

# Capítulo 9

## Tecnologia de elementos finitos - II

### 9.1 Integração numérica

Nos exemplos mostrados no Capítulo 8 foram utilizados elementos com funções de aproximação lineares, de forma que a matriz de deformação  $\overset{e}{\mathbf{B}}$  do elemento ficava constante, e a matriz de rigidez podia ser integrada sem dificuldades. Entretanto essa não é a situação geral no MEF. De fato, em geral as matrizes de rigidez e o vetor de carga consistente só podem ser obtidos por integração numérica.

Para ilustrar o método de integração usual em MEF, iniciaremos por um problema unidimensional. Assim, consideremos uma **função polinomial**  $P(x)$  que se deseja integrar num domínio unidimensional na forma:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} P(x) dx. \quad (9.1)$$

Fazendo o mapeamento para o domínio padrão,  $x = x(r)$ , tem-se que  $dx = (dx/dr)dr$ , o que significa que  $dx/dr$  é o jacobiano da transformação, em sua forma unidimensional. Então a integral se torna

$$I = \int_{r=-1}^1 P(x(r)) J dr, \quad \text{onde } J = \frac{dx}{dr}. \quad (9.2)$$

Prova-se que essa integral pode ser resolvida exatamente através de um somatório que envolve a avaliação da função numa quantidade finita  $np$  de pontos dentro do domínio de integração, denominados **pontos de integração**, de coordenadas intrínsecas  $\tilde{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, np$ , com o uso de  $np$  **pesos de integração**  $W_i$ , isto é,  $I$  pode ser precisamente calculado pelo somatório

$$I = \sum_{i=1}^{np} P(x(\tilde{r}_i)) \frac{dx}{dr} W_i \quad (9.3)$$

A quantidade necessária de pontos, suas posições e os valores dos pesos de cada ponto, dependem do **grau  $p$  do polinômio  $P$** . A formulação é tal que uma regra de  $np$  pontos integra exatamente um polinômio de grau

$$p = 2np - 1 \quad \text{i.e.,} \quad np = \frac{p+1}{2} \quad (9.4)$$

Valores usuais são vistos na Tabela 9.1. Pontos adicionais podem ser obtidos em [59] e [114], por exemplo. A formulação para gerar esses pontos é incorporada em bibliotecas computacionais como a IMSL [52], que podem ser incorporados em compiladores Fortran, permitindo a programação para uma quantidade arbitrariamente grande de pontos de integração.

**Caso a função  $P$  não seja polinomial**, ou se  $P$  for polinomial, porém for usado uma quantidade insuficiente de pontos, existe um erro de integração. Isto significa que se  $P$  for um polinômio de grau 5, por exemplo, e usarmos a regra de 2 pontos, de fato estaremos integrando apenas o polinômio cúbico que passa pelos dois pontos de integração. Nesse caso estamos realizando uma

Tabela 9.1: Coordenadas e pesos para a fórmula de quadratura gaussiana.

Número de pontos $np$	grau $p$	coordenadas $\tilde{r}_i$	pesos $W_i$ [59]
1	1	0,0	2,0
2	3	$\pm 1,0/\sqrt{3}$	1,0
3	5	$\pm \sqrt{3}/5$ 0,0	5/9 8/9
4	7	$\pm 0,861\,136\,311\,594\,953$ $\pm 0,339\,981\,043\,584\,856$	0,347\,854\,854\,137\,454 0,652\,145\,154\,862\,546

**subintegração** ou integração reduzida. Isso é ilustrado na Figura 9.1, onde uma curva arbitrária integrada no domínio  $[-1, 1]$  usando um, dois e três ponto de integração. A área considerada na integração aproximada é identificada pela região hachurada.

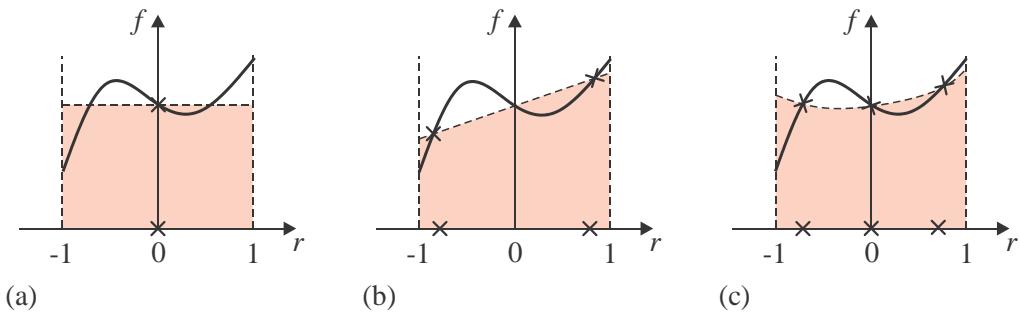


Figura 9.1: Curva arbitrária integrada por (a) um ponto de integração, (b) dois pontos e (c) três pontos. A região hachurada corresponde ao valor da integral aproximada.

Em **domínios bi e tridimensionais** mapeados nos domínios padrão  $[(-1, -1] \leq r, s \leq [1, 1]$  e  $[-1, -1, -1] \leq r, s, t \leq [1, 1, 1]$ , a integração é feita de forma independente nas duas ou três direções do problema, usando as mesmas quadraturas unidimensionais da Tabela 9.1. A integração de um monômio na forma  $r^a s^b$  ou  $r^a s^b t^c$ , de potências inteiras  $a, b$  e  $c$  no domínio padrão, se torna

$$\begin{aligned} \iint_{-1}^1 r^a s^b dr ds &= \int_{r=-1}^1 r^a dr \int_{s=-1}^1 s^b ds, \\ &= \left( \sum_{i=1}^{npr} \tilde{r}_i^a W_i \right) \left( \sum_{j=1}^{nps} \tilde{s}_j^b W_j \right) = \sum_{i=1}^{npr} \sum_{j=1}^{nps} \tilde{r}_i^a \tilde{s}_j^b W_i W_j, \quad \text{e da mesma forma}, \\ \iiint_{-1}^1 r^a s^b t^c dr ds dt &= \sum_{i=1}^{npr} \sum_{j=1}^{nps} \sum_{l=1}^{npt} \tilde{r}_i^a \tilde{s}_j^b \tilde{t}_l^c W_i W_j W_l. \end{aligned} \quad (9.6)$$

onde  $npr, nps, npt$  são os números de pontos de integração em cada direção. Cada uma dessas quantidades é determinada pelo grau do monômio na direção correspondente, de acordo com a mesma regra unidimensional mostrada em (9.4).

Se a integração de um polinômio  $P(\mathbf{x})$  é feita num domínio físico, com possível distorção em relação ao domínio padrão, tem-se a seguinte forma

$$\begin{aligned}
I &= \left[ \frac{2}{3} + \left( \frac{1 + (-1/\sqrt{3})}{2} \right)^2 \right] \frac{1}{2} 1,0 + \left[ \frac{2}{3} + \left( \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right] \frac{1}{2} 1,0, \\
&= 0,3557 + 0,6444 = 1,0001
\end{aligned}$$

Note-se que o erro de 0,01 % obtido não se deve ao processo de integração, mas a erros de arredondamento devido ao número de dígitos usados nas operações.

(b) A segunda função,  $f(x) = (3/2)\sqrt{x}$ , não é polinomial, de forma que não será possível, usando essa quadratura numérica, obter a solução analítica. Podemos tentar, como exemplo, usar a mesma quadratura da outra função, com  $np = 2$  pontos de integração, que é adequada a integrar corretamente até polinômios cúbicos. Então,

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{i=1}^{np=2} f(x(\tilde{r}_i)) \frac{dx}{dr} W_i \\
&= \left[ \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1+\tilde{r}_1}{2}} \right] \frac{1}{2} W_1 + \left[ \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1+\tilde{r}_2}{2}} \right] \frac{1}{2} W_2, \\
&= \left[ \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1+(-1/\sqrt{3})}{2}} \right] \frac{1}{2} 1,0 + \left[ \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1+(1/\sqrt{3})}{2}} \right] \frac{1}{2} 1,0, \\
&= 0,34477 + 0,66605 = 1,0108.
\end{aligned}$$

Nota-se que agora o erro é de 1,08%. Caso tivessemos usado a quadratura de 1 ponto de integração, adequada a polinômios lineares, teríamos  $I = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1+\tilde{r}_1}{2}} \right] \frac{1}{2} W_1 = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1+0}{2}} \right] \frac{1}{2} 2,0 = 0,4714$ .

---

### 9.1.2 Regra de integração de Gauss-Lobatto

Uma regra similar à de Gauss é a chamada regra de integração de Gauss-Lobatto. Uma diferença é que ela sempre inclui os pontos extremos do intervalo de integração. Um efeito colateral é que, para o mesmo grau de polinômio, ela necessita mais pontos que a regra de Gauss. A quantidade necessária de pontos, suas posições e os valores dos pesos de cada ponto, dependem do **grau p do polinômio P**. A formulação é tal que uma regra de  $np$  pontos integra exatamente um polinômio de grau  $p$  dado por:

$$p = 2np - 3 \quad \text{i.e.,} \quad np = \frac{p+3}{2} \quad (9.8)$$

Valores usuais são vistos na Tabela 9.2. As regras de 2 e 3 pontos são as conhecidas regras de integração do trapezio e de Simpson

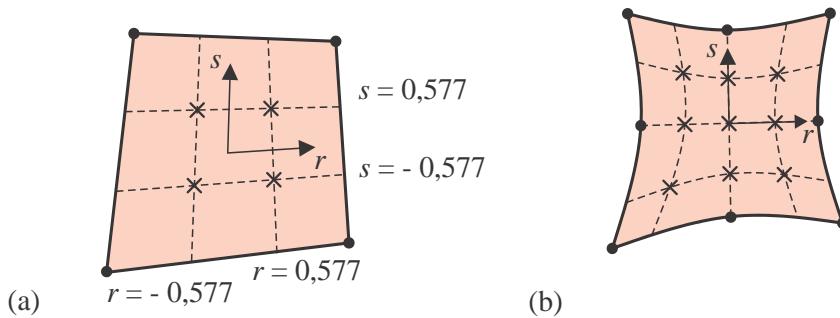
### 9.1.3 Integração dos elementos quadriláteros e hexaédricos

No caso de integração em MEF, a integral (9.7) é realizada em cada um dos termos da matriz de rigidez do elemento, isto é,  $f_{ij} = \left( \mathbf{B}^T \mathbf{C}^d \mathbf{B} \det \mathbf{J} \right)_{ij}$ , onde  $f_{ij} = f(r, s, t)$  não é uma função polinomial. De fato, todas as integrais do MEF, para a determinação do vetor força elementar, das matrizes de rigidez ou inércia, por exemplo, devem ser feitas numericamente. A Figura 9.2 mostra as posições dos pontos de integração no domínio padrão plano, para as regras  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ .

As quantidades de pontos indicadas em (9.4) devem ser adaptadas aos diversos tipos de elementos, conforme os graus dos polinômios utilizados no campo de deslocamentos. Consideraremos alguns casos típicos.

Tabela 9.2: Coordenadas e pesos para a fórmula de quadratura de Gauss-Lobatto.

Número de pontos $np$	grau $p$	coordenadas $\tilde{r}_i$	pesos $W_i$ [15]
2	1	$\pm 1$	1
3	3	0	$4/3$
		$\pm 1$	$1/3$
4	5	$\pm \sqrt{5}$	$5/6$
		$\pm 1$	$1/6$
5	7	0	$32/45$
		$\pm \frac{1}{7} \sqrt{21}$	$49/90$
		$\pm 1$	$1/10$
6	9	$\pm \sqrt{\frac{1}{21} (7 - 2\sqrt{7})}$	$\frac{1}{30} (14 + \sqrt{7})$
		$\pm \sqrt{\frac{1}{21} (7 + 2\sqrt{7})}$	$\frac{1}{30} (14 - \sqrt{7})$
		$\pm 1$	$1/15$

Figura 9.2: Posições dos pontos de integração no domínio físico, para as regras de Gauss  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ .

- **Elementos quadrilateros bilineares.** As funções de aproximação são lineares em cada direção. O integrando na matriz de rigidez, para os problemas elásticos, não possui termos de deslocamentos, mas apenas de suas primeiras derivadas, isto é, possui primeiras derivadas das funções de aproximação na matriz de deformações  $\mathbf{B}^e$ . Por exemplo, consideremos uma das funções bilineares, eq. (8.161),  $\psi_1 = (1 - r)(1 - s)/4$ . A derivada  $\partial\psi_1/\partial r = -(1 - s)/4$  é constante na direção  $r$  e linear na direção  $s$ . Então,  $\mathbf{B}^e$  possui termos misturados, alguns lineares e outros constantes, em cada direção. Também, se considera que o elemento pode estar distorcido, (lados não perpendiculares) de forma que  $\det \mathbf{J}^e$  também é variável dentro do elemento. As derivadas das funções de aproximação em  $x$ ,  $y$  e  $z$  são dadas por  $\nabla_x \psi = \mathbf{J}^{-1} \nabla_s \psi$  em (8.131). Com a distorção, a inversa da matriz jacobiana não mais é polinomial, o que faz com que as derivadas de  $\psi$  em  $x$ ,  $y$  e  $z$  não mais sejam polinômios. Isso, por sua vez, faz com que  $\mathbf{B}^e$  também não seja polinomial no caso de elementos distorcidos. Isso é suficiente para impedir que se possa ter integração numérica exata da rigidez nesse tipo de elementos, embora o uso de grande quantidade de pontos de integração gere matrizes de rigidez integradas de forma praticamente exata. Entretanto o custo computacional faz com que se evite esse procedimento. O que normalmente é feito é determinar a quantidade necessária de pontos de integração a partir de uma situação padrão, em que o elemento não esteja distorcido. Assim, qualquer que seja o grau do elemento (bilinear, biquadrático, etc.) o  $\det \mathbf{J}^e$  torna-se constante no elemento, tanto quanto sua inversa. Então o integrando fica definido pelo maior grau dos termos em  $\mathbf{B}^e$ . No caso do elemento bilinear, em cada direção  $\mathbf{B}^e$  tem grau 1. Como o integrando possui o

produto  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ , tem-se polinômios de grau 2 para integrar. Usando (9.4), isso significa que esses elementos podem ser integrados exatamente com  $np = (2+1)/2 = 1,5$ , isto é, 2 pontos de integração em cada direção intrínseca. Então são usados  $2 \times 2$  pontos para a integração exata. Os elementos distorcidos não podem ser integrados exatamente usando a regra de Gauss.

- **Elementos biquadráticos.** Seguindo a mesma linha de argumentação, verifica-se que no caso de elementos não distorcidos, a matriz  $\mathbf{B}^e$  de problemas elásticos possui termos quadráticos e lineares em cada direção, tal que os termos do integrando da rigidez tem graus quarticos. De (9.4), o número de pontos necessários para integração exata é dada por :  $np = (4+1)/2 = 2,5$ , isto é, 3 pontos. São utilizados  $3 \times 3$  pontos na integração exata do elemento não distorcido.
- **Elementos hexaédricos trilineares e triquadráticos.** Seguindo os mesmos argumentos para os elementos elásticos tri-dimensionais, obtém-se as quantidades necessárias de pontos para a integração exata de elementos não distorcidos:  $2 \times 2 \times 2$  para elementos tri-lineares e  $3 \times 3 \times 3$  pontos para elementos tri-quadráticos.

Em todos os casos, as quantidades de pontos de integração indicadas acima, baseadas num elemento não distorcido, são usadas também nos elementos distorcidos. Essa quantidade de pontos é denominada **integração completa**, para distinguir da chamada **subintegração** que será vista em outra seção.

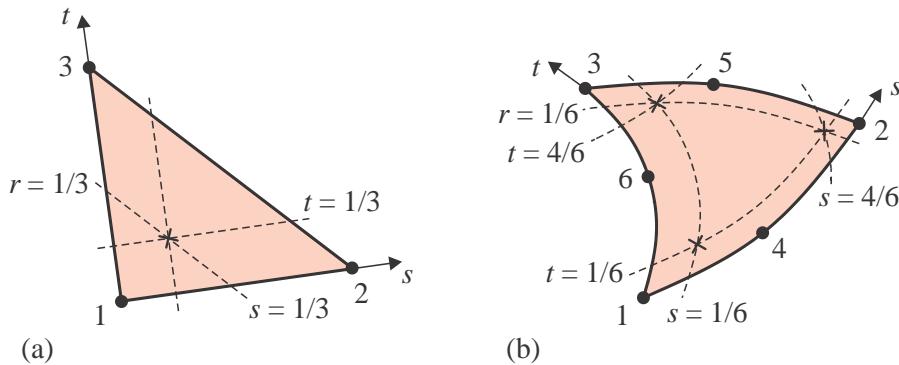


Figura 9.3: Posições dos pontos de integração de triângulo nas regras de um e de três pontos.

#### 9.1.4 Integração em elementos triangulares

Quando um elemento triangular é gerado pela colapsação de um elemento quadrilátero, a integração é feita como se ele fosse quadrilátero, isto é, usando (9.7)<sub>1</sub>. Entretanto, se o elemento triangular tiver sido gerado a partir das funções de triângulo, em coordenadas de área, como aqueles da seção 8.8.2, é necessário o uso de regras de integração próprias para domínios triangulares. A integração de um polinômio em coordenadas triangulares, sobre o domínio triangular padrão, é feita por

$$\int_{t=0}^1 \int_{s=0}^{1-t} P(r, s, t) |\mathbf{J}(r, s, t)| ds dt = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{np} P(\tilde{r}_j, \tilde{s}_j, \tilde{t}_j) |\mathbf{J}(\tilde{r}_j, \tilde{s}_j, \tilde{t}_j)| W_j \quad (9.9)$$

onde  $|\mathbf{J}(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j, \tilde{t}_j)|$  é o determinante da matriz jacobiana no ponto de integração. Um pequeno conjunto de coordenadas e pesos de uma dessas regras é dado na Tabela 9.3 [28]. As regras de um e de três pontos é ilustrada na Figura 9.3. Nessa tabela, o grau  $p$  indica o grau do polinômio a ser integrado exatamente.  $p$  é a soma dos expoentes do monômio. Se o monômio de maior grau a ser integrado for

$$P = r^a s^b t^c, \quad \text{tem-se} \quad p = a + b + c. \quad (9.10)$$

Tabela 9.3: Coordenadas de área e pesos para a regra de integração de triângulos.

Número de pontos $np$	Grau $p$	$\tilde{r}_j$	$\tilde{s}_j$	$\tilde{t}_j$	pesos $W_j$ [28]
1	1	1/3	1/3	1/3	1
3	2	4/6 1/6 1/6	1/6 4/6 1/6	1/6 1/6 4/6	1/3 1/3 1/3
3	2	1/2 1/2 0,0	1/2 0,0 1/2	0,0 1/2 1/2	1/3 1/3 1/3
4	3	1/3 0,60 0,20 0,20	1/3 0,20 0,60 0,20	1/3 0,20 0,20 0,60	-27/48 25/48 25/48 25/48
7	5	1/3	1/3	1/3	0,225.000.000.000.000
		0,797.426.985.353.087 0,101.286.507.323.456 0,101.286.507.323.456 0,470.142.064.105.115 0,470.142.064.105.115 0,059.715.871.789.770	0,101.286.507.323.456 0,797.426.985.353.087 0,101.286.507.323.456 0,059.715.871.789.770 0,470.142.064.105.115 0,470.142.064.105.115	0,101.286.507.323.456 0,101.286.507.323.456 0,797.426.985.353.087 0,059.715.871.789.770 0,470.142.064.105.115 0,470.142.064.105.115	0,125.939.180.544.827 0,125.939.180.544.827 0,125.939.180.544.827 0,132.394.152.788.506 0,132.394.152.788.506 0,132.394.152.788.506

Observe que em cada regra a soma dos pesos é sempre unitária, de forma que a integração da função  $P = 1$  sobre um triângulo de lados retos, resulta no valor de sua área. Isso pode ser verificado considerando que, num triângulo de lados retos,  $\det \mathbf{J} = 2A$ . Então, (9.9) fica

$$\int_{t=0}^1 \int_{s=0}^{1-t} P(r, s, t) \det \mathbf{J} \, ds dr = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{np} 1 \cdot 2A \cdot W_i = A. \quad (9.11)$$

- **Elementos triangulares lineares** em problemas planos. O integrando de um termo da matriz de rigidez é  $f_{ij} = \left( \mathbf{B}^T \mathbf{C}^d \mathbf{B}^e \det \mathbf{J} \right)_{ij}$ . As 3 funções de aproximação são  $r$ ,  $s$  e  $t$ , isto é, cada uma de grau 1. Com isso os termos de  $\mathbf{B}^e$  tem apenas monômios até grau 0. Caso o elemento seja não distorcido,  $\det \mathbf{J}$  é constante, de forma que  $\mathbf{f}$  é polinomial com grau  $p = 0$ . Assim, a Tabela 9.3 mostra que basta  $np = 1$  ponto para a integração exata da matriz de rigidez.
- **Elementos triangulares quadráticos** em problemas elásticos. Seguindo o mesmo desenvolvimento, observa-se que  $\mathbf{B}^e$  tem monômios até grau 1 e o integrando da matriz de rigidez é polinomial com os termos de grau  $p = 2$ , tal que necessita  $np = 3$  pontos de integração.

### 9.1.5 Exemplo 9.2 - Integração de função em triângulo

Integrar a função  $f(x, y) = xy^2$  sobre a região definida pelo elemento triangular regular de lados retos mostrado na Figura 9.4, com lados  $2 \times 1$ .

*Solução:*

Faz-se o mapeamento (8.127) usando as funções lineares (8.124). Para facilitar os cálculos definem-se as seguintes matrizes com as funções e com os valores nodais

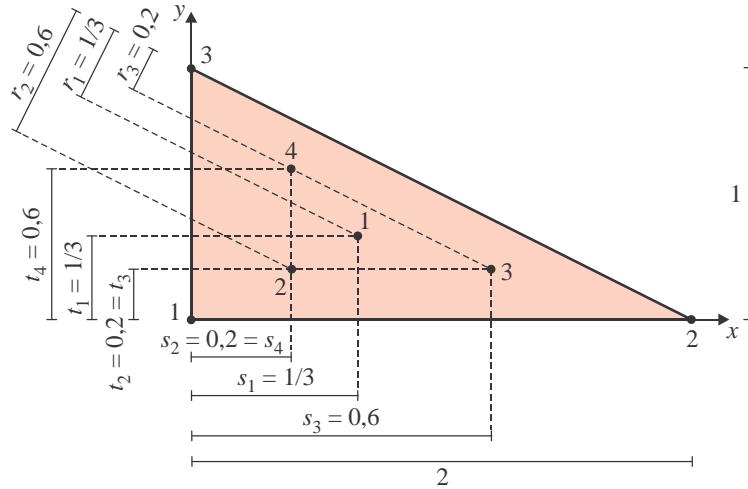


Figura 9.4: Elemento triangular linear regular do Exemplo 8.2 e posição dos pontos de integração de 4 pontos em triângulo.

$$\Psi = [\psi_1; \psi_2; \psi_3] = [1 - s - t; s; t] \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

Logo,  $\Psi \mathbf{X} = (x; y) = (2s; t)$ .

Então,  $f(x(s, t), y(s, t)) = x(s, t)y(s, t)^2 = 2st^2$ . Esse é então um polinômio de grau  $p = 3$ . A matriz jacobiana vem de (8.133)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{J} = 2$$

A integração da função é feita como em (9.9), usando a regra de  $np = 4$  pontos da Tabela 9.3:

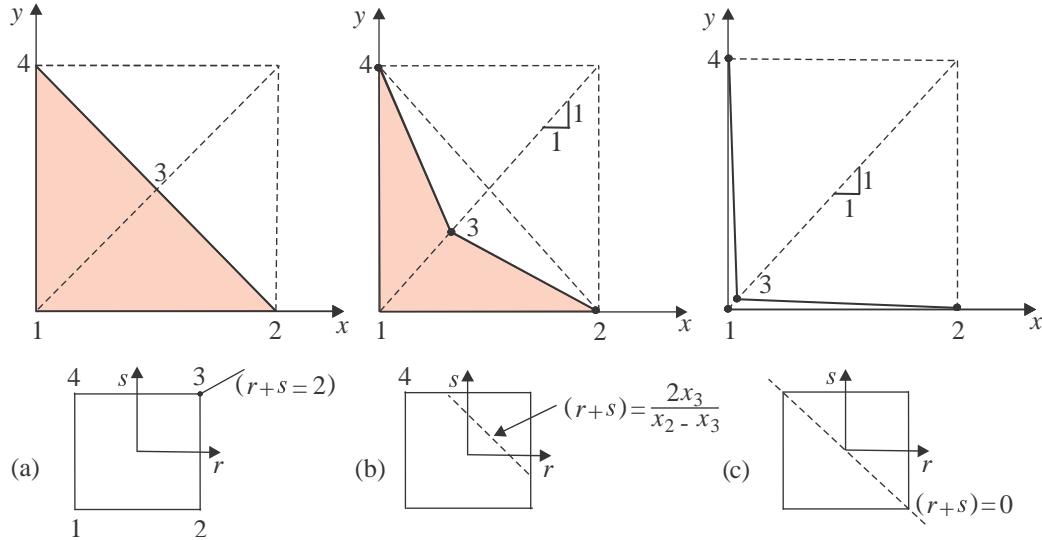
$$\begin{aligned} I &= \int_{t=0}^1 \int_{s=0}^{1-t} P(r, s, t) |\mathbf{J}(r, s, t)| ds dt = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{np} P(\tilde{r}_j, \tilde{s}_j, \tilde{t}_j) |\mathbf{J}(\tilde{r}_j, \tilde{s}_j, \tilde{t}_j)| W_j \\ &= \frac{1}{2} |2| \sum_{j=1}^4 2\tilde{s}_j \tilde{t}_j^2 W_j \\ &= \frac{2}{2} \left[ 2 \left( \frac{1}{3} \right)^3 \left( -\frac{27}{48} \right) + 2 \times 0,2 \times 0,2^2 \left( \frac{25}{48} \right) + 2 \times 0,6 \times 0,2^2 \left( \frac{25}{48} \right) + 2 \times 0,2 \times 0,6^2 \left( \frac{25}{48} \right) \right] \\ &= 0,066.666.666.7 = 1/15. \end{aligned}$$

Para realizar uma verificação do erro, pode-se obter a integração analítica da função:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{1-x/2} f(x, y) dy dx = \int_{x=0}^2 \left( \int_{y=0}^{1-x/2} xy^2 dx \right) dy, \\ &= \int_{x=0}^2 \frac{x}{3} \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^2 dy = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Como esperado, a integração numérica forneceu o valor exato, uma vez que a função é polinomial

jacobiana não pode ser invertida, logo, não é possível obter o gradiente das funções de aproximação em relação a  $(x, y)$ . Com isso, não se pode obter diretamente deformações ou tensões nesses pontos. Caso a quadratura de integração possua algum ponto que coincida com essas regiões singulares, a matriz de deformações  $\mathbf{B}$  do elemento não poderá ser formada e o integrando da rigidez também não poderá ser formado. **Como recomendação geral, considera-se que sejam evitadas malhas em que existam elementos com distorções dos tipos mostrados na Figura 9.6.**



### 9.1.7 Exemplo 9.4 - Mapeamento em elemento triangular quadrático

Considere um elemento de seis nós como na Figura 9.7a, com dois lados retos de lado 2, e ortogonais, e com os nós internos centrados. Um dos lados é deixado curvo, de forma que a curvatura seja determinada pelas coordenadas do nó 5, que são:  $(x_5; y_5) = (1; b)$ . (a) determinar a matriz jacobiana para o caso da Figura 9.7a, para uma cota  $b$  arbitrária. (b) Determinar a área do elemento. (c) Analisar o comportamento do jacobiano caso  $b = 0,5$ . (d) analisar o caso em que  $-0,5 < b < 0,5$ .

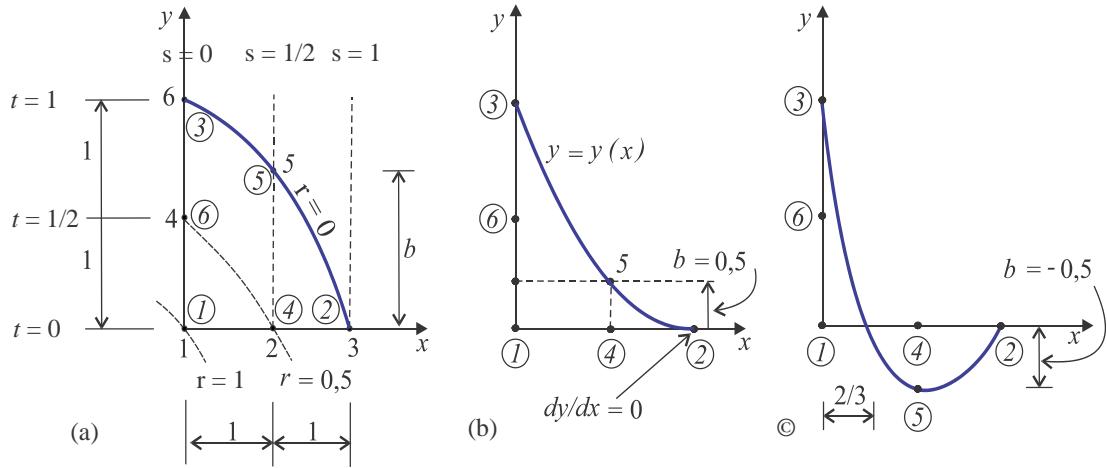


Figura 9.7: Distorção gerada pelo posicionamento do nó 5 num elemento triangular quadrático. A numeração intrínseca dos nós é colocada em círculos.

*Solução:*

A área do elemento pode ser obtida por

$$\overset{e}{A} = \int_{x=0}^2 y(x) dx = \frac{2}{3}(1 + 2b).$$

(c) Caso  $b = 0,5$ , observa-se, de (9.19), que  $\det \mathbf{J} = 4(1 - s)$ . Então,  $\det \mathbf{J}$  se anula em  $s = 1$ . De (9.18), nota-se que esse ponto corresponde ao nó global 3, com  $x = 2$ . A derivada de (9.21) é  $dy/dx = 2(1 - b)x + (2b - 3)$ . Em  $b = 0,5$  e  $x = 2$  essa derivada é nula. Isso significa que se a posição do nó 5 do elemento for tal que  $b = 0,5$ , ocorre um císpide no nó 3. Essa configuração é mostrada na Figura 9.7b.

(d) Caso em que  $-0,5 < b < 0,5$ , tem-se que a linha 3-5-6 intercepta a linha 1-2-3 do elemento. A Figura 9.7c ilustra essa situação para o caso particular  $b = -0,5$ . Nesse caso, (9.20) mostra que a área do elemento torna-se nula. Nessa configuração, de (9.19), tem-se que  $\det \mathbf{J} = 4(1 - 3s)$ . Então,  $\det \mathbf{J} = 0$  nos pontos  $s = 1/3$ . Esses pontos formam uma linha sobre o elemento, que pode ser identificada no mapeamento (9.18). Fazendo as simplificações obtém-se  $x = 2/3$  e  $y = 0$ . De fato, a “linha” reduz-se a um único ponto, que é aquele em que a linha 3-5-6 intercepta o lado horizontal do elemento, como na Figura 9.7c.

---

No geral, as malhas utilizadas devem evitar elementos excessivamente distorcidos ou com císpides. A configuração mostrada na Figura 9.24b representa um limite de distorção, embora, mesmo em valores inferiores a esses outros fenômenos indesejáveis possam ocorrer. **De forma geral, a distorção nos elementos reduz a precisão dos resultados no Método de Elementos Finitos.**

## 9.2 Vetores força nodal consistente

Considere-se um elemento quadrangular biquadrático localizado sobre o contorno do corpo, como o elemento ilustrado na Figura 9.8b, tal que em sua borda pertencente ao contorno ele esteja submetido a uma carga distribuída. O processo de discretização do MEF envolve a representação dessa carga distribuída por cargas concentradas aplicadas nos nós que sejam equivalentes, do ponto de vista do trabalho realizado. Um primeiro aspecto que deve ser enfatizado é que, mesmo que a carga seja uniforme sobre aquela porção da borda do elemento, os valores nodais equivalentes, nem sempre, são aqueles mais óbvios indicados pela intuição. O cálculo intuitivo é que a força total associada à carga distribuída deva ser igualmente dividida entre os nós da borda. Se a carga uniforme vale  $p$ , em  $[N/m^2]$ , e o comprimento da borda é  $L$ , então a resultante é  $phL$ . Se há dois nós na borda, deveriam-se ter duas forças nodais de  $phL/2$  cada, e se há 3 nós na borda, cada força nodal deveria ser  $phL/3$ . Entretanto, esses valores não são todos corretos. As cargas nodais equivalentes devem ser calculadas de forma consistentes, como segue, a partir de suas definições provenientes do PTV.

Deve-se observar que o procedimento de dividir uniformemente a carga nos nós gera sempre erros, entretanto esses erros tendem a se reduzirem com o refinamento da malha. Em malhas bastante refinadas esse procedimento pode ser tolerado, mas em malhas mais grosseiras é fundamental que as cargas consistentes sejam utilizadas nos cálculos.

Nessa seção são detalhados os procedimentos para o cálculo de vetores de carga nodal equivalente em bordas de elementos quadrangulares e em faces de elementos hexaédricos. A exemplificação se concentrará nos casos linear e quadráticos, mas o procedimento pode ser estendido para graus arbitrários.

### 9.2.1 Vectors força em elementos quadrangulares

Inicialmente é necessário fazer uma identificação de cada uma das bordas do elemento. Uma possível numeração é aquela mostrada na Figura 9.8a. Nota-se que cada face é definida por um valor constante para uma das duas coordenadas intrínsecas. Por exemplo, a borda 1 é definida por

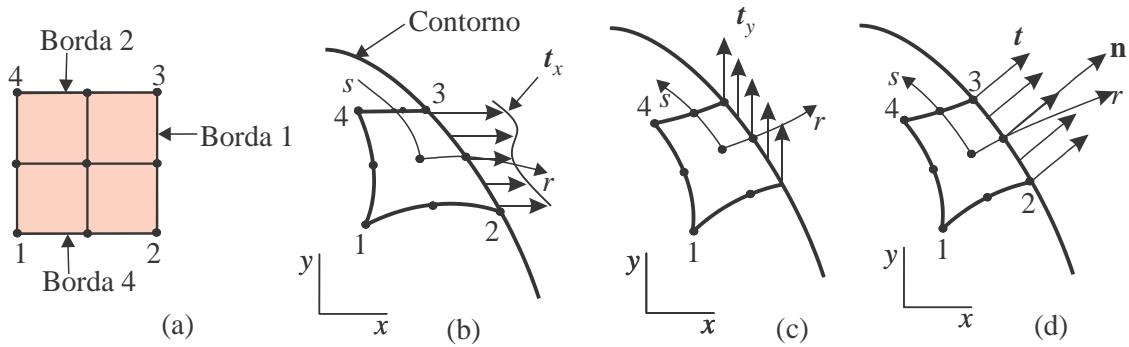


Figura 9.8: (a) Indicação das quatro bordas de um elemento quadrilátero; (b) indicação de carga distribuída na direção  $x$  na borda 1, (c) na direção  $y$ , (d) e carga distribuída normal.

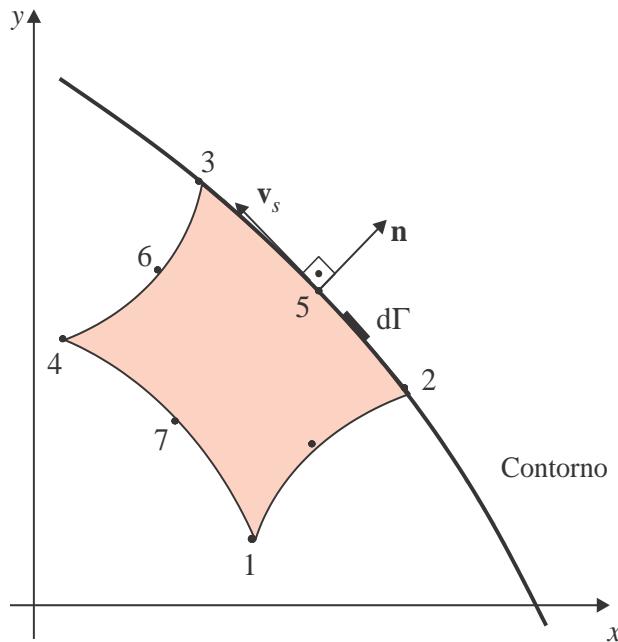


Figura 9.9: Vetor tangente  $\mathbf{v}^s(\mathbf{x})$  e normal unitário  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  num ponto arbitrário na borda 1 de um elemento.

$$\begin{cases} x = \psi_2 x_2 + \psi_3 x_3, \\ y = \psi_2 y_2 + \psi_3 y_3, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1-s)x_2 + \frac{1}{2}(1+s)x_3, \\ y = \frac{1}{2}(1-s)y_2 + \frac{1}{2}(1+s)y_3. \end{cases} \quad (9.39)$$

As derivadas são

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{2}(x_3 - x_2), \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2}(y_3 - y_2). \quad (9.40)$$

Com isso o jacobiano da transformação em (9.25) fica  $\det J = \sqrt{x_{,s}^2 + y_{,s}^2} = L/2$ , onde  $L$  é o comprimento da borda 1 do elemento, entre os nós 2 e 3. As componentes do vetor normal  $\bar{\mathbf{n}}$  são

$$\bar{\mathbf{n}} = \begin{Bmatrix} y_{,s} \\ -x_{,s} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} y_3 - y_2 \\ -(x_3 - x_2) \end{Bmatrix}. \quad (9.41)$$

O vetor força nodal do elemento bilinear sob carga normal uniforme na borda 2 é obtido aplicando (9.29). Nota-se que o vetor  $\mathbf{F}^e$  tem termos associados a todos os 4 nós do elemento. Entretanto,

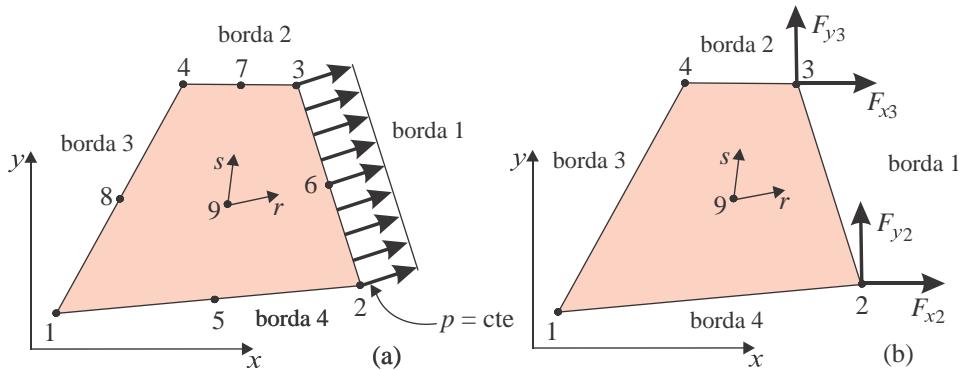


Figura 9.10: (a) Elemento plano biquadrático com carga distribuída normal à borda 1, e (b) Elemento plano bilinear com componentes do vetor força nodal equivalente nos nós 2 e 3 da borda 1.

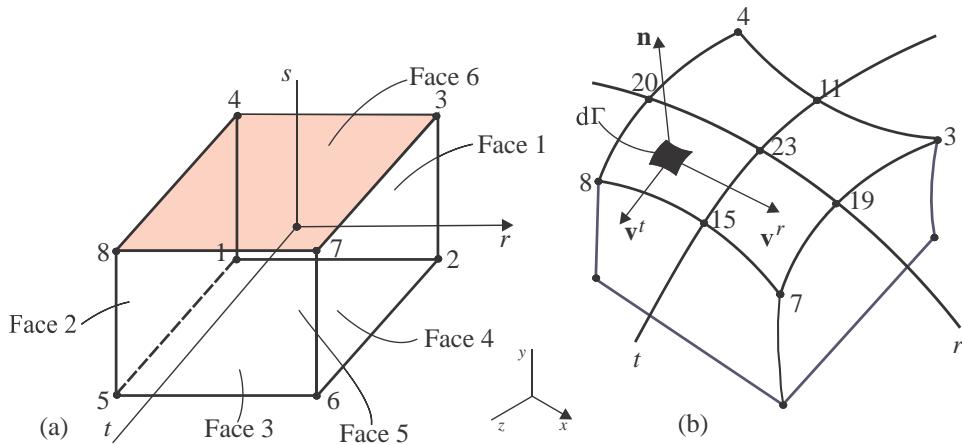


Figura 9.11: (a) numeração das faces de um elemento hexaédrico; (b) carga distribuída  $\bar{t}$  num ponto de coordenada  $x$  da face 6 e as componentes cartesianas do vetor normal. Também vetores tangentes  $v^r$  e  $v^t$ .

para o presente carregamento aplicado na borda 1, os termos de  $\mathbf{F}^e$  associados aos nós 1 e 4 são nulos. Assim, indicamos abaixo apenas os termos associados aos nós 2 e 3, que são mostrados na Figura 9.10b:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^e &= \left\{ \begin{array}{c} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{array} \right\}^e = \int_{s=-1}^1 p \mathbf{N}^T \left\{ \begin{array}{c} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \end{array} \right\} ds \\ &= \int_{s=-1}^1 p \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-s) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-s) \\ \frac{1}{2}(1+s) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+s) \end{bmatrix} \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} y_3 - y_2 \\ -(x_3 - x_2) \end{array} \right\} ds \end{aligned} \quad (9.42)$$

**Caso**  $p = const.$ , por exemplo, a integração resulta em

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{y3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}^e = \frac{p}{2} \begin{Bmatrix} y_3 - y_2 \\ -(x_3 - x_2) \\ y_3 - y_2 \\ -(x_3 - x_2) \end{Bmatrix}.$$

No caso particular em que a **borda 1 seja perpendicular ao eixo  $x$** , tem-se  $x_3 = x_2$  e  $y_3 - y_2 = L$ . Assim,

$$\boxed{\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{y3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}^e = \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad (9.43)$$

Esse resultado é mostrado na Figura 9.12b. Nota-se que a força resultante da carga normal é igualmente dividida entre os dois nós. No próximo exemplo, se verá que isso não é uma regra, mas uma exceção, quando se considera elementos de maior ordem.

### Carga normal em elemento plano biquadrático

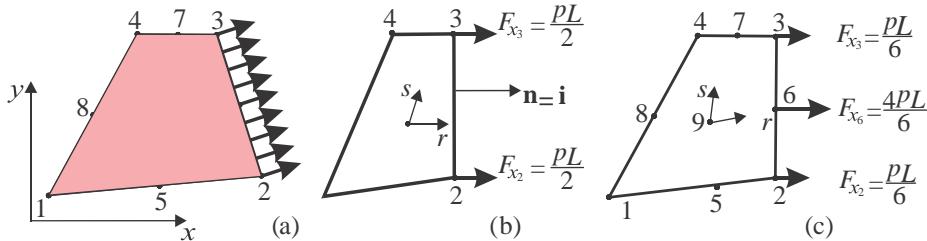


Figura 9.12: (a) Carga distribuída normal a uma borda perpendicular ao eixo  $x$ ; (b) força nodais equivalentes no elemento bilinear; (c) e biquadrático, sendo (b) e (c) para o caso em que a borda 1 seja perpendicular ao eixo  $x$ .

Consideramos o elemento biquadrático mostrado na Figura 9.12a, em que a borda 1 está sujeita a uma carga distribuída normal  $p$ . Tomamos as funções biquadráticas (8.162) associadas aos nós 2, 6 e 3 da borda 1 e as restrinjimos a  $r = +1$ :

$$\psi_2(s) = \frac{1}{2}s(s-1), \quad \psi_6(s) = (1-s^2), \quad \psi_3(s) = \frac{1}{2}s(s+1). \quad (9.44)$$

Comparando com (8.147), observa-se facilmente que essas são as mesmas funções lagrangeanas quadráticas 1-D. O mapeamento (9.22) fica

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \psi_2 x_2 + \psi_3 x_3 + \psi_6 x_6, \\ y = \psi_2 y_2 + \psi_3 y_3 + \psi_6 y_6, \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}s(s-1)x_2 + \frac{1}{2}s(s+1)x_3 + (1-s^2)x_6, \\ y = \frac{1}{2}s(s-1)y_2 + \frac{1}{2}s(s+1)y_3 + (1-s^2)y_6, \end{array} \right. \quad (9.45)$$

e as derivadas são

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{2} [(1+2s)(x_3 - x_2) - 4sx_6], \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2} [(1+2s)(y_3 - y_2) - 4sy_6]. \quad (9.46)$$

Com isso o jacobiano da transformação em (9.25) fica  $\det J = \sqrt{x_{,s}^2 + y_{,s}^2}$ . As componentes do vetor normal  $\bar{\mathbf{n}}$  são

**2. Caso a borda seja reta, com o nó 6 centrado e a carga normal seja quadrático:**

$$\mathbf{F}^e = \left\{ \begin{array}{c} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x6} \\ F_{y6} \end{array} \right\}^e = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} y_{32}(4p_2 - p_3 + 2p_6) \\ -x_{32}(4p_2 - p_3 + 2p_6) \\ -y_{32}[p_2 - 2(2p_3 + p_6)] \\ x_{32}[p_2 - 2(2p_3 + p_6)] \\ 2y_{32}(p_2 + p_3 + 8p_6) \\ -2x_{32}(p_2 + p_3 + 8p_6) \end{bmatrix}. \quad (9.51)$$

**3. Caso a borda seja reta, com o nó 6 centrado, sob carga uniforme  $p$ :**

$$\mathbf{F}^e = \left\{ \begin{array}{c} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x6} \\ F_{y6} \end{array} \right\}^e = \frac{p}{6} \begin{bmatrix} y_{32} \\ -x_{32} \\ y_{32} \\ -x_{32} \\ 4y_{32} \\ -4x_{32} \end{bmatrix}. \quad (9.52)$$

**4. Caso a borda seja reta e perpendicular ao eixo  $x$ , com o nó 6 centrado, sob carga uniforme  $p$ :**

$$\boxed{\mathbf{F}^e = \left\{ \begin{array}{c} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x6} \\ F_{y6} \end{array} \right\}^e = \frac{pL}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (9.53)$$

( $L = y_{32}$  é o comprimento da borda 1.) Esse resultado é mostrado na Figura 9.12c. Nota-se que a **força resultante da carga normal não é igualmente dividida entre os três nós**.

**Carga normal em elemento hexaédrico trilinear**

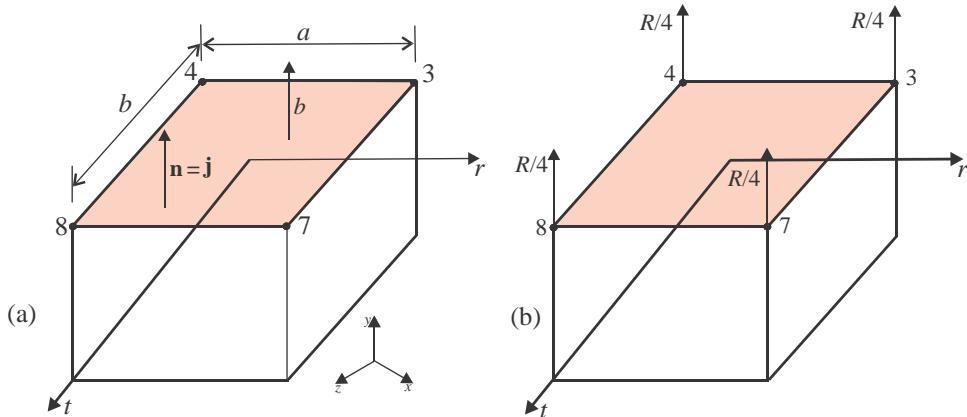


Figura 9.13: (a) Face 6 de um elemento hexaédrico trilinear. Face retangular perpendicular ao eixo  $y$ . (b) Forças nodais equivalentes para o elemento trilinear.  $R = pA_6$  é a força resultante sobre a face 6 do elemento e  $A_6$  é sua área.

Consideramos o elemento hexaédrico trilinear mostrado na Figura 9.13a, em que a face 6 está sujeita a uma carga distribuída normal uniforme  $p$ . Tomamos as funções trilineares (8.165) associadas aos nós 3, 4, 8 e 7 da face 6 e as restringimos a  $s = +1$ :

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} F_{y3} \\ F_{y4} \\ F_{y7} \\ F_{y8} \end{Bmatrix}^e = \frac{pA_6}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (9.59)$$

onde  $A_6 = ab$  é a área da face 6 do elemento. Esse resultado é mostrado na Figura 9.13b. Nota-se que o elemento tri-linear é o caso único em que **a força resultante da carga normal é igualmente dividida entre os quatro nós da face**. Esse resultado é válido apenas no presente caso em que a face do elemento seja retangular, sob carga normal unifome.

### Carga normal em elemento hexaédrico triquadrático

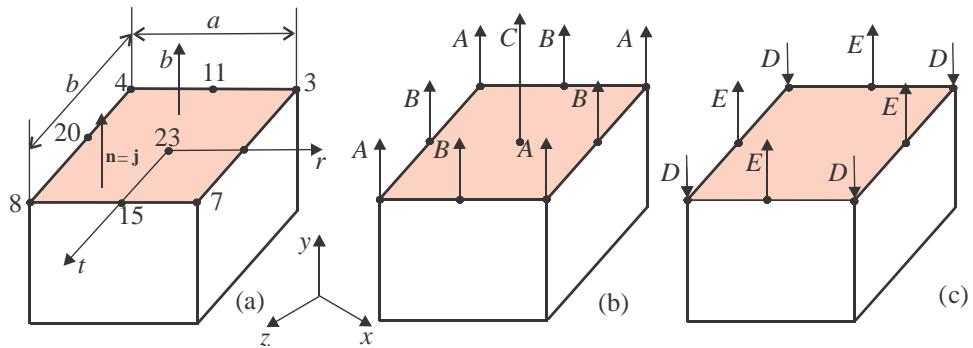


Figura 9.14: (a) Elemento hexaédrico triquadrático lagrangeano, com a face 6 retangular e perpendicular ao eixo  $y$ . (b) Forças nodais equivalentes no elemento lagrangeano.  $A = pA_6/36$ ,  $B = 4A$ ,  $C = 16A$ , onde  $A_6$  é a área da face 6 do elemento. (c) Forças nodais no elemento serendipity.  $D = pA_6/12$ ,  $E = 4D$ .

Consideramos o elemento hexaédrico triquadrático mostrado na Figura 9.14a, em que a face 6 está sujeita a uma carga distribuida normal uniforme  $p$ . Tomamos as funções tri-quadráticas (8.166) associadas aos nós 3, 4, 7, 8, 11, 15, 19 e 23 da face 6 e as restringimos a  $s = 1$  (de fato as equações se revertem nas 9 equações biquadráticas (8.162), substituindo  $r \rightarrow t$  e em seguida  $s \rightarrow r$ , e procede-se à reenumeração dos nós intrínsecos na face):

$$\begin{aligned} \psi_4(r, t) &= \frac{1}{4}tr(t-1)(r-1), & \psi_{20}(r, t) &= \frac{1}{2}r(1-t^2)(r-1), \\ \psi_8(r, t) &= \frac{1}{4}tr(t+1)(r-1), & \psi_{15}(r, t) &= \frac{1}{2}t(t+1)(1-r^2), \\ \psi_7(r, t) &= \frac{1}{4}tr(t+1)(r+1), & \psi_{19}(r, t) &= \frac{1}{2}r(1-t^2)(r+1), \\ \psi_3(r, t) &= \frac{1}{4}tr(t-1)(r+1), & \psi_{11}(r, t) &= \frac{1}{2}t(t-1)(1-r^2), \\ && \psi_{23}(r, t) &= (1-t^2)(1-r^2). \end{aligned} \quad (9.60)$$

As etapas da dedução são as mesmas do elemento trilinear, de forma que são descritas aqui apenas de forma abreviada. Como a superfície é considerada perpendicular ao eixo  $y$ , tem-se que  $y = const.$ , e  $y_{,r} = y_{,t} = 0$ , e se tem que as componentes do vetor normal  $\bar{\mathbf{n}}$ , obtidas de (9.30), são

$$\bar{\mathbf{n}} = \begin{Bmatrix} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \\ \bar{n}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ J_{11}J_{33} - J_{31}J_{13} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (9.61)$$

O vetor força nodal  $\mathbf{F}^e$  do elemento triquadrático sob carga normal uniforme na face 6 é obtido aplicando (9.37). Nota-se que o vetor  $\mathbf{F}^e$  tem termos associados a todos os 27 nós do elemento, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Entretanto, para o presente caso em que a face 6 é perpendicular ao

### 9.3 Exemplos e comentários sobre modelagem

#### 9.3.1 Exemplo 9.5 - Barra de seção retangular sob torção – curvas de convergência

Considere o problema de uma barra de seção quadrada sob torção, como na Figura 9.15. As dimensões da barra são: comprimento  $L = 100$  mm e seção transversal com lados  $2a \times 2b = 10$  mm  $\times 10$  mm. O momento torçor  $M = 1.000$  Nmm é aplicado como um binário de forças numa extremidade e a outra extremidade é engastada contra rotação. O material tem módulo de elasticidade  $E = 200.000$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ . Determinar curvas de convergência para a tensão máxima e para o ângulo de torção, utilizando malhas regulares de elementos hexaédricos triquadráticos.

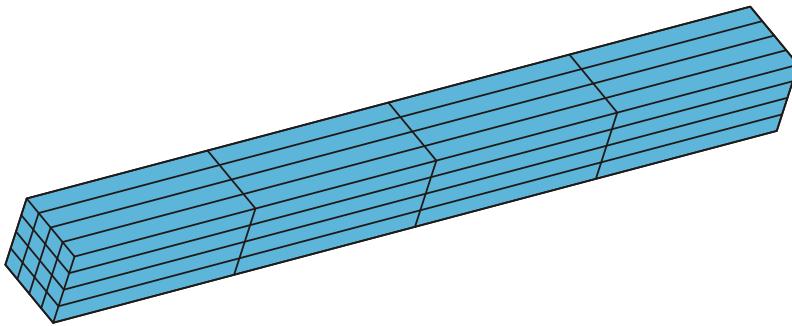


Figura 9.16: Malha de  $4 \times 4 \times 4$  elementos.

*Solução:*

O problema de torção de barras retas com seção transversal uniforme, não circular, tem solução em séries dada por St.-Venant em 1853, e sua solução é descrita sucintamente em Timoshenko [101]. A solução é dada a partir da função de empenamento  $\psi(x, y)$  para um valor arbitrário do **ângulo de torção por unidade de comprimento**  $\theta$ . O campo de deslocamentos na barra é dado por:

$$u = -\theta yz, \quad v = \theta xz, \quad \text{e} \quad w = \theta \psi, \quad (9.64)$$

onde  $z$  é a coordenada na direção axial da barra e  $x$  e  $y$  são contidos no plano de sua seção transversal. Uma vez que  $\theta$  é considerada, por hipótese, constante na barra inteira,  $\psi(x, y)$  define o deslocamento de um ponto arbitrário  $(x, y)$  da seção na direção axial. Esse deslocamento é nulo apenas no caso de seção circular. A função de empenamento é a solução da equação  $\nabla^2 \psi = 0$ . A tensão máxima ocorre no centro do lado mais largo da seção. Caso  $b > a$  o máximo ocorre nas coordenadas  $(x; y) = (\pm a; 0)$ , e é dado por

$$\tau_{\max} = \tau_{xz}(0; \pm a) = 2G\theta a - \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right)}. \quad (9.65)$$

A tensão cisalhante é nula no centro da seção e nos vértices  $(x; y) = (\pm a; \pm b)$ . O **ângulo de torção** se relaciona ao momento por

$$M_t = \frac{1}{3} G \theta (2a)^3 (2b) \left[ 1 - \frac{193a}{\pi^5 b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) \right]. \quad (9.66)$$

Calculando os somatórios com precisão adequada, essas expressões simplificam-se para

$$\boxed{\tau_{\max} = k_2 G \theta a, \quad \text{e} \quad M_t = k_1 G \theta (2a)^3 (2b)}$$

(9.67)

Eliminando  $\theta$ , tem-se a relação

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{k_2 G \theta (2a)^3 (2b)}, \quad \text{onde} \quad k_2 = \frac{k_1}{k} \quad (9.68)$$

As constantes  $k$ ,  $k_1$  e  $k_2$  dependem apenas da razão  $b/a$ . Para o exemplo, onde  $b/a = 1$ , as constantes podem ser calculadas para 9 algarismos significativos:  $k = 0,675.314.483.3$ ,  $k_1 = 0,140.577.014.9$  e  $k_2 = 0,208.165.259.99$ .

Para os dados do problema, na seção central da barra, tem-se os seguintes valores analíticos:  $\bar{\theta} = \theta L/2 = 4,445.961.525 \cdot 10^{-4}$  rad,  $\tau_{\max} = 4,803.875.536.39$  MPa.

## Modelo de MEF

Para simular essa solução, o modelo de elementos finitos deve ter o engaste aplicado conforme (9.64). Isso foi feito impondo na seção  $z = 0$  as condições:  $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$ , e  $w(0; 0, 0) = w(0, 0, L) = u(0, 0, L) = v(0, 0, L) = 0$ . Não se pode impor  $w(x, y, 0) = 0$  em toda a face da extremidade, por que isso anularia a função de empenamento  $\psi$ , como visto em (9.64).

Foi definida uma sequência de **malhas regulares** de elementos sólidos hexaédricos trilineares e triquadráticos. Os elementos trilineares são de 8 nós, sem função bolha, e os elementos triquadráticos usam funções de aproximação do tipo serendipity, tal que apenas as arestas do elemento tem 3 nós, porém as faces possuem apenas 8 nós, como na Figura 8.31b. Assim, o elemento tem 20 nós.

Para simplificar a apresentação dos resultados, as malhas foram definidas usando o mesmo número  $\bar{N}$  de elementos nas três direções da barra. A Figura 9.16 mostra a malha obtida com  $4 \times 4 \times 4$  elementos (isto é,  $\bar{N} = 4$ ). Ao longo do exemplo foram utilizadas malhas com  $\bar{N} = 4, 6, 8, 10, 12$  e  $16$  elementos.

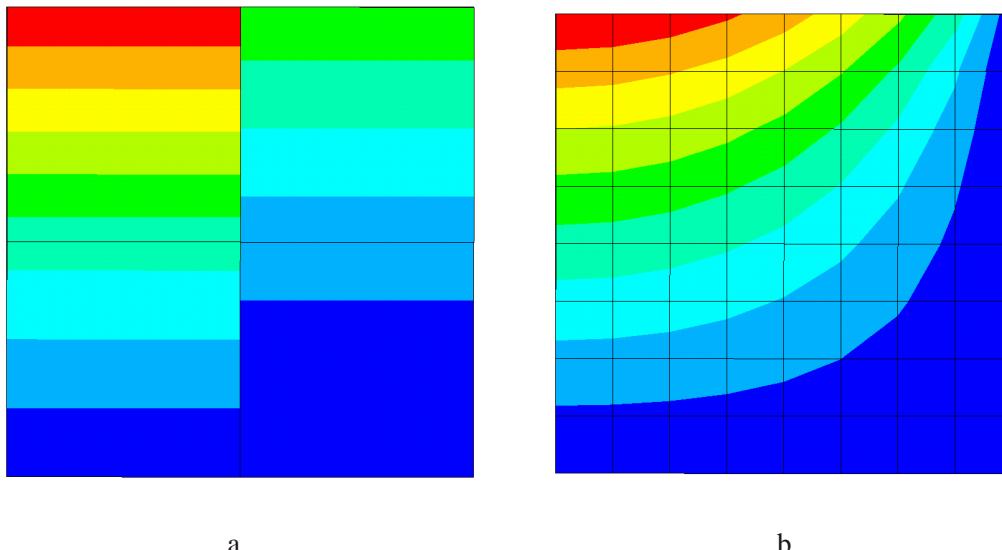


Figura 9.17: Tensões cisalhantes  $\tau_{xz}$  na superfície central da barra, obtida por: (a) uma malha de  $4 \times 4 \times 4$  elementos trilineares, com distribuição descontínua nas interfaces dos elementos; (b) malha de  $16 \times 16 \times 16$  elementos trilineares.

O momento foi aplicado via um binário de forças concentradas numa extremidade da barra, o que gera concentrações de tensões incompatíveis com a solução analítica que se busca. Entretanto, devido ao princípio de St.Venant, sabe-se que em regiões da barra distantes dessa extremidade, as tensões não são afetadas fortemente pela forma como as cargas são aplicadas. Tipicamente, a região mais intensamente perturbada é aproximadamente igual à dimensão maior da seção transversal, extendendo-se a partir da extremidade da barra. Como o comprimento da barra é 100 mm e a seção tem lados de 10 mm, a região menos perturbada tem comprimento de cerca de 80 mm na região central da barra. Assim, tomamos o campo de tensões na seção central da barra para fazer

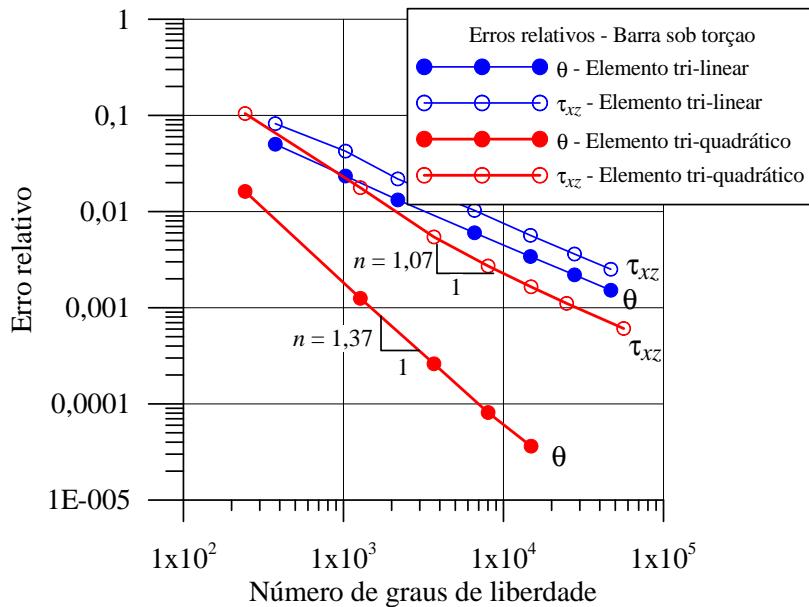


Figura 9.19: Curvas de erro relativo de ângulo de torção e de tensão máxima na seção central.

- As curvas de erro versus número de graus de liberdade, num diagrama log-log, tendem a uma reta conforme cresce o número de graus de liberdade do modelo. A inclinação da reta é a **taxa de convergência**  $n$ ;
- Para um dado número de graus de liberdade do modelo, em geral a precisão cresce com o aumento do grau das funções de aproximação. No presente caso, a precisão obtida com elementos quadráticos é superior àquela de elementos lineares.
- Para um dado número de graus de liberdade do modelo, em geral a precisão obtida para as deformações (consequentemente para as tensões) é inferior à precisão obtida para os deslocamentos;
- A taxa de convergência para as tensões é inferior à taxa dos deslocamentos (no caso, o ângulo de torção). No presente exemplo, a Figura 9.19 mostra que se conseguiram taxas de convergência de  $n = 1,37$  e  $n = 1,07$  para o deslocamento e para a tensão, respectivamente, com o uso do elemento triquadrático.
- As taxas de convergência obtidas nesse exemplo são associadas ao tipo de malha utilizado. No caso, todas as malhas tem o mesmo número de elementos ao longo de cada uma das três direções da barra. Para cada definição de malha diferente dessa que se use, diferentes taxas serão obtidas.
- A taxa de convergência é maior quanto maior for o grau das funções de aproximação utilizadas. No presente exemplo, um refino de malha é mais eficiente em melhorar a precisão com elementos quadráticos que com elementos lineares.

Uma explicação simplificada do motivo pelo qual a precisão dos deslocamentos é superior à das deformações e tensões é baseada no fato de que as deformações são obtidas por diferenciação dos deslocamentos. Logo, grosso modo, um elemento de funções lineares, por exemplo, aproxima os deslocamentos linearmente, e as deformações são aproximadas por constantes no elemento. Em geral, as funções que aproximam as deformações no elemento são de um grau menor que as do deslocamentos.

#### Observações:

As observações acima sobre a forma de convergência do MEF estão listadas apenas como tendências gerais. De fato, diversos fatores afetam esse comportamento, como por exemplo:

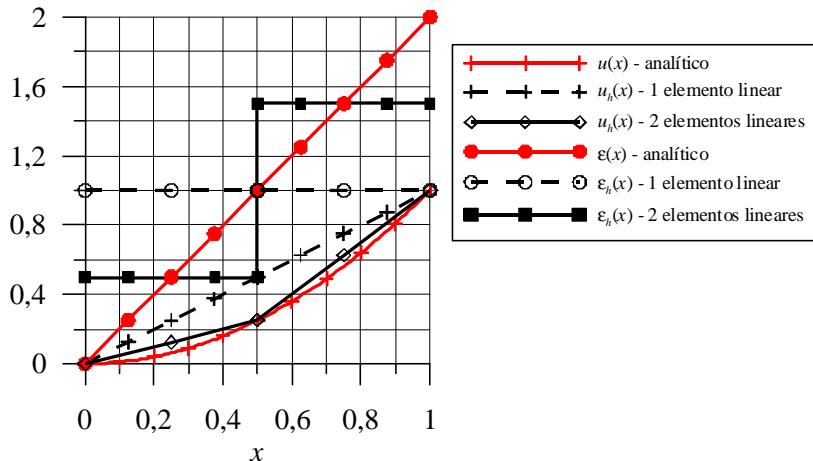


Figura 9.20: Aproximações do deslocamento  $u(x) = x^2$  e de sua deformação, usando um e dois elementos lineares no domínio  $[0;1]$ .

1. Nem toda sequencia de malhas apresenta curvas de convergência nítidamente lineares, mas podem se apresentar de forma irregular, embora sempre com tendência geral à convergência, caso não ocorra algum tipo de patologia numérica no modelo, como o *locking*.
2. A precisão e a taxa de convergência dependem de diversos fatores, como
  - (a) tipo de concentração de tensões,
  - (b) distribuição e a forma da malha (malha uniforme ou mais refinada em regiões localizadas),
  - (c) A presença de elementos regulares ou distorcidos, de elementos triangulares (ou tetraédricos) ou de elementos quadrangulares (ou hexaédricos).

Sabe-se que elementos regulares são mais precisos que elementos distorcidos, e que quanto maior a distorção na forma do elemento, menor sua precisão.

Regiões com alto gradiente de tensões precisam ser modeladas com mais elementos que em regiões de baixas tensões. O motivo é que altas tensões são provenientes de altas deformações, que são calculadas como as derivadas do campo de deslocamentos. Logo, altos gradientes de tensões numa região do corpo significam que ali os deslocamentos possuem altos gradientes. Logo, torna-se necessário uma quantidade adequadamente alta de elementos para aproximar esse campo. Isso pode ser visualizado considerando, por exemplo, duas funções analíticas para o deslocamento numa região,  $u_1(x) = x$  e  $u_2(x) = x^2$ , que geram os campos de deformação  $\epsilon_1(x) = 1$  e  $\epsilon_2(x) = 2x$ .

Para aproximar o campo linear  $u_1(x)$  num domínio  $[0;1]$ , usando elementos lineares, bastaria um elemento, que gera a deformação exata  $\epsilon_1(x) = \epsilon_{1h}(x) = 1$  (o índice  $h$  é utilizado para indicar que o valor é uma aproximação). Para aproximar o campo quadrático  $u_2(x)$  com elementos lineares, um único elemento geraria uma aproximação bastante pobre da deformação,  $\epsilon_{2h}(x) = 1$ . Porém, dois elementos podem produzir  $\epsilon_{2h}(x) = 0,5$  no elemento 1 e  $\epsilon_{2h}(x) = 1,5$  no elemento 2, como pode ser visualizado na Figura 9.20. Claramente, aumentando o número de elementos, melhor a aproximação para a deformação. Entretanto, sempre se terá uma aproximação descontínua entre os elementos, e essa **descontinuidade tende a decrescer com o refino da malha**.

Nota-se claramente que, quanto maior for o gradiente da função que se deseja aproximar numa certa região do corpo, mais refinada deve ser a malha ali. Esse efeito será ilustrado mais detalhadamente no próximo exemplo.

### 9.3.2 Exemplo 9.6 - Entalhe em barra sob tração - refino não-uniforme

Considere o problema de uma barra tracionada com um entalhe semi-circular como na Figura 9.21. As dimensões são  $D = 30$  mm,  $d = 20$  mm,  $L = 45$  mm,  $t = 3$  mm,  $r = 4$  mm. Cargas distribuídas

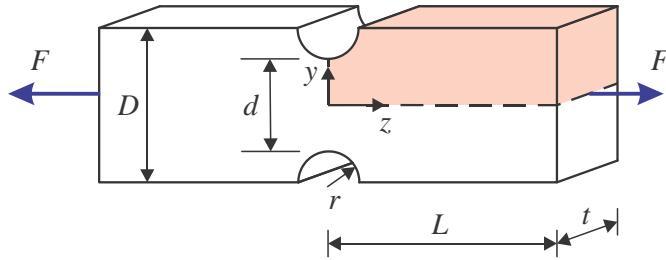
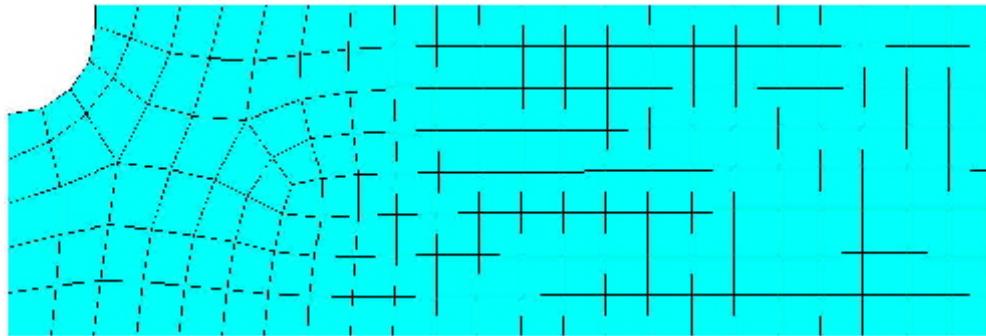


Figura 9.21: Geometria da barra tracionada com entalhe.

uniformes são aplicadas nas extremidades de tal forma que sua resultante seja  $F = 1.800$  N. O material tem módulo de elasticidade  $E = 200.000$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ .

Figura 9.22: Malha grosseira, quase uniforme, de elementos quadrangulares de lados aproximadamente iguais a  $r/2$ .

Esse problema permite identificar o comportamento do MEF em situações de concentração de tensão geradas por irregularidades geométricas. Poderemos identificar o efeito de sequências de malhas uniformes e não-uniformes sobre a convergência. Adicionalmente, veremos a diferença de precisão entre malhas de elementos triangulares e quadrangulares em problemas de **estado plano de tensões**.

*Solução:*

Esse é um problema clássico em que o fator de concentração de tensão  $K_t$  na seção do entalhe é conhecido a partir dos valores adimensionais geométricos, isto é:

$$\frac{r}{d} = \frac{4}{20} = 0,2 \quad \text{e} \quad \frac{D}{d} = \frac{30}{20} = 1,5.$$

Um manual de  $K_t$  produz o valor  $K_t = 2,216$ , baseado na seção mínima. Dessa forma, a tensão nominal na seção e a tensão máxima no fundo do entalhe são:

$$\sigma_o = \frac{F}{td} = \frac{1.800}{4 \times 20} = 30 \text{ MPa} \quad \text{e} \quad \sigma = K_t \sigma_o = 2,216 \times 30 = 66,484 \text{ MPa}.$$

Esse problema é tipicamente modelado como um estado plano de tensões, para espessuras pequenas o suficiente. Consideraremos inicialmente uma sequência de malhas quase uniformes de elementos triangulares e quadrangulares, tanto lineares quanto quadráticos. Uma vez que o problema possui dois planos de simetria (de geometria, carregamento, condições de contorno e propriedades de material), pode-se fazer a análise de elementos finitos apenas da região cinza mostrada na Figura 9.21. As Figuras 9.22 mostra uma malha grosseira quase uniforme de elementos quadrangulares. Essa malha tem elementos de lados de tamanho aproximadamente iguais a  $r/2$ . Uma sequência de malhas pode ser gerada, com elementos de tamanhos aproximados  $r/3$ ,  $r/4$ , etc.

Os resultados para o erro relativo na tensão normal máxima, no fundo do entalhe, obtida por refino quase uniforme de elementos triangulares e quadrangulares são mostrados na Figura 9.23. O

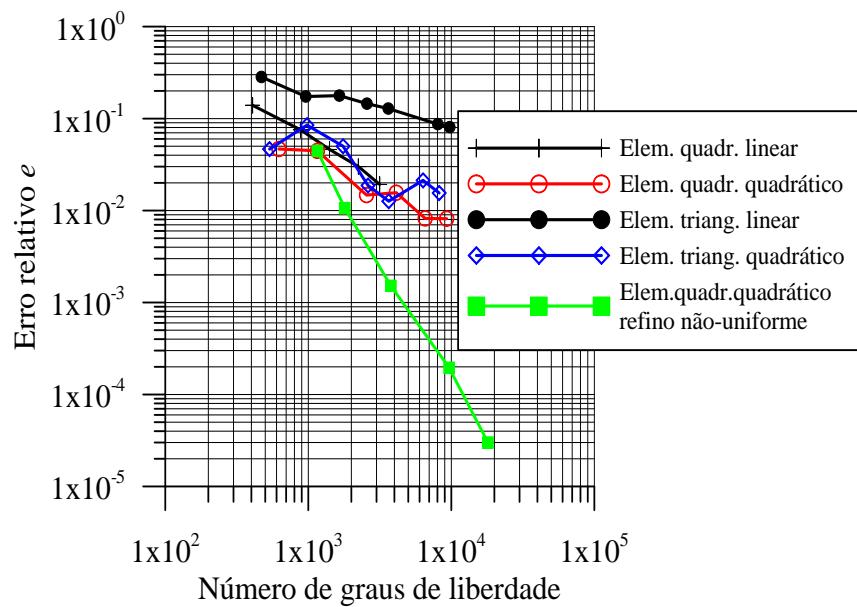


Figura 9.23: Erros relativos para a tensão normal máxima no problema da barra com entalhe, em estado plano de tensões, com malha uniforme.

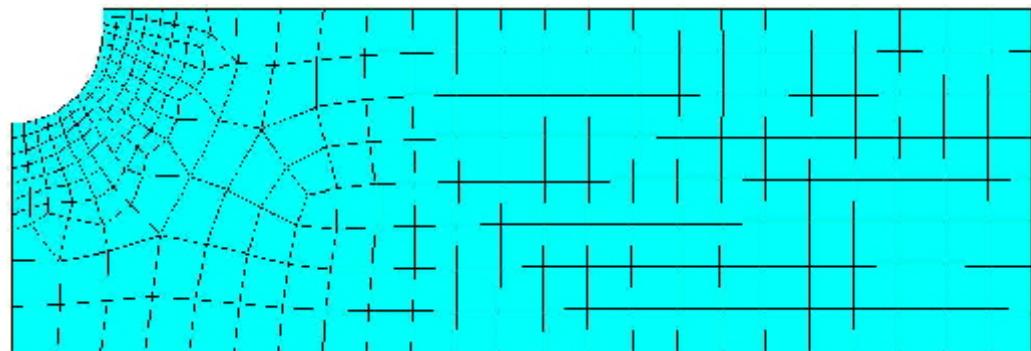


Figura 9.24: Malha 1 com refino localizado, obtido com  $m = 2$  aplicado na malha da Figura 9.22.

disponível em softwares comerciais de elementos finitos, embora diferenças possam ser obtidas na malha resultante dependendo do algoritmo utilizado.

Os resultados para o erro relativo na tensão normal máxima, no fundo do entalhe, obtida por refino não-uniforme de elementos quadrangulares são vistos na Figura 9.23. Observa-se claramente a alta taxa de convergência obtida em relação às curvas de refino uniforme. A Figura 9.26 mostra a distribuição da tensão  $\sigma_x$  obtida pela malha 4. Em toda a região próxima da extremidade da barra a tensão é aproximadamente igual à tensão nominal,  $\sigma_o = F/A = 30 \text{ MPa}$ . Então a região perturbada é bastante próxima ao fundo do entalhe.

---

## 9.4 Exercícios

8.1 Qual a diferença entre vetor força consistente e não consistente?

**Exercícios de programação.**

8.2 Utilize um programa aberto de elementos finitos que já contenha elementos de estado plano de tensões. Implemente a formulação de elemento com **função bolha**, modificando o elemento de quatro nós bilinear para incluir uma função quadrática extra associada a um quinto nó central.

8.3 Modifique o programa para incorporar e testar a aplicação de condições de contorno de deslocamento prescrito não nulo.

8.4 Considere uma viga de seção retangular. Modele-a com elementos de elasticidade plana com coeficiente de Poisson nulo, e aplique um carregamento coplanar que simule uma carga de flexão de viga. Compare com a solução exata de viga, em deflexão e tensões normal e cisalhante transversal. Compare com os resultados obtidos com malhas uniformes de elementos bilineares e biquadráticos. Avalie o efeito da função bolha. Modifique o coeficiente de Poisson para 0.25 e avalie a resposta comparando com a solução com  $v = 0$ .

8.5 Programe uma rotina que receba os dados de uma malha regular e aplique um parâmetro que modifique as coordenadas dos nós internos pela multiplicação das coordenadas originais pelo parâmetro, de forma a gerar distorções arbitariamente grandes nos elementos. Considere uma viga de seção retangular modelada por elementos de estado plano de tensão, sob flexão plana.

- (a) Analise o comportamento do erro versus distorção de malha;
- (b) Analise o efeito de sub-integração completa e seletiva para malhas distorcidas;
- (c) Tente identificar uma situação com locking de membrana. Busque na literatura algum caso de malha e carregamento já identificado.

8.6 Programe a entrada de dados e o cálculo do vetor força variável num elemento de elasticidade plana.

- (a) Programa a entrada de dados e o cálculo do vetor força consistente para carregamento de contorno variando quadraticamente ao longo do lado do elemento.
- (b) Programa a entrada de dados e o cálculo do vetor força consistente para carregamento de contorno nas direções normal e tangencial ao contorno do elemento.

8.7 Programe o pós-processamento de tensões nos elementos de elasticidade plana via:

- (a) Médias nodais;
- (b) Médias ponderadas;