

Logo, o trabalho realizado pela força  $\mathbf{F}$  ao longo de um caminho  $c$  é dado por

$$U = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (14.2)$$

i.e.,  $U$  é a integral de linha de  $\mathbf{F}$  ao longo da linha  $c$ . Outra maneira de escrever o trabalho é:

$$U = \int_c \|\mathbf{F}\| \|d\mathbf{x}\| \cos \alpha, \quad (14.3)$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma do vetor e  $\alpha$  é o ângulo entre a força e a direção de deslocamento. Essa representação indica alguns casos em que as forças que não realizam trabalho:

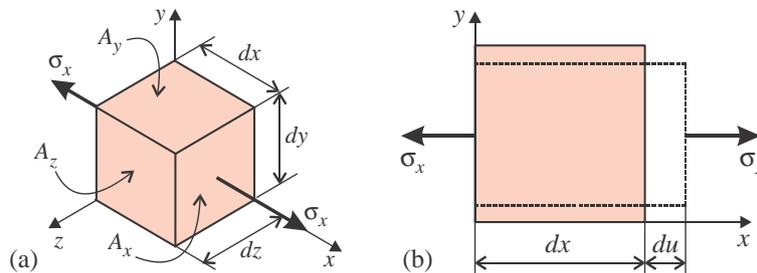
- Forças que atuam perpendiculares ao deslocamento do ponto;
- Forças aplicadas em pontos fixos, como apoios considerados rígidos, que não sofrem movimento.

Com a definição geral dada acima, o objetivo a partir de agora é aplicá-la à modelagem e solução de problemas de mecânica dos corpos deformáveis. Inicia-se o estudo a partir de dois casos simples, como segue.

## 14.1 Trabalho de deformação

### 14.1.1 Trabalho de deformação para estado uniaxial de tensão

Considere um elemento diferencial de dimensões  $dx \times dy \times dz$  como ilustrado na Figura 14.2a, submetido apenas à componente de tensão  $\sigma_{xx}$ . Sob a ação deste estado uniaxial de tensões, o corpo se deforma nas três direções. Para um **material elástico-linear**, essas deformações são dadas pela lei de Hooke, eq.(4.60), página 120, como:



**Figura 14.2:** (a) Tensão normal uniaxial atuando num elemento diferencial de volume; (b) tensão e deformações num elemento diferencial.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad (14.4)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $E$  é o módulo de elasticidade do material. Como ilustrado na Figura 14.2b, a relação entre a variação do comprimento,  $du$ , da linha  $dx$ , e a deformação  $\varepsilon_x$ , é dada através de:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (14.5)$$

(De fato, essa é uma das equações das relações deformação-deslocamento, eq.(4.12), página 97.) Pode-se escrever que:

$$du = \varepsilon_x dx. \quad (14.6)$$

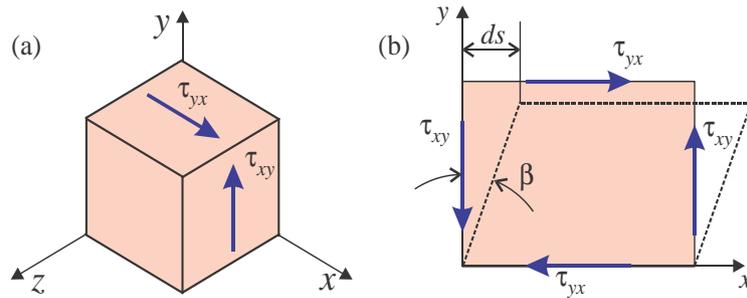
Lembrando ainda a definição de tensão em termos das forças locais,

deformação em energia potencial ou energia de deformação armazenada elasticamente no material, sem parcela de energia cinética.

A área hachurada superior na Figura 14.3a da linha é denominada de **energia complementar de deformação**. Como o comportamento do material é linear, o valor das duas áreas, inferior e superior são iguais. Tomando da lei de Hooke, pode-se escrever a densidade de energia de deformação de duas formas diferentes:

$$U_o = \frac{\sigma_x^2}{2E} \quad \text{ou} \quad U_o = \frac{E}{2} \varepsilon_x^2. \quad (14.13)$$

### 14.1.2 Trabalho de deformação para o caso de cisalhamento puro



**Figura 14.4:** (a) Tensão cisalhante num elemento diferencial; (b) tensão e deformação cisalhante num elemento diferencial.

Consideramos um elemento diferencial de um corpo, numa posição arbitrária, sob a ação apenas das tensões cisalhantes  $\tau_{xy}$ , como na Figura 14.4a. Sob a ação das deformações cisalhantes o elemento diferencial sofre deslocamentos que causam alterações dos ângulos retos das faces do elemento de volume. Estas deformações são representadas na Figura 14.4(b), onde se fez um tombamento do trapezio para melhor identificação da deformação angular  $\beta$ . Considera-se que a deformação cisalhante seja  $\gamma_{xy} = \beta$ .

Em seguida, considera-se o material elástico-linear, tal que a lei de Hooke, eq.(4.60), página 120, toma a forma simples

$$\beta = \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (14.14)$$

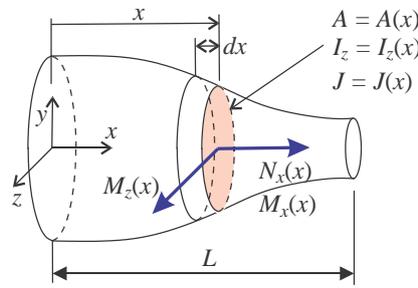
onde  $G$  é o modulo de elasticidade cisalhante.

A única força que se desloca na direção do deslocamento é aquela associada à tensão no topo do elemento. Na face inferior a força não sofre deslocamento, e nas duas faces laterais a força é perpendicular ao deslocamento, de forma que em ambos os casos o trabalho da força é zero. Lembramos que aqui nos restringimos a pequenos deslocamentos e rotações. Também, de forma mais rigorosa, ambas as faces do elemento, inferior e superior, se transladam no sentido  $x$ . Entretanto, na presente dedução, importa apenas o deslocamento relativo entre elas, já que a força atuante em ambas as faces é a mesma.

O trabalho de deformação cisalhante no elemento diferencial do corpo é dado por  $dU = dF_x ds/2$ , onde  $dF_x = \tau_{yx} dz dx$  e  $ds = \gamma_{xy} dy$  (desde que se tenha pequenas deformações). Assim tem-se

$$dU = \frac{1}{2} \underbrace{\tau_{yx} dz dx}_{dF_x} ds = \frac{1}{2} \tau_{yx} \gamma_{xy} \underbrace{dx dy dz}_{dV}. \quad (14.15)$$

Na segunda igualdade utilizou-se a condição de simetria do tensor tensão, tal que  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ . Em seguida, substituindo, obtém-se a **densidade de energia de deformação elástica** como:



**Figura 14.5:** Barra de seção transversal variável, sujeita a esforços normal e de momentos fletor e torçor.

$$U = \int_{x=0}^L \int_A \frac{N_x^2}{2EA^2} (dydz) dx. \quad (14.20)$$

Uma vez que  $N_x(x)$  e  $A(x)$  independem de  $y$  e  $z$ , pode-se tirar o integrando para fora da integral interna, resultando

$$U = \int_{x=0}^L \frac{N_x^2}{2EA^2} \underbrace{\left[ \int_A dydz \right]}_A dx.$$

Agora a integral interna resulta apenas no valor da área  $A$  da seção transversal. Com isso, a energia de deformação de uma barra sob esforço normal é dada por:

$$U = \int_0^L \frac{N_x^2}{2EA} dx. \quad (14.21)$$

## 14.2.2 Energia de deformação para o problema de flexão

Considera-se uma barra de comprimento  $L$ , como na Figura 14.5, com seção transversal de momento de inércia  $I_{zz}$ , eventualmente variável, i.e.,  $I_{zz} = I_{zz}(x)$ , sob a ação de cargas transversais, tal que o esforço de momento fletor seja descrito por uma função  $M_z(x)$ . A energia de deformação na barra como um todo é dada por

$$U = \int dU = \int_V U_o dV. \quad (14.22)$$

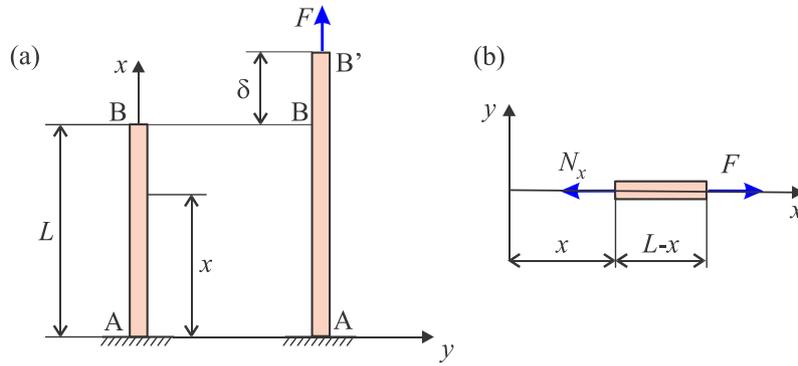
A densidade de energia de deformação para um estado uniaxial de tensões é dada na eq.(14.13),  $U_o = \sigma_x^2/2E$ . Assim, a energia de deformação total da viga é

$$U = \int dU = \int_V U_o dV = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV. \quad (14.23)$$

Como no caso da barra sob carga axial, o volume diferencial é separado em duas partes para facilitar a integração:  $dV = dA dx = (dydz)dx$ . A variação da tensão normal na viga é dada pela **fórmula de flexão**,  $\sigma_x = -M_z y/I_{zz}$ , como visto na seção 8.2, página 281. Então a energia na viga fica

$$U = \int_{x=0}^L \int_A \frac{1}{2E} \left( -\frac{M_z y}{I_{zz}} \right)^2 (dydz) dx. \quad (14.24)$$

Como  $M_z$  e  $I_{zz}$  independem de  $y$  e  $z$ , o integrando pode sair da integral interna, o que resulta em:



**Figura 14.6:** (a) Configuração deformada em barra sob carga axial e (b) esforços.

Como  $A$  e  $F$  são independentes de  $x$ , a energia na barra fica

$$U = \frac{F^2 L}{2EA}. \quad (14.38)$$

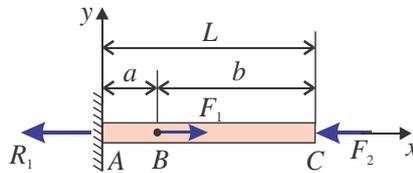
Assim, igualando o trabalho realizado pelas forças externas à energia de deformação elástica, eq.(14.35), tem-se:

$$\frac{1}{2} F \delta = \frac{F^2 L}{2EA}, \quad (14.39)$$

a qual, com as devidas simplificações, reduz-se à conhecida expressão  $\delta = FL/EA$ , já obtida no Capítulo 4 através de considerações de equilíbrio.

### 14.3.2 Exemplo 14.2 - Calcular deslocamentos axiais numa barra

Considerar a barra mostrada na Figura 14.7, sob a ação das forças  $F_1$  e  $F_2$  aplicadas nas seções B e C. Calcular os deslocamentos nessas seções.



**Figura 14.7:** Dados do Exemplo 14.2.

*Solução:*

A reação axial é obtida por equilíbrio:  $R_1 = F_1 - F_2$ . O esforço normal em qualquer seção do trecho AB é  $N_{AB} = F_1 - F_2$  e no trecho BC é  $N_{BC} = -F_2$ . A **energia de deformação elástica** da barra é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \frac{N_x^2}{EA} dx = \frac{1}{2EA} \left[ \int_{x=0}^a (N_{AB})^2 dx + \int_{x=a}^L (N_{BC})^2 dx \right], \quad (14.40)$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2EA} [F_1 (F_1 - 2F_2) a + F_2^2 L].$$

O trabalho realizado pelas forças externas é dado por:

$$W_e = \frac{1}{2} F_1 \delta_B + \frac{1}{2} F_2 \delta_C, \quad (14.41)$$

onde  $\delta_B$  e  $\delta_C$  são os deslocamentos axiais nas seções B e C, respectivamente. Assim, usando o balanço de energia, eq.(14.35), tem-se

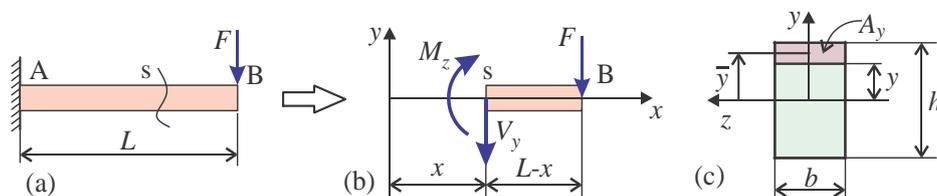
$$\frac{1}{2}F_1\delta_B + \frac{1}{2}F_2\delta_C = \frac{1}{2EA} [F_1 (F_1 - 2F_2) a + F_2^2 L]. \quad (14.42)$$

Como existem duas incógnitas,  $\delta_B$  e  $\delta_C$ , e apenas uma equação, a solução deste problema é impossível com este método.

- **Observação 1:** No processo de solução é necessário arbitrar um sentido positivo para os deslocamentos nos pontos que se encontram sob ação das forças. Uma vez que o método é baseado em energia e trabalho, as forças e deslocamentos envolvidos são considerados apenas em módulo. No cálculo do trabalho, por exemplo na parcela devida a  $F_1$ , é necessário aplicar  $F_1$  sobre o deslocamento do ponto,  $\delta_A$ . Entretanto, no início dos cálculos, o valor e o sentido de  $\delta_A$  são desconhecidos. O procedimento a ser usado consiste em arbitrar um sentido positivo para o deslocamento. Ao final dos cálculos, com a identificação do seu valor numérico, o seu sinal indicará o sentido do deslocamento em relação ao que foi inicialmente convencionado como positivo. No presente exemplo, foi convencionado que  $\delta_A$  seria positivo se no sentido de  $F_1$ , e  $\delta_B$  positivo se no sentido de  $F_2$ , i.e., a seção C se moveria para a esquerda. Pode acontecer que, ao final dos cálculos, se obtenha um valor  $\delta_B < 0$ , significando que o ponto C se deslocaria, de fato, para a direita.
- **Observação 2:** Pode-se afirmar que o método da energia, em sua forma simples, tem aplicação bastante restrita no cálculo dos deslocamentos em estruturas. Isso ocorre porque, num problema arbitrário, pode haver uma infinidade de pontos em que sejam necessário a determinação do deslocamento, enquanto existe apenas uma equação de balanço de energia. Como conseqüência, o uso direto do balanço de energia não se constitui num procedimento útil como forma de solução de problemas de mecânica dos sólidos. De fato, o uso dos conceitos de trabalho e energia, em problemas de mecânica dos sólidos requer o uso de formulações especiais, baseados em teoremas adequados que permitam o cálculo em situações reais. Os **teoremas de Castigliano**, vistos na seção 14.4, se constituem em alguns desses métodos.

### 14.3.3 Exemplo 14.3 - Deslocamento máximo em viga em balanço

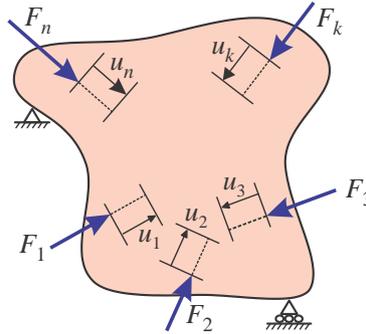
Apesar de suas grandes limitações, o método do balanço de energia utilizado nos exemplos anteriores pode ser utilizado com sucesso na solução do presente problema, que consiste na determinação da deflexão máxima na viga em balanço, de seção retangular, mostrada na Figura 14.8a. Esse problema pode ser facilmente resolvido usando o método da integração da equação diferencial da curva elástica, vista no Capítulo 12. Entretanto, aquele método, na forma como foi vista, permite apenas considerar o efeito do esforço de momento fletor. Agora, desejamos obter uma solução que incorpore tanto o momento fletor quanto o esforço cortante. A solução desse problema permitirá chegar a algumas conclusões interessantes e abrangentes para os problemas de flexão de vigas e placas em geral.



**Figura 14.8:** (a) Viga em balanço sob carga concentrada; (b) esforços numa seção arbitrária; (c) área auxiliar para o cálculo do momento estático  $Q_z$ .

*Solução:*

de  $F_k$ . Como se considera o trabalho, o termo  $u_k$  a ser considerado não é o deslocamento sofrido pelo ponto de aplicação da força, mas apenas **a componente desse deslocamento na direção colinear à força** como mostrado na figura.



**Figura 14.9:** Forças aplicadas a um corpo e os deslocamentos associados.

### Primeiro Teorema de Castigliano

O enunciado do primeiro teorema pode ser posto da seguinte forma: **A força aplicada num ponto de um sistema elástico linear é dada pela derivada parcial da energia de deformação em relação à componente de deslocamento sofrido pelo ponto, (sendo força e deslocamentos colineares e na mesma linha de ação), i.e.**

$$F_k = \frac{\partial U}{\partial u_k} \quad (14.53)$$

A força  $F_k$  obtida é **positiva na direção positiva do deslocamento**  $u_k$ . Também,  $F_k$  tem a mesma natureza de  $u_k$ , no sentido que a expressão acima é válida tanto para o par **deslocamento-força**, quanto para o par **ângulo de rotação da seção-momento**, i.e., (14.53) pode ser reescrito para o momento aplicado  $M_k$  associado ao ângulo  $\theta_k$ :

$$M_k = \frac{\partial U}{\partial \theta_k} \quad (14.54)$$

### Segundo Teorema de Castigliano

O enunciado do segundo teorema pode ser posto da seguinte forma: **A derivada parcial da energia de deformação de um sistema elástico linear em relação a qualquer força (ou momento) que age sobre o sistema dá o deslocamento (ou ângulo) daquela força (momento) na direção de sua linha de ação:**

$$u_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} \quad \text{e} \quad \theta_k = \frac{\partial U}{\partial M_k} \quad (14.55)$$

O deslocamento  $u_k$  obtido é **positivo na direção positiva da força** externa  $F_k$ . Também,  $u_k$  tem a mesma natureza de  $F_k$ , no sentido que a expressão acima é válida tanto para o par **deslocamento-força**, quanto para o par **ângulo de rotação da seção-momento**, i.e., (14.55) pode ser reescrito para o ângulo  $\theta_k$  associado a um momento aplicado  $M_k$ .

Em cálculos manuais, como aqueles explorados na presente seção, é comum o uso do segundo teorema. Já o primeiro teorema fornece uma das varias bases de geração do método de elementos finitos para sistemas estruturais.

### 14.4.1 Exemplo 4 - Deflexão em uma barra com duas forças

Resolver o Exemplo 14.2 para a viga ilustrada na Figura 14.10, usando o segundo Teorema de Castigliano.

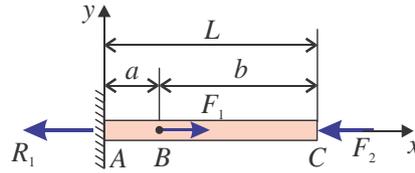


Figura 14.10: Dados do Exemplo 14.4.

*Solução:*

Embora o método do balanço de energia não fosse adequado para a solução do problema, agora ele terá uma solução bastante rápida pelo uso do segundo Teorema de Castigliano. Da solução do Exemplo 14.2, eq.(14.40), temos a energia de deformação em termos das cargas aplicadas:

$$U = \frac{1}{2EA} [F_1 (F_1 - 2F_2) a + F_2^2 L].$$

Aplicando o Teorema de Castigliano, eq.(14.55), tem-se os deslocamentos nas duas seções dados por:

$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{a}{EA} [F_1 - F_2], \\ \delta_C &= \frac{\partial U}{\partial F_2} = \frac{2a}{EA} [-aF_1 + LF_2]. \end{aligned}$$

Observe que um valor positivo para  $\delta_C$  indica que a seção C desloca-se para a esquerda, na direção da força  $F_2$ , enquanto um valor positivo para  $\delta_B$  indica que a seção B desloca-se para a direita, na direção da força  $F_1$ .

### 14.4.2 Exemplo 5 - Deflexão onde não ha força aplicada

Calcular a deflexão e a rotação na extremidade da viga mostrada na Figura 14.11a utilizando o segundo Teorema de Castigliano. Considerar que a viga seja longa, de forma que o efeito do esforço cortante possa ser desprezado.

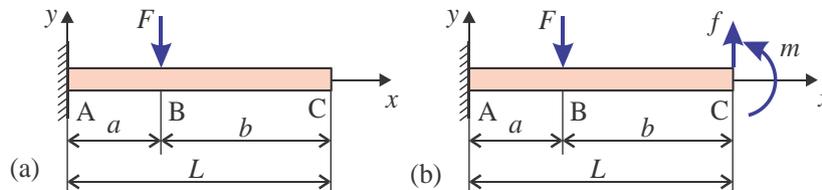
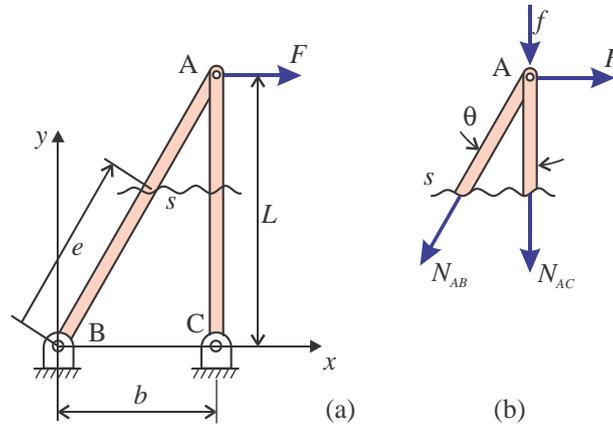


Figura 14.11: (a) Dados do Exemplo 14.5; (b) forças fictícias  $f$  e  $m$  na seção C.

*Solução:*

Considerando a viga longa, só é necessário calcular a energia de deformação associada ao momento fletor. Mas pode ser observado que na seção C não há nenhuma força ou momento concentrados aplicados. Aparentemente isso inviabilizaria a aplicação do teorema, uma vez que ele pressupõe que a expressão da energia de deformação seja função de uma força aplicada naquele ponto em que se deseja obter o deslocamento. Entretanto, o teorema não faz nenhuma referência aos valores das



**Figura 14.13:** Dados do Exemplo 14.6 e indicação dos esforços.

cuja solução é:

$$N_{AB} = \frac{Fl}{b} \quad \text{e} \quad N_{AC} = -f - \frac{FL}{b}.$$

onde se definiu  $l = \sqrt{b^2 + L^2} = 8,139$  m como o comprimento da barra AB. A **energia de deformação** da estrutura é a soma das energias de cada barra:  $U = U_{AB} + U_{AC}$ , i.e.:

$$U = \frac{1}{2EA} \left\{ \int_{e=0}^l N_{AB}^2 ds + \int_{y=0}^L N_{AC}^2 dy \right\}.$$

A integração na barra AB é ao longo da extensão da barra, e foi feita utilizando a coordenada  $e$ , conforme a Figura 14.13a. O deslocamento vertical do ponto A é dado pelo 2º Teorema de Castigliano como:

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{1}{EA} \left\{ \int_{s=0}^l N_{AB} \frac{\partial N_{AB}}{\partial f} ds + \int_{y=0}^L N_{AC} \frac{\partial N_{AC}}{\partial f} dy \right\}, \\ &= \frac{1}{EA} \left\{ \int_{s=0}^l \frac{Fl}{b} 0 ds + \int_{y=0}^L \left( -f - \frac{FL}{b} \right) (-1) dy \right\}_{f=0} = \frac{FL^2}{EA b}, \\ &= \frac{30.000 \times 8.000^2}{210.000 \times 2.500 \times 1.500} = 2,438 \text{ mm}. \end{aligned}$$

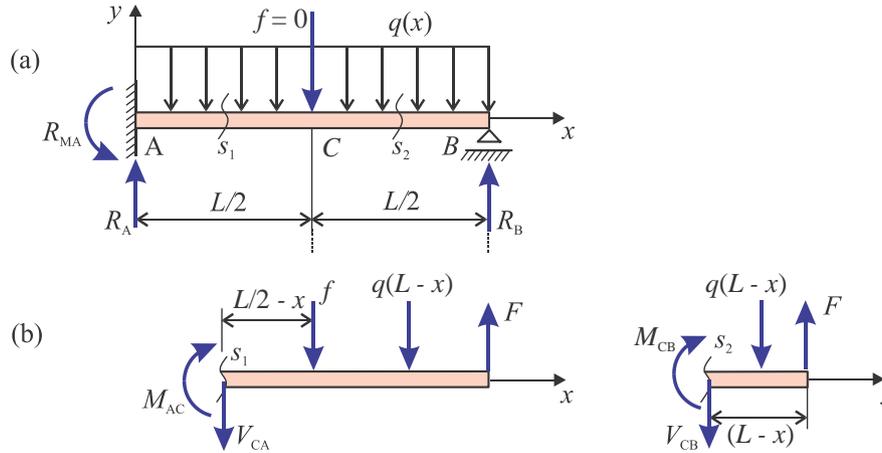
De forma similar, o deslocamento horizontal do ponto A é dado pelo 2º Teorema de Castigliano por:

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{1}{EA} \left\{ \int_{e=0}^l N_{AB} \frac{\partial N_{AB}}{\partial F} ds + \int_{y=0}^L N_{AC} \frac{\partial N_{AC}}{\partial F} dy \right\}, \\ &= \frac{1}{EA} \left\{ \int_{e=0}^l \frac{Fl}{b} \left( \frac{l}{b} \right) ds + \int_{y=0}^L \left( -f - \frac{FL}{b} \right) \left( -\frac{L}{b} \right) dy \right\}_{f=0} = \frac{F(l^3 + L^3)}{EA b^2}, \\ &= \frac{30.000 \times (8.139^3 + 8.000^3)}{210.000 \times 2.500 \times 1.500^2} = 26,698 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Deve-se observar que a estrutura possui elementos muito longos e delgados, portanto muito propensos à falha por flambagem. Torna-se necessária uma verificação quanto a esse modo de falha, usando as formulações do Capítulo 13.

### 14.4.4 Exemplo 14.7 - Problema hiperestático pelo 2º Teorema de Castigliano

Determinar as reações vinculares da viga mostrada na Figura 14.14a usando o segundo Teorema de Castigliano. Em seguida, obter o deslocamento no centro da viga.



**Figura 14.14:** Dados do Exemplo 14.7. Diagramas de corpo livre para os esforços em (a) e (b).

*Solução:*

Uma vez que se deseja o deslocamento no centro da viga, aplica-se ali uma força concentrada  $f = 0$ . O problema apresenta três reações não triviais,  $R_A$  e  $R_{MA}$  na seção A, e  $R_B$  no apoio B. Do equilíbrio no plano tem-se apenas duas equações de equilíbrio não triviais:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \quad \Rightarrow R_A + R_B - qL - f = 0 \\ \sum M_z^A &= 0 \quad \Rightarrow R_B L - \frac{qL^2}{2} + R_{MA} - \frac{fL}{2} = 0 \end{aligned} \quad (14.67)$$

Uma **equação adicional** pode ser obtida com o uso do segundo Teorema de Castigliano, como segue. Para isso, **escolhe-se um dos três apoios do problema**. (Lembrar que cada reação é associada a um apoio simples, que restringe apenas um dos seis movimentos da seção) Por exemplo, remove-se o apoio em B e aplica-se uma força  $F$  na mesma direção que o apoio ali. Em seguida, obtêm-se as reações nos demais apoios, que no caso é apenas o apoio A, em termos de  $F$ :

$$R_A = qL - F + f \quad \text{e} \quad R_{MA} = \frac{qL^2}{2} - FL + \frac{fL}{2}. \quad (14.68)$$

Nesse ponto temos todas as reações, embora em termos de  $F$ , que ainda é incógnito. Entretanto, é possível obter os esforços em termos de  $F$ , como no diagrama de corpo livre mostrado na Figura 14.14b. Isso resulta nos esforços de flexão em cada trecho como:

$$\begin{aligned} M_{AC}(x) &= F(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2 - f\left(\frac{L}{2} - x\right) \quad \forall x \in (0, L/2) \quad \text{e} \\ M_{CB}(x) &= F(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2 \quad \forall x \in (L/2, L). \end{aligned} \quad (14.69)$$

- **Observação:** O processo realizado acima, de substituir uma das reações por uma força  $F$  e representar as demais reações em termos de  $F$ , pode ser entendido como apenas um artifício. Outra maneira de entender o procedimento consiste em ver que sempre é possível separar o conjunto de reações em dois grupos, e exprimir as reações em um dos grupos em termos das reações do outro grupo. O artifício usado aqui, de substituir  $R_B$  por  $F$ , é usado para que, durante a primeira parte da dedução, possamos usar a formulação com um  $F$  de valor arbitrário, i.e., no que segue,  $F$  pode assumir qualquer valor. Apenas ao final do processo é

$$U = U_{AB} + U_{BC} = \frac{1}{2E} \int_{x=0}^a \frac{M_z^2}{I_{zz}} dx + \frac{1}{2G} \int_{z=0}^b \frac{M_x^2(x)}{J} dz,$$

$$U = \frac{M_z^2 a}{2EI_{zz}} + \frac{M_t^2 b}{2GJ} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{T^2}{2} \left( \frac{a}{EI_{zz}} + \frac{b}{GJ} \right)}$$

Aplicando o segundo Teorema de Castigliano, obtém-se a rotação torcional em C:

$$\varphi_c = \frac{\partial U}{\partial T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_c = T \left( \frac{a}{EI_{zz}} + \frac{b}{GJ} \right)}$$

Nota-se que o primeiro termo,  $a/EI_{zz}$ , é a parcela de  $\varphi_c$  proveniente da flexão do elemento AB, enquanto que a segunda parcela vem da torção de BC

#### 14.4.6 Exemplo 14.9 - Estrutura plana - flexão e torção

A estrutura plana ABC da Figura 14.16 tem seção uniforme com  $EI$  constante. A força  $F$  é aplicada na seção C, na direção vertical  $y$ . Determine o deslocamento vertical  $v_C$  usando o segundo Teorema de Castigliano. A seção transversal é circular.

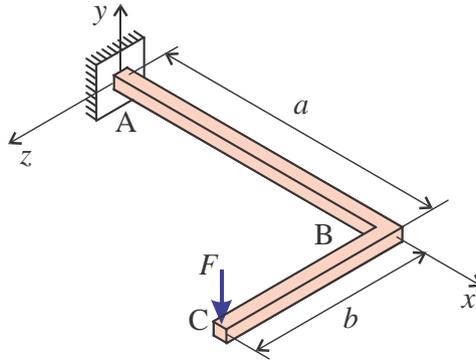


Figura 14.16: Dados do Exemplo 14.9.

*Solução:*

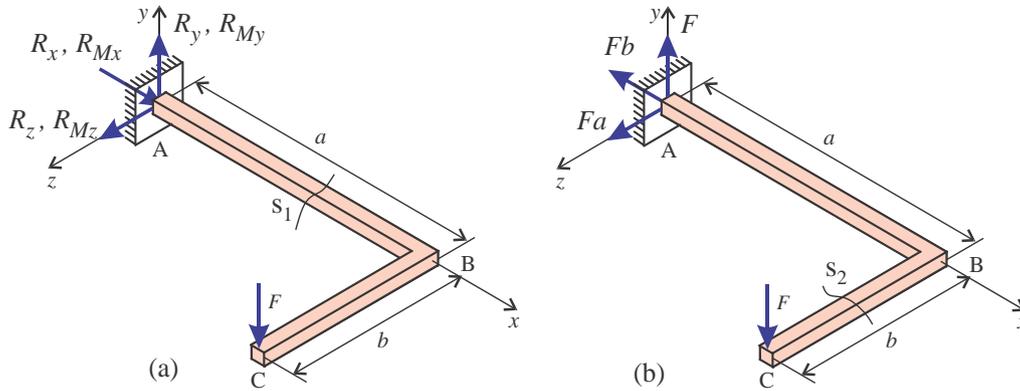
(a) **As reações** são indicadas na Figura 14.17a. Como é um problema em que o carregamento é transversal ao plano da estrutura, é mais seguro indicar todas as seis componentes de reação no apoio, e resolver as seis condições de equilíbrio. Com isso obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x \longrightarrow R_x = 0, \\ \Sigma F_y \longrightarrow R_y = F, \\ \Sigma F_z \longrightarrow R_z = 0, \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma M_x \longrightarrow \boxed{R_{Mx} = -Fb}, \\ \Sigma M_y \longrightarrow R_{My} = 0, \\ \Sigma M_z \longrightarrow \boxed{R_{Mz} = Fa} \end{array} \right.$$

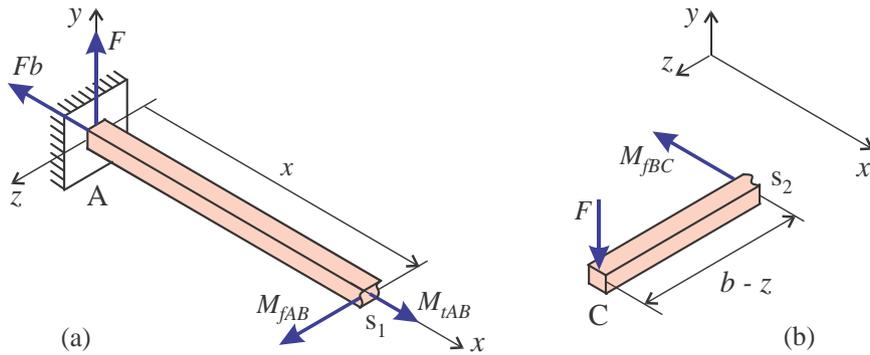
As reações não nulas são indicadas na Figura 14.17b.

(b) **Esforços** são obtidos com auxílio dos diagramas de corpo livre mostrados na Figura 14.18, a partir dos cortes  $s_1$  e  $s_2$  nos trechos AB e BC, como indicado na Figura 14.17a. Os valores dos esforços de momento fletor e torção no trecho AB são  $M_{fAB} = F(x - a)$  e  $M_{tAB} = Fb$  e o momento fletor no trecho BC é  $M_{fBC} = F(b - z)$ .

(c) **A Energia de deformação** é a soma das energias de flexão e de torção da viga AB, com a energia de flexão da viga BC:



**Figura 14.17:** (a) Reações e esforços no Exemplo 14.9, e (b) reações não nulas.



**Figura 14.18:** (a) Diagramas de corpo livre para esforços no trecho AB e (b) no trecho BC.

$$\begin{aligned}
 U &= U_{fAB} + U_{tAB} + U_{fBC}, \\
 &= \frac{1}{2EI} \int_{AB} M_{fAB}^2 dx + \frac{M_{tAB}^2 a}{2GJ} + \frac{1}{2EI} \int_{BC} M_{fBC}^2 dz.
 \end{aligned}$$

Usando o segundo Teorema de Castigliano para o deslocamento na seção C, na direção da força, tem-se

$$\begin{aligned}
 \nu_c &= \frac{dU}{dF} = \frac{1}{EI} \int_{x=0}^a M_{fAB} \frac{dM_{fAB}}{dF} dx + \frac{2M_{tAB}a}{2GJ} \frac{dM_{tAB}}{dF} + \frac{1}{EI} \int_{z=0}^b M_{fBC} \frac{dM_{fBC}}{dF} dz, \\
 \nu_c &= \frac{1}{EI} \int_{x=0}^a F(x-a)^2 dx + \frac{Fab^2}{GJ} + \frac{1}{EI} \int_{z=0}^b F(b-z)^2 dz.
 \end{aligned}$$

Integrando e simplificando, obtêm-se a expressão do deslocamento na seção C:

$$\boxed{\nu_c = \frac{F}{3EI} [a^3 + b^3] + \frac{Fab^2}{GJ}}$$

#### 14.4.7 Exemplo 14.10 - Pórtico plano - flexão plana

Considere o pórtico plano ABCD mostrado na Figura 14.19. Determine o deslocamento horizontal na seção D,  $u_D$  usando o segundo Teorema de Castigliano. Dados: seção transversal de dimensões  $20 \times 20 \text{ mm}^2$ , a força  $F = 1 \text{ kN}$  e módulo de elasticidade  $E = 210 \text{ GPa}$ .  $a = 2 \text{ m}$ ,  $b = c = 1 \text{ m}$ .

### 14.4.8 Exemplo 14.11 - Viga curva delgada - Arco sob flexão plana

Considere a viga circular mostrada na Figura 14.21. O arco é circular, com raio  $R$  e altura  $h$ , tais que  $h/R$  é pequeno o suficiente para que se possa utilizar a teoria de vigas retas. A seção transversal é retangular com largura  $b$ . Determine os deslocamentos horizontal e vertical da seção A utilizando o segundo Teorema de Castigliano.

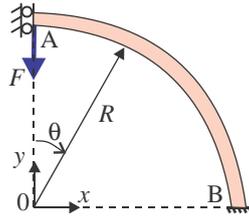


Figura 14.21: Arco sob flexão do Exemplo 11.

*Solução:*

Indicamos os deslocamentos horizontal e vertical por  $u_A$  e  $v_A$ , com as orientações positivas indicadas na Figura 14.22a. A orientação positiva de  $v_A$  deve ser a mesma da força vertical  $F$ . Uma vez que não há força horizontal, define-se uma força fictícia  $g$  aplicada no ponto A, com a mesma orientação de  $u_A$ .

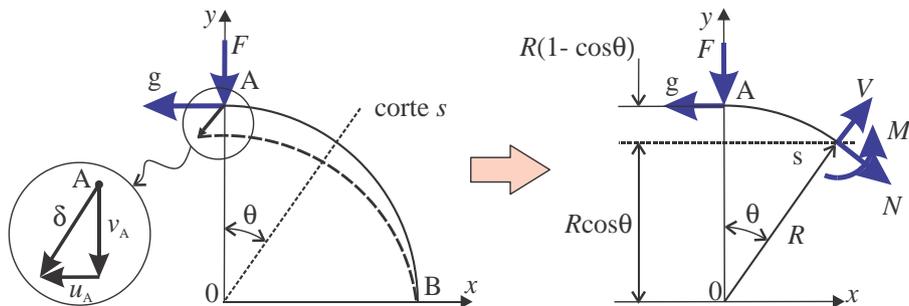


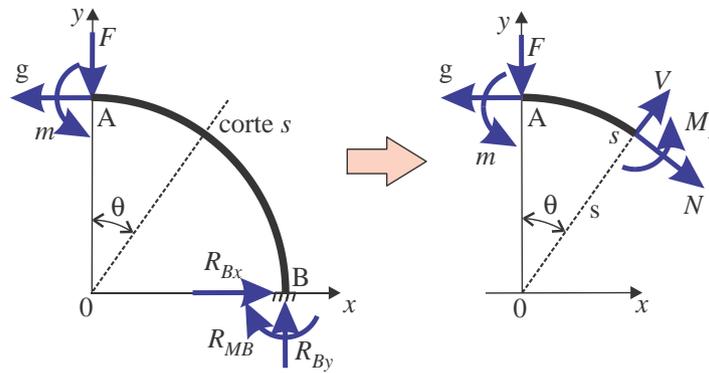
Figura 14.22: (a) Diagrama de corpo livre para o Exemplo 11, (b) equilíbrio para um corte arbitrário  $s$ . É considerada apenas a linha do perímetro médio do arco.

Tendo as forças definidas, busca-se a equação de esforços de momento fletor. Para isso, faz-se um corte numa seção arbitrária  $s$ , definida pelo ângulo  $\theta$  como indicado na Figura 14.22b. O **esforço do momento** na seção  $s$  é:  $M_z(\theta) = -FR \sin \theta - gR(1 - \cos \theta)$ .

A expressão para a energia de deformação deve ser adaptada da eq. (14.26),  $U = \int_{x=0}^L M_z^2 / 2EI_{zz} dx$ . Agora, a integração ao longo da extensão  $L$  da viga deve ser interpretada como a integração ao longo do arco. Então, o elemento diferencial de comprimento é  $Rd\theta$  em vez de  $dx$ , e a integração é feita ao longo do ângulo  $\theta$ . Então, a expressão da energia de deformação flexural de um arco circular delgado é dada por

$$U = \frac{1}{2E} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{M_z^2}{I_{zz}} R d\theta \quad (14.78)$$

Do segundo Teorema de Castigliano, os deslocamentos horizontal e vertical são:



**Figura 14.24:** (a) Diagramas de corpo livre para o Exemplo 12 e (b) equilíbrio para o corte arbitrário  $s$ .

Impondo as condições de contorno  $u_A = \alpha_A = 0$  na primeira e terceira equações obtém-se as reações  $g$  e  $m$ :

$$\boxed{g = \frac{2F(\pi - 4)}{\pi^2 - 8} \quad \text{e} \quad m = \frac{4FR(3 - \pi)}{\pi^2 - 8}} \quad (14.82)$$

Da segunda equação tem-se o deslocamento vertical

$$\boxed{v_A = \frac{FR^3(32 - 20\pi + \pi^3)}{4EI(\pi^2 - 8)}} \quad (14.83)$$

Observa-se que, conhecidas as duas reações no apoio A, as três reações no apoio B podem ser obtidas pelas equações globais de equilíbrio do arco:

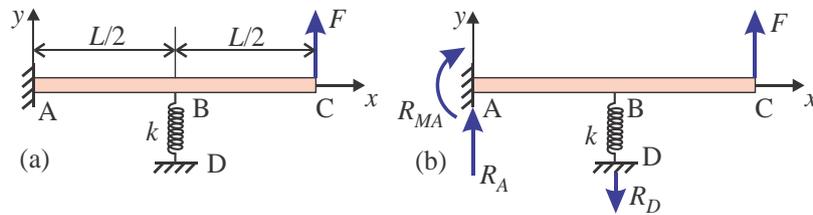
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \longrightarrow \quad R_{Bx} = g, \\ \sum F_y &= 0 \quad \longrightarrow \quad R_{By} = F, \\ \sum M_z &= 0 \quad \longrightarrow \quad R_{MB} = -[m + (F + g)R]. \end{aligned}$$

#### 14.4.10 Exemplo 14.13 - Viga com mola flexural

As vigas AB e BC, de comprimento  $L_1$  e  $L_2$ , são conectadas por uma mola linear de flexão de rigidez  $k$  [Nm/rad]. O conjunto está submetido a uma força transversal em D. Determine o deslocamento na seção D. Ambas as vigas tem idênticos valores de  $E$  e  $I$ . Utilize o segundo Teorema de Castigliano. Fisicamente, a mola possui uma certa extensão  $L_m$ , mas se essa extensão for muito menor que os comprimentos das vigas  $L_1$  e  $L_2$ , pode-se desprezar a extensão da mola, e considerar que as coordenadas  $x$  de B e de C sejam coincidentes. Adicionalmente, os deslocamentos nesses pontos são iguais. Em suma, tem-se as condições:

$$\boxed{x_B \approx x_C \quad \text{e} \quad v_B \approx v_C} \quad (14.84)$$

Por outro lado, as rotações não são iguais. Define-se a diferença de ângulo de flexão da mola entre suas extremidades por  $\Delta\theta_m$ . No presente exemplo essa é a diferença entre as rotações em C e B, i.e.,  $\Delta\theta_m = \theta_C - \theta_B$ . Considerando que a mola seja linear, a relação entre o ângulo e o esforço de momento  $M_m$  aplicado ali é dado pela constante de mola  $k$ :



**Figura 14.26:** Dados do Exemplo 14 e reações nos apoios.

$$\begin{aligned}
 \text{Viga AB} & : & \longrightarrow & M_{AB}(x) = F(L - x) - R_{Dy}(L/2 - x), \\
 \text{Viga BC} & : & \longrightarrow & M_{BC}(x) = F(L - x), \\
 \text{Mola} & : & \longrightarrow & N_m = R_{Dy}.
 \end{aligned}$$

Nota-se que o esforço normal na mola pode ser considerada como o de uma barra sob tração. A **energia de deformação armazenada na mola** é igual ao trabalho aplicado pelo esforço normal entre suas extremidades, i.e.,

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2} N_m \delta_m} \quad (14.88)$$

onde  $\delta_m$  é a variação de comprimento da mola, que no presente exemplo é a diferença entre os deslocamentos de suas extremidades, em B e D, i.e.,  $\delta_m = v_B - v_D$ . Por definição de uma mola linear, a relação entre sua deflexão e a solicitação aplicada é dada pela sua constante de mola, i.e.,  $N_m = k\delta_m$ . Logo, a **energia de deformação armazenada na mola** é

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2k} N_m^2} \quad (14.89)$$

A energia de deformação no sistema é a soma das energias flexurais dos dois trechos de viga e da energia de armazenada na mola:  $U = U_{AB} + U_{BC} + U_m$ :

$$U = \frac{1}{2EI} \int_{x=0}^{L/2} M_{AB}^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_{x=L/2}^L M_{BC}^2 dx + \frac{R_{Dy}^2}{2k}.$$

Do Teorema de Castigliano tem-se os deslocamentos verticais nos pontos C e D:

$$v_D = \frac{\partial U}{\partial R_{Dy}} = \frac{R_{Dy}}{k} - \frac{5FL^3}{48EI} + \frac{R_{Dy}L^3}{24EI}.$$

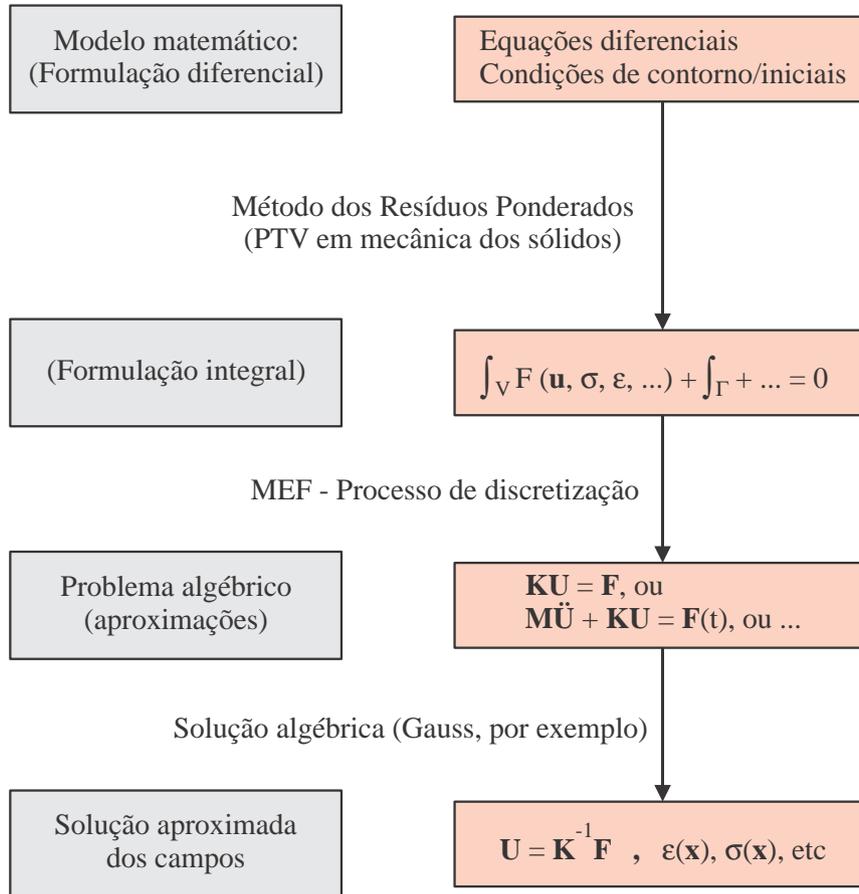
$$\boxed{v_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{FL^3}{3EI} - \frac{5R_{Dy}L^3}{48EI}}$$

A reação  $R_{Dy}$  é obtida impondo-se a condição que o ponto D é fixo,  $v_D = 0$ . Resolvendo a primeira equação obtém-se

$$\boxed{R_{Dy} = \frac{5FL^3k}{[48EI + 2kL^3]}}$$

Por equilíbrio, essa também é a força normal na mola. O deslocamento vertical na seção B pode ser obtido pela relação constitutiva da mola  $k = N_m/\delta_m$ . A variação de comprimento da mola é dada por  $\delta_m = v_B - v_D$ . Como  $v_D = 0$ , tem-se que  $\delta_m = v_B$ . O esforço na mola é  $N_m = R_{Dy}$ . Logo,

- Problemas envolvendo reações químicas.
- Problemas de geofísica,
- Problemas de astrofísica.

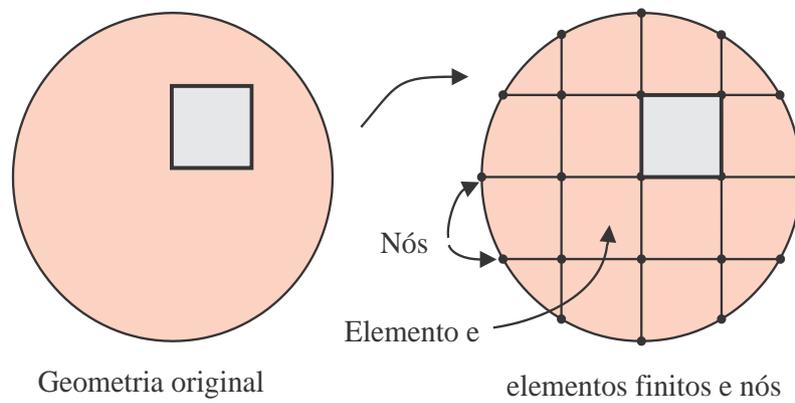


**Figura 15.1:** Visão geral do processo de discretização pelo Método de Elementos Finitos.

O processo geral de discretização numérica de um problema pelo MEF pode ser visualizado no fluxograma da Figura 15.1. O ponto de partida é um conjunto de equações diferenciais e algébricas com suas devidas condições de contorno que descrevem o comportamento de certo problema físico. Por exemplo, a equação diferencial da curva elástica de uma viga, com as condições de contorno de extremidades simplesmente apoiadas. Essa formulação diferencial é transformada numa formulação integral utilizando um procedimento matemático (o Método dos Resíduos Ponderados) cuja descrição foge ao escopo do presente texto. Em muitos problemas de mecânica dos sólidos e de estruturas essa transformação corresponde ao Princípio dos Trabalhos Virtuais ou a alguma de suas variantes.

Do ponto de vista do engenheiro analista, o ponto de partida consiste em tomar a geometria do problema, como aquela ilustrada na Figura 15.2, e gerar uma **malha de elementos finitos**. Isso consiste em subdividir a geometria em regiões de formato simples, os **elementos finitos**, que são determinados por **nós**. Os procedimentos do MEF são aplicados aos dados da malha para converter a forma integral numa formulação algébrica, matricial, do problema. Por exemplo, os formatos mais típicos do problema algébrico resultante em mecânica dos sólidos são:

$$\begin{aligned} \text{problema estático} &\longrightarrow \mathbf{KU} = \mathbf{F}, \\ \text{problema dinâmico linear} &\longrightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{F}, \end{aligned}$$



**Figura 15.2:** (a) Geometria original de um corpo com um furo arbitrário; (b) geometria aproximada por uma malha de elementos finitos ilustrativa.

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são matrizes, geradas pelo método para representar as propriedades estruturais (rigidez, amortecimento e massa, respectivamente) da estrutura, e  $\mathbf{F}$  é um vetor também conhecido, determinado pelo método para representar as forças externas aplicadas.  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  e  $\ddot{\mathbf{U}}$  são vetores constituídos pelos valores de deslocamento, velocidade e aceleração nos nós da estrutura, que representam sua resposta em presença do carregamento. Esses vetores são as incógnitas, obtidos pela solução numérica do problema matricial. Essa solução é apenas uma aproximação da solução do problema integral, não sua solução exata.

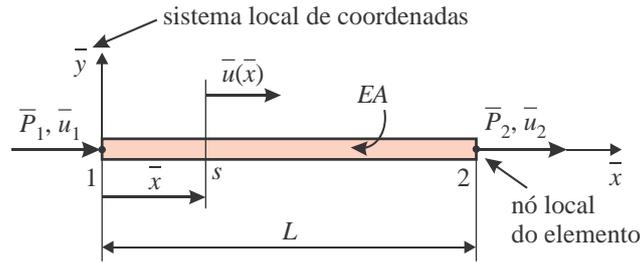
Uma vez que o presente texto é introdutório, buscou-se uma forma de apresentar o material de maneira a que diversas das etapas visualizadas na Figura 15.1 pudessem ser simplificadas ou até mesmo suprimidas. Isso foi conseguido pela escolha de dois problemas bastante simples, os problemas de comportamento de barras sob tração e de vigas sob flexão plana. A vantagem da utilização desses dois problemas para introduzir o método deve-se à simplicidade da formulação básica desse tipo de problema. Isso permite que diversas etapas do método sejam expostas de forma aberta. Sem dúvida, a simplicidade excessiva do problema de barra impede que aspectos mais avançados do método possam ser demonstrados. Entretanto, as etapas do MEF, a nomenclatura e os aspectos mostrados aqui são comuns a todas as formulações mais avançadas.

Considerando agora mais particularmente o problema do comportamento estrutural de uma barra ou conjunto de barras, note-se que não há nenhum desafio na determinação da resposta em condições estáticas, elástico-linear. A equação diferencial, deduzida em (4.115), pode ser facilmente integrada. Mesmo para resolver uma treliça de meia dúzia de barras, pode-se utilizar um método manual. Entretanto, quando se tem uma estrutura de centenas ou milhares de barras, a situação é diferente, e torna-se necessário dispor de um método automatizável e programável computacionalmente. Assim, a escolha feita aqui para a apresentação do MEF via problemas de barras e vigas tem duplo propósito: primeiro o de introduzir o método numa base simples, e segundo, tem o propósito básico de fornecer um método poderoso para resolver duas classes de problemas (estruturas de barras e vigas) que tem sua própria importância na engenharia fundamental.

## 15.1 Interpolação dos deslocamentos

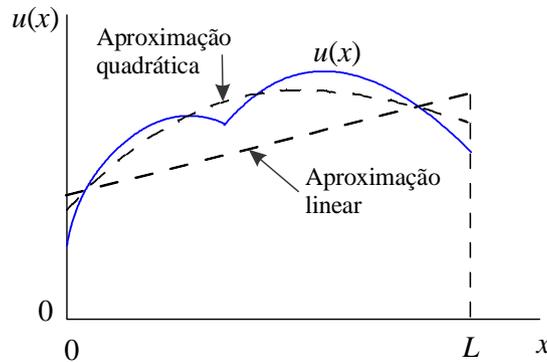
Seja um elemento finito de barra de comprimento  $L$ , definido pelos chamados **nós do elemento**, que são denominados nós locais 1 e 2, ou I e J. Define-se um **sistema local de coordenadas do elemento**, com eixos  $\bar{x} - \bar{y}$ , de forma que a origem seja no nó 1, e o eixo axial  $\bar{x}$  seja no sentido nó 1 ao nó 2 como indicado na Figura 15.3. A seção transversal do elemento tem área  $A$  e módulo de elasticidade do material é  $E$ . O elemento é submetido a **esforços nodais** axiais  $\bar{P}_1$  e  $\bar{P}_2$  aplicados em seus nós 1 e 2. Nesse ponto, a necessidade de equilíbrio entre os esforços é deixada para uma etapa posterior.

Note-se que na forma usual de formulação do MEF, os esforços nodais tem sinais positivos sempre que estiverem no sentido positivo do eixo  $\bar{x}$ , como indicado na figura.



**Figura 15.3:** Propriedades e graus de liberdade de um elemento finito de barra.

Considere que a solução de deslocamento axial numa seção arbitraria  $\bar{x}$  no elemento seja uma função  $\bar{u}(\bar{x})$ . Consideremos que essa solução é desconhecida. Considere por exemplo que a solução exata do deslocamento axial no elemento finito de barra seja uma função  $\bar{u}(\bar{x})$ , com o formato ilustrado na curva contínua da Figura 15.4. Observe que fizemos questão de apresentar uma curva de formato arbitrário, de forma que não existe nenhuma função analítica que possa representá-la (não é um seno, ou logaritmo, ou  $1/x$ , etc.). Assim, a única forma que existe para informar perfeitamente as características dessa curva é listar uma tabela de infinitos pares ordenados  $(x, u(x))$ , em todo o campo dos números reais entre 0 e  $L$ . É dito que essa curva pertence a um conjunto de funções de dimensão infinita. Por outro lado, podemos considerar aproximações simplificadas para essa curva. Por exemplo, podemos buscar a melhor aproximação por um polinômio linear ou quadrático, cúbico, etc. Agora, se buscamos uma aproximação linear para a solução, essa aproximação pode ser perfeitamente descrita por apenas dois parâmetros, enquanto uma aproximação quadrática necessita de apenas três informações. Então essas funções são de dimensão 2 e 3, respectivamente, em lugar de dimensão infinita como a solução exata. Tem-se então a base do processo conhecido por **discretização** do problema. O que o MEF faz, inicialmente, é considerar a solução aproximada, discretizada, de tal forma que a incógnita do problema deixa de ser uma função  $(u(x))$ , e passa a ser uma série de parâmetros escalares, os coeficientes de polinômios da aproximação. A segunda característica do MEF é que a discretização é feita de forma quase independente dentro de cada elemento, e não na estrutura completa.



**Figura 15.4:** Ilustração de função arbitrária  $u(x)$  e duas funções aproximadas (linear e quadrática).

Começemos com o detalhamento, considerando que o campo de deslocamento axial exato  $\bar{u}(\bar{x})$  num dado elemento possa ser aproximado por uma função linear  $\bar{u}_h(\bar{x})$ , isto é

$$\bar{u}(\bar{x}) \simeq \bar{u}_h(\bar{x}) \equiv a_1 + a_2\bar{x}. \quad (15.1)$$

O subscrito  $h$  é normalmente usado na literatura para indicar a aproximação obtida pelo MEF. Entretanto, ao longo do texto suprimiremos esse subscrito para manter a notação limpa, uma vez

exatamente à deformação média de uma barra de seção uniforme submetida a cargas axiais nas extremidades.

Consideremos novamente a equação de equilíbrio (15.30), usando (15.32)

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 &= -N_x(x) \\ &= -EA \frac{(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)}{L}.\end{aligned}\quad (15.34)$$

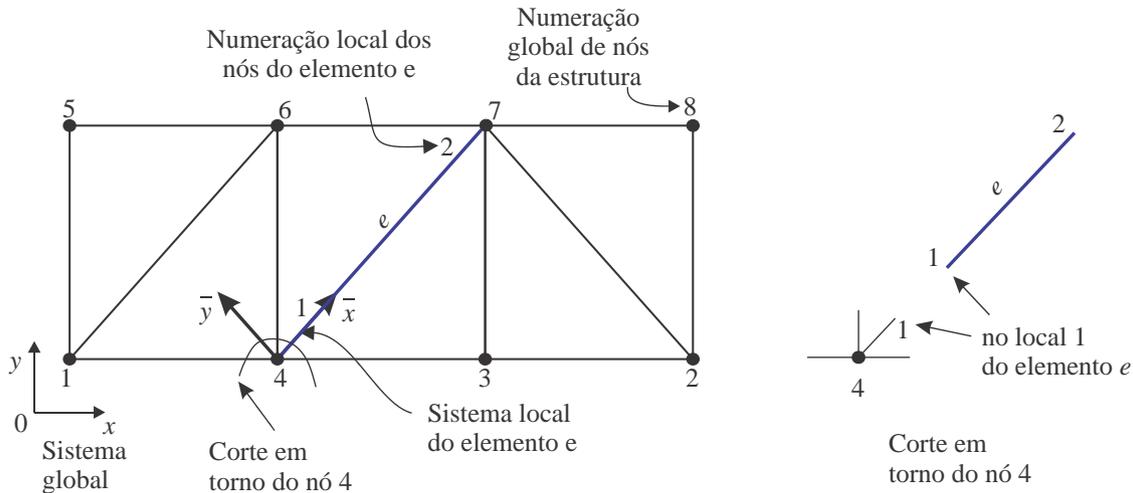
Consideremos também o equilíbrio global do elemento, (15.31), usando (15.34):

$$\begin{aligned}\bar{P}_2 &= -\bar{P}_1 \\ &= EA \frac{(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)}{L}.\end{aligned}\quad (15.35)$$

As duas equações (15.34) e (15.35) podem ser reunidas e reorganizadas em forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix},\quad (15.36)$$

que é exatamente a mesma expressão mostrada em (15.29), obtida pelo método da energia.

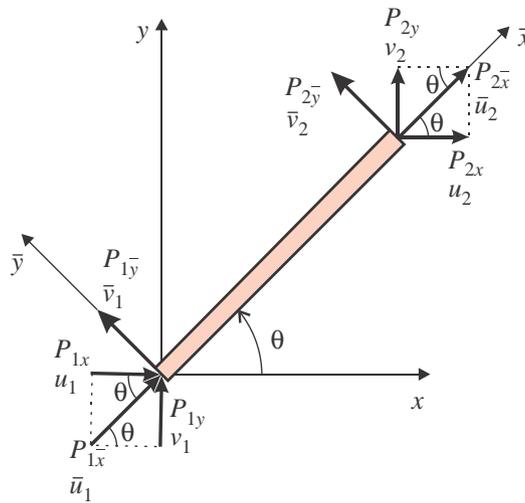


**Figura 15.7:** Treliça plana ilustrativa, com indicação de sistema global de coordenadas  $xyz$  e o sistema local de um elemento arbitrário  $e$ .

## 15.2 Matriz de rigidez de um elemento rotacionado no plano $xy$

A matriz de rigidez para uma barra orientada ao longo da direção do eixo local  $\bar{x}$ , obtida na seção anterior, é um caso particular. Numa estrutura arbitrária, como por exemplo as de uma treliça plana ou espacial, as barras são orientadas em diversas direções no espaço cartesiano. Isso é ilustrado na Figura 15.7, em que o **sistema global**  $xyz$  refere-se à estrutura como um todo, e cada elemento possui seu próprio **sistema local**,  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Torna-se necessário obter uma equação matricial para o equilíbrio do elemento numa orientação arbitrária. Na presente seção apresenta-se o modelo para a matriz de rigidez de um elemento finito de barras com uma orientação arbitrária no plano  $xy$ .

Para isso, considere-se um **sistema global de coordenadas**  $(x, y, z)$  e um **sistema local de coordenadas**,  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Considere-se que ambos os sistemas tenham eixos  $z$  coincidentes, isto é, os eixos  $\bar{z}$  são todos paralelos ao eixo global  $z$ . Então, o sistema local orienta-se em relação ao global por uma rotação dos eixos  $(x, y)$  em torno do eixo  $z$ , através de um ângulo  $\theta$  medido a partir do



**Figura 15.9:** Componentes de forças e deslocamentos nodais nos dois sistemas de coordenadas.

As equações (15.38) e (15.39) podem ser representadas simbolicamente por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{T}\mathbf{P}, \quad (15.40)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a **matriz de transformação** para a rotação entre os sistemas de coordenadas.

O sistema de equações de equilíbrio para o elemento de barra mostrado em (15.29) ou (15.36) é reescrito como:

$$\begin{Bmatrix} P_{1\bar{x}} \\ P_{2\bar{x}} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (15.41)$$

Esse sistema de equações pode ser adaptado para a barra no sistema de coordenadas local  $(\bar{x}, \bar{y})$  de orientação arbitrária, como segue:

$$\begin{Bmatrix} P_{1\bar{x}} \\ P_{1\bar{y}} = 0 \\ P_{2\bar{x}} \\ P_{2\bar{y}} = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix}, \quad (15.42)$$

ou

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{u}}. \quad (15.43)$$

Essa é a equação de equilíbrio do elemento, nas direções locais. Ela pode ser transformada para as direções globais usando as relações (15.40):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{T}\mathbf{P} &= \bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (15.44)$$

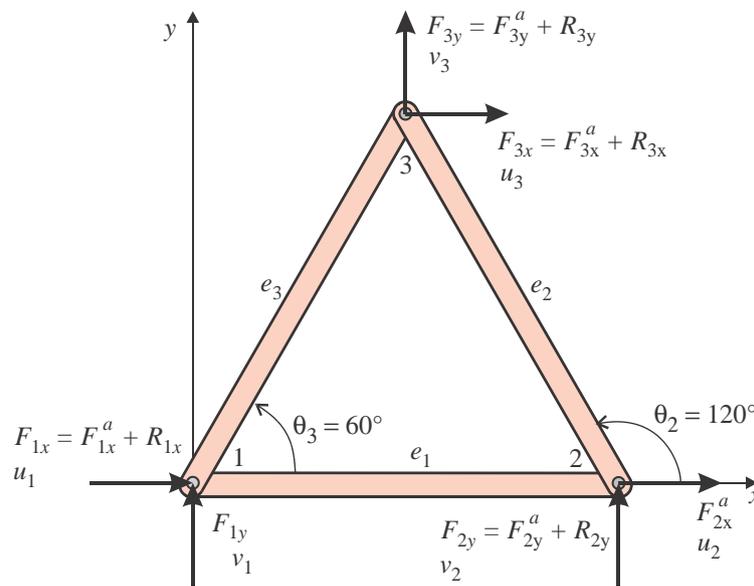
Observa-se que a matriz  $\mathbf{T}$  é ortogonal, i.e.,  $\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{I}$ . Logo, sua inversa é igual a sua transposta, i.e.,  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ . Então, pré-multiplicando (15.44) por  $\mathbf{T}^T$  obtém-se

$$\mathbf{P} = (\mathbf{T}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T})\mathbf{u}, \quad (15.45)$$

ou

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}^e\mathbf{u}, \quad \text{com } \mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}. \quad (15.46)$$

Uma vez que as matrizes  $\bar{\mathbf{K}}$  e  $\mathbf{T}$  são bastante esparsas, é possível obter uma forma explícita para a rigidez do elemento  $e$ :



**Figura 15.11:** Forças e deslocamentos nodais na estrutura.

### Etapa 1.1 - Dados de coordenadas nodais

| Nó | $x$   | $y$           |
|----|-------|---------------|
| 1  | 0     | 0             |
| 2  | $L$   | 0             |
| 3  | $L/2$ | $\sqrt{3}L/2$ |

**Observação 1** - Note que, como o MEF é um método numérico, são tratados apenas dados numéricos, isto é, em vez de  $L$ , deve-se especificar, por exemplo, 200. Aqui deixamos os dados em forma literal apenas para facilitar a visualização das operações realizadas.

**Observação 2** - Num programa de EF não se informa as dimensões do corpo (comprimentos, larguras, etc.), apenas os valores das coordenadas nodais são informados. Essas informações, junto aos dados de conectividade dos elementos, vistos a seguir, são suficientes para que o programa tenha a **representação de qualquer formato de geometria**, e determine qualquer dimensão que se torne necessária.

**Etapa 1.2 - Dados de conectividade dos elementos** Os dados de conectividade indicam os nós globais  $N_I$  e  $N_J$  que definem cada um dos elementos. No exemplo tem-se

| Elemento | Nó I | Nó J |
|----------|------|------|
| 1        | 1    | 2    |
| 2        | 2    | 3    |
| 3        | 1    | 3    |

**Observação 3** - Em cada elemento, a escolha de qual nó será o nó I e qual o nó J é arbitrária, isto é, o elemento 2 poderia ser definido com nós (I,J) = (2,3) ou por (3,2). Entretanto, embora a escolha seja arbitrária, a ordem dos valores calculados durante a solução será distinta, tanto quanto diversos detalhes como orientações de forças e deslocamentos no elemento.

**Etapa 1.3 - Propriedades geométricas e de material** Essas propriedades são indicadas para cada elemento. Como o elemento finito sendo tratado é o de barra, as únicas propriedades necessárias são o módulo de elasticidade e a área da seção transversal da barra:

- **Elemento 1.** Obtém-se  $L_1 = L$  e  $\theta_1 = 0$ . Então a eq. (15.47) torna-se

$$\begin{Bmatrix} P_{1x}^1 \\ P_{1y}^1 \\ P_{2x}^1 \\ P_{2y}^1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \quad (15.50)$$

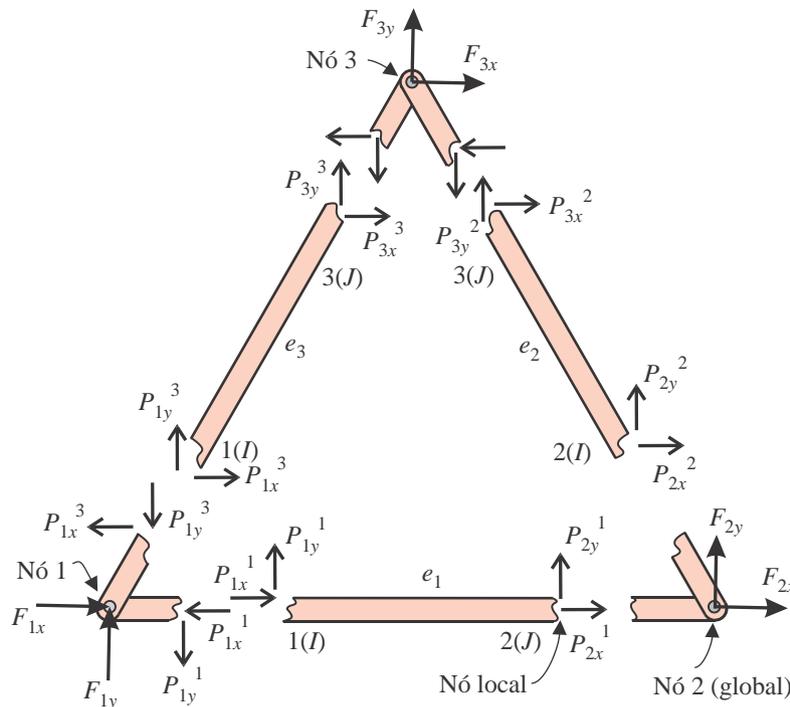
O sobrescrito 1 indica que os esforços são do elemento 1. (Obs.: o valor 4 foi incluído na matriz e no denominador por conveniência das próximas etapas, uma vez que, por motivos didáticos, estamos resolvendo o problema “a mão”, de forma analítica.)

- **Elemento 2.** O comprimento e a orientação do eixo local  $\bar{x}$  deste elemento em relação ao sistema de coordenadas global são obtidos pela eq. (15.49), o que resulta em  $L_2 = L$  e  $\theta_2 = 120^\circ$ .<sup>2</sup> Então, o sistema de equilíbrio do elemento 2 fica:

$$\begin{Bmatrix} P_{2x}^2 \\ P_{2y}^2 \\ P_{3x}^2 \\ P_{3y}^2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}. \quad (15.51)$$

- **Elemento 3.** Para este elemento,  $L_3 = L$  e  $\theta_3 = 60^\circ$ , o que resulta na equação de equilíbrio

$$\begin{Bmatrix} P_{1x}^3 \\ P_{1y}^3 \\ P_{3x}^3 \\ P_{3y}^3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}. \quad (15.52)$$



**Figura 15.12:** Equilíbrio nodal: esforços nodais nos elementos e forças nodais globais.

<sup>2</sup>Observe que a ordem dos nós globais na conectividade do elemento é essencial. Com a conectividade tendo sido definida como  $(I, J) = (2, 3)$ , se obteve o ângulo do sistema local do elemento igual a  $\theta_2 = 120^\circ$ , como mostrado na Figura 15.11. Entretanto, se a conectividade do elemento tivesse sido gerada como  $(I, J) = (3, 2)$ , o ângulo a ser usado seria  $\theta_2 = -60^\circ$ , e a origem do sistema local estaria no nó 3, com o eixo  $x$  apontando para o nó global 2.