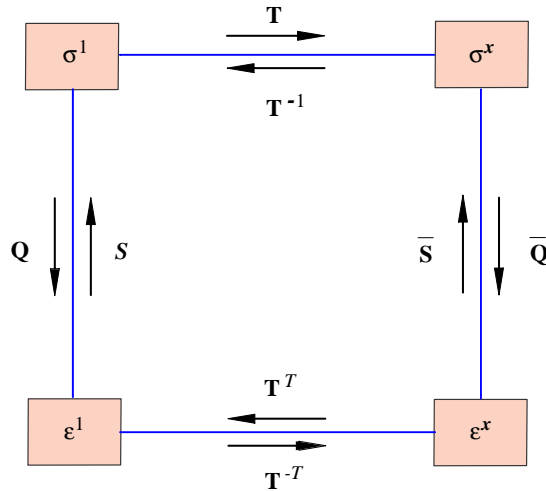
onde  $\bar{\mathbf{Q}}$  foi calculado a partir de (4.51) usando  $\mathbf{Q}$ , e cujos valores vêm de (4.30) como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,57 & 2,189 & 0 \\ 2,189 & 8,421 & 0 \\ 0 & 0 & 4,0 \end{bmatrix} 10^3 \text{ MPa.}$$

Dessa forma, retorna-se aos valores originais de tensão:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \begin{Bmatrix} -15,0 \\ 30,0 \\ -1,0 \end{Bmatrix} \text{ MPa.}$$

Nesse exemplo tornam-se claras as diversas interdependências entre as grandezas  $\boldsymbol{\sigma}^1$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^x$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^1$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^x$ . Como ilustrado na Figura 4.6, dado qualquer um destes itens, os outros três podem ser obtidos usando relações constitutivas ou de transformação de coordenadas. Além disso, existem sempre duas seqüências de cálculo para a obtenção de um item a partir de outro. Cabe ao calculista a escolha do caminho mais curto.



**Figura 4.6:** Fluxograma de cálculo para tensões e deformações numa lâmina nas direções 1-2 e  $x$ - $y$ . O termo à origem da flecha é igual à matriz indicada vezes o termo ao final da flecha.

## 4.6 Resistência de uma lâmina ortotrópica

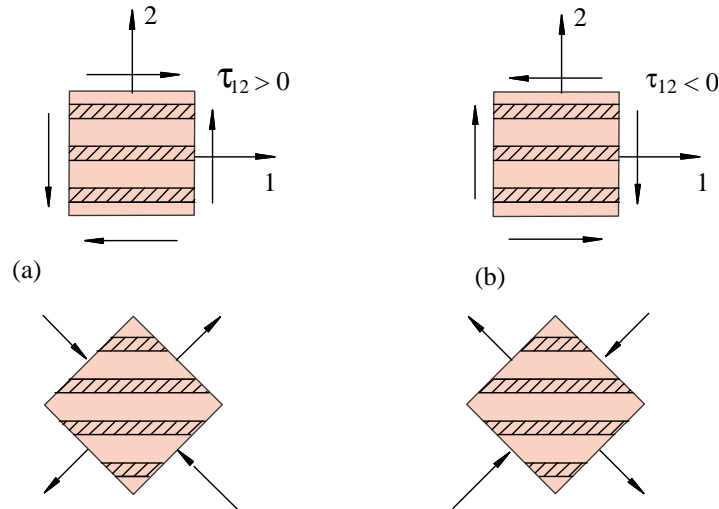
O problema considerado consiste em calcular, aproximadamente, a carga de falha de uma lâmina ortotrópica, submetida a um estado plano de tensões representado por  $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ , partindo de resistências obtidas de ensaios simples realizados em algumas poucas direções. Alguns dos motivos que tornam essa proposição razoavelmente problemática são os seguintes:

- É irrealizável a experimentação das características de uma lâmina em todas as direções, uma vez que estas envolvem o campo dos números reais nas seis dimensões de tensão, e  $\theta$  na faixa de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ . São, então, realizados testes em algumas direções notáveis; as mais óbvias são as direções principais do material.
- Nos **materiais isotrópicos**, os critérios de falha se baseiam em tomar as componentes de tensão aplicadas segundo um sistema qualquer  $0xyz$ , determinar as tensões máximas no conforme o

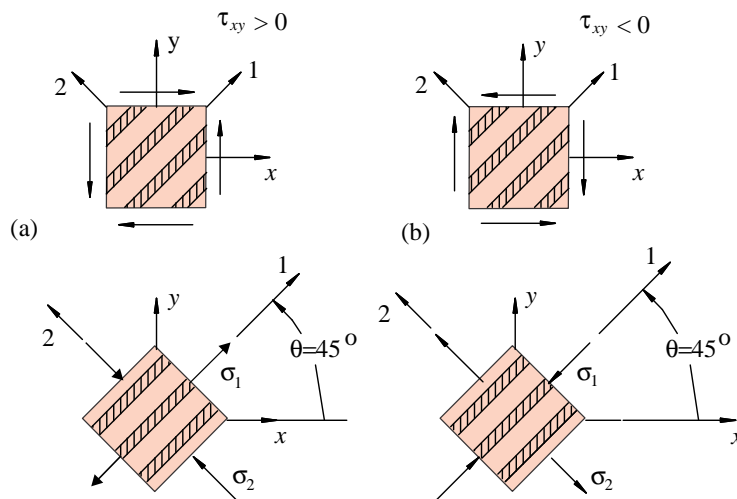
**círculo de Mohr**, e compará-las a um único valor de resistência obtido em ensaio uniaxial do material. Entretanto, nos **materiais anisotrópicos**, esse processo não funciona.

De forma geral, as lâminas compostas mais usadas possuem resistência à tração e à compressão diferentes. Como definido na Seção 3.1, utiliza-se a seguinte notação para referência aos valores de resistência de uma lâmina nas direções principais:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t, X_c = \text{designam a resistência à tração e à compressão na direção 1,} \\ Y_t, Y_c = \text{designam a resistência à tração e à compressão na direção 2,} \\ S = \text{designa a resistência ao cisalhamento no plano 1-2.} \end{array} \right.$$



**Figura 4.7:** (a) Tensões cisalhantes positivas e (b) negativas nas direções principais.



**Figura 4.8:** (a) Tensões cisalhantes positivas e (b) negativas na direção  $0xy$ , quando  $\theta = 45^\circ$ .

Deve-se notar que mesmo materiais com diferentes comportamentos à tração e à compressão apresentam idênticos valores de resistência ao cisalhamento, seja esse positivo ou negativo. Observa-se pela Figura 4.7 que, seja  $\tau_{12}$  positivo ou negativo, o elemento retangular a  $45^\circ$  é submetido ao mesmo estado de tensões normais de tração e compressão derivados do cisalhamento nos dois casos. Dessa forma, a resistência  $S$  independe do sinal. Essa independência não ocorre para uma direção  $x$  de carregamento qualquer, diferente da direção 1. Isso pode ser facilmente percebido analisando a Figura 4.8, onde  $\theta = 45^\circ$ . Transformando  $\tau_{xy} > 0$  para o sistema principal, têm-se  $\sigma_1 > 0$  e  $\sigma_2 < 0$ . Para

$\tau_{xy} < 0$  temos  $\sigma_1 < 0$  e  $\sigma_2 > 0$ . Uma vez que a tendência é que  $Y_c > Y_t$  para as lâminas unidirecionais, o caso  $\tau_{xy} > 0$  é mais favorável, levando a valores de resistência ao cisalhamento no sistema  $Oxy$  maiores que no caso  $\tau_{xy} < 0$ .

## 4.7 Critérios de falha para uma lâmina ortotrópica

O problema de previsão de falhas numa lâmina ortotrópica é idêntico, até certo ponto, ao observado na lâmina isotrópica: *como prever a falha, para o caso de uma lâmina submetida a um estado biaxial ou triaxial de tensões, usando dados de resistência obtidos em experimentos uniaxiais?* As teorias apresentadas se restringem ao caso biaxial de tensões, e algumas podem ser vistas como adaptações dos critérios de falha usados em materiais isotrópicos, como é o caso da teoria da máxima tensão e da teoria da máxima deformação vistas a seguir. Serão vistas também as teorias mais sofisticadas e precisas de Hill e de Tsai-Wu. Outros critérios foram propostos ou estão sendo desenvolvidos; critérios determinantes de superfícies de falha que representam o término do comportamento elástico linear sob um estado multiaxial de tensões, quer o material possua ou não uma capacidade de plastificação. Alguns destes critérios são de uso corrente e encontram-se bem estabelecidos na literatura, como em Jones [105]. Como regra geral, todos estes critérios se caracterizam por ignorar qualquer consideração sobre o processo físico envolvido na falha. Consideram-se apenas os efeitos macroscópicos médios verificáveis em corpos de prova padrão, sendo que apenas alguns modos de falha facilmente identificáveis são definidos. Estados simples de tensões são aplicados nos corpos de prova, e valores limites de tensão são obtidos quando as falhas definidas são detectadas. Ignora-se o processo de falha em si; que a falha final ocorre após um processo de acúmulo gradual de dano que se inicia já na aplicação do carregamento. Atualmente, a formação e o acoplamento do crescimento das micro trincas não podem ser feitos de forma confiável e simples o suficiente para uso corrente. Assim, adota-se um procedimento experimental simples, baseado em apenas 6 parâmetros de resistência, definidos no Capítulo 3:

$X, Y, Z$	▷ tensões limites nas direções 1, 2 e 3, respectivamente.
$S, S_{13}, S_{23}$	▷ tensões limites de cisalhamento nos planos 12, 13 e 23, respectivamente.

Discussões sobre critérios de falha multiaxial para compostos podem ser vistas em Hashin [86], Wu [220], Chamis [54], Kaminski [112], Sendeckyj [177] e Franklin [72]. Geralmente, os critérios para materiais anisotrópicos são baseados ou “inspirados” em critérios anteriormente desenvolvidos para prever a transição entre os comportamentos elástico e plástico de metais. Logo, também para compostos, os critérios fazem uso da chamada “superfície de falha” no espaço hexadimensional das componentes de tensão, geralmente nas direções principais do material.

As teorias então predizem que a falha ocorrerá se o estado de tensões aplicado definir um ponto externo ou sobre a superfície de falha. A região interna define segurança.

Nota-se que a aplicação de qualquer critério de falha para material composto necessita, como primeiro passo, da transformação das tensões calculadas para as direções principais do material.

### 4.7.1 Teoria da tensão máxima

Aparentemente esta teoria foi apresentada em 1920 por Jenkins [104] como uma extensão da teoria da tensão normal máxima, também chamada Teoria de Rankine, usada para materiais isotrópicos.

Essa teoria afirma que **as tensões aplicadas nas direções principais do material devem ser menores que as resistências nas respectivas direções de carga**. Isso significa que, para tração,  $\sigma_1$  deve ser inferior a  $X_t$ , pois do contrário, espera-se que a lâmina falhe por ruptura das lâminas. Este é o que se denomina **modo de falha 1**. De forma análoga, se  $\sigma_2 > Y_t$  a lâmina falha por separação entre as fibras pela ruptura da matriz, naquilo que se chama **modo de falha 2**. Esses dois modos de falha podem ser assim caracterizados mesmo se a lâmina não for constituída por fibras unidirecionais. O aspecto fundamental é a existência das duas direções principais de propriedades 1 e 2. Adicionalmente, o **modo de falha 3** é caracterizado por uma falha da matriz quando a tensão cisalhante aplicada exceder o valor admissível do material.

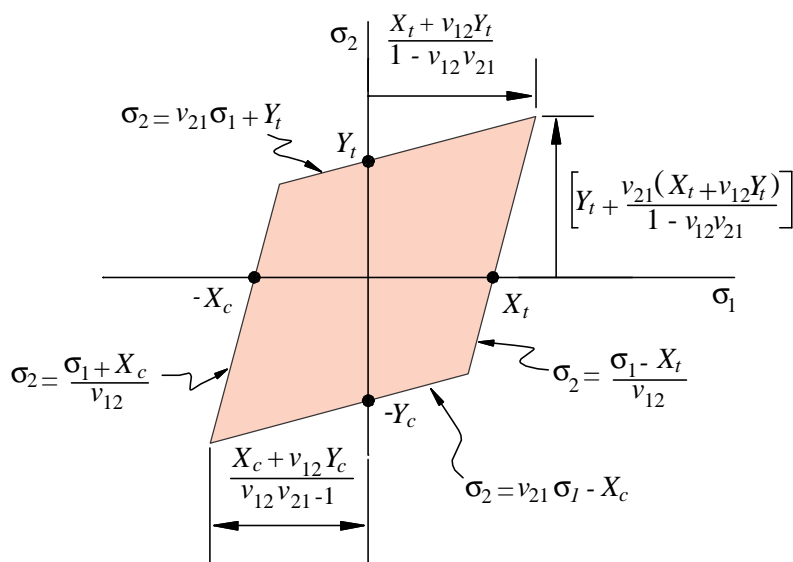
Os limites de segurança e os correspondentes modos de falha podem ser sumarizados da seguinte forma:

$$\begin{array}{l}
 \text{Falhas em tração} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 < X_{\varepsilon_t} \rightarrow \text{modo de falha 1} \\ \varepsilon_2 < Y_{\varepsilon_t} \rightarrow \text{modo de falha 2} \end{array} \right. \\
 \text{Falhas em compressão} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 > -X_{\varepsilon_c} \rightarrow \text{modo de falha 1} \\ \varepsilon_2 > -Y_{\varepsilon_c} \rightarrow \text{modo de falha 2} \end{array} \right. \\
 \text{Falhas por cisalhamento} \quad |\gamma_{12}| < S_\varepsilon \rightarrow \text{modo de falha 3}
 \end{array} \quad (4.86)$$

$X_{\varepsilon_t}$ ,  $X_{\varepsilon_c}$ ,  $Y_{\varepsilon_t}$  e  $Y_{\varepsilon_c}$  são os máximos valores de deformação extensionais nas direções principais 1 e 2, em tração e compressão, obtidos em ensaios uniaxiais.  $S_\varepsilon$  é o máximo valor de deformação cisalhante no plano 1-2. Uma vez que os ensaios e dados tabelados usam as resistências em termos de tensões  $X$ ,  $Y$  etc., pode-se fazer:

$$X_\varepsilon = S_{11} X = \frac{X}{E_1}, \quad Y_\varepsilon = S_{22} Y = \frac{Y}{E_2} \quad \text{e} \quad S_\varepsilon = S_{33} S = \frac{S}{G_{12}}. \quad (4.87)$$

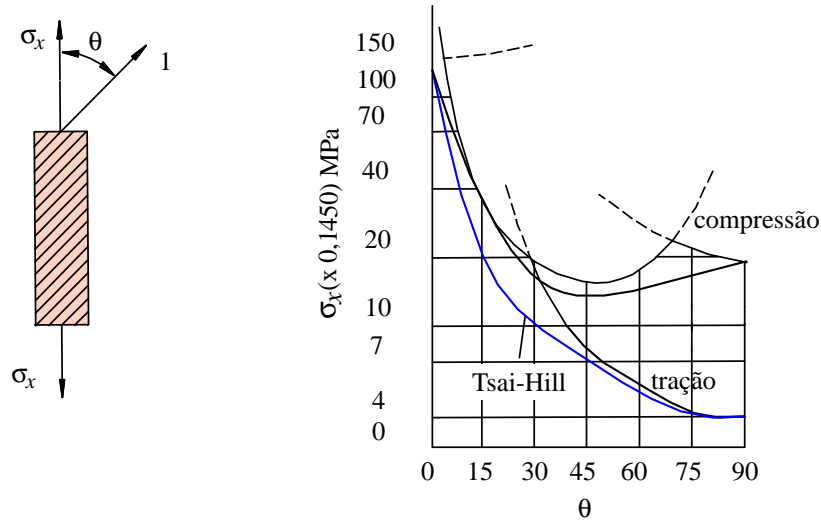
Possivelmente, esse é um dos pontos que explicam a inexatidão de alguns dos resultados obtidos por esse método. As curvas tensão-deformação das lâminas usuais não são em todos os casos lineares até a ruptura, como está implícito nas relações (4.87). Esse desvio da linearidade é mais acentuado no cisalhamento de matrizes poliméricas.



**Figura 4.10:** Região de segurança no plano  $\sigma_1 \times \sigma_2$  pelo critério da deformação máxima.

Se essas relações forem usadas, pode-se tomar as relações tensão-deformação e aplicá-las a (4.86), juntamente com (4.87):

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2) < \frac{X_t}{E_1} & \text{se } \varepsilon_1 > 0, \\ \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2) > -\frac{X_c}{E_1} & \text{se } \varepsilon_1 < 0, \end{cases}$$



**Figura 4.11:** Aplicação da teoria da máxima deformação para uma lâmina de vidro/epóxi [33]. (Para comparação, são indicados também os valores obtidos pela teoria de Tsai-Hill.)

de tensões, a expressão do critério de von Mises é

$$\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \right] + 3 (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \sigma_{EQ}^2, \quad (4.92)$$

onde  $\sigma_{EQ}$  é o valor da tensão uniaxial equivalente ao estado triaxial de tensões solicitando o material no ponto considerado. Hill modificou esse enunciado e propôs o seguinte critério:

$$F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1. \quad (4.93)$$

Esta expressão pode ser reordenada para a forma

$$\begin{aligned} \Rightarrow (G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 \\ - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1. \end{aligned} \quad (4.94)$$

A igualdade a 1 indica o limiar de falha, enquanto valores menores que 1 indicam que o material está em segurança sob aquele estado de tensões, nas direções principais do material. As seis constantes,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$  e  $N$ , são propriedades do material relacionadas à sua resistência e devem ser obtidas experimentalmente. Apesar de o critério de Hill ter sido inspirado no de von Mises, existem diferenças conceituais importantes. O critério de von Mises é relacionado à energia de distorção do corpo, considerando que o escoamento ocorre sem mudança de volume. Contudo, em materiais anisotrópicos a distorção angular não pode ser desacoplada da dilatação, e a eq.(4.94), embora se aproxime bastante dos dados experimentais, não se relaciona diretamente à energia de distorção.

A eq.(4.94) pode ainda ser colocada numa outra forma, bastante usada em textos de mecânica do contínuo. A forma inteiramente equivalente é:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{1T} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}^1 = 1, \quad \text{onde} \quad \mathbf{P} = 2 \begin{bmatrix} H + G & -H & -G & & & \\ -H & H + F & -F & & & \\ -G & -F & G + F & & & \\ & & & 2L & & \\ & & & & 2M & \\ & & & & & 2N \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

e  $\sigma^1 = \{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3; \tau_{23}; \tau_{31}; \tau_{12}\}^T$ .

Deve-se lembrar que (4.94) aplica-se no âmbito do comportamento elástico-linear. Uma vez que os parâmetros  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$  e  $N$  são propriedades do material, busca-se um relacionamento com o conjunto padrão de propriedades diretamente obtidas dos experimentos, i.e., com os valores de resistência coplanar da lâmina,  $X_t$ ,  $X_c$ ,  $Y_t$ ,  $Y_c$  e  $S$ , e transversal,  $Z_t$ ,  $Z_c$ ,  $S_1$  e  $S_2$ . (Estes últimos são as resistências à tração e à compressão na direção 3 e ao cisalhamento nos planos 1-3 e 2-3). Esse correlacionamento é feito da seguinte maneira: primeiro aplica-se sobre um corpo de provas um estado de tensões onde apenas  $\tau_{12}$  é não-nulo. A eq.(4.94) reduz-se então a:

$$2N = \frac{1}{S^2}. \quad (4.96)$$

Continuando de forma análoga, se apenas  $\sigma_1$  agir sobre o corpo,

$$G + H = \frac{1}{X^2}. \quad (4.97)$$

Se apenas  $\sigma_2$  agir sobre o corpo,

$$F + H = \frac{1}{Y^2}. \quad (4.98)$$

E aplicando-se apenas  $\sigma_3$  na lâmina, obtém-se:

$$F + G = \frac{1}{Z^2}. \quad (4.99)$$

Os valores para  $F$ ,  $G$  e  $H$  são obtidos resolvendo as eqs.(4.97)–(4.99), donde resulta:

$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}, \quad 2G = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}, \quad 2F = -\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}. \quad (4.100)$$

Aplicando-se apenas  $\tau_{13}$  e  $\tau_{23}$ , um por vez, (4.94) resulta em

$$\boxed{2M = \frac{1}{S_1^2} \quad \text{e} \quad 2L = \frac{1}{S_2^2}} \quad (4.101)$$

Reunindo as constantes das eqs.(4.96), (4.100) e (4.101), a expressão (4.94) resulta no critério de

Hill para um estado triaxial de tensões na forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\sigma_3^2}{Z^2} - \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_1 \sigma_2 - \left( \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_2 \sigma_3 \\ & - \left( \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_1 \sigma_3 + \frac{\tau_{23}^2}{S_2^2} + \frac{\tau_{13}^2}{S_1^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1. \end{aligned}} \quad (4.102)$$

### Lâmina transversalmente isotrópica sob EPT – Critério de Tsai-Hill

Considere uma lâmina como a da Figura 4.12. As fibras distribuem-se com uniformidades idênticas nas direções 2 e 3. Se a espessura da lâmina for muito maior que o diâmetro das fibras, a lâmina pode ser considerada **transversalmente isotrópica no plano 2-3**. Além das propriedades mostradas nas eqs.(4.20) e (4.21), pode-se verificar facilmente que as resistências apresentam as seguintes relações:

$$\boxed{Z = Y, \quad S_1 = S} \quad (4.103)$$

transversal, a resina se separa entre as fibras. No limiar de falha as tensões são:

$$\begin{aligned}\sigma^x &= C\bar{\sigma}^x = \begin{Bmatrix} 15,43 \\ 30,87 \\ -1,029 \end{Bmatrix} \text{ (MPa)} \quad \text{e} \\ \sigma^1 &= C\bar{\sigma}^1 = \begin{Bmatrix} -14,39 \\ 30,0 \\ 6,952 \end{Bmatrix} \text{ (MPa)},\end{aligned}$$

e as deformações são:

$$\sigma^x = \bar{S}\sigma^x = \begin{Bmatrix} -73,66 \\ 3,858 \\ 17,71 \end{Bmatrix} 10^{-3}.$$

#### 4.7.4 Critério de Tsai-Wu

Um procedimento simples proposto em 1971 por Tsai e Wu [205] foi o de aumentar o número de termos na equação do critério de falha de Hill com vistas a melhor aproximar os dados experimentais obtidos para os vários materiais. De forma geral, a teoria pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^6 F_i \sigma_i + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 F_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1, \quad (4.111)$$

onde  $\sigma_4 = \tau_{23}$ ,  $\sigma_5 = \tau_{13}$ ,  $\sigma_6 = \tau_{12}$ . Os coeficientes  $F_i$ ,  $F_{ij}$  e  $F_{ijk}$  são estruturas rearranjadas de tensores de 2<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup> e 9<sup>a</sup> ordem, respectivamente, isto é,  $F_i$  forma um “vetor” de 6 componentes,  $F_{ij}$  uma matriz de ordem  $6 \times 6$  etc. Uma vantagem desse método é que existe liberdade para a utilização de tantos termos quantos sejam necessários para a aproximação dos pontos experimentais de um material. Entretanto, uma vez que cada constante está associada a um tipo distinto de ensaio mecânico para sua determinação, comumente a eq.(4.111) restringe-se apenas aos termos de 2<sup>o</sup> grau. Caso isto não seja feito, a quantidade e a complexidade dos ensaios necessários para a determinação das constantes tornaria inviável o método. Assim, a eq.(4.111) reduz-se a:

$$\sum_{i=1}^6 F_i \sigma_i + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1. \quad (4.112)$$

O arranjo  $F_{ij}$  deve ser simétrico, uma vez que a contribuição das solicitações  $\sigma_i \sigma_j$  deve ser idêntica à contribuição de  $\sigma_j \sigma_i$  no dano do material. Isto resulta em  $F_{ij} = F_{ji}$ , e o arranjo possui apenas 21 termos independentes. Então, a equação (4.112) compreende 27 constantes de material a serem experimentalmente determinadas. Restringindo-a ao caso de tensões planas,  $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned}\Rightarrow F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \tau_{12} + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + \\ + F_{66} \tau_{12}^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{16} \sigma_1 \tau_{12} + F_{26} \sigma_2 \tau_{12} = 1.\end{aligned} \quad (4.113)$$

Os termos envolvendo  $F_{12}$ ,  $F_{16}$  e  $F_{26}$  surgem nessa formulação representando as interações entre distintas componentes de tensões normais e também as interações entre componentes de tensões normais e cisalhantes.

Considere o fato de que a resistência ao cisalhamento independe do sinal da tensão cisalhante quando aplicada no sistema principal de coordenadas, conforme visto na Figura 4.7. Aplique então



resistências de tração e compressão [84][101]. Nas aplicações em modelos de plasticidade anisotrópica, o modelo de Tsai-Wu apresenta forte sensibilidade quanto aos parâmetros de propriedades medidas experimentalmente. Assim, o critério de Hoffman tem sido bastante utilizado tanto em problemas de plasticidade de metais quanto em falha frágil de laminados fibrosos.

A expressão do critério pode ser colocada na forma

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{1T}\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}^1 + \boldsymbol{\sigma}^{1T}\mathbf{q} = 1, \quad (4.125)$$

onde  $\mathbf{P}$  e  $\boldsymbol{\sigma}^1$  são os mesmos termos usados para expressar o critério de Hill, eq.(4.95), e

$$\mathbf{q} = \{c_1; c_2; c_3; 0; 0; 0\}^T. \quad (4.126)$$

As matrizes  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{q}$  contêm nove parâmetros de material, que podem ser determinados por nove ensaios nas direções principais de ortotropia: três ensaios de tração, três de compressão e três de cisalhamento.

A eq.(4.125) pode ainda ser colocada em forma aberta como:

$$\begin{aligned} (G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 \\ + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 = 1. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Note que a distinção com o critério de Hill se faz pela presença dos três últimos termos à esquerda da igualdade. A relação entre as constantes das equações acima e os valores obtidos em ensaios se faz usando o mesmo procedimento descrito para o critério de Hill, isto é, aplica-se em (4.125) um estado de tensões onde apenas uma componente de tensão é não-nula e determina-se uma equação. Repetindo o processo para cada componente de tensão, em tração e compressão, obtêm-se nove equações que podem ser resolvidas em:

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Z_t Z_c}, & N &= \frac{1}{2S^2}, & c_1 &= \frac{X_c - X_t}{X_t X_c}, \\ 2F &= \frac{-1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c}, & L &= \frac{1}{2S_2^2}, & c_2 &= \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c}, \\ 2G &= \frac{1}{X_t X_c} - \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c}, & M &= \frac{1}{2S_1^2}, & c_3 &= \frac{Z_c - Z_t}{Z_t Z_c}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

$S$ ,  $S_1$  e  $S_2$  são as resistências ao cisalhamento nos planos 1-2, 1-3 e 2-3, respectivamente. Para o caso de uma **lâmina transversalmente isotrópica**, ( $Y = Z$  e  $S_1 = S$ ), sob **estado plano de tensões**, ( $\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ ), a expressão do critério toma a forma simplificada:

$$\boxed{\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 = 1} \quad (4.129)$$

Essa expressão, claramente, reduz-se ao critério de Tsai-Hill, eq.(4.105), quando  $X_t = X_c = X$  e  $Y_t = Y_c = Y$ .

#### 4.7.6 Critério de Hashin

Hashin [86] em 1980, apresentou um critério para falha em lâminas reforçadas por fibras uniaxiais. A teoria apresenta diversas características marcantes. Primeiro, leva em conta o fato de que a lâmina é transversalmente isotrópica no plano 2-3. Segundo, define uma superfície de falha para cada modo de falha, analogamente aos critérios de tensão e de deformação máxima, portanto diferentemente de critérios como o de Hill e o de Hoffman em que existe apenas uma função de falha. O desenvolvimento da teoria é razoavelmente longo, de forma que apresentamos a seguir apenas alguns pontos. O leitor pode simplesmente continuar a leitura na eq.(4.133) que contém o sumário da teoria.

Modo de falha	Ocorre se	Função de falha
Tração nas fibras	$\sigma_1 > 0$	$\Rightarrow \left(\frac{\sigma_1}{X_t}\right)^2 + \frac{\tau_{12}^2}{S_2^2} = 1,$
Compressão nas fibras	$\sigma_1 < 0$	$\Rightarrow \sigma_1 = -X_c,$
Tração na matriz	$\sigma_2 + \sigma_3 > 0$	$\Rightarrow \left(\frac{\sigma_2}{Y_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 = 1,$
Compressão na matriz	$\sigma_2 + \sigma_3 < 0$	$\Rightarrow \frac{\sigma_2}{Y_c} \left[ \left(\frac{Y_c}{2S_2}\right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\sigma_2}{2S_2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 = 1$

(4.134)

O modo 1 de compressão nas fibras é suposto ocorrer por flambagem cisalhante. A teoria pode ser usada como um conjunto de critérios, de forma análoga à teoria da tensão máxima, ou pode ser usada apenas como indicador do modo de falha, permitindo que se use um outro critério, como o de Tsai-Wu, para a identificação da tensão limite. Finalmente, deve-se lembrar que diversas teorias de falha existem além das revisadas acima, como a de Lee [119] de 1982, cujo resultado final assemelha-se à de Hashin.

## 4.8 Exercícios

4.1 Prove a identidade  $\mathbf{RTR}^{-1} = \mathbf{T}^{-T}$ , eq.(4.46).

4.2 Obtenha as eqs.(4.51).

4.3 Obtenha as eqs.(4.66).

4.4 Plote a variação das propriedades de engenharia em termos de  $\theta$ , entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , para uma lâmina de vidro-epóxi com as seguintes propriedades:  $E_1 = 39$  GPa,  $E_2 = 8,3$  GPa,  $G_{12} = 4,0$  GPa,  $\nu_{12} = 0,26$ . Use as eqs.(4.66). Quais os valores das propriedades de engenharia a  $\theta = 10^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  e  $60^\circ$ ?

4.5 Obtenha as eqs.(4.100) a partir das eqs.(4.97)–(4.99).

4.6 Obtenha (4.105) a partir de (4.94) e (4.100).

4.7 Mostre que a primeira das eqs.(4.66) pode ser posta na forma  $E_1/E_x = (1 + a - 4b) \cos^4 \theta + (4b - 2a) \cos^2 \theta + a$ , com  $a = E_1/E_2$  e  $b = (E_1/G_{12} - 2\nu_{12})/4$ . Derive a expressão e mostre que  $E_x$  é maior que  $E_1$  e  $E_2$  em certa faixa de  $\theta$ , caso  $G_{12} > E_1/[2(1 + \nu_{12})]$ , e que  $E_x < E_1$  e  $E_x < E_2$  em certa faixa de  $\theta$  se  $G_{12} < E_1/[2((E_1/E_2) + \nu_{12})]$ . Interprete os gráficos do Exercício 4.

(Dica: forme a função  $F = A\alpha^2 + B\alpha + C$ , com  $A = (1 + a - 4b)$ ,  $B = (4b - 2a)$ ,  $C = a - 1$ ,  $\alpha = \cos^2 \theta$ . Derive  $F$  e obtenha a posição do máximo de  $\alpha$ ,  $\alpha = -B/2A$ . Substitua em  $F$  e obtenha  $\bar{F} = -B^2/4A + C$ . Também obtenha as raízes de  $F$ . O discriminante é  $\Delta = B^2 - 4AC$ , que deve ser positivo. Caso I,  $C > 0$ . Então  $A > 0$  se  $G_{12} > \bar{G} := E_1/(1 + a + 2\nu_{12})$ . Como  $\Delta > 0$ , deve-se ter que  $b < 1/2$ , o que significa que  $G_{12} > E_1[2(1 + \nu_{12})]$ , que é maior que o limite anterior. Caso II,  $C < 0$ .  $\bar{F} < 0$  e  $\Delta > 0$  requerem que  $A < 0$ , o que implica  $G_{12} < \bar{G}$ . Como  $C < 0$ ,  $\bar{G} < E_1/[2(E_1/E_2 + 2\nu_{12})]$ .)

4.8 Considere um corpo de provas com seção transversal de 20 mm por 1 mm, com uma lâmina orientada a  $\theta = 45^\circ$  da direção de carregamento. As propriedades elásticas são as do Exercício 4. O corpo de provas está submetido a uma carga axial de 200 N.