Capítulo 1

A mecânica dos sólidos na engenharia

1.1 Processo geral de análise mecânica de corpos sólidos

Observe a representação de um corpo de geometria genérica, como mostrado na Figura 1.1. Aqui, como em todo o curso, estamos considerando que o material do corpo encontra-se em estado sólido, i.e., não estamos considerando uma porção de líquido ou gás. Mais que isso, consideramos que este sólido seja de um tipo razoavelmente "rígido", i.e., quando submetido a um conjunto de forças, ele se deforma de maneira limitada, não excessiva, de maneira tal que sua forma e dimensões deformadas são semelhantes àquelas da configuração original. Isso restringe a aplicabilidade das teorias vistas aqui a materiais usuais em engenharia, tais como:

▷ Aço, alumínio e metais em geral,
▷ Plásticos e madeiras,
▷ Concreto, materiais cerâmicos em geral,
▷ Fibras de vidro, de kevlar, de carbono etc.

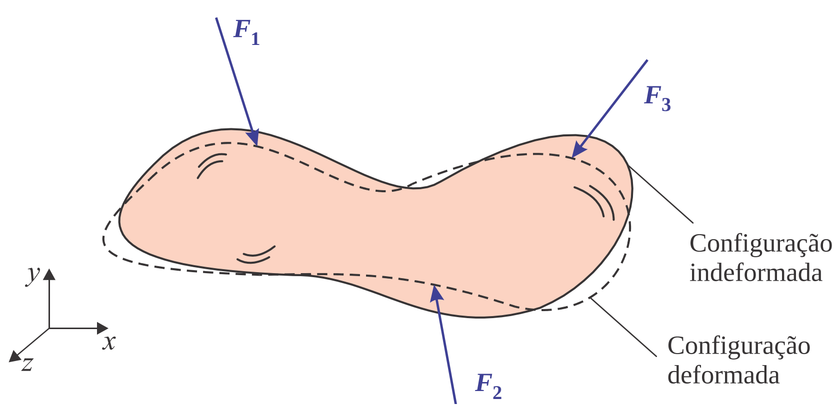


Figura 1.1: Corpo sólido deformável de geometria genérica, sob a ação de um conjunto de forças.

Obviamente, o grau de deformação dependerá do nível do carregamento aplicado e da geometria e dimensões do corpo. Por exemplo, chumbo, cobre, e mesmo aço, podem se deformar como se fossem líquidos, desde que se aplique um carregamento suficientemente grande, ou por longo tempo, ou sejam submetidos a carregamento sob alta temperatura. Situações desse tipo são exploradas em processos de fabricação de peças e componentes de máquinas, conhecidos genericamente como "**processos de conformação**", dentre os quais os mais comuns são a extrusão, o forjamento, a laminação, entre outros. Estudos desses processos de deformação constituem área avançada em cursos de Engenharia Mecânica e não serão considerados no presente texto.

Afirmativa 1: Pequenas deformações. Exceto onde claramente indicado, o presente curso considera apenas as situações em que a rigidez do material, a rigidez do corpo, os apoios e as cargas aplicadas

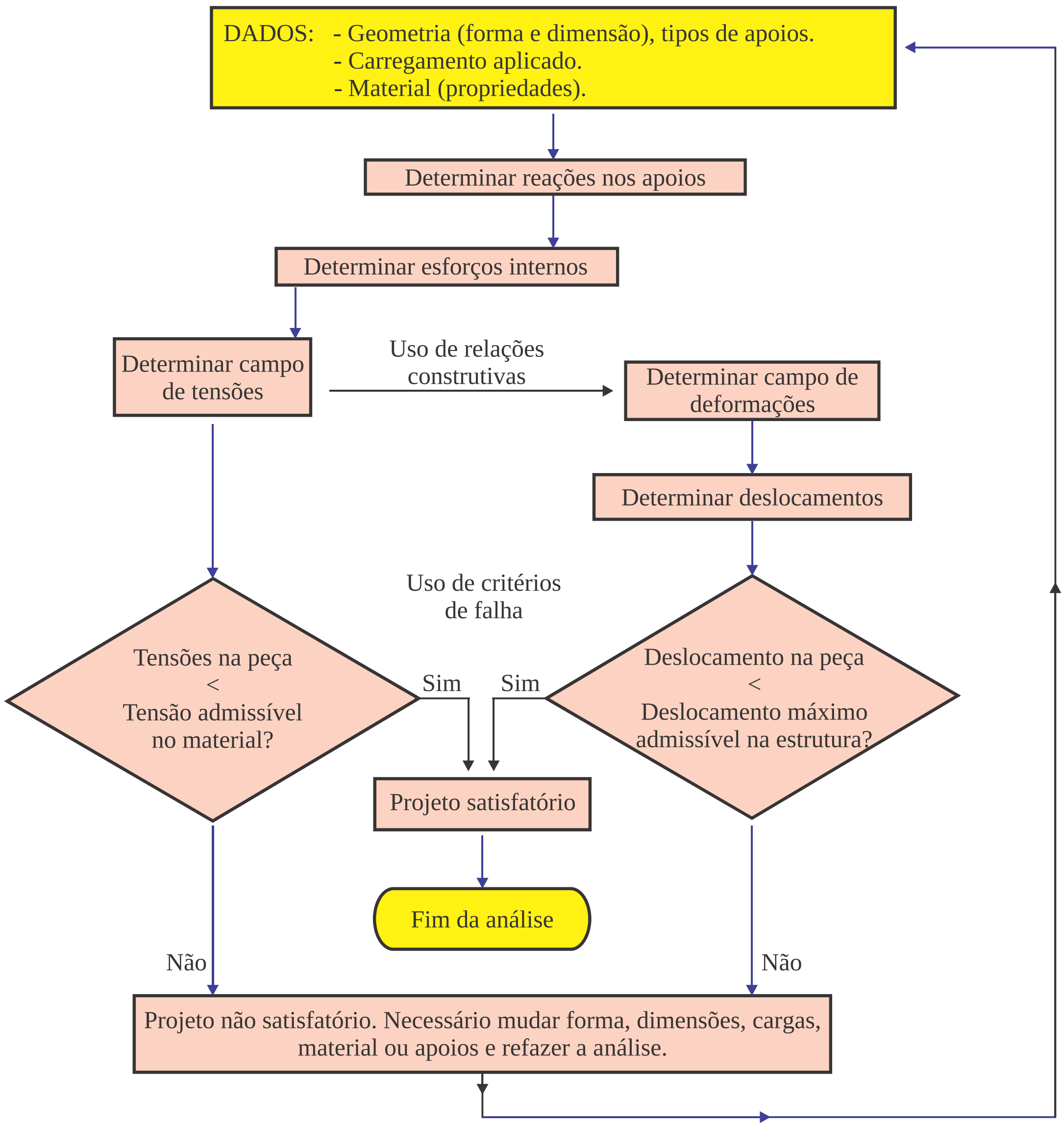


Figura 1.2: Fluxograma geral simplificado do processo de análise de comportamento mecânico de um componente em situações isostáticas.

que cada material tem um certo valor de "**tensão máxima admissível"**, que ele pode suportar sem sofrer alguma falha.

O fluxograma mostrado na Figura 1.2 ilustra um esquema aproximativo de análise mecânica de um componente mecânico. O objetivo do curso é o de detalhar este procedimento até um certo ponto. Conforme os fenômenos físicos atuantes no componente se tornam mais complexos, o procedimento geral pode assumir variações, mas a estrutura básica de análise permanece semelhante.

De fato, duas grandes linhas de operação são realizadas em mecânica estrutural, geralmente denominadas **ANÁLISE** e **PROJETO**, como diagramados na Figura 1.3. Cada operação se refere a uma situação própria. Tomemos primeiramente a **análise de segurança.** Considere que se tenha já um projeto montado, com todas as formas e dimensões dadas, material escolhido e propriedades conhecidas (não precisamos saber como foram obtidas, sabemos apenas que eles são dados). Um caso bastante comum que cai nessa situação é quando a peça ou estrutura já existe, já foi construída (por exemplo, uma **torre de transmissão** de energia elétrica, uma **ponte**, um **viaduto**, um **bloco de motor**, um **chassi** de caminhão). Esse componente ou sistema, supostamente, foi construído para funcionar bem sob uma certa situação, um certo conjunto de cargas, com certos valores. A questão que frequentemente se apresenta é a seguinte: **essa estrutura é segura sob este novo conjunto de carregamentos? Qual seria o nível de segurança? Qual seria o comportamento?**

Quais as tensões, e os deslocamentos? Essa é a questão fundamental no processo de análise de um componente ou sistema mecânico.

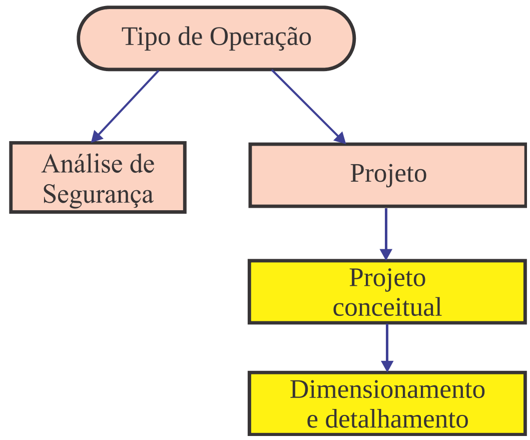


Figura 1.3: Tipos de operação em mecânica dos sólidos.

A segunda operação básica, o **projeto**, atende à situação reversa. A pergunta é: **qual a forma, as dimensões e o material necessários tal que um certo carregamento seja suportado com segurança?** De fato, a operação de projeto pode assumir formas bastante diversas dependendo da situação. Em algumas situações a forma do componente é basicamente conhecida. Por exemplo, um poste de cimento para transmissão de energia elétrica tem uma forma básica mandatória e óbvia: tem que ser um objeto longo e com seção transversal pequena. Seu uso já obriga o uso dessa forma. Não poderia ter a forma de uma esfera, ou de um disco por exemplo. Então, o processo de projeto envolve "apenas" as seguintes decisões:

1. definir a **forma** de sua seção transversal, que poderia ser por exemplo circular, em I ou em □, e

2. se será uma seção vazada ou maciça, e ainda

3. se a seção será uniforme ou não, i.e., se a forma será cilíndrica ou cônica.

Após isso, resta a operação de efetivamente **calcular** as dimensões necessárias da seção transversal para que ele suporte as cargas com segurança. Esse é o chamado **processo de dimensionamento**. Esse é o grande desafio, uma vez que aqui o engenheiro terá, por vezes, que lançar mão de todo o cabedal de técnicas e conhecimentos de matemática, de engenharia estrutural e de mecânica dos sólidos para simular o comportamento do componente.

Uma segunda situação em projeto ocorre quando o engenheiro se depara apenas com uma certa **necessidade a ser atendida e um conjunto de restrições,** e deve primeiramente "bolar" uma configuração geral para a estrutura antes de proceder ao dimensionamento de suas partes. Por exemplo considere, o projeto estrutural de um caminhão.

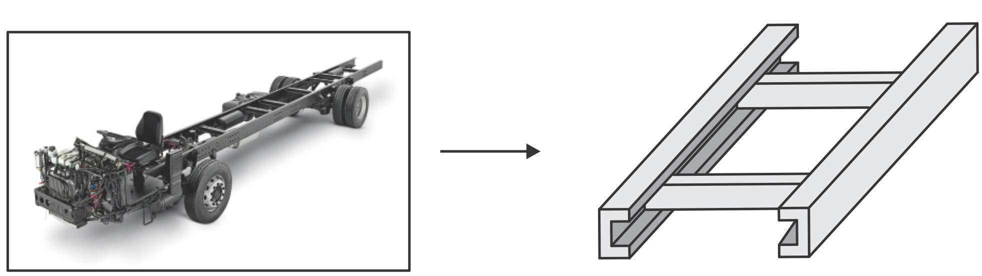


Figura 1.4: Foto da estrutura típica de um caminhão, e à direita, um esboço do chassi.

Figura 1.5: Tipos de vigas de grande porte: as vigas compostas (à esquerda), e as "vigas-caixão" (à direita). (Detalhe da Ponte Hercíclio Luz em Florianópolis. Fotos pelo autor.)

Embora todas as peças e componentes estruturais que se possa construir sejam, obviamente, corpos tridimensionais e frequentemente de formato complexo, os processos de cálculo buscam decompor a estrutura em partes geometricamente mais simples e, caso possível, busca-se adotar uma forma idealizada que permita uma estimativa aproximada do comportamento da peça real a partir de cálculos simples associados a um modelo também simples da peça real.

Assim surge o conceito de **componente estrutural básico**, alguns deles ilustrados nas Figuras 1.6 e 1.7. Na primeira figura temos **idealização geométricas** de estruturas típicas em engenharia. Assim, corpos longos e retos, onde uma das dimensões (comprimento) é muito maior que as demais dimensões (seção transversal) é modelado por uma formulação que o considera um segmento de linha reta. Em geral a denominação do modelo dependerá também do tipo de carregamento aplicado.

- **Barra** - Na chamada barra, o carregamento é coaxial, tanto quanto as deformações,

- **Viga** - se caracteriza por sofrer flexão, i.e., apresenta deslocamentos transversais à sua linha axial. Isto é ilustrado nas Figuras 1.7a e 1.7b.

- **Barra sob torção** - O mesmo componente em forma de viga, pode ainda ser "torcido", como na Figura 1.7c, de forma a desenvolver campos de deformação próprios.

- **Arco** - na Figuras 1.6 se nota o **arco**, que pode ser imaginado geometricamente como uma "viga curva". Geralmente o arco encontra-se sob ação de carregamento transversal, o que resulta em deslocamentos transversais (comportamento de **flexão**) ou coplanares (comportamento de **membrana**), como ilustrado nas Figuras 1.7h e (i).

Note que diversos desses comportamentos serão objeto de estudo detalhado ao longo dos diversos capítulos do presente livro, enquanto outros, como placas e cascas de geometria arbitrária, são assunto de cursos avançados.

- **Placa** - A placa é um componente plano, com espessura h muito menor que os lados (tipicamente $L/h > 50$), onde o contorno da superfície pode ter qualquer formato (não apenas retangular como na figura). O carregamento pode gerar deformação apenas coplanares (chamadas de **membrana**), ou causar **flexão**. Tipicamente denomina-se placa o componente plano delgado que sofre flexão. A Figura 1.8 ilustra uma aplicação típica de placa, em que o piso de uma ponte rodoviaria é constituído por grelhas retangulares simplesmente apoiadas nas bordas por vigas longitudinais e transversais.

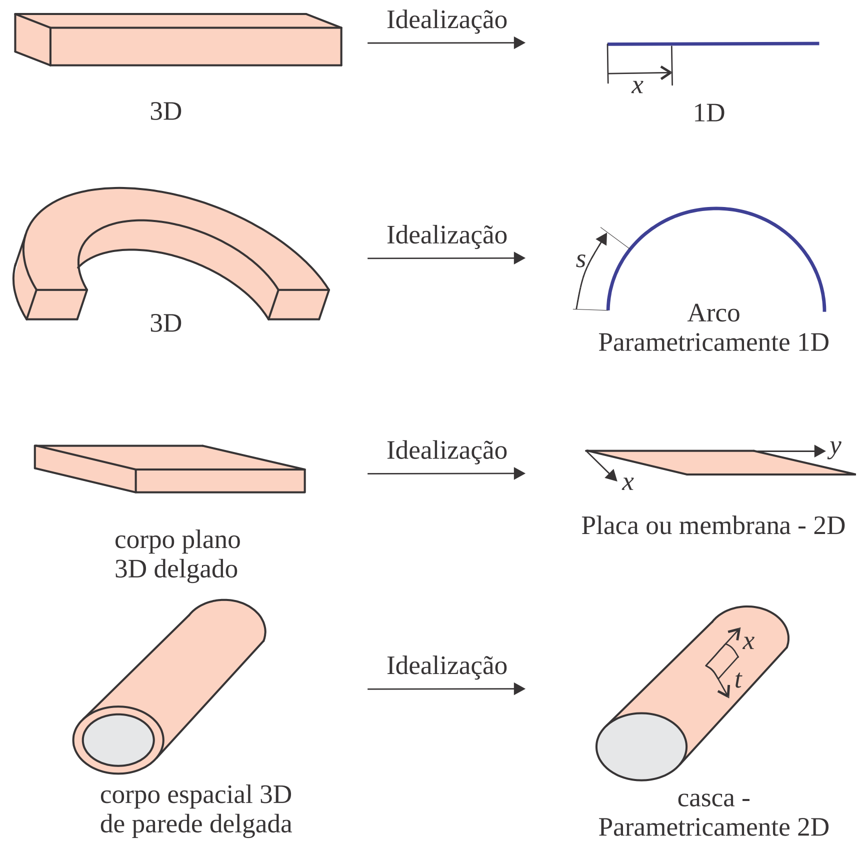


Figura 1.6: Tipos de idealização geométrica de estruturas típicas.

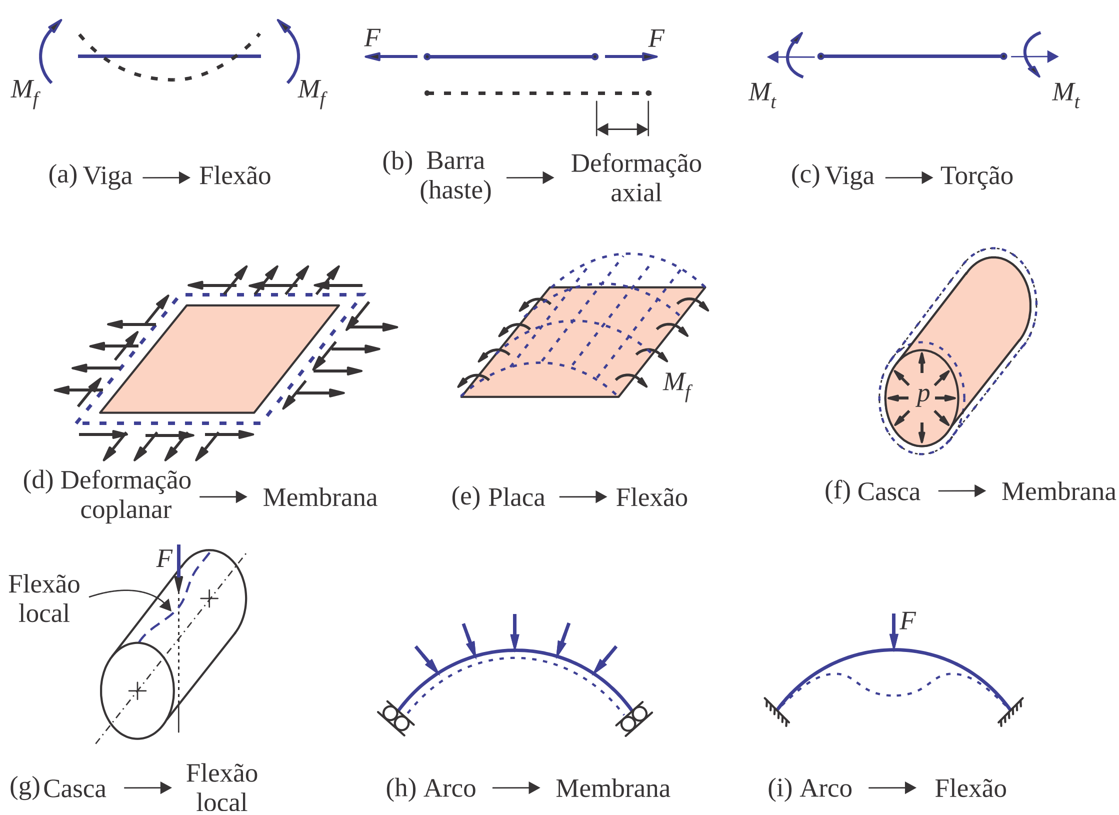


Figura 1.7: Componentes estruturais básicos. M_f e M_t são momentos fletor e forçar, F é força e p pressão interna.

- **Casca** - Finalmente, as cascas, podem ser vistas, geometricamente, como “placas curvas”, ou reversamente, pode-se pensar numa casca como uma superfície geométrica que se desenvolve num espaço tridimensional, de forma que em cada ponto dessa superfície existe um certo valor de espessura. As formas possíveis que uma casca pode assumir são obviamente infinitas, porém as formas construtivas mais utilizadas em engenharia são **cilindros**, **esferas**, **cones**, **elipsoides**, **toroides**, e **paraboloides**, por exemplo. Frequentemente são usadas partes das formas acima, i.e., setores de cilindro, hemi-esferas, calotas esféricas, tronco-cones, hemi-elipsoides etc. Também são usadas montagens de duas ou mais formas. Por exemplo, um **tanque de armazenamento** de líquido é feito por um segmento cilíndrico e uma base (o fundo) constituído por uma placa plana. Um **vaso de pressão** (reservatório de gases pressurizados), pode ser construído por um segmento cilíndrico com tampas constituídas por calotas esféricas (não muito usado) ou por calotas elípticas.

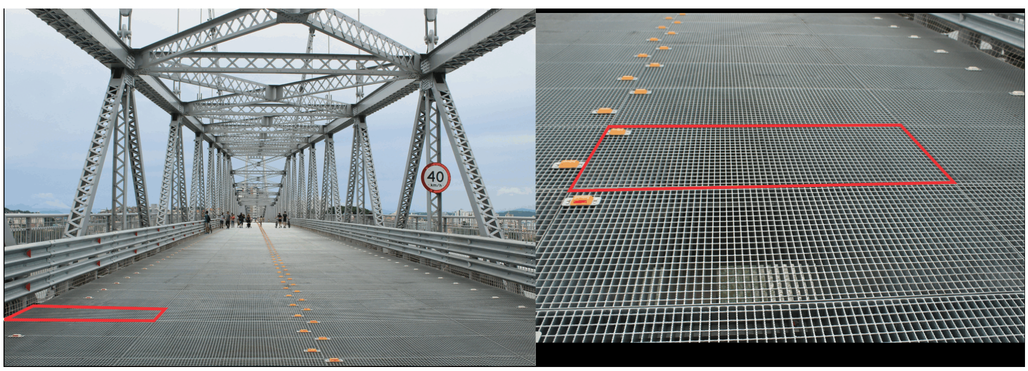


Figura 1.8: Placa constituida por uma grelha ortotrópica aberta usada no pavimento da Ponte Hercíclio Luz em Florianópolis. A região retangular demarcada indica uma placa individual, que é mostrada no detalhe à direita.

Outra observação geral importante é quanto aos **materias** possíveis de serem utilizados nos componentes. Apesar dos exemplos mostrados serem de aço, desde as últimas décadas uma variedade bastante ampla de materiais tem sido utilizados, além dos metais (aluminio, titânio, cobre...), os polímeros (PVC, polipropileno, nylon,...), a tradicional madeira, e a grande classe dos materiais compostos modernos, principalmente os constituídos por polímeros (epóxi, poliester,...) reforçados por fibras de alto desempenho (vidro, carbono, kevlar, boro,...).

Capítulo 2

Esforços internos

Neste capítulo apresentamos uma revisão rápida dos procedimentos de determinação de reações de apoios em estruturas isostáticas, e determinação de esforços em vigas e barras, isto e, esforços cortante, normal, de momento fletor e de momento torçor. Nos demais capítulos, supõe-se que o leitor tenha tido um curso de **estática dos corpos rígidos** onde este assunto tenha sido visto em detalhes. Entretanto, caso seja detectada uma deficiência nesse conteúdo, torna-se recomendável sua revisão no presente capítulo antes de entrar no conteúdo de mecânica dos sólidos. Sem dúvida que a inclusão desse capítulo fica a critério do leitor ou do professor da disciplina.

2.1 Equilíbrio de um corpo e reações de apoio

Ao longo de todo esse curso consideraremos apenas corpos sólidos em **equilíbrio estático**, corpos que estão **imóveis** e em **equilíbrio**. A condição de equilíbrio é no sentido da **segunda lei de newton** que, quando aplicada a um corpo genérico como o da Figura 2.1 indica que ele estará em equilíbrio se as forças externas aplicadas sobre ele forem tais que as forças e momentos resultantes sejam nulas:

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbf{F}_n = \mathbf{0}, \qquad \text{e} \qquad \sum_{m=1}^{M} \mathbf{M}_m^P = \mathbf{0}, \qquad \text{onde} \qquad \mathbf{M}_m^P = \mathbf{r}_m \times \mathbf{F}_m. \tag{2.1}$$

Os momentos $\mathbf{M}_m^P$ podem ser calculados em relação a qualquer ponto $\mathbf{P}$. Basta que $\mathbf{r}_m$ seja o vetor que une $\mathbf{P}$ até o ponto de aplicação da força.

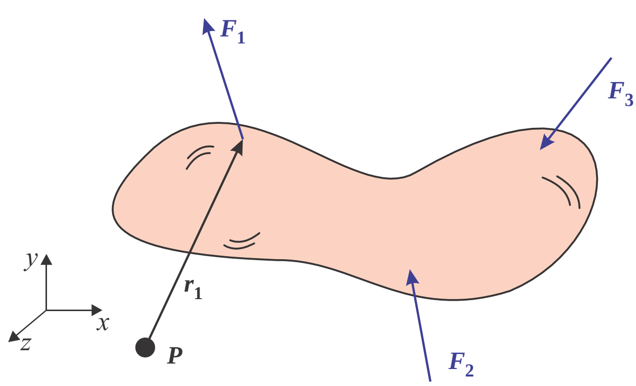


Figura 2.1: Corpo sólido de forma genérica, sob a ação de um conjunto de forças.

Em coordenadas cartesianas temos que cada vetor é escrito como

$$\mathbf{F}_n = F_{nx}\mathbf{i} + F_{ny}\mathbf{j} + F_{nz}\mathbf{k} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{M}_n = M_{nx}\mathbf{i} + M_{ny}\mathbf{j} + M_{nz}\mathbf{k}.$$

Os índices x, y e z indicam os eixos cartesianos e $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são os vetores unitários ao longo dos eixos x, y e z. Como todos os vetores são definidos pela mesma base de vetores unitários, pode-se representar cada vetor apenas pelas suas componentes:

$$\mathbf{F}_n = \{F_{nx}; F_{ny}; F_{nz}\} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{M}_n = \{M_{nx}; M_{ny}; M_{nz}\}\,. \tag{2.2}$$

As duas equações vetoriais de equilíbrio (2.1) correspondem a 6 equações algébricas em termos dos componentes cartesianas, i.e.,

$$\text{Equilíbrio de forças} \begin{cases} \sum_{n=0}^{N} F_{xn} = 0, \\ \sum_{n=0} F_{yn} = 0, \\ \sum_{n=0} F_{zn} = 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \text{equilíbrio de momentos} \begin{cases} \sum_{m=0} M_{xm} = 0, \\ \sum_{m=0} M_{ym} = 0, \\ \sum_{m=0} M_{zm} = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Reações nos apoios

Componentes estruturais encontram-se sempre vinculados a outros componentes ou a uma base fixa[1]. Nessa situação temos um problema como na Figura 2.2. Ali observa-se que apenas parte das forças que atuam no corpo são a priori conhecidas. Mas existem outras forças que são reações nos apoios às forças conhecidas, necessárias para garantir o equilíbrio do corpo. Se incluirmos todas as forças aplicadas, conhecidas e reativas, a condição de equilíbrio (2.3) toma a forma:

$$\begin{cases} \sum_n F_{xn} + \sum_j R_{xj} = 0, \\ \sum_n F_{yn} + \sum_j R_{yj} = 0, \\ \sum_n F_{zn} + \sum_j R_{zj} = 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \sum_s M_{xs} + \sum_k R^k_{mx} = 0, \\ \sum_s M_{ys} + \sum_k R^k_{my} = 0, \\ \sum_s M_{zs} + \sum_k R^k_{mz} = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

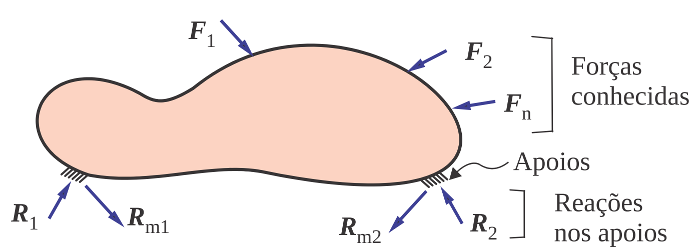


Figura 2.2: Forças conhecidas e reações de apoios num corpo vinculado.

Um problema de equilíbrio é dito **isostático** se o número de componentes de reações incógnitas não-nulas é igual ao número de equações de equilíbrio **não triviais** disponíveis no problema. (Uma equação é dita **trivial** se é do tipo $0+0+\cdots+0=0$). Por exemplo, pode acontecer de não haver nenhuma força aplicada numa dada direção, por exemplo, direção x. Nesse caso a primeira das equações (2.4) é trivial. Assim restam apenas 5 equações não triviais, que permitem determinar 5 reações incógnitas.

Caso o corpo seja vinculado de tal forma que o **número de componentes de reações incógnitas** r seja maior que o número de equações de **equilíbrio não triviais**, o problema é dito **hiperestático** (também chamado **estaticamente determinado**). O número de graus de **hiperestaticidade** h é

[1] Existem muitas exceções notáveis, como os casos de corpos flutuando no espaço ou na água ou em queda livre.

$$h = r - e,$$

i.e.,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Número de}\\ \text{graus de}\\ \text{hiperestaticidade}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{número de}\\ \text{reações}\\ \text{incógnitas}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{número de}\\ \text{equações de equilíbrio}\\ \text{não triviais}\end{array}} \tag{2.5}$$

Ao longo deste capítulo nos concentramos em problemas isostáticos. Problemas hiperestáticos exigem que as equações de equilíbrio sejam suplementadas por outras equações, associadas aos deslocamentos, que serão vistos nos demais capítulos.

2.1.1 Tipos de apoios em vigas

Uma vez que este é um texto introdutório, quase todo ele se concentrará em barras e vigas, enquanto a análise dos demais tipos de componentes, como placas e cascas, são deixadas para cursos avançados.

A Figura 2.3 mostra uma estrutura típica de viaduto de concreto armado, constituido por vigas longitudinais **simplesemnte apoiadas** sobre vigas transversais, que são engastadas nas colunas. Nota-se que o apoio simples entre as vigas longitudinais e a viga transversal é constituído por roletes, que permitem a rotulação local da viga longitudinal devido à sua flexão, e também permite o deslocamento axial da viga longitudinal proveniente de dilatações térmicas. A coluna é considerada **engastada** nas fundações, e deve resistir aos esforços colineares devido à carga vertical aplicada, e também deve resistir aos momentos fletores devidos às vibracões na estrutura. Outra forma de engaste é o tipo soldado em partes metálicas, como a junta da coluna à base mostrada na foto da Figura 2.4.

Figura 2.3: Foto de estrutura típica de viaduto de concreto armado, constituido por vigas longitudinais **simplesemnte apoiadas** sobre vigas transversais, que são engastadas em colunas.

A Figura 2.5 ilustra um eixo de redutor velocidade, mostrando um rolamento radial na extremidade direita, e diversas engrenagens helicoidais. O redutor de velocidades é um conjunto de diversos dessas árvores, em que cada par possui um acoplamento através de um par de engrenagens. Pelo acoplamento são transmitidas forças entre o par de dentes em contato, e essas forças atuam em ambos os eixos, gerando neles efeitos de torção e de flexão e deformação axial.

A Figura 2.6 mostra um eixo escalonado típico em redutores de velocidade (não correspondente à árvore da Figura 2.5, mas apenas ilustrativo). Em cada escalonamento, um elemento é montado, quer seja uma polia, uma engrenagem ou um rolamento.

Figura 2.4: Detalhe de junta soldada de uma coluna em forma de chapa estreita, em uma base horizontal.

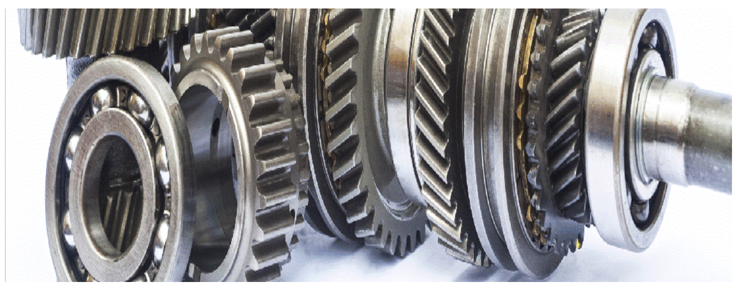


Figura 2.5: Foto de eixo de redutor de velocidade, mostrando rolamento (na extremidade direita), e diversas engrenagens helicoidais.

Representações simbólicas dos apoios

Nas atividades de cálculo em engenharia, é mais prático usar representações estilizadas dos componentes estruturais e dos seus apoios e carregamentos. Esses são os chamados modelos de engenharia, i.e., as representações aproximadas dos componentes reais. A Figura 2.7 ilustra as representações de algumas das formas construtivas mais comuns de **vinculação (apoios)** em barras e vigas, tanto em componentes de construção civil quanto em maquinas.

- **Apoio simples**, que é representado simbolicamente na Figura 2.7a. Esse tipo de apoio permite o deslocamento relativo da seção A da viga em relação à base, ao longo da direção axial x. Então, qualquer força resultante na viga na direção x não poderá ser sustentada por esse apoio. A consequência é que a reação axial oferecida pelo apoio é nula, i.e., $R_x = 0$. Uma segunda característica do apoio simples é que ele é rotulado no plano, de forma que permite a rotação da seção A da viga em torno do apoio. A consequência é que o apoio não oferece reação de momento na direção z, i.e., $R_{mz} = 0$. Assim, a única reação que o apoio é capaz de

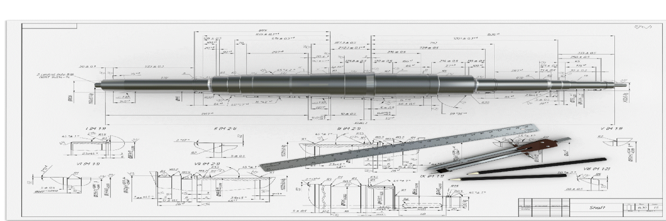


Figura 2.6: Foto de um eixo escalonado típico em redutores de velocidade.

oferecer às forças aplicadas na viga é R_y.

- Observe o símbolo que utilizaremos para o apoio simples: o triângulo, para representar a rótula, e o carro de rodizio para representar a possibilidade de deslizamento axial.

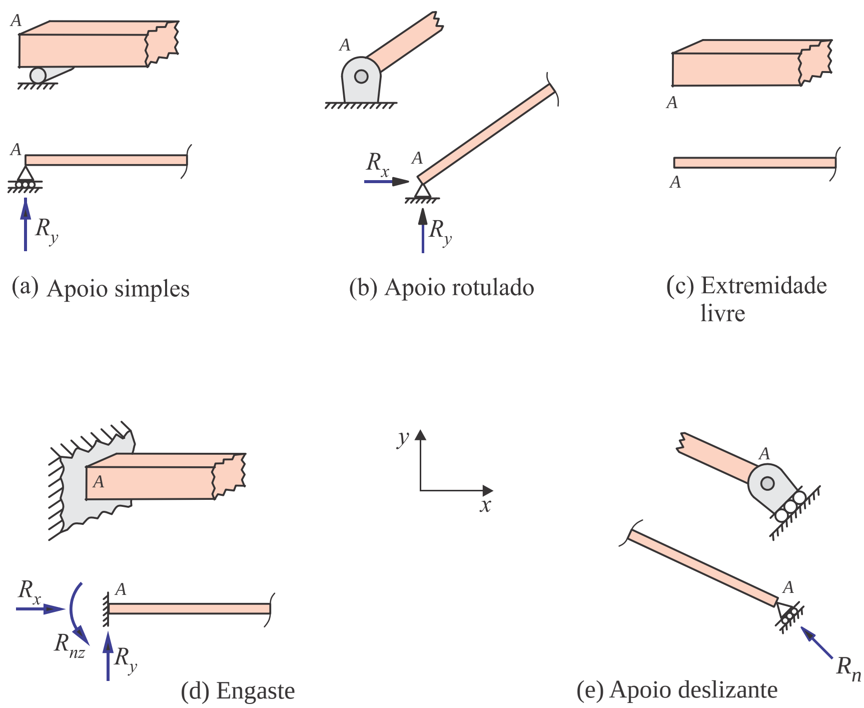


Figura 2.7: Tipos mais comuns de apoios numa viga, e sua representação esquemática.

- **Apoio rotulado**, ilustrado na Figura 2.7d. O ponto A da viga é permitido rotacionar em torno do eixo z, porém qualquer movimento de translação no plano xy é impedido. Logo, o apoio não oferece reação de momento na direção z, i.e., $R_{mz} = 0$. Uma vez que o apoio impede movimentos de translação, ele oferece reação de força, com componentes incógnitas R_x e R_y.

  - Observe o símbolo que utilizaremos para o apoio simples: o triângulo, para representar a rótula, que é fixado diretamente na base, para dar a ideia que ele não pode se mover em translação ao longo de x.

- O **engaste** é ilustrado na Figura 2.7b. Ele ocorre, por exemplo, em uma junção soldada a uma base fixa, em caso de peças de aço, ou uma barra de concreto armado fixado em uma fundação considerada, até certo ponto, como um elemento fixo, absolutamente indeformavel. A junção engaste impede completamente qualquer movimento relativo entre a seção A da viga e a base, tanto movimentos translacionais quanto rotacionais. Caso as forças aplicadas à estrutura possuam resultante não nulas de força e de momento, o engaste impede o movimento relativo aplicando forças e momentos que equilibrem toda o parte da força resultante da estrutura. Decompondo as reações em componentes cartesianas, o engaste pode oferecer até 6 reações não nulas: as três componentes de reação de força, R_x, R_y, R_z, e as três componentes de reação de momento, R_{mx}, R_{my} e R_{mz}.

  - Note-se que, embora o apoio possa oferecer essas 6 componentes de reação, não necessariamente todas elas serão não nulas em todos os problemas. Por exemplo, se nenhuma força for aplicada na estrutura na direção x, claramente o apoio não será solicitado nessa direção, e se terá $R_x = 0$.

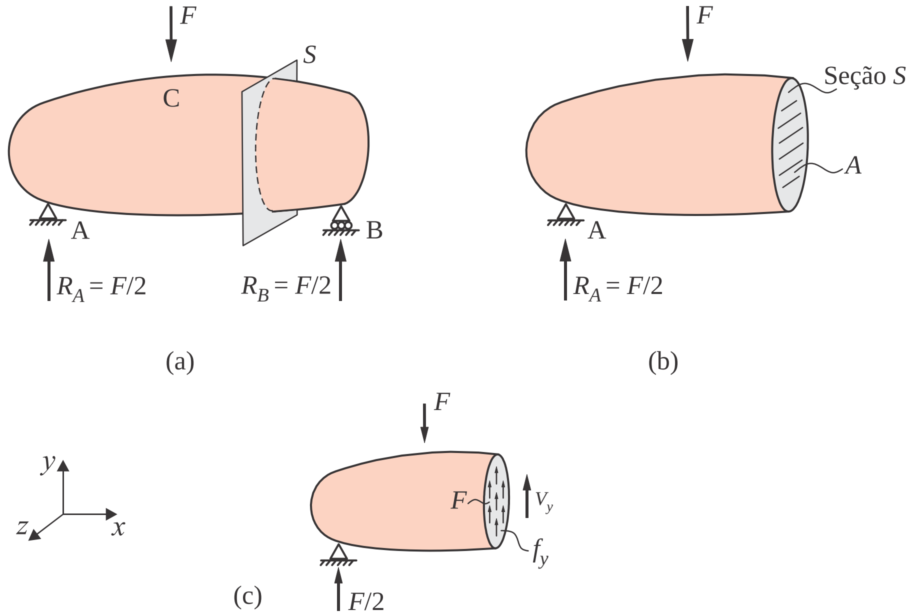


Figura 2.10: Forças num corpo e numa parte deste.

visualizadas como molas. Dessa forma, a força aplicada na primeira camada é, de fato, transmitida para a segunda. A segunda camada por sua vez tende a deslocar-se ao encontro da terceira, o que implica numa transmissão da força para a terceira camada, e assim sucessivamente. Então a força se transmite através do corpo como uma onda. De fato, o processo é realmente por transmissão de onda mecânica, e se faz à velocidade do som.

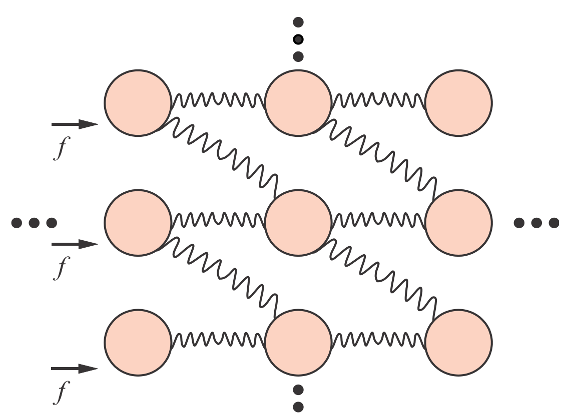


Figura 2.11: Estrutura atômica simples, submetida a forças f em sua primeira camada.

A onda começa no momento em que se inicia a aplicação de F no ponto C. Quando ela atravessa todo o corpo, cada porção deste passa a suportar uma parcela de força. Para ver isso, consideremos o caso da Figura 2.10a, onde fazemos um corte S numa posição qualquer. Para simplificar a interpretação, consideremos que esse corte seja paralelo ao plano yz. Se examinarmos apenas um dos lados do corpo, o lado esquerdo, por exemplo, como na Figura 2.10b, e indicarmos apenas as forças externas (F e R_A), como colocado ali, é fácil visualizarmos que aquela porção do corpo não está em equilíbrio. Mas isso seria incoerente. **Para um corpo sólido, sabemos que se ele está em equilíbrio, cada porção dele também estará em equilíbrio.**

Para entender esta afirmação basta lembrar que, quando se diz que o corpo está em equilíbrio entende-se que sua aceleração é nula. Ora, se o corpo é sólido, sem nenhuma parte móvel dentro dele, então cada parte dele também estará sob aceleração nula. Claramente a exceção disso são

$$\begin{aligned}\text{tensão normal média} &= \tau = \frac{\text{força normal resultante na subseção}}{\text{área da subseção}},\\ &= \frac{-P/4}{A/4} = -\frac{P}{A},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\text{tensão cisalhante média} &= \tau = \frac{\text{força tangente resultante na subseção}}{\text{área da subseção}},\\ &= \frac{F/4}{A/4} = \frac{F}{A}.\end{aligned}$$

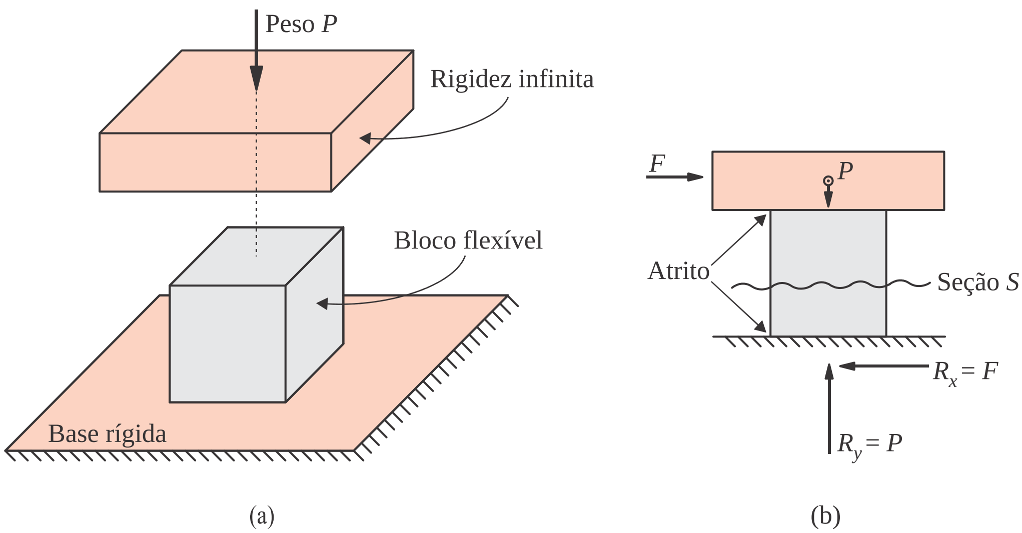


Figura 2.12: Caso ilustrativo 1, de um bloco de material flexível comprimido axialmente.

Essas tensões são representadas nas Figuras 2.13d e (e). Note que, em lugar de usar 2×2 subseções, poderíamos ter tomado uma quantidade infinitamente maior delas, $n \times n$, de tal forma que cada sub-região se aproximaria de um ponto. Tanto a parcela de força quanto a de área se tornaria cada vez mais diminutos, mas a relação entre elas, τ, se manteria a mesma e, por outro lado, τ passaria a ser um valor associado a um ponto do corpo. Também, se cada força fosse igual a $-P/n$, sempre a força total na seção seria $N = -P$, não importando quão grande fosse n.

Caso ilustrativo 2

Um segundo exemplo é aquele ilustrado na Figura 2.14a, que consiste em uma barra com duas seções distintas, engastada em uma extremidade e tracionada pela outra. Note que, independentemente da área da seção transversal, o esforço normal, em qualquer seção, é o mesmo, sempre igual a $N = P$.

Para melhor fazer a ilustração, subdividimos a seção transversal em três sub-regiões. Podemos usar alguma intuição para estimar qual parcela do esforço total, $N = P$, é suportada por cada subárea na seção $a - a$ próxima ao topo. Na Figura 2.14b fazemos uma indicação qualitativa. Pode-se facilmente imaginar que as duas porções de material situada, mais à esquerda e à direita da haste, praticamente não sofrem o efeito da força. A força P seria suportada principalmente pela subárea central. Assim, para os três blocos, as forças e tensões seriam aproximadamente

$$\begin{aligned} F &\approx 0 && \rightarrow && \tau \approx 0,\\ F &\approx P && \rightarrow && \tau \approx 3P/A,\\ F &\approx 0 && \rightarrow && \tau \approx 0.\end{aligned}$$

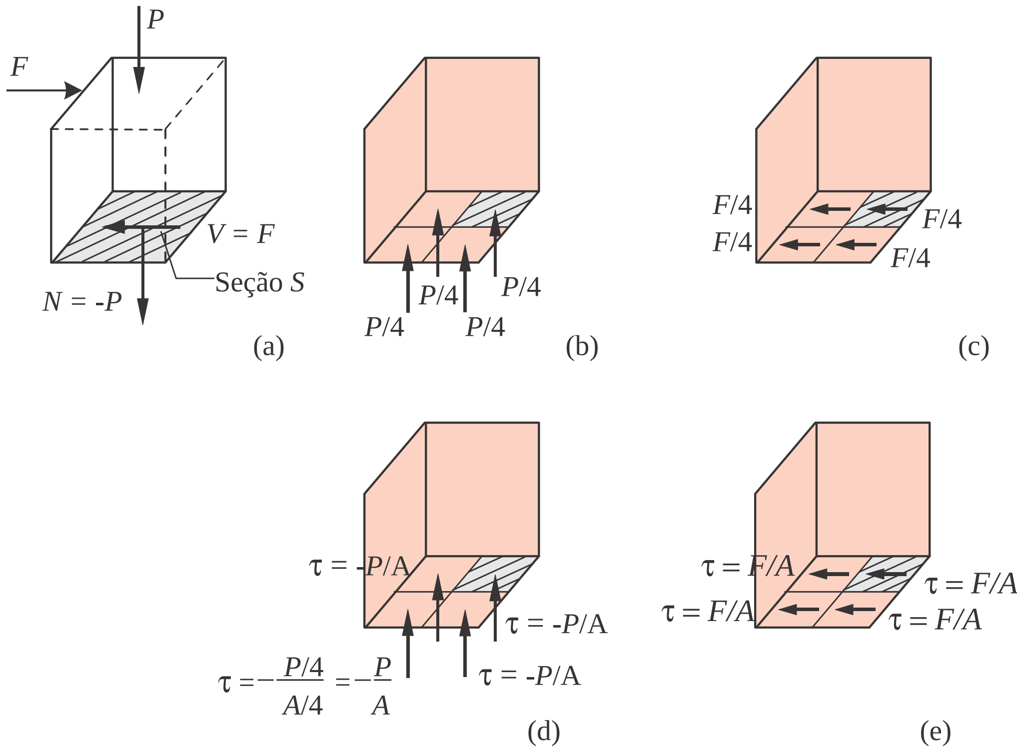


Figura 2.13: Ilustração sobre tensões normal e cisalhante médias.

A Figura 2.14c, no topo, ilustra a distribuição dessas tensões, tanto na forma de degraus, quanto numa forma contínua, suavizada, que qualitativamente melhor se aproxima da solução real do problema. Para entendermos o que ocorre nas seções mais distantes da extremidade, por exemplo a seção $b-b$, devemos considerar um fenômeno conhecido em mecânica dos sólidos. O que ocorre é que, **conforme nos afastamos do topo, as forças, e por extensão as tensões, gradualmente se tornam mais uniformemente distribuídas ao longo da seção**.[2] Assim, na seção $b-b$, parte da carga, $P/4$ por exemplo, estaria sendo sustentada pelos blocos laterais, e a porção central da seção ainda suportaria a maior parte, $P/2$. Note, na figura (c), que a distribuição de tensões torna-se mais achatada, mais uniforme.

Segundo essa ideia, na extremidade oposta à haste, a seção $c-c$, as tensões se distribuem de forma praticamente uniforme ao longo da seção.

2.3.1 Um tratamento mais rigoroso

Consideremos a Figura 2.15. Em (a) temos o diagrama de corpo livre da peça completa e um sistema de eixos cartesianos xyz. Consideramos um ponto genérico P de coordenadas definidas pelo vetor **x,** de componentes $\{x; y; z\}$. Em seguida definimos um plano S passando pelo ponto P, orientado numa direção perpendicular a um dos eixos cartesianos, por exemplo, o eixo x, como ilustrado. A Figura 2.15b mostra um diagrama de corpo livre de um dos lados do corpo em relação à superfície S. Nessa parte do corpo temos as forças externas (exemplificadas ali por $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$), que são equilibradas pela **força e momento internos**, **F** e **M**, aplicados no centroide da seção.

Vimos como obter os esforços a partir das forças externas, simplesmente aplicando as equações de equilíbrio. Observe que os esforços **F** e **M** são meramente forças fictícias, i.e., são as resultantes das verdadeiras forças que atuam na seção de forma distribuída. Consideremos agora o problema de determinar a **distribuição das forças internas** ao longo da seção S.

Considere um elemento ΔA de área pertencente à superfície S, localizado no ponto P como

[2] Posteriormente voltaremos a esse assunto que, de fato, corresponde a um princípio da mecânica, denominado "Princípio de St.-Venant".

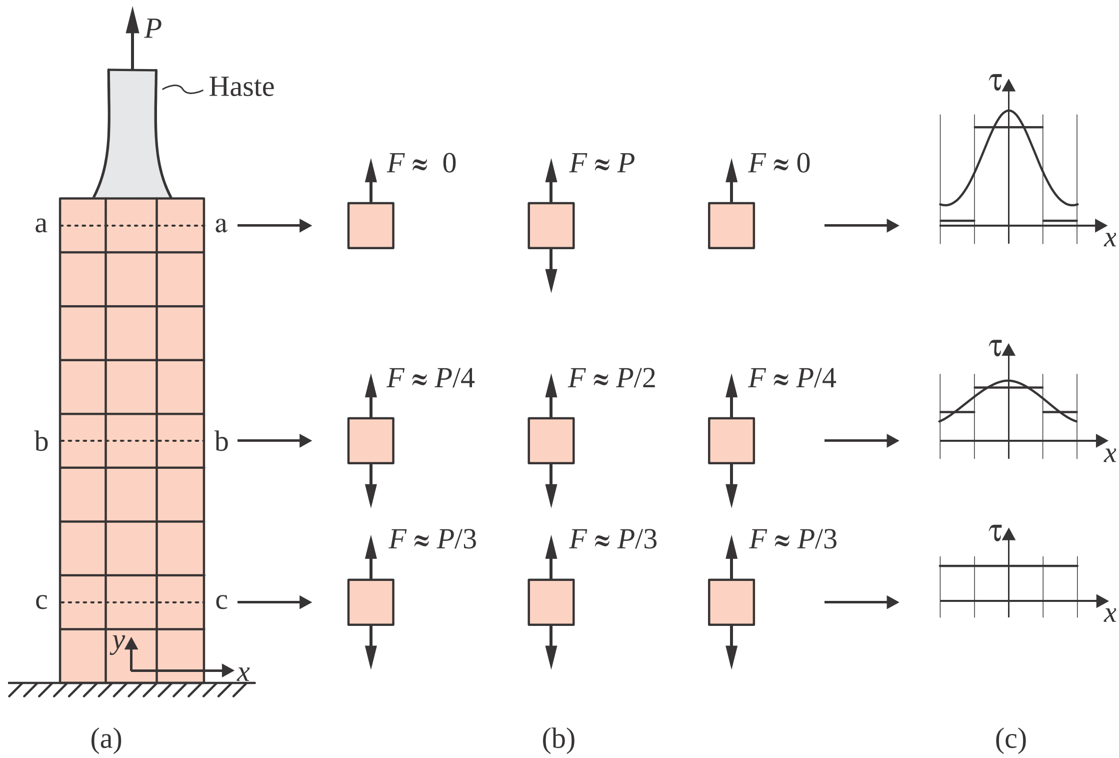


Figura 2.14: Caso ilustrativo 2, sobre campo de tensões normais variáveis.

indicado na Figura 2.15b. Esse elemento de área tem sua normal orientada na direção de um **vetor normal n**. Para simplificar a exposição, arbitraremos nesse caso que $\mathbf{n}$ seja paralelo ao vetor unitário $\mathbf{i}$, i.e., $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Note que a superfície de corte S não necessita ser plana. De fato, em muitas situações é mais vantajoso que S seja uma superfície curva. Entretanto, aqui nos concentramos apenas na orientação da normal no ponto P. Claramente, cada ponto de S possui sua própria orientação normal, i.e., existe uma função $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$.

No elemento de área ΔA atua uma parcela da força total da seção, dado pelo vetor $\Delta\mathbf{f}^i$. Se somamos todos os $\Delta\mathbf{f}$'s atuantes na superfície S temos a esforço total atuante na seção, i.e.,

$$\mathbf{F} = \Sigma \Delta\mathbf{f}^i, \tag{2.13}$$

e da mesma forma, o esforço de momento na seção é dado pelo produto vetorial

$$\mathbf{M} = \Sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \Delta\mathbf{f}^i, \tag{2.14}$$

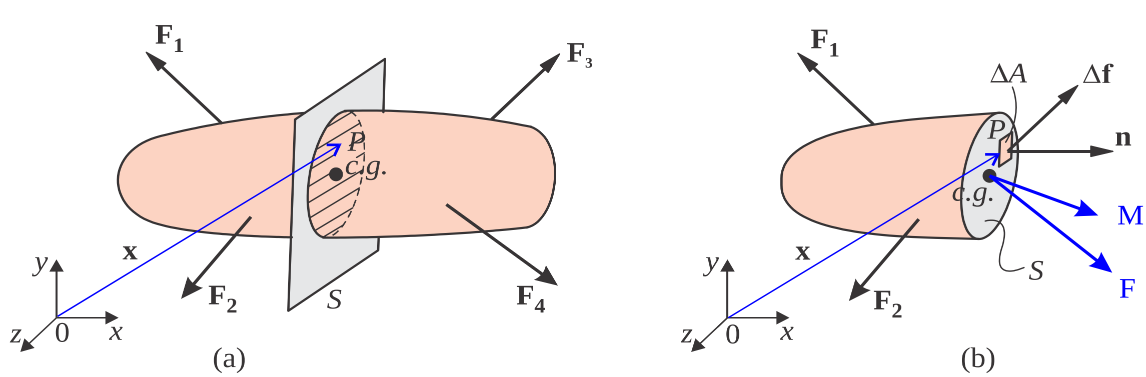


Figura 2.15: Forças externas e internas num corpo.

Note que definimos as componentes de tensão e fizemos sua associação com os esforços. Entretanto, a determinação das tensões, propriamente ditas, é assunto que vai demandar quase todo o esforço no resto do presente texto, e é objeto de esforços de quase toda a ciência de Mecânica dos Sólidos. A definição de tensões que vimos acima é ainda apenas introdutória, e será retomada em outros capítulos para mais detalhamentos e propriedades. A seguir retornamos à revisão das propriedades dos esforços e dos processos de seu cálculo em problemas típicos.

2.4 Caso geral de esforços em vigas

Como vimos, para manter o equilíbrio numa parte da viga, é necessária a presença de uma força atuando na superfície interna de corte. Mais que uma força, é necessário também a existência de um momento. Por conveniência, considera-se que esses dois vetores atuam no ponto que corresponde ao **centroide da seção**.

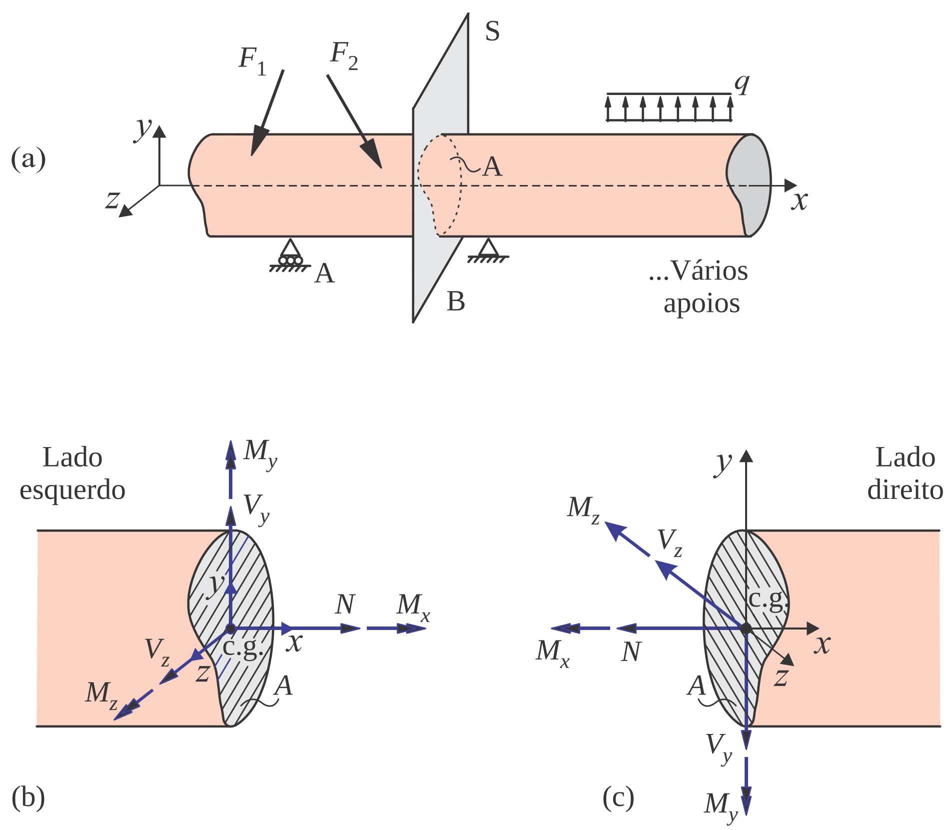


Figura 2.16: Convenção de esforços positivos na seção interna de uma viga.

Considere uma viga reta arbitrária, que estende-se ao longo do eixo x, submetida a um carregamento qualquer, com diversos apoios, como ilustrado na Figura 2.16a. Se realizamos um corte S perpendicular ao eixo x, temos a viga separada em dois lados: o esquerdo e o direito em relação à seção de corte S. Se observamos a parte da viga à esquerda do corte, temos uma representação como na Figura 2.16b. Ali, o vetor de forças internas é representado pelas suas três componentes, uma na direção normal à seção, denominada **esforço normal** N, e duas componentes tangenciais à seção, nas direções y e z, denominadas **esforços cortantes**, V_y e V_z.

Já o vetor de momentos internos também é decomposto em suas três componentes: uma componente na direção axial, o chamado **momento torçor** M_x, e duas componentes, nas direções y e z, os **momentos fletores** M_y e M_z . Consideremos agora, para o mesmo corte S, o lado direito da viga, como mostrado na Figura 2.16c. Devemos observar que as partículas materiais na superfície S da Figura (b) não são as mesmas partículas da superfície S da Figura (c). De fato, as forças e momentos internos mostrados em (b) foram aplicadas pelo lado direito da viga mostrada em (c).

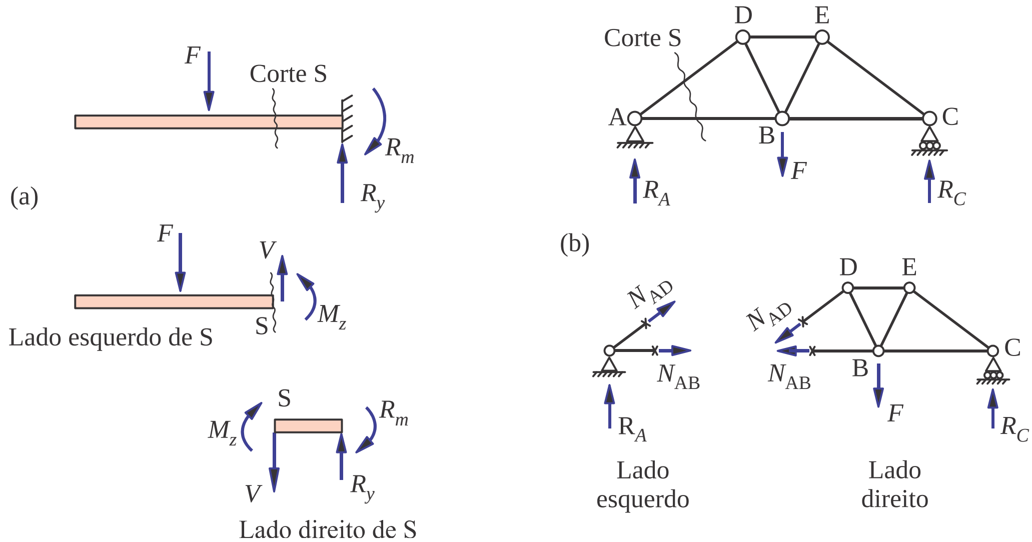


Figura 2.17: Corte de estrutura em duas através de uma dada seção, com indicação dos diagramas de corpo livre de cada uma das partes.

equações). Resolvendo o sistema de equações teremos os esforços nas vigas interceptadas pelo corte na estrutura, na posição do corte.

Os detalhes de aplicação do método serão melhor compreendidos através dos exemplos que seguem.

Exemplo 2.2 – Cálculo de esforços

Considere a viga mostrada na Figura 2.18a, com uma força $F = 50$ N aplicada na extremidade contida no plano xy. (a) Determine as reações nos apoios. (b) Determine os esforços na seção D, localizada a 25 mm da extremidade C.

Solução:

Etapa (a) – Para determinar as reações dos apoios basta seguir as etapas mostradas no Exemplo 1. Na Figura 2.18(b) temos a definição do sistema de coordenadas e a indicação das reações não nulas nos apoios. Como são três, e o problema é plano, o problema é isostático, e as reações são dadas pelas três equações de equilíbrio não triviais:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \longrightarrow F\cos 30^o + R_{Ax} = 0, \\
\sum F_y &= 0 \longrightarrow F \text{ sen } 30^o + R_{Ay} + R_{Ay} = 0, \\
\sum M_z^A &= 0 \longrightarrow R_{By}(100) + \text{sen } 30^o \ (150) = 0.
\end{aligned}$$

Note que fizemos o cálculo dos momentos em relação ao ponto A.

A solução do sistema de equação é: $R_{By} = -37,5$ N, $R_{Ax} = -25\sqrt{3}$ N $= -43,3$ N e $R_{Ay} = 12,5$ N.

Etapa (b) – **Os esforços** na seção D são obtidos pelo método das seções. Fazemos um corte na seção D e escolhemos um dos lados da viga. Na Figura (c) temos o lado direito. Em seguida fazemos um diagrama de corpo livre daquele lado. Temos ali as forças externas e os esforços não nulos. Como o problema é plano, apenas os esforços N, V_y e M_z aparecem no diagrama de corpo livre.

Os esforços são determinados pelas equações de equilíbrio entre as forças aplicadas no lado direito da viga:

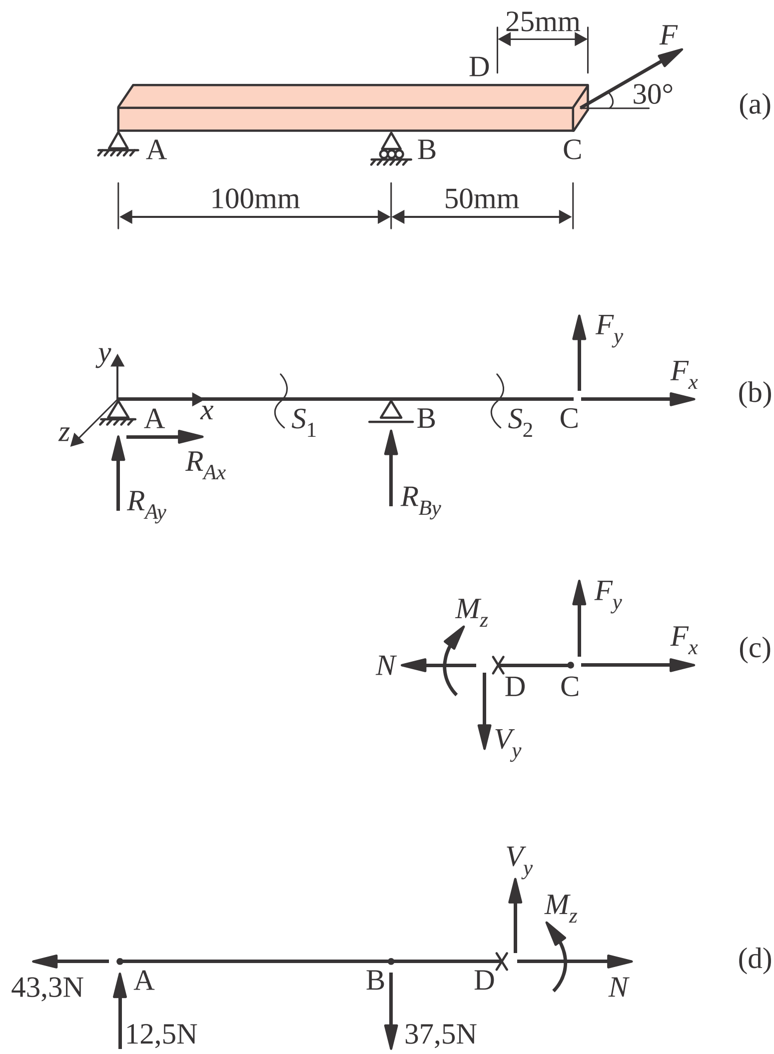


Figura 2.18: Ilustração do Exemplo 2.

$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \longrightarrow F\cos 30^o - N = 0, \\
\sum F_y &= 0 \longrightarrow F \text{ sen } 30^o - V_y = 0, \\
\sum M_z^D &= 0 \longrightarrow F \text{ sen } 30^o\ (25) - M_z = 0.
\end{aligned}
$$

A solução do sistema é $N = 43,3$ N, $V_y = 25$ N, $M_z = 625$ Nmm.

Observe que se tivéssemos usado o **lado esquerdo da viga**, como na Figura 2.18d, os valores dos esforços seriam exatamente os mesmos. Nesse caso as equações de equilíbrio seriam:

$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \longrightarrow N - 43,3 = 0, \\
\sum F_y &= 0 \longrightarrow V_y + 12,5 - 37,5 = 0, \\
\sum M_z^D &= 0 \longrightarrow M_z + 37,5(25) - 12,5(125) = 0.
\end{aligned}
$$

2. Na segunda situação, a carga é estática, proveniente do peso próprio ou de uma força aplicada por uma outra parte da estrutura que se apoia sobre a viga sendo analisada.

   (a) De fato, também as cargas concentradas estáticas são provenientes de outros corpos que estão montados ou apoiados na viga.

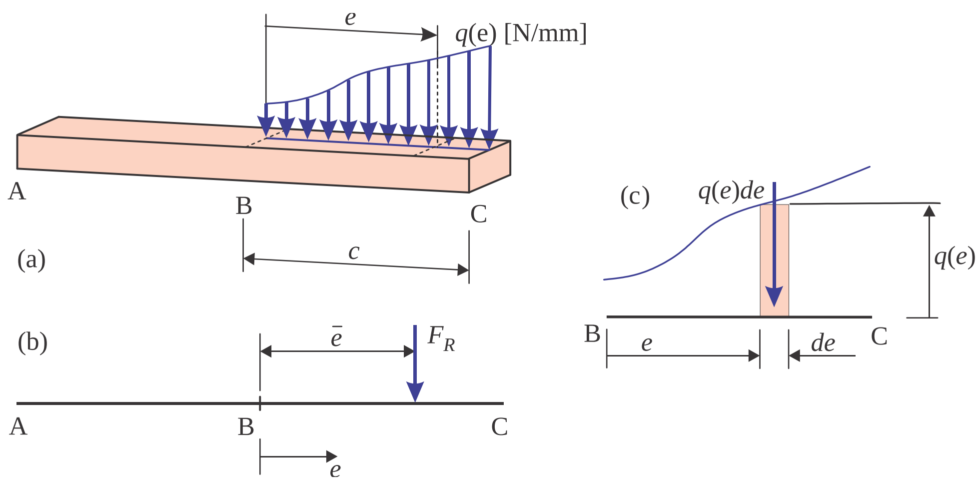


Figura 2.20: Carga distribuída arbitrária e força resultante.

Para efeito de cálculo do equilíbrio global de forças, a carga distribuída $q(x)$ pode ser substituída por uma **força equivalente** F_R, aplicada numa posição adequada. Considere-se uma carga distribuída definida por uma função arbitrária $q = q(x)$ aplicada entre as seções B e C de uma viga, como na Figura 2.20a. Busca-se a posição de aplicação da força resultante equivalente $\bar{e}$ em relação à seção B. Os valores de F_R e $\bar{e}$ são definidos tais que F_R representa a força resultante de $q(x)$, e $\bar{e}$ é tal que F_R produz o mesmo momento que $q(x)$ produz. Primeiramente reescreve-se a função $q(x)$ na forma $q(e)$, sendo que a coordenada e tem origem na seção B. Então, as duas equações de equilíbrio são:

$$\boxed{F_R = \int_{e=0}^{c} q(e)\ de, \qquad \text{e} \qquad F_R\bar{e} = \int_{e=0}^{c} e \quad \underbrace{q(e)\ de}_{\text{Elemento de força}} \quad .} \tag{2.23}$$

Note que na segunda equação os momentos são calculados em relação ao eixo transversal que passa pela seção B. Aqui, $q\ de$ é um elemento diferencial de força, (representado pela área hachurada na Figura 2.20c), e $eq(e)de$ e um elemento diferencial de momento em relação à seção B. Dessa forma, resolve-se inicialmente a primeira das equações, determinando-se F_R, e em seguida, a solução da segunda equação produz a posição $\bar{e}$.

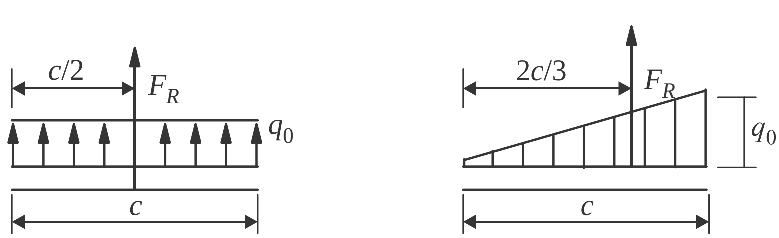


Figura 2.21: Cargas distribuídas uniforme e triangular.

Note que as **equações (2.23) acima são de uso geral**, para qualquer tipo de carga distribuída. Por exemplo, no caso de uma **carga distribuída uniforme** q_o, ilustrada na Figura 2.21,

4. Adicionalmente, a equação de um esforço muda com mudança do tipo de carregamento. Por exemplo, no caso da Figura 2.23a, teremos que definir uma função de esforços válida para o segmento AB, e uma equação distinta para o segmento BC.

Exemplo 2.3 – Diagrama de esforços

Considere a viga biapoiada ilustrada na Figura 2.23a, com a carga distribuída variando na forma de uma parábola de segundo grau, dada por $q(e) = ke^2$, onde e é uma coordenada com origem na seção B, e $k = 3 \cdot 10^{-4}\text{N/mm}^3$. Também, $a = c = 100$ mm. Determinar os diagramas de esforços.

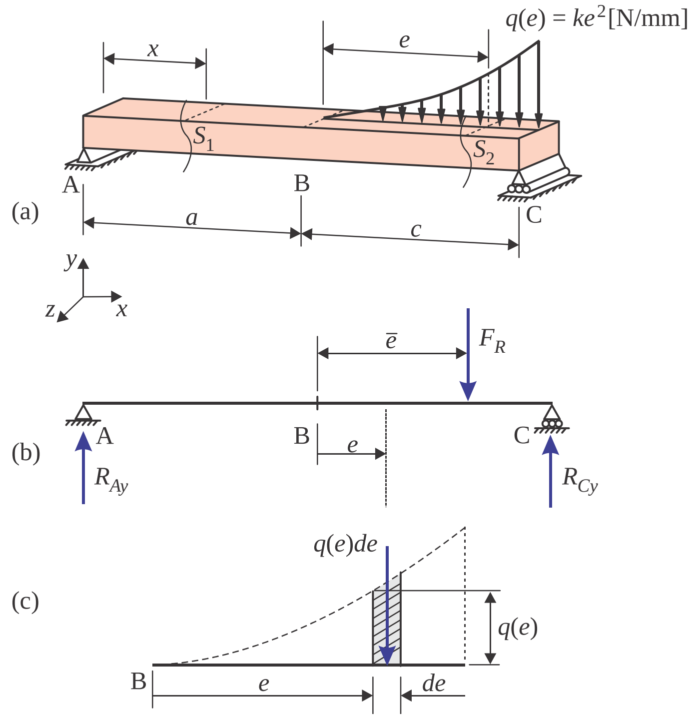


Figura 2.23: Definição do problema do Exemplo 3 $a = c = 100$ mm.

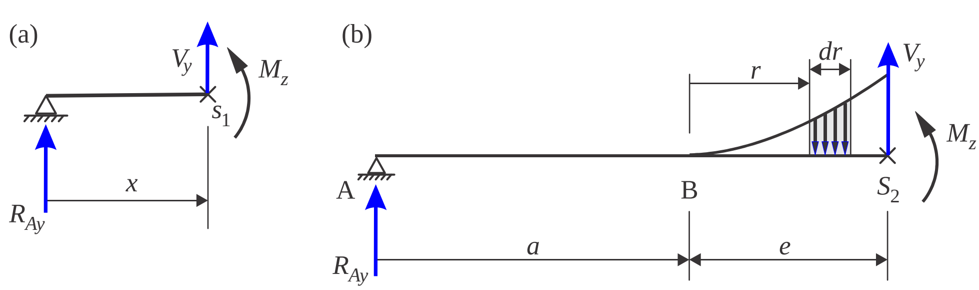


Figura 2.24: Diagramas de corpo livre para o Exemplo 3.

Solução:

Primeiramente definem-se os eixos coordenados $x - y$, e indicam-se as reações não nulas nos apoios, como ilustrado no diagrama de corpo livre da Figura 2.25b.

A **primeira etapa** é a determinação da força resultante da carga distribuída e sua posição. Uma vez que a carga tem variação parabólica, pode-se utilizar diretamente a eq.(2.27), com os dados do eq. (2.31) do trecho BC é algo mais complicado, porém sem novidades para o leitor. Como revisão podemos citar as etapas.

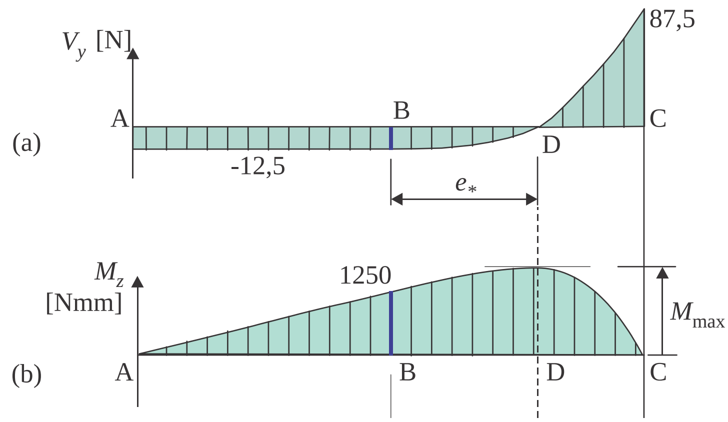


Figura 2.25: Diagrama de momento fletor e cortante do Exemplo 3, onde $e^* = 50$ mm e $M_{\text{MAX}} = 1.718,75$ Nmm.

1. Calcular o valor da função **nos extremos** do intervalo, i.e.,

$$\begin{array}{ll} V_B = V_y|_{e=0} = -12,5 \text{ N}, & M_B = M_z|_{e=0} = 1.250 \text{ Nmm}, \\ V_C = 87,5 \text{ N}, & M_C = M_z|_{e=c} = 0. \end{array}$$

2. Procurar seções em que a **função se anule**. No caso, $V_y(e_*) = 0$ para $e_* = 50$ mm e $M_z(e) = 0$ em $e = 100$ mm.

3. Buscar seções em que a função sofra **inflexão**, i.e., seja máxima ou mínima. Isto é feito pela primeira derivada de função:

$$\begin{array}{lllll} \left.\dfrac{dV_y}{de}\right|_{e_o} = 0 & \Longrightarrow & \left.\dfrac{dV_y}{de}\right|_{e_o} = 10^{-4} \times 3e_o^2 = 0 & \Longrightarrow & e_o = 0, \\ \left.\dfrac{dM_z}{de}\right|_{e_{**}} = 0 & \longrightarrow & 12,5 - 4 \times 2,5 \times 10^{-5} e_{**}^3 = 0 & \Longrightarrow & e_{**} = e_* = 50 \text{ mm}. \end{array}$$

4. Determinar a **concavidade** da curva, o que é feito pela segunda derivada:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{d^2V_y}{de^2} = 6 \times 10^{-4} e > 0 & \Longrightarrow & \text{concavidade para cima} \\ \dfrac{d^2M_z}{de^2} = -12 \times 2,5 \times 10^{-4} e^2 = 0 > 0 & \Longrightarrow & \text{concavidade para baixo.} \end{array}$$

5. Determinar o **valor máximo** ou mínimo da função:

$$M_{\text{max}} = M_z|_{e=e_{**}} = 1.718,75 \text{ Nmm}.$$

Com isto se tem os diagramas esboçados na Figura 2.25. Note que o fato de V_y anular-se no meio do intervalo é apenas coincidência, porém não é coincidência que a seção onde $V_y = 0$ seja a mesma em que M_z atinge seu ponto de máximo. De fato, isto é uma regra geral, como será demonstrado nas seções seguintes.

Figura 2.27: Exemplo de torre de alta tensão e detalhe de junta.

Ocorre, entretanto, que a determinação dos esforços no pórtico é bastante mais complexa que numa treliça. Isso sugeriu o hábito de cálculo, usado praticamente até a atualidade, de **analisar certos pórticos como se fossem treliças**, i.e., computar apenas os esforços normais e ignorar os cortantes e momentos. Esse procedimento gera uma aproximação razoável se

- cada barra for razoavelmente longa em relação às dimensões de sua seção transversal, e
- se todas as cargas forem concentradas, aplicadas nos nós.

Sem dúvida que, atualmente, com os procedimentos numéricos e computacionais disponíveis, a análise de pórticos é não muito mais complexa que a da treliça correspondente.

Nos exemplos que seguem mostraremos apenas o cálculo de esforços em treliças, mas o leitor deve se manter alerta para o fato de que a forma construtiva provavelmente seria de pórtico. A análise de pórticos será realizada através de métodos energéticos e numéricos de Elementos Finitos em capítulos próprios.

Diversos métodos para análise de treliças existem na literatura (como o tradicional método gráfico de Cremona), mas nos restringiremos aqui ao **método das seções**, que provê um procedimento manual simples embora seja eficiente apenas em estruturas de poucas barras. Para estruturas mais complexas existe o método de elementos finitos, assunto de capítulos próprios neste livro.

Exemplo 2.4 – Esforços em treliças plana

Considere a estrutura plana de 9 barras ilustrada na Figura 2.28a. Analise-a como uma treliça e determine os esforços em cada barra em termos da força F.

Solução:

Primeira etapa. Inicialmente geramos o diagrama de corpo livre como na Figura 2.28b, indicando um sistema cartesiano de coordenadas, e as reações não triviais nos apoios. Observando as reações, nota-se que o problema é isostático. Adicionalmente, define-se um número para identificar cada nó. Essa mesma numeração implicitamente indica uma numeração para cada barra, i.e., a barra 15 é aquela que liga os nós 1 e 5.

2.5.1 Dedução simplificada

Nessa seção é apresentada uma dedução simplificada das equações de equilíbrio de viga em flexão. Uma dedução mais rigorosa, porém que leva ao mesmo resultado, é apresentada na próxima seção. Inicialmente, considera-se um segmento de viga como o da Figura 2.32a. Não importa aqui quais os apoios ou qual a forma de carregamento, uma vez que focaremos a atenção apenas nas forças atuantes num segmento de comprimento Δx, extraído de uma posição arbitrária x, como visto na Figura (b). Consideramos que o carregamento transversal é uma carga distribuída $p_y(x)$, em N/m, positiva quando atuando na direção positiva de y, e uma carga distribuída atuando na direção axial, $p_x(x)$, em N/m. Uma **carga axial distribuída** ocorre em diversas situações prática, como por exemplo:

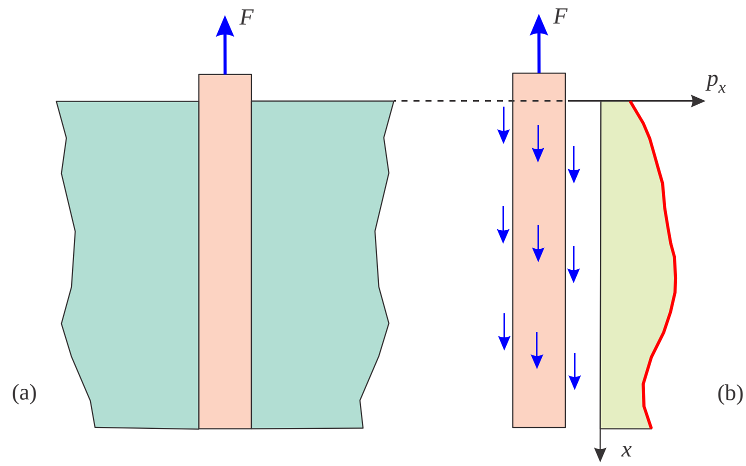


Figura 2.31: (a) Ilustração de uma barra soterrada sujeita à uma força numa extremidade. (b) diagrama de corpo livre da barra sob a ação de forças em sua superfície lateral, de resultante p_x variável ao longo da extensão.

1. A força de atrito na superfície de uma barra soterrada. Quando sujeita a uma força numa extremidade, o solo (ou outro meio), exerce uma força de atrito na superfície, que pode ser quantificada por uma força por unidade de comprimento axial da barra.
2. Uma barra girando em alta velocidade em torno de uma de suas extremidades produz força centrífuga axial, que pode também ser representada por uma força por unidade de comprimento.

No segmento cortado aplicam-se as forças internas. Na seção S, de coordenada x, os esforços são $N_x(x)$, $V_y(x)$ e $M_z(x)$. Na seção A, de coordenadas $x + \Delta x$, os esforços são diferentes daqueles de S: $N_x(x + \Delta x)$, $V_y(x + \Delta x)$ e $M_z(x + \Delta x)$. Entretanto, podem-se representar estes esforços em termos de seus valores em x, adicionados da diferença, isto é,

$$\begin{aligned} N_x(x+\Delta x) &= N_x(x) + \Delta N_x, \\ V_y(x+\Delta x) &= V_y(x) + \Delta V_y, \\ M_z(x+\Delta x) &= M_z(x) + \Delta M_z. \end{aligned} \tag{2.36}$$

As equações de equilíbrio não triviais para o segmento são:

$$\begin{cases} \sum F_x \rightarrow -N_x + (N_x + \Delta N_x) + p_x(x)\Delta x = 0, \\ \sum F_y \rightarrow -V_y + (V_y + \Delta V_y) + p_y(x)\Delta x = 0, \\ \sum M_z^{\mathrm{A}} \rightarrow -M_z + (M_z + \Delta M_z) + V_y \Delta x - p_y(x)\Delta x \dfrac{\Delta x}{2} = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

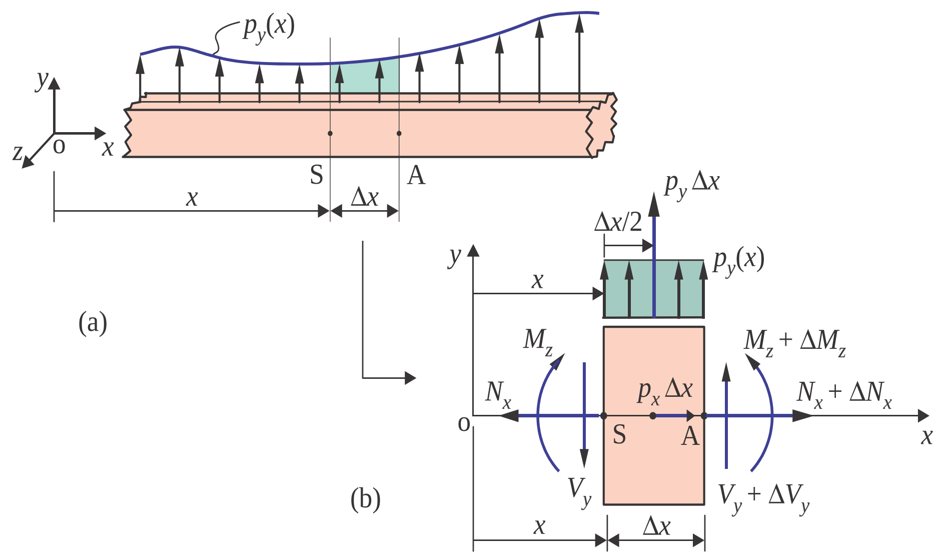


Figura 2.32: Esforços de flexão num segmento de comprimento Δx.

Observa-se que as cargas aplicadas p_x e p_y variam dentro do segmento Δx. Entretanto, considerando que Δx será em seguida considerado arbitrariamente pequeno, faz-se a simplificação de que as cargas sejam uniformes no intervalo, com o seu valor em x, i.e., as cargas são consideradas de valor $p_x(x)$ e $p_y(x)$, como ilustrado para $p_y(x)$ na Figura 2.32b. Assim, a força transversal no intervalo Δx é $p_y(x)\Delta x$, e a força axial é $p_x(x)\Delta x$, que aparecem no último termo do lado esquerdo das duas primeiras eqs.(2.37). Também, por Δx ser pequeno, é considerado que a força transversal atua no centro do intervalo, de forma que o momento provocado por ela em relação à seção A é $p_y(x)\Delta x \Delta x/2$, como aparece no último termo do lado esquerdo de $(2.37)_3$.

Simplificam-se N_x, V_y e M_z em cada uma das eqs. (2.37). Em seguida, divide-se cada equação por Δx, o que resulta em

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta N_x}{\Delta x} + p_x(x) = 0, \\ \dfrac{\Delta V_y}{\Delta x} + p_y(x) = 0, \\ \dfrac{\Delta M_z}{\Delta x} + V_y - p_y(x)\dfrac{\Delta x}{2} = 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

A última etapa da dedução consiste em fazer o limite em cada equação para $\Delta x \to 0$. Assim, obtém-se as três equações de equilíbrio da viga sob flexão plana e tração:

$$\boxed{\frac{dN_x}{dx} = -p_x(x), \qquad \frac{dV_y}{dx} = -p_y(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{dM_z}{dx} = -V_y} \tag{2.39}$$

De forma análoga, para uma **carga distribuída transversal na direção** z, $p_z(x)$, são gerados na viga o esforço cortante V_z e o momento fletor M_y. A dedução das equações diferenciais de equilíbrio é feita de forma análoga ao caso de carga transversal na direção y, e são as seguintes equações:

$$\boxed{\frac{dV_z}{dx} = -p_z(x), \qquad \text{e} \qquad \frac{dM_y}{dx} = V_z(x).} \tag{2.40}$$

Note que a relação entre M_y e V_z é diferente daquela entre M_z e V_y, através do sinal positivo em $dM_y/dx = V_z(x)$. Os sinais em todas as equações são consequência da convenção de sinais dos esforços escolhida, mostrada na Figura 2.16. O uso de outra convenção exige nova dedução para as equações de equilíbrio. As cinco equações diferenciais (2.39) e (2.40) são as quatro **equações diferenciais equilíbrio de viga**. As quatro equações associadas a flexão podem ser combinadas em apenas duas da seguinte forma. Derivando $(2.39)_3$ podemos substituir dV_y/dx em $(2.39)_2$. O mesmo pode ser feito com (2.40), o que resulta num conjunto de três equações, se incluirmos a de esforços normais:

$$\boxed{\frac{dN_x}{dx} = -p_x(x), \qquad \frac{d^2M_z}{dx^2} = p_y(x), \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2M_y}{dx^2} = -p_z(x).} \tag{2.41}$$

2.5.2 Dedução detalhada para flexão

Considere um segmento de viga como o da Figura 2.33a. Não importa aqui quais os apoios ou qual a forma de carregamento, uma vez que focaremos a atenção apenas nas forças atuantes num segmento de comprimento Δx, extraído de uma posição arbitrária x, como visto na Figura (b). Consideramos aqui apenas o carregamento transversal é uma carga distribuída $p_y(x)$, em N/m, positiva quando atuando na direção positiva de y. O equilíbrio do esforço normal já foi detalhado na seção anterior, e pode ser ajustado facilmente usando os argumentos vistos no detalhamento a seguir.

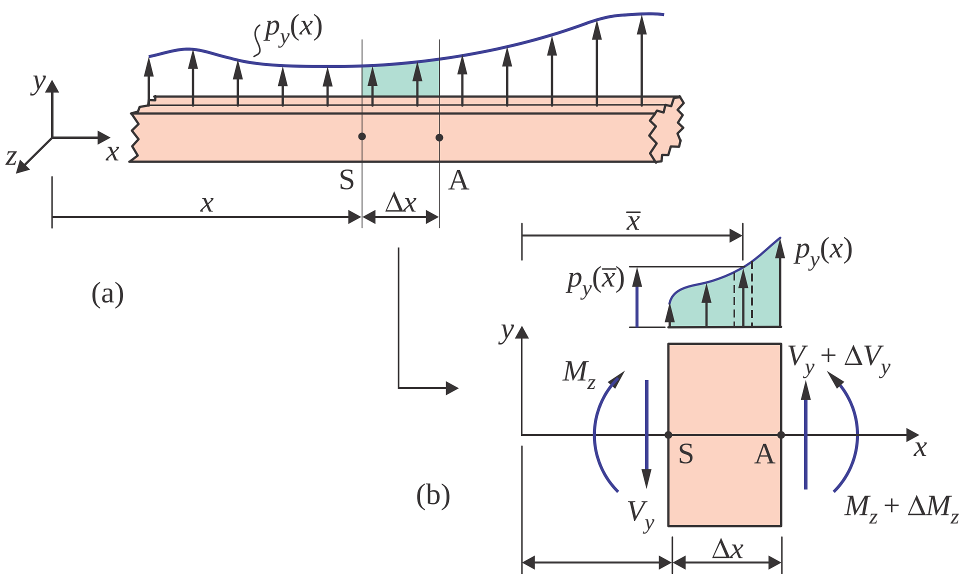


Figura 2.33: Esforços de flexão num segmento de comprimento Δx.

No segmento cortado aplicam-se as forças internas. Na seção s, de coordenada x, os esforços são $V_y(x)$ e $M_z(x)$. Na seção A, de coordenadas $x + \Delta x$, os esforços são diferentes daqueles de s: $V_y(x+\Delta x)$ e $M_z(x+\Delta x)$. Entretanto, pode-se representar estes esforços em termos de seus valores em x, adicionados da diferença, isto é,

$$\begin{aligned} V_y(x+\Delta x) &= V_y(x) + \Delta V_y, \\ M_z(x+\Delta x) &= M_z(x) + \Delta M_z. \end{aligned}$$

As equações de equilíbrio não triviais para o segmento são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_y \rightarrow -V_y + (V_y + \Delta V_y) + \int_{e=x}^{x+\Delta x} p_y(e)\ de = 0, \\ \sum M_z^A \rightarrow -M_z + (M_z + \Delta M_z) + V_y \Delta x - \int_{e=x}^{x+\Delta x} (\Delta x - e) p_y(e)\ de = 0. \end{array} \right. \tag{2.42}$$

A avaliação das integrais pode ser feita com o auxílio do "Teorema do Valor Médio" do cálculo, que pode ser sintetizado dizendo que a integral de uma função $f(x)$ contínua e finita, num intervalo finito $[a - b]$, (*i.e.*, $\int_a^b f(x)dx$), é igual a $(b-a)f(\overline{x})$, onde $\overline{x} \in [a; b]$. O teorema garante que $\overline{x}$ existe e localiza-se dentro do intervalo de integração.

Assim, eq.(2.42) fica

Cargas Concentradas

As equações diferenciais (2.39) tratam diretamente apenas do equilíbrio de cargas distribuídas. Entretanto, é interessante identificar como os esforços variam em presença de uma carga concentrada. Forças e momentos concentrados são singularidades que não são diretamente representados em equações diferenciais. Então, se uma viga possui uma força concentrada numa dada seção A, as equações diferenciais só tem validade e uso nas demais seções, não em A. Definida a seção A, de coordenada x, podemos identificar a seção que fica numa coordenada infinitesimalmente próxima a x, à direita, que podemos designar por $x^+ = x + dx$, e a seção imediatamente à esquerda de A, na seção $x^- = x - dx$.

Como as equações diferenciais não são válidas nos pontos de singularidade, isto é, aqueles que contém forças externas concentradas ou descontinuidades em algum dos carregamentos ou em suas derivadas, segue-se que elas também não são válidas nos **pontos de apoio**, pois nesses pontos atuam reações concentradas. Com isso, as equações diferenciais são válidas apenas no interior de cada **trecho** entre cargas concentradas. Por exemplo, para um trecho AB, como na Figura 2.34, as equações são válidas para todo x no intervalo aberto $(x_{\mathrm{A}+},\, x_{\mathrm{B}-})$, onde $x_{\mathrm{A}+}$ é o ponto infinitesimalmente próximo de x_{A}, a sua direita, e $x_{\mathrm{B}-}$ é infinitesimalmente próximo de $x_{\mathrm{B}-}$, à sua esquerda.

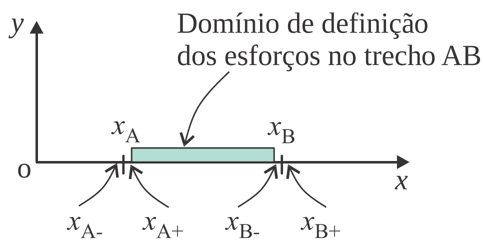


Figura 2.34: Domínio de definição das equações diferenciais de esforços no trecho AB entre cargas concentradas ou apoios.

Consideremos agora o equilíbrio entre os esforços que atuam nas duas seções infinitesimalmente próximas a uma carga concentrada. Para isso, consideremos uma viga genérica, com forças externas concentradas F_x, F_y e F_z e momentos concentrados m_x, m_y e m_z, todos aplicados numa certa seção A, como ilustrados nas Figuras 2.35 e 2.36.

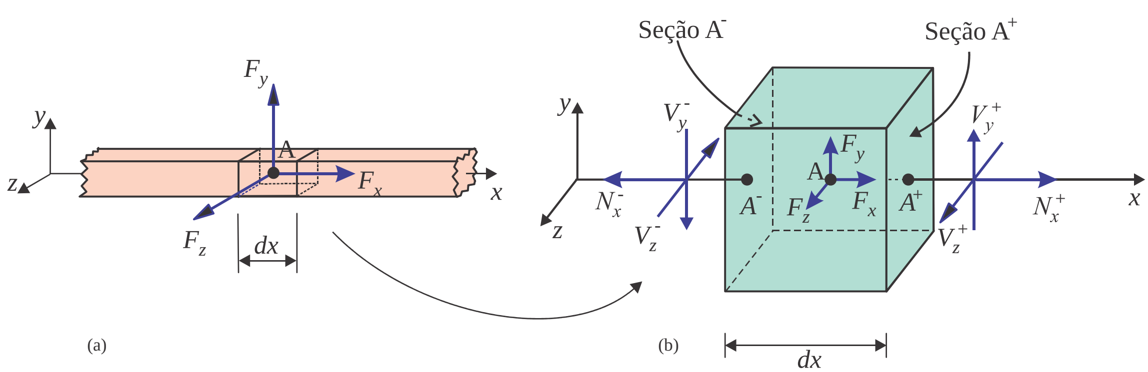


Figura 2.35: Forças concentradas F_x, F_y e F_z aplicadas numa certa seção A e esforços à esquerda e à direita da seção.

Consideremos que, através de um processo de cálculo qualquer (como o método das seções, por exemplo), temos os valores dos esforços na seção à esquerda de A, infinitesimalmente próxima, que denominemos aqui de seção A$^-$.Então conhecemos os valores dos esforços N_x^-, N_x^-, V_y^-, V_z^-, M_z^- e M_y^-. A questão aqui consiste em determinar os esforços N_x^+, N_x^+, V_y^+, V_z^+, M_z^+ e M_y^+ na seção logo à direita de A. Isto é feito de forma bastante simples, com o diagrama de corpo livre de uma

Exemplo 2.5 – Teste de diagramas

Considere Exemplo 3, com os dados mostrados na Figuras 2.23. A solução obtida foi a seguinte: reações $R_{Cy} = 87,5$ N e $R_{Ay} = 12,5$ N, esforços no trecho AB

$$V_y^{\mathrm{AB}}(x) = -12,5 \text{ N} \qquad \text{e} \qquad M_z^{\mathrm{AB}}(x) = 12,5x \text{ Nmm}, \qquad \forall x \in (0;100) \text{ mm}, \tag{2.51}$$

e esforços no trecho BC

$$\rightarrow V_y^{\mathrm{BC}}(e) = 10^{-4}e^3 - 12,5 \qquad \text{e} \qquad M_z^{\mathrm{BC}}(e) = 1.250 + 12,5e - 2,5.10^{-5}e^4, \qquad \forall e \in (0;100) \text{ mm}. \tag{2.52}$$

Esses esforços são esboçados na Figura 2.37. Desejamos verificar a coerência dessa resposta.

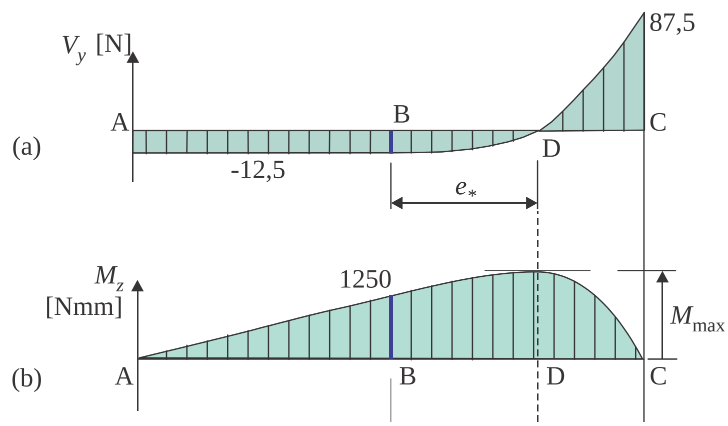


Figura 2.37: Diagrama de momento fletor e cortante dos Exemplos 3 e 5.

Solução:
A primeira parte do teste deve ser sobre as reações nos apoios. O cálculo das reações no Exemplo 3 usou o equilíbrio de momentos M_z em relação à seção A, como visto na eq. (2.28). Um teste eficiente da correção dos resultados consiste em representar o equilíbrio em relação a uma outra seção, por exemplo a seção B:

$$\sum M_z^{\mathrm{B}} \stackrel{?}{=} 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} \sum M_z^{\mathrm{B}} &= \bar{e}F_R + aR_{\mathrm{A}} - cR_{Cy}, \\ &= 75 \times 100 + 100 \times 12,5 - 100 \times 87,5 \\ &= 0. \qquad \Rightarrow \quad \text{OK.} \end{aligned} \tag{2.53}$$

A segunda parte do teste consiste em verificar as descontinuidades dos esforços nos apoios e nas seções de cargas concentradas aplicadas.

1. **Seção B.** No enunciado do Exemplo 3, Figuras 2.23, não existem forças ou momentos concentrados na seção B, logo, de $(2.49)_3$, os diagramas de cortante e momento devem ser contínuos, isto é, $V_{yB^+} = V_{yB^-}$, e $M_{ze^+} = M_{zB^-}$. Isso é verificado nos resultados dos esforços obtidos na Figura 2.37.

2. **Na seção C** existe uma força concentrada aplicada, a reação $R_C = +87,5$ N. Logo, o diagrama de cortantes deve possuir uma descontinuidade. A eq.$(2.49)_3$ toma a forma $V_y^{\mathrm{C}+} = V_y^{\mathrm{C}-} - R_C$. Note que o uso da equação pressupõe que o sentido arbitrado para a reação seja positivo no sentido positivo de y, como foi feito na solução do problema. Então, devemos ter $V_y^{\mathrm{C}+} - V_y^{\mathrm{C}-} = -R_C = -87,5$ N. No presente caso, o esforço $V_y^{\mathrm{C}+}$ à direita do apoio é nulo, de forma que se deve ter que o esforço à esquerda deve ser $V_y^{\mathrm{C}-} = R_C = 87,5$ N. Os resultados obtidos no diagrama confirmam. Como o apoio é uma rótula, e não há carga externa de momento aplicada ali, devemos ter $M_z^{C-} = M_z^{C+} = 0$.

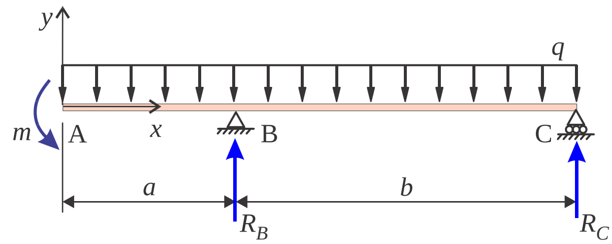


Figura 2.40: Estrutura do Exemplo 6.

$$\sum F_y \quad \rightarrow \quad R_B + R_C - qL = 0,$$
$$\sum M_z^B \quad \rightarrow \quad m + R_C b + \frac{q\ a^2}{2} - \frac{q\ b^2}{2} = 0. \tag{2.57}$$

onde fez-se o somatório de momentos em relação à seção B, e $L = a + b$ é o comprimento total da viga. A solução do sistema é: $R_C = [q(b^2 - a^2)/2 - m]/b$ e $R_B = qL - R_C$. Substituindo os dados obtém-se as reações: $R_B = 750$ N e $R_C = -250$ N. Logo, a reação R_C é uma força de 250 N orientada na direção negativa de y.

A próxima etapa consiste em aplicar o método das seções em cada um dos dois trechos da viga.

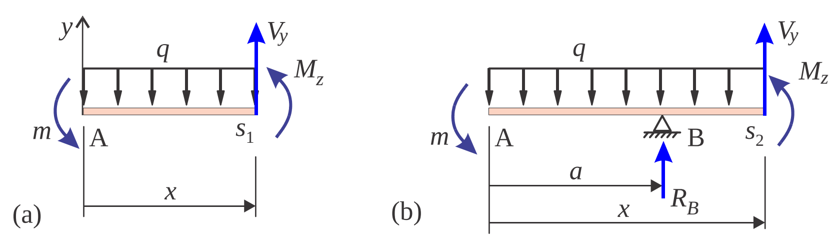


Figura 2.41: Diagramas de corpo livre para o método das seções na viga do Exemplo 6.

Trecho AB

Faz-se um corte numa seção arbitrária de coordenada $x \in (0; 2)$, e monta-se o diagrama de corpo livre, como mostrado na Figura 2.41a, onde foi tomado o lado esquerdo do corte. As equações de equilíbrio são:

$$\sum F_y \quad \rightarrow \quad V_y - qx = 0,$$
$$\sum M_z^{s_1} \quad \rightarrow \quad M_z + qx\left(\frac{x}{2}\right) + m = 0$$

cuja solução é: $V_y = qx$ e $M_z = -qx^2/2 - m$. Substituindo os dados do problema tem-se: $V_y = 100x$ e $M_z = -50x^2 - 1.000$, para $\forall x \in (0; 2)$ m. O momento máximo ocorre na seção onde $dM_z/dx = 0$, isto é, $-50 \times 2\ \bar{x} = 0$, logo, $\bar{x} = 0$. O valor do momento máximo no trecho AB é obtido pela equação de momento, aplicada na coordenada $\bar{x} = 0$, isto é, $M_{z\,\max} = -50\bar{x}^2 - 1.000 = -1.000$ Nm.

Trecho BC

Faz-se um corte numa seção arbitrária de coordenada $x \in (2; 4)$, e monta-se o diagrama de corpo livre, como mostrado na Figura 2.41b, onde foi tomado o lado esquerdo do corte. As equações de equilíbrio são:

$$\sum F_y \quad \rightarrow \quad V_y + R_B - qx = 0,$$
$$\sum M_z^{s_2} \quad \rightarrow \quad M_z + qx\left(\frac{x}{2}\right) + m - R_B(x-a) = 0$$

cuja solução é: $V_y = qx - R_B$ e $M_z = R_B(x-a) - qx^2/2 - m$. Substituindo os dados do problema tem-se: $V_y = 100x - 750$ e $M_z = -50x^2 + 750(x-2) - 1.000$, para $\forall x \in (2;4)$ m. O momento máximo ocorre na seção onde $dM_z/dx = 0$, isto é, $-50 \times 2\,\bar{x} + 750 = 0$, logo, $\bar{x} = 7,5$ m. Essa seção encontra-se fora da viga, logo não há ponto de inflexão no trecho BC.

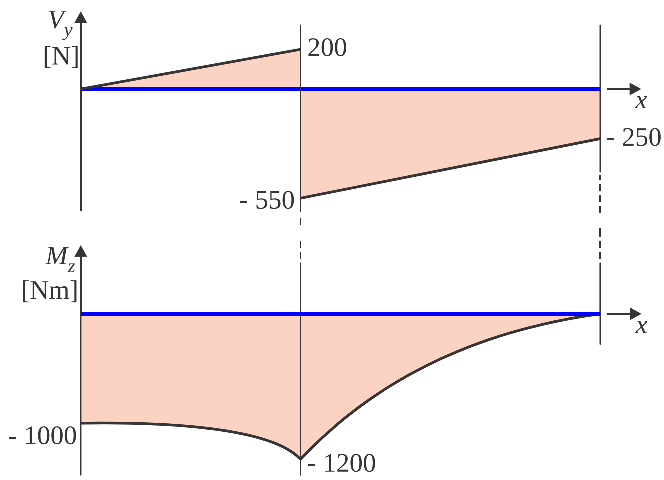


Figura 2.42: Esforços cortante e de momento fletor no Exemplo 6.

A Figura 2.42 mostra os esboços dos diagramas de esforços cortante e de momento fletor na viga. Nota-se que os máximos na viga como um todo são: $V_{y\,\max} = -550$ N e $M_{z\,\max} = -1.200$ Nm, ambos na seção B. Esses valores são importantes para o dimensionamento da seção transversal da viga, ou para a análise de sua segurança, conforme as teorias apresentadas nos demais capítulos.

Exemplo 2.8 – Sequência de vãos

Determine as reações de apoio e os esforços na viga da Figura 2.43, para carga distribuída uniforme $q = 500$ N/m, $F_1 = 1$ kN, $F_2 = 4$ kN, $F_3 = 500$ N e um momento fletor concentrado $m = 2$ kNm aplicado na seção C.

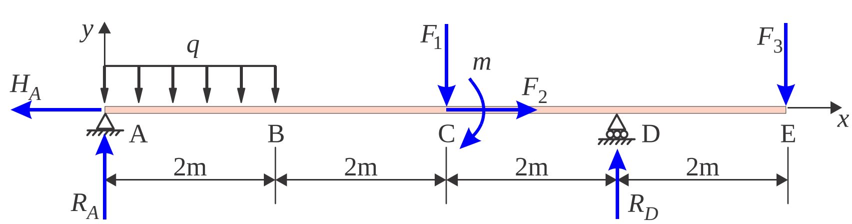


Figura 2.43: Estrutura do Exemplo 7.

Solução:
Inicialmente definimos um sistema de coordenadas $x - y$ e indicamos as 3 reações não nulas, H_A, R_A e R_D, como indicado na Figura 2.43. As equações globais de equilíbrio são:

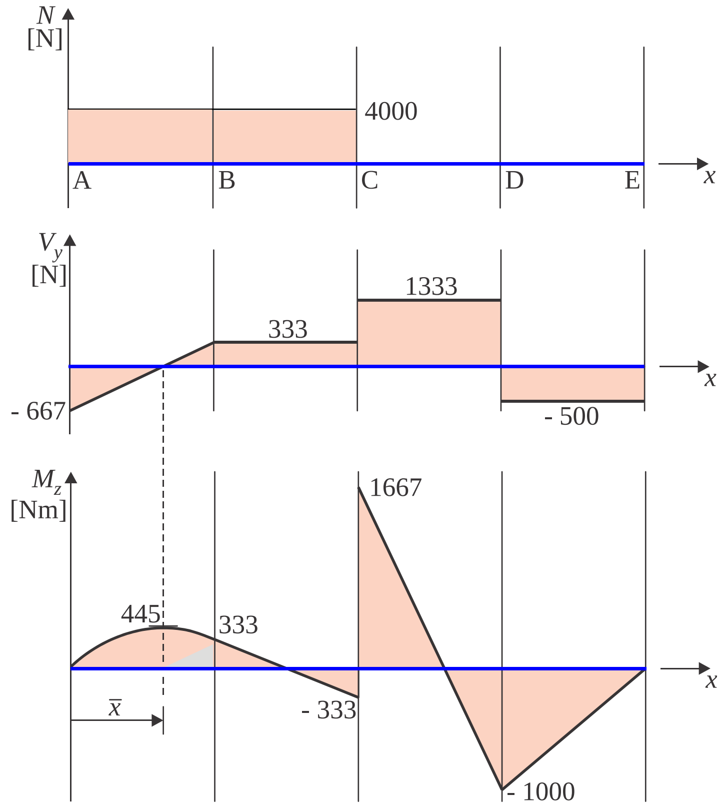


Figura 2.46: Diagramas de esforços do Exemplo 7.

Esse sistema é definido com a origem o_l numa das extremidades da barra ou viga, e o eixo x_l local estendendo-se ao longo o elemento em direção à extremidade oposta. Se a estrutura for plana, o eixo local z_l pode ser orientado preferencialmente paralelo ao eixo global z. Nesse caso, o eixo local y_l deve estar no mesmo plano xy, e orientado de forma que a tríade local o_l-x_l-y_l-z_l seja anti-horária. Isso corresponde à situação em que o sistema local o_l-x_l-y_l-z_l fica definido por uma rotação do sistema global em torno do eixo z.

A convenção de esforços a ser usada deve a mesma definida para o problema em todos os elementos, aplicada ao sistema local de coordenadas.

Deve-se observar que os esforços na seção a esquerda e direita de um dado nó podem apresentar uma aparente falta de compatibilidade. Os valores a esquerda e a direita são obtidos por equações associadas a diferentes sistemas de coordenadas. A compatibilidade deve ser feita identificando fisicamente os valores dos esforços. Esses aspectos podem ser vistos mais claramente através dos dois exemplos a seguir.

Exemplo 2.9 – Estrutura plana e sistemas locais de coordenadas

Consideremos a estrutura mostrada na Figura 2.47, engastada na seção A e submetida a uma força vertical F na extremidade D. Determine as reações de apoio e os esforços para $F = 25$ kN, $a = 0,2$ m, $L = 1$ m.

Solução:

Inicialmente definimos um sistema de coordenadas global $Axyz$ como mostrado na figura. Associado a esse sistema, indicamos as reações no apoio A. As equações globais de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \sum F_y &\rightarrow \quad R_A - F = 0, \\ \sum M_z^A &\rightarrow \quad R_M - F(2a) = 0, \qquad \Rightarrow \quad R_A = F \quad \text{e} \quad R_M = 2aF. \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$
\begin{array}{lll}
\sum F_x \rightarrow N_x^{BC}(x) = 0, & & \\
\sum F_y \rightarrow V_y^{BC}(x) + R_A = 0 & \Rightarrow & V_y^{BC}(x) = -R_A = -25 \text{ kN}, \\
\sum M_z^{s_1} \rightarrow M_z^{BC}(x) + R_M - R_A x = 0, & \Rightarrow & M_z^{BC}(x) = 25x - 10 \text{ [kNm]}, \quad \forall x \in]0;0,2[\text{m}.
\end{array}
\tag{2.61}
$$

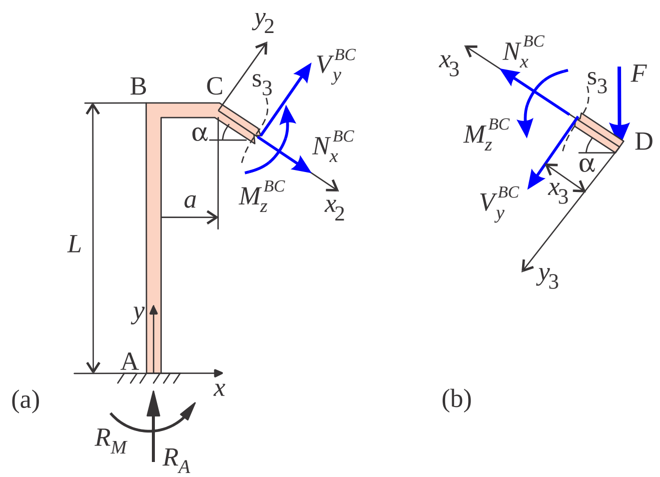


Figura 2.49: Corte no trecho CD, tomando o lado esquerdo e o direito.

Para o **trecho CD** usamos o sistema local de coordenadas, Cx_2y_2z, com eixo x_2 alinhado com o segmento CD da estrutura, como mostrado na Figura 2.49a para o lado esquerdo do corte s_3. Com o diagrama de corpo livre mostrado, as equações de equilíbrio para os esforços numa seção de coordenada arbitrária x_2 no **trecho CD** são:

$$
\begin{array}{lll}
\sum F_{x_2} \rightarrow N_x^{CD}(x_2) + R_A \cos\alpha = 0, & \Rightarrow & N_x^{CD}(x_2) = 17,7 \text{ kN}, \\
\sum F_{y_2} \rightarrow V_y^{CD}(x_2) + R_A \text{ sen } \alpha = 0 & \Rightarrow & V_y^{CD}(x_2) = -17,7 \text{ kN}, \\
\sum M_z^{s_1} \rightarrow M_z^{CD}(x_2) + R_M - R_A(a + x_2\cos\alpha) = 0, & \Rightarrow & M_z^{CD}(x_2) = -5 + 17,7x_2 \text{ [kNm]},
\end{array}
\tag{2.62}
$$

$\forall x_2 \in (0;0,238)$ [m]. Nesse ponto observamos que podemos resolver cada trecho, o CD, por exemplo, usando um outro sistema local de coordenadas, por exemplo, o sistema Dx_3y_3z, com eixo x_2 mostrado na Figura 2.49b, com origem na seção D, e o eixo axial x_3 orientado no sentido D→C. As equações de equilíbrio se tornam

$$
\begin{array}{lll}
\sum F_{x_3} \rightarrow N_x^{CD}(x_3) - F \text{ sen } \alpha = 0, & \Rightarrow & N_x^{CD}(x_3) = 17,7 \text{ kN}, \\
\sum F_{y_3} \rightarrow V_y^{CD}(x_3) - F \cos\alpha = 0 & \Rightarrow & V_y^{CD}(x_3) = -17,7 \text{ kN}, \\
\sum M_z^{s_1} \rightarrow M_z^{CD}(x_3) - (F \cos\alpha)\, x_3 = 0, & \Rightarrow & M_z^{CD}(x_3) = 17,7x_3 \text{ [kNm]}, \quad \forall x_3 \in]0;0,238[\text{m}.
\end{array}
\tag{2.63}
$$

Nota-se que os sinais dos esforços normal e cortante permanecem os mesmos nos dois sistemas locais, uma vez que ambos os eixos x_2 e x_3 são colineares com a barra CD. Entretanto os momentos se tornam distintos. Podemos tomar a seção imediatamente a direita de C, na barra CD. Da solução $M_z^{CD}(x_2) = -5 + 17,7x_2$ temos $M_z^{CD}(x_2 = 0) = -5$ kNm. Entretanto, da solução $M_z^{CD}(x_3) = 17,7x_3$ temos no mesmo ponto, C, o valor $M_z^{CD}(x_3 = 0,238) = +5$ kN. No trecho BC, o esforço é $M_z^{BC}(x) = 25x - 10$, de forma que na seção à esquerda de C, o momento é $M_z^{BC}(x = a) = -5$ kNm. Uma vez que não há momento externo concentrado aplicado na seção C, devido ao equilíbrio local deve-se ter que os esforços a esquerda e a direita devem ter o mesmo valor. Isso gera uma aparente inconsistência nos resultados de $M_z^{CD}(x_3 = 0,238) = +5$ kN, quando esperamos o valor -5 kNm. A Figura 2.50 mostra o diagrama de corpo livre em torno da seção C, e do trecho CD, com o esforço em C^+ obtido pelo sistema de coordenadas Dx_3y_3z. Nota-se que o valor à esquerda

2.7 Exemplos adicionais

Normalmente, problemas hiperestáticos não são passíveis de solução através do uso apenas das equações de equilíbrio globais, exatamente devido à insuficiência da quantidade destas em relação no número de reações incógnitas. Entretanto, numa classe de problemas essa deficiência pode ser contornada: é o caso em que a estrutura possui uma construção aberta com vínculos internos. Cada vínculo interno define uma equação de equilíbrio independente adicional, que pode levar à determinação do problema hiperestático. Os detalhes são vistos nos exemplos que seguem.

Exemplo 2.10 – Estrutura planas hiperestática

Determine as reações de apoio e os esforços na estrutura da Figura 2.52 para $F = 20$ kN. Na seção C existe uma articulação.

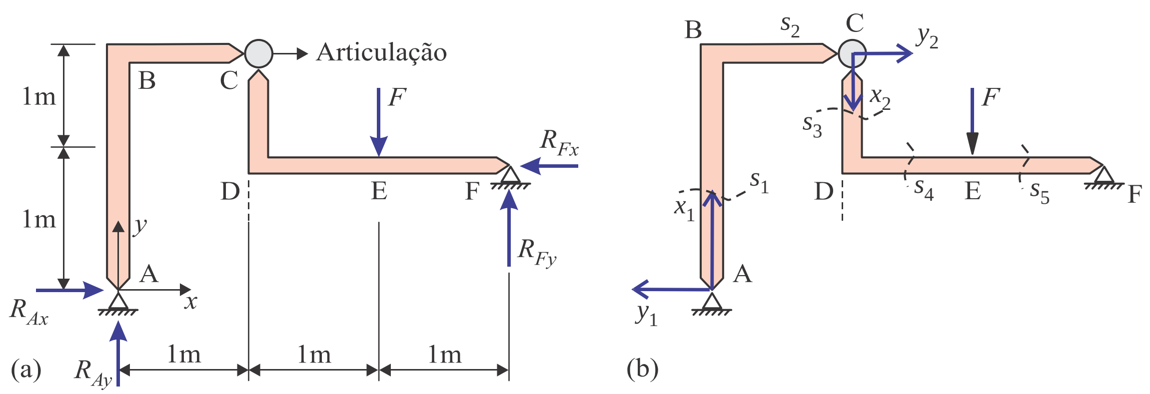


Figura 2.52: (a) Estrutura do Exemplo 10, com reações, (b) indicação dos sistemas locais de coordenadas usados na solução.

Solução:
Inicialmente definimos um sistema de coordenadas $Axyz$ e indicamos as 4 reações não triviais R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Fx} e R_{Fy}, como indicado na Figura 2.52a. As equações globais de equilíbrio são:

$$\begin{aligned}
\sum F_x \quad &\rightarrow \quad R_{Ax} - R_{Fx} = 0, \\
\sum F_y \quad &\rightarrow \quad R_{Ay} + R_{Fy} - F = 0, \\
\sum M_z^A \quad &\rightarrow \quad R_{Fy}(3) + R_{Fx}(1) - F(2) = 0.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Note que existem quatro reações incógnitas e apenas três equações de equilíbrio. **Observe que é inútil tentar obter mais uma equação, por exemplo calculando o momento em relação a um outro ponto que não A**. Isso apenas resultaria numa equação linearmente dependente dos três primeiras. Entretanto, a rótula interna oferece uma possibilidade concreta. Façamos um corte exatamente na seção C, e construamos um diagrama de corpo livre de um dos lados, o esquerdo por exemplo, como na Figura 2.53a.

Para esse lado da estrutura, podemos novamente escrever três equações de equilíbrio que serão independentes das equações (2.65), pois incorporam os esforços N_C, V_y^C e M_z^C em C:

$$\begin{aligned}
\sum F_x \quad &\rightarrow \quad N^C - R_{Ax}, \\
\sum F_y \quad &\rightarrow \quad V_y^C = -R_{Ay}, \\
\sum M_z^C \quad &\rightarrow \quad M_z^C + R_{Ax}(2) - R_{Ay}(1) = 0.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

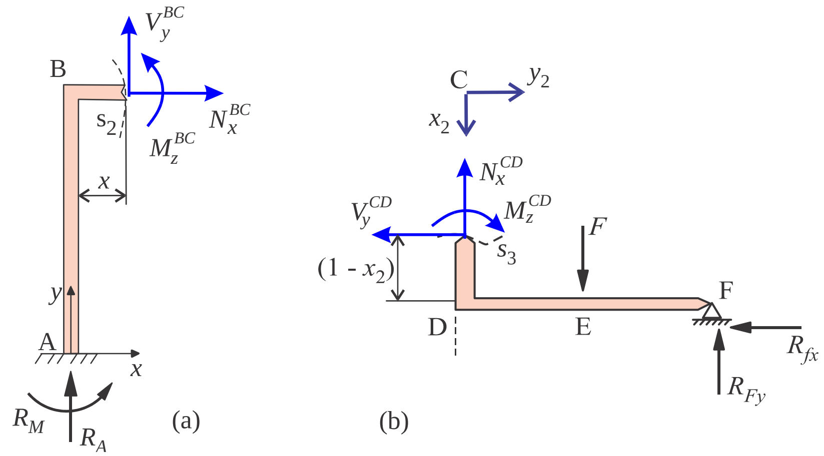


Figura 2.54: (a) diagrama de corpo livre para o trecho BC e (b), para o trecho CD com sistema local de coordenadas Cx_2y_2z.

Então, o diagrama de corpo livre apresenta na figura os esforços em suas convenções adequadas. Eles são obtidos por:

$$\begin{aligned}
\sum F_{x_2} \quad &\rightarrow \quad N_{x_2}^{CD}(x_2) = F - R_{Fy} = \frac{2F}{5}, \\
\sum F_{y_2} \quad &\rightarrow \quad V_{y_2}^{CD}(x_2) = R_{Fx} = -\frac{F}{5}, \\
\sum M_z^{s_3} \quad &\rightarrow \quad M_z^{CD}(x_2) = -(1)F + (2)R_{Fy} - R_{Fx}(1 - x_2) = \frac{Fx_2}{5}, \; \forall x_2 \in (0;1) \text{ m.}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

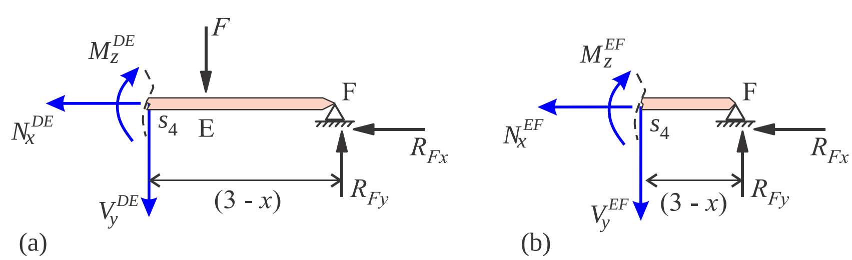


Figura 2.55: (a) diagrama de corpo livre para o trecho DE e (b), para o trecho EF.

Esforços nos trechos DE e EF. Como esses trechos são paralelos ao eixo x global, podemos usar o sistema global de coordenadas em ambos os trechos. Fazendo cortes em seções arbitrárias s_4 e s_5. Montando os diagramas de corpo livre como mostrados na Figura 2.55, os esforços são obtidos por:

trecho DE

$$\begin{aligned}
\sum F_x \quad &\rightarrow \quad N_x^{DE}(x) = F - R_{Fx} = -\frac{F}{5}, \\
\sum F_y \quad &\rightarrow \quad V_y^{DE}(x) = F - R_{Fy} = \frac{2F}{5}, \\
\sum M_z^{s_4} \quad &\rightarrow \quad M_z^{DE}(x) = (2 - x)F - (3 - x)R_{Fy} = \frac{2Fx}{5} + \frac{F}{5}, \; \forall x \in (1;2) \text{ m.}
\end{aligned} \tag{2.71}$$

trecho EF

$$
\begin{aligned}
\sum F_x &\rightarrow N_x^{EF}(x) = -R_{Fx} = -\frac{F}{5},\\
\sum F_y &\rightarrow V_y^{EF}(x) = R_{Fy} = \frac{3F}{5},\\
\sum M_z^{s_4} &\rightarrow M_z^{EF}(x) = (3-x)R_{Fy} = \frac{9F}{5} - \frac{3Fx}{5},\ \forall x \in (2;3)\ \text{m}.
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Podemos sumarizar os esforços em todos os trechos e esboçar os diagramas como na Figura 2.56. Como regra para os gráficos, representamos os valores negativos das funções "do lado de dentro" da estrutura.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{AB} \rightarrow & N^{AB}(y) = -\frac{2F}{5}, & V^{AB}(y) = \frac{F}{5}, & M_z^{AB}(y) = -\frac{Fx_1}{5}, & \forall x_1 \in (0;2)\ \text{m},\\
\text{BC} \rightarrow & N^{BC}(x) = -\frac{F}{5}, & V(x) = \frac{-2F}{5}, & M_z(x) = \frac{2F}{5}(x-1), & \forall x \in (0;1)\ \text{m},\\
\text{CD} \rightarrow & N(y) = \frac{2F}{5}, & V(y) = \frac{-F}{5}, & M_z(y) = \frac{Fx_2}{5}, & \forall x_2 \in (0;1)\ \text{m},\\
\text{DE} \rightarrow & N(x) = -\frac{F}{5}, & V(x) = \frac{-2F}{5}, & M_z(x) = \frac{F}{5}(2x+1), & \forall x \in (1;2)\ \text{m},\\
\text{EF} \rightarrow & N(x) = -\frac{F}{5}, & V(x) = \frac{3F}{5}, & M_z(x) = \frac{3F}{5}(3-x), & \forall x \in (2;3)\ \text{m}.
\end{array}
\tag{2.73}
$$

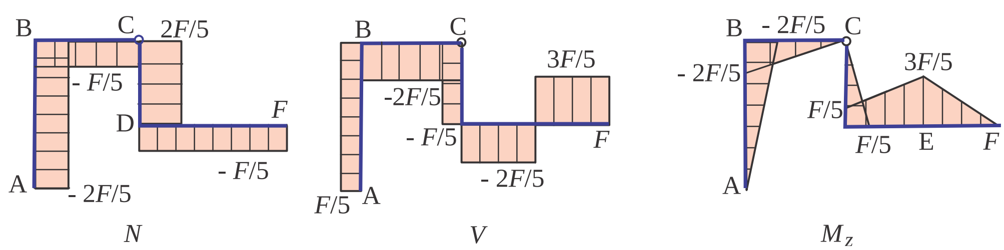


Figura 2.56: Esforços no Exemplo 10, em unidades [N] e [m].

Exemplo 2.11 – Estrutura com cabo

Considere o sistema de elevação de carga simples ilustrado na Figura 2.57a. Consiste em uma base horizontal ABCD, apoiada nos pontos A e C. Uma lança DE é articulada por uma rótula na extremidade D da base, e é sustentada pela extremidade oposta E por um cabo de aço BE. Determine a força de tração no cabo, a carga compressiva na lança e as reações nos apoios para uma carga $F = 100$ kN, quando a lança encontra-se na posição mostrada na Figura, fazendo um ângulo de $\beta = 30°$ com a horizontal. Determine também os esforços na base AD.
Solução:
Primeiramente, observa-se que esse é um problema isostático, de forma que as reações independem da forma da estrutura apoiada nos pontos A e C. As forças no cabo são forças internas ao sistema, isto é, esforços. O cálculo das reações é realizado da forma rotineira, escrevendo as equações de equilíbrio no plano $oxyz$:

$$
\begin{aligned}
\sum F_x &\rightarrow R_{Ax} = 0,\\
\sum F_y &\rightarrow R_{Ay} - R_C + F = 0,\\
\sum M_z^D &\rightarrow R_C(5) - F\ (12,5) = 0,
\end{aligned}
$$

o que resulta nas reações: $R_{Ax} = 0$, $R_{Ay} = 1,5F$ e $R_{Cy} = 2,5F$.

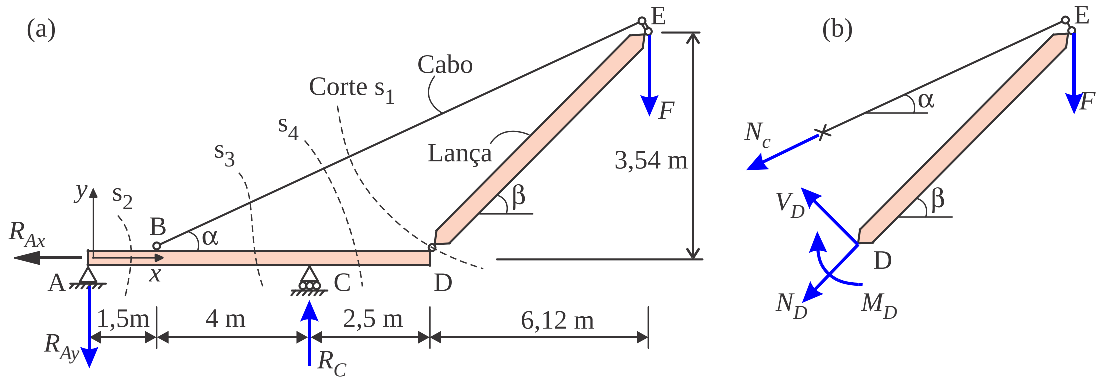


Figura 2.57: (a) Estrutura do Exemplo 11; (b) diagrama de corpo livre da lança.

(a) Esforços no cabo e na lança

Uma característica física sobre os cabos, em geral, é que eles são capazes de suportar apenas esforços normais de tração: é facilmente compreensível que um cabo não tem rigidez a cargas transversais de flexão, isto é, $V_c = M_c = 0$. Adicionalmente, o esforço normal é uniforme ao longo de cabos que não estejam sujeitos a força peso apreciável (como os cabos curtos) ou outras cargas distribuídas. Outro aspecto que é útil considerar no problema é que na rótula D os esforços cortante e de momento são nulos, $M_D = V_l = 0$.

Podemos fazer um corte s_1 como indicado na Figura 2.57, passando pela rótula D. Note que, uma vez que o esforço normal é uniforme ao longo do cabo, a posição onde o corte será feito nele não interferirá no valor do esforço obtido. Assim, para facilitar os cálculos trigonométricos na montagem das equações de equilíbrio, busca-se sempre, nesse tipo de problema, fazer o corte no cabo numa posição favorável. No exemplo, podemos fazer o corte próximo ao ponto E em que o cabo se conecta à lança DE. Em seguida, devemos lembrar que o corte deve dividir a estrutura em duas partes. Assim, o mesmo corte passa pelo ponto próximo de E e pela rótula interna D. A vantagem de passar o corte pelo ponto D, é que ali sabemos, a priori, que o esforço de momento é nulo devido à rótula. Assim, no cabo o esforço normal é N_c, e no ponto D da lança os esforços são N_D, V_D e o momento $M_D = 0$. As equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &\rightarrow \quad N_c \cos\alpha + N_D \cos\beta + V_D \text{ sen } \beta = 0,\\
\sum F_y &\rightarrow \quad F + N_c \text{ sen } \alpha + N_D \text{ sen } \beta - V_D \cos\beta = 0,\\
\sum M_z^D &\rightarrow \quad M_D + F\ (6,12) + N_c \text{ sen } \alpha\ (6,12) - N_c \cos\alpha\ (3,54) = 0.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Dos dados geométricos do problema temos que $\alpha = 15,67^o$. Logo, a terceira equação produz a tração no cabo como $N_c = 3,486F$. As duas primeiras equações resultam os esforços na lança: $N_D = -3,876F$ e $V_D = 0$. Observe que se poderia esperar que o cortante na lança DE fosse nulo, uma vez que ela é unida ao resto da estrutura apenas por rótulas, e está sujeita apenas a cargas nas extremidades. Então, toda a lança e o cabo comportam-se como partes de uma treliça, e apenas a barra horizontal suporta flexão.

(b) Esforços na base, trecho AB

Fazemos um corte s_2 como indicado na Figura 2.57, numa seção arbitrária do trecho AB, e fazemos o diagrama de corpo livre do lado esquerdo. O equilíbrio define os esforços

$$\begin{aligned}
V_y^{AB}(x) &= R_{Ay} = 1,5F,\\
M_z^{AB}(x) &= -R_{Ay}x = 1,5Fx, \qquad \forall x \in (0;1,5) \text{ m}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

C, i.e., $M_z^{BC}(5,5) = M_z^{CD}(5,5) = -4,868F$, como necessário. Nas demais seções o momento é contínuo, sendo nulos nas extremidades A e D, devido às rótulas. Os esforços cortantes apresentam descontinuidades em A, B, C e D compatíveis com as forças concentradas aplicadas naquelas seções. O esforço normal apresenta descontinuidade em B e D, onde existem reações aplicadas. Isso pode ser visualizado nos diagramas da Figura 2.59.

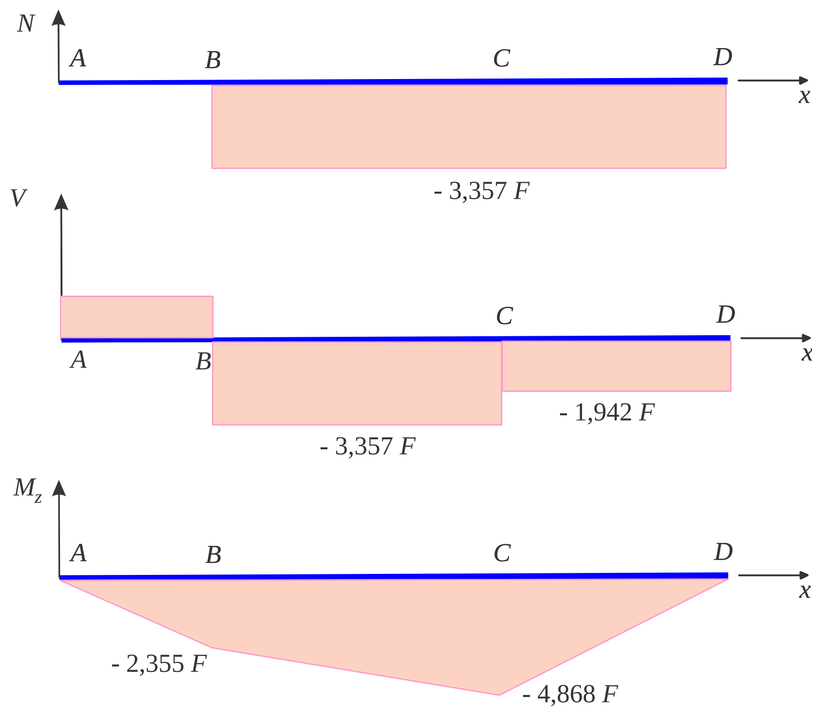
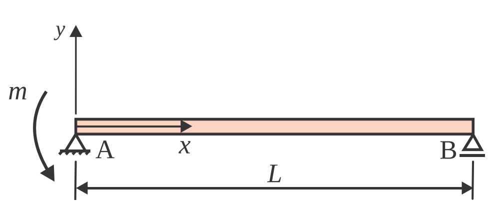


Figura 2.59: Diagramas de esforços do Exemplo 11.

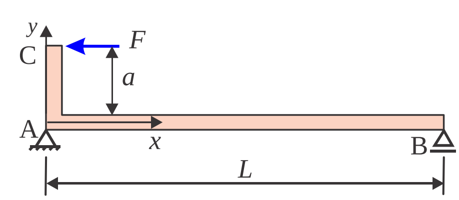
2.8 Exercícios

Determinar as reações, as equações de esforços nos problemas a seguir. Exceto nas treliças, esboçar os diagramas de esforços, indicando os máximos e a coordenada onde atuam. Em todos os problemas, identificar os sistemas de coordenadas usados, tanto o global quanto os locais, esboçar os diagramas de corpo livre necessários, tanto o global quanto os locais. Exceto se indicados diferentemente nos problemas, os dados são os seguintes: $m = 5$ kNm, $L = 1$ m, $a = 0,2$ m, $b = 0,4$ m, $F = 25$ kN, $G = 10$ kN, $q = 25$ kN/m, $p = 10$ kN/m, $\alpha = 30°$.

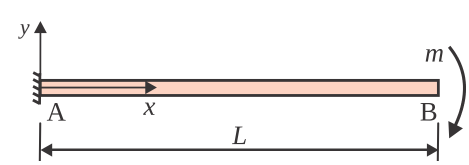
2.1



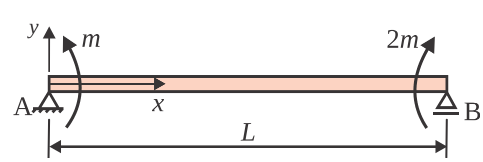
2.2



2.3



2.4



Capítulo 3

Tensões

Na seção 2.3.1 fizemos uma descrição preliminar e geral do conceito de tensões num ponto. No presente capítulo esse conceito é detalhado e inicia-se sua aplicação em alguns problemas práticos de análise mecânica de componentes estruturais. É recomendado que aquela seção seja lida antes do presente capítulo. Entretanto, nota-se que ali se buscava mostrar a relação entre os esforços numa dada seção interna do corpo e a distribuição de tensões distribuídas ali. No presente capítulo, iniciamos por considerar estritamente os conceitos e propriedades das tensões.

Consideremos a Figura 3.1a que mostra o diagrama de corpo livre de um corpo de geometria arbitrária, com seu carregamento externo $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\cdots$, e um sistema de eixos cartesianos xyz. Consideramos que o corpo se encontra em equilíbrio estático sob a ação dessas forças. Caso o corpo esteja vinculado a uma base fixa, parte dessas forças pode ser reações de apoios. Consideramos um ponto genérico P de coordenadas definidas pelo vetor $\mathbf{x}$, de componentes $\{x; y; z\}$. Em seguida definimos uma superfície S passando pelo ponto P. Essa superfície pode ser de formato arbitrário, i.e, uma superfície curva, tal que em cada ponto tenha uma normal distinta dos demais. Entretanto, no momento é mais conveniente definir a curva S de tal forma que no ponto P sua normal seja paralela ao eixo cartesiano x.

Usamos a superfície S para separar um dos lados do corpo e montamos um diagrama de corpo livre, como na Figura 3.1b. Nessa parte do corpo temos as forças externas (exemplificadas ali por $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$), que são equilibradas pela **força e momento internos resultantes**, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$, aplicados no centroide da seção.

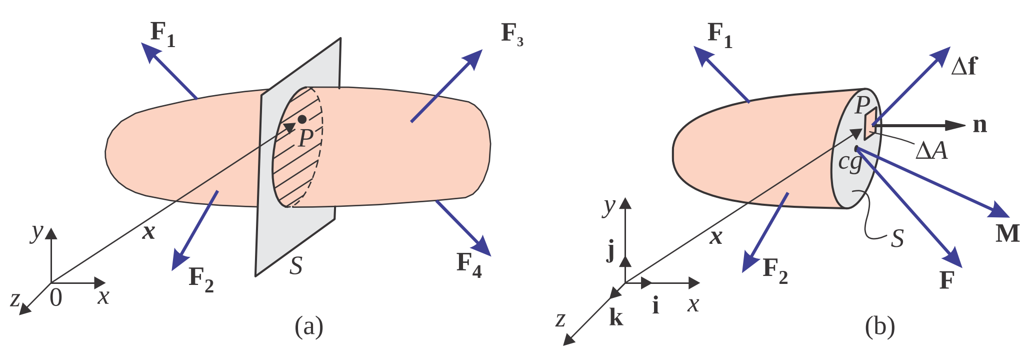


Figura 3.1: Forças externas num corpo e força interna num ponto P.

Deve-se lembrar que os esforços internos $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$ são apenas resultantes da distribuição de forças internas interatômicas que atuam na superfície S. Considere um elemento ΔA de área pertencente à superfície S, localizado no ponto P como indicado na Figura 3.1b. Esse elemento de área tem sua normal orientada na direção de um **vetor normal n**, que arbitramos como paralelo ao vetor unitário $\mathbf{i}$, isto é, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Claramente, cada ponto de S possui sua própria orientação normal, i.e., existe uma função $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$.

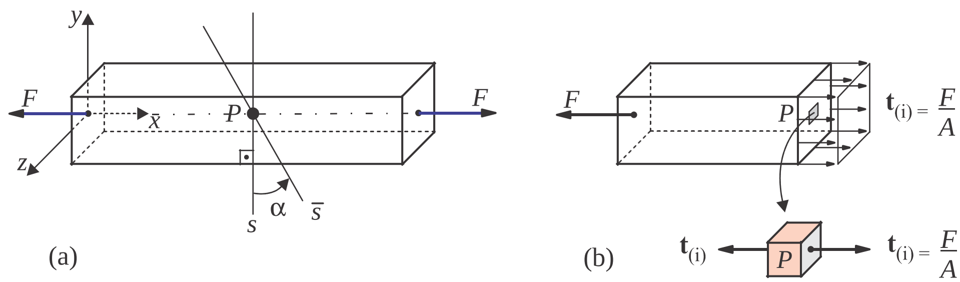


Figura 3.3: Vetor tensão num ponto arbitrário P, numa área de normal **i**.

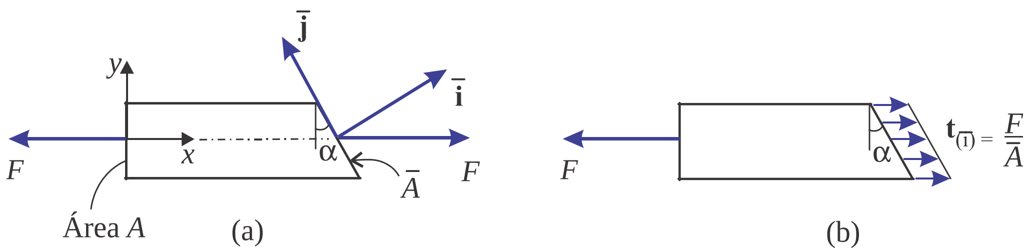


Figura 3.4: Vetor tensão num ponto arbitrário P, numa área de normal $\bar{\imath}$.

Consideremos agora a mesma barra, porém fazemos um outro corte, $\bar{s}$, definindo uma área $\bar{A}$ com normal orientada pelo vetor unitário $\bar{\imath}$, como mostrado na Figura 3.4. Para simplificar a visualização, consideramos que a tríade de vetores $\bar{\imath}$-$\bar{\mathbf{j}}$-$\bar{\mathbf{k}}$ seja tal que $\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}$, de forma que o vetor $\bar{\imath}$ esteja contido no plano **i**-**j**. Podemos fazer o diagrama de corpo livre do lado esquerdo do corte, como na Figura 3.4b. Devido ao equilíbrio de forças, a orientação da seção de corte não altera o valor da resultante de forças na seção, que continua sendo $N_x = F$. Entretanto, a área da seção de corte, $\bar{A}$, agora é maior que A, sendo dada por

$$\bar{A} = A/\cos\,\alpha, \tag{3.9}$$

onde α é o ângulo de orientação da seção inclinada. Se consideramos novamente que as tensões nessa superfície sejam uniformemente distribuídas, o vetor tensão em qualquer ponto de $\bar{s}$ é dado por

$$\mathbf{t}_{(\bar{\imath})} = \frac{F}{\bar{A}}\mathbf{i} = \frac{F}{A}\cos\,\alpha\;\mathbf{i}. \tag{3.10}$$

Comparando com (3.8), torna-se claro que

$$\mathbf{t}_{(\bar{\imath})} \neq \mathbf{t}_{(\mathbf{i})}. \tag{3.11}$$

Isso significa que no mesmo ponto temos diferentes vetores tensão, definidos pela orientação da superfície onde atua. Note que são realmente distintos vetores, não um mesmo vetor representado por componentes de dois sistemas de coordenadas diferentes. De fato, ambos os vetores em (3.8) e (3.10) estão representados em termos da mesma base **i**-**j**-**k**.

3.2 Tensor tensão

Se considerarmos novamente o corpo genérico da Figura 3.1 e o ponto P arbitrário, podemos fazer infinitos cortes em torno de P, gerando infinitas superfícies, cada uma com uma orientação própria **n**. Buscaremos representar o **estado de tensões** do material no ponto através de um número finito de superfícies. Considere que temos já definido um sistema de coordenadas, xyz, e já tínhamos realizado um corte passando por P, na direção x, isto é, o vetor normal **n** da superfície é $\mathbf{n} = +\mathbf{i}$.

Isso definiu três componentes de tensão, τ_{xx}, τ_{xy} e τ_{xz} em P. Considere agora que podemos realizar um segundo corte em P, porém orientado na direção $\mathbf{n} = +\mathbf{j}$, isto é, perpendicular ao eixo y. De fato, podemos realizar ao todo seis cortes em torno do ponto P, definindo um elemento diferencial de volume de lados dx, dy, e dz, como indicado na Figura 3.5a, com faces orientadas em $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ e $\pm\mathbf{k}$. Esse elemento é o hexaedro regular mostrado na Figura 3.5b.

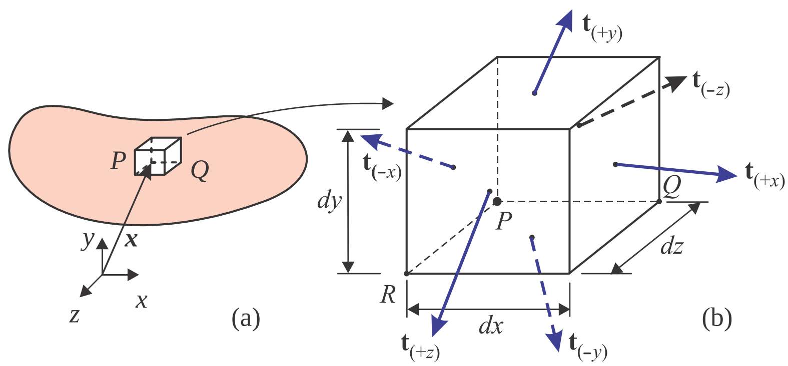


Figura 3.5: Elemento diferencial num ponto P de um corpo, e diagrama de corpo livre.

Em cada face do hexaedro atua um vetor tensão. Os índices usados nesses vetores, $\pm x$, $\pm y$, $\pm z$, indicam a orientação da face onde o vetor atua. Cada um desses vetores pode ser expresso em termos de suas componentes cartesianas. Por exemplo, tínhamos já representado as componentes de $\mathbf{t}_{(+x)}$por

$$\mathbf{t}_{(x)} = \{\tau_{xx}; \tau_{xy}; \tau_{xz}\}. \tag{3.12}$$

De forma semelhante podemos definir as componentes nas faces $+y$ e $+z$:

$$\mathbf{t}_{(y)} = \{\tau_{yx}; \tau_{yy}; \tau_{yz}\}, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{t}_{(z)} = \{\tau_{zx}\ \tau_{xy}\ \tau_{zz}\}. \tag{3.13}$$

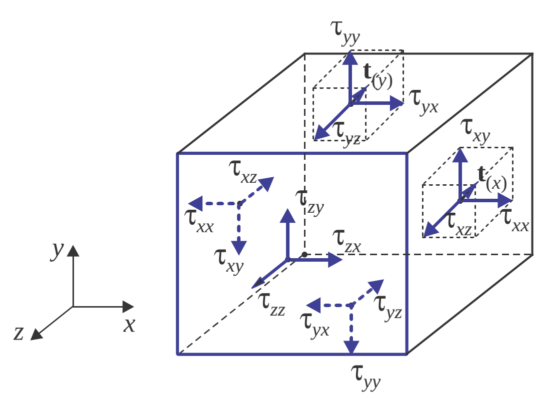


Figura 3.6: Componentes de tensão no sistema cartesiano xyz, no ponto P do corpo.

Essas componentes são vistas nas três faces anteriores do elemento da Figura 3.6. Os índices usados em cada componente são:

1. O primeiro índice indica a orientação da face onde atua a componente de tensão;

2. O segundo índice indica a direção da força associada à tensão. Por exemplo, τ_{zx} é uma tensão atuando na face normal ao eixo z, devida a uma força atuando na direção x.

Nas três faces posteriores do elemento, aquelas orientadas em $-x$, $-y$ e $-z$, tem valores de tensão distintos daqueles atuantes nas faces anteriores. Entretanto, as denominações de cada componente

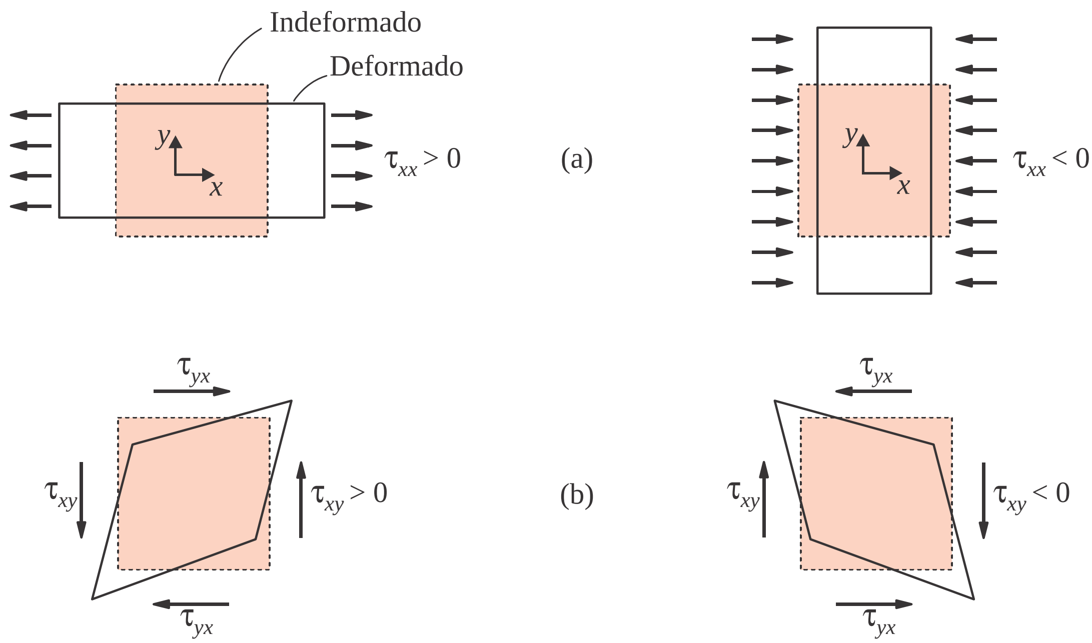


Figura 3.7: (a) Visualização do efeito de tensão normal trativa e compressiva; (b) efeito de tensão cisalhante positiva e negativa num elemento diferencial de volume.

Simetria

Na próxima seção será provado que o tensor tensão é simétrico, isto é, $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ e $\tau_{zy} = \tau_{yz}$. De forma compacta isso pode ser posto simplesmente como

$$\tau_{ji} = \tau_{ij}, \quad \text{para} \quad i, j = 1,\, 2,\, 3 \quad \text{e} \quad i \neq j. \tag{3.16}$$

Assim, **existem seis componentes de tensão independentes** num ponto de um corpo. Lembramos que **cada componente é uma função do ponto**, tem-se que num problema genérico

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(x, y, z) \qquad \text{para} \qquad i, j = 1,\, 2,\, 3. \tag{3.17}$$

Podemos dizer que uma das tarefas em mecânica dos sólidos e análise de estruturas consiste em determinar essas funções, i.e., determinar o valor das componentes de tensões em cada ponto do corpo.

3.3 Equações diferenciais de equilíbrio

Consideremos um elemento de material isolado de um corpo genérico, como na figura 3.5a. Consideremos agora que esse elemento tenha **dimensões finitas** Δx, Δy e Δz (em vez de diferenciais dx, dy e dz como antes). Na Figura 3.8 temos um diagrama de corpo livre do elemento, onde incluímos **o efeito do gradiente de tensões**, isto é, o fato que as tensões variam de ponto a ponto. Por exemplo, consideremos as duas faces paralelas orientadas em $(-x)$ e $(+x)$. A face $(-x)$ situa-se em uma coordenada x, enquanto a face $(+x)$ situa-se na posição $x + \Delta x$, isto é, ambas as faces distam Δx entre si. Assim, se a tensão normal tiver um valor σ_x em $(-x)$, em $(+x)$ ele terá um valor distinto. Pode-se dizer que em $(+x)$ a tensão será aquela em $(-x)$ adicionada de um incremento $\Delta\sigma_x$. Em resumo, considerando todas as 6 faces na Figura 3.8, temos que as tensões nas faces anteriores (orientadas em $(+x)$, $(+y)$ e $(+z)$), são obtidas por incremento das tensões das faces posteriores.

Além das forças devidas às tensões atuando nas faces do volume, podemos considerar que atuam também forças de corpo $\mathbf{f}_c$. Essas forças normalmente são representadas como **força de corpo por unidade de volume**, dadas em $[\mathrm{N/m^3}]$ e podem ser representadas pelas suas componentes cartesianas f_{cx}, f_{cy} e f_{cz}, i.e., $\mathbf{f}_c = f_{cx}\mathbf{i} + f_{cy}\mathbf{j} + f_{cz}\mathbf{k}$. Em geral, essa força é dependente do ponto, i.e., variam de ponto a ponto, de forma que são representadas por uma função vetorial $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_c(\mathbf{x})$ conhecida. A força de corpo atuando no elemento volumétrico é $\mathbf{f}_c\Delta x\Delta y\Delta z$, que consideramos atuando no centroide do bloco.

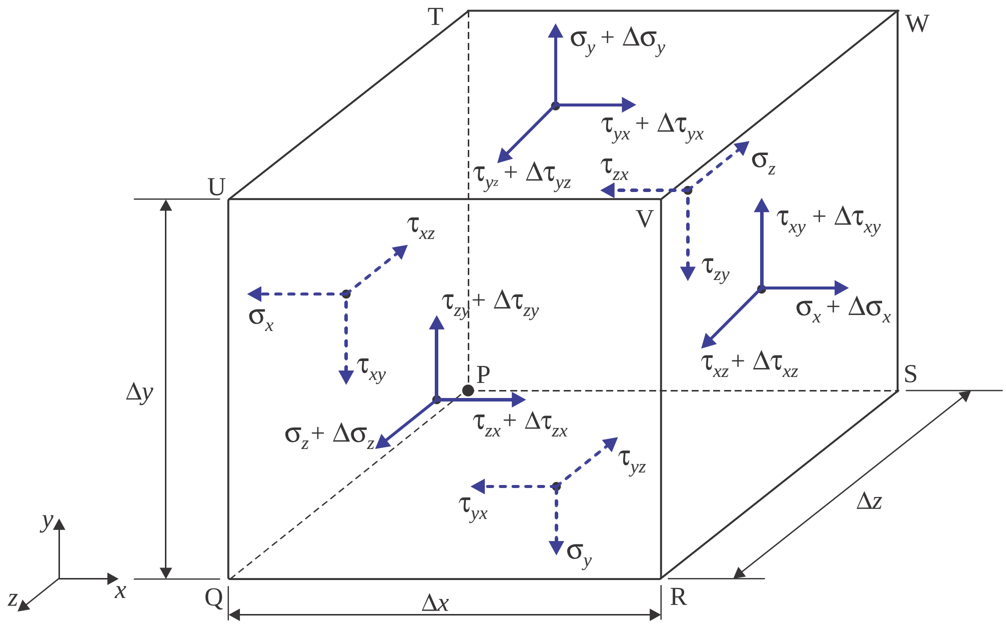


Figura 3.8: Componentes de tensão num elemento de dimensões finitas $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$.

O equilíbrio do elemento é representado por seis equações, isto é, três de forças e três de momentos. Por simplicidade, desenvolveremos apenas uma de cada tipo, uma vez que as demais têm forma semelhante. Assim, a equação de **equilíbrio dinâmico** no elemento volumétrico na direção x é

$$\begin{aligned}\sum F_x \rightarrow \quad & -\sigma_x\Delta y\Delta z + (\sigma_x + \Delta\sigma_x)\Delta y\Delta z - \tau_{zx}\Delta x\Delta y + (\tau_{zx} + \Delta\tau_{zx})\Delta x\Delta y \\ & -\tau_{yx}\Delta x\Delta z + (\tau_{yx} + \Delta\tau_{yx})\Delta x\Delta z + \underbrace{f_{cx}\Delta x\Delta y\Delta z}_{\text{Força de corpo}} = \underbrace{\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta x\Delta y\Delta z}_{\text{Força de inércia}},\end{aligned} \tag{3.18}$$

A componente x da força de corpo atuando no elemento volumétrico é $f_{cx}\Delta x\Delta y\Delta z$. A massa do elemento volumétrico é $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$, sendo ρ a **densidade do material** no ponto, em kg/m^3. O termo à direita da igualdade é a **força de inércia**, dada pela massa vezes a aceleração do elemento na direção x. Como o deslocamento na direção x é a função $u(x, y, z, t)$, a aceleração é $\partial^2 u/\partial t^2$. O Capítulo 4 fará um detalhamento do campo de deslocamentos num corpo deformável. Na presente dedução incluímos as forças de inércia apenas para gerar completicidade na formulação. Entretanto, o restante do texto será restrito a problemas estáticos, em que as forças de inércia são pequenas e podem ser desprezadas. O tratamento de problemas em que as acelerações são importantes na resposta compõem toda a parte da engenharia de vibrações e dinâmica estrutural, que normalmente é assunto de diversas outras disciplinas e textos.

O equilíbrio de momento das forças é calculado em relação à linha que suporta o segmento VW indicado no topo do bloco na Figura 3.8. Então, $\sum M_z^{VW}$ produz

3.4.1 Tensões normal e cisalhante médias

Barra sob carga axial

Considere um segmento de barra (ou cabo) sob carga axial, como na Figura 3.9a, onde previamente já se tenha determinado o esforço normal na seção s. Nesse caso, a **tensão normal média** na seção é

$$\boxed{\sigma_{med}(x) = \frac{N_x(x)}{A(x)}} \tag{3.25}$$

Note que tanto o esforço normal N_x quanto a área A da seção transversal podem variar de seção a seção.

Observa-se que, de fato, as tensões podem variar de um ponto a outro da seção. Entretanto, essa variação é bastante pequena em regiões distantes das extremidades da barra ou de variações bruscas de seção transversal. Entretanto, mesmo que a tensão varie de ponto a ponto da seção, o valor N/A é uma média da tensão na seção, que pode ser usada, desde que de forma cuidadosa, como descrito no texto a seguir.

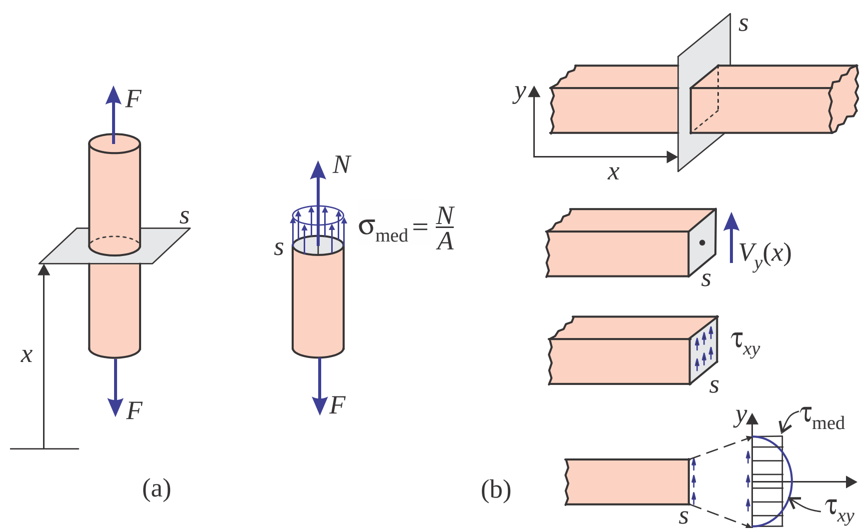


Figura 3.9: (a) Tensão normal média σ_{med} em barra tracionada; (b) distribuição de tensão cisalhante real $\tau_{xy}(y)$ e tensão média τ_{med}.

Viga sob esforço cortante

Como na Figura 3.9b, considere uma seção qualquer de uma viga numa coordenada x, em que já se tenha previamente determinado o esforço cortante $V_y(x)$. Esse caso é mais complicado, por que a **distribuição de tensões cisalhantes na seção**, fisicamente, **não é uniforme** (como será demonstrado em capítulo subsequente para o caso de uma seção retangular), mas aproxima-se de uma função parabólica ao longo da direção do cortante, isto é, se temos V_y como na figura, a tensão cisalhante varia ao longo de y na seção conforme uma função $\tau_{xy} = \tau_{xy}(y, z)$, como ilustrado na figura (b) inferior. Em diversas situações, entretanto, usa-se o **valor médio da tensão cisalhante**, dado por

$$\boxed{\tau_{med}(x) = \frac{V_y(x)}{A(x)}} \tag{3.26}$$

Nesse ponto é interessante o leitor ficar alerta de que:

Sempre as tensões médias são calculadas usando o esforço na seção, nunca diretamente uma força externa. (3.27)

Exemplo 1 - Tensões normais num esticador de cabos

Considere o esticador de cabos mostrado na Figura 3.10, submetido a uma força $F = 10$ kN. A áreas de seção transversal no parafuso, seção $a-a$, é $A_a = 100$ mm^2, e na seção $b-b$ é $A_b = 60$ mm^2. Estime as tensões normais médias em ambas as seções:

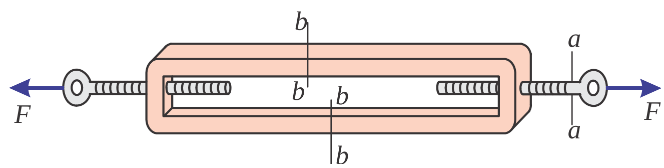


Figura 3.10: Esticador de cabos do Exemplo 1.

Essa geometria é uma estilização de um estirador típico, como pode ser visto na Figura 3.11. Ali também se pode ver uma forma simples de fixar a extremidade do conjunto a uma base fixa, no caso através de abraçadeira e parafuso. Note-se que no estirador, um dos parafusos deve possuir rosca invertida.

Figura 3.11: Detalhe de fixador e esticador de cabos de aço de tipo simples.

Solução:

O cálculo das tensões médias é imediato. Primeiro determinamos o esforço normal, que é $N_a = F$ na seção $a-a$ e $N_b = F/2$ na seção $b-b$. As tensões médias são:

$$\begin{aligned}\tau_{aa} &= \frac{N_a}{A_a} = \frac{10.10^3\ \text{N}}{100\ \text{mm}^2} = 100\ \text{N/mm}^2 = 100\ \text{MPa},\\ \tau_{bb} &= \frac{N_b}{A_b} = \frac{5.10^3\ \text{N}}{60\ \text{mm}^2} = 83,3\ \text{N/mm}^2 = 83,3\ \text{MPa}.\end{aligned}$$

As componentes do tensor tensão média em um ponto arbitrário na seção $a-a$ e na seção $b-b$, em relação a um sistema de coordenada em que o eixo x seja axial com as forças aplicadas, são:

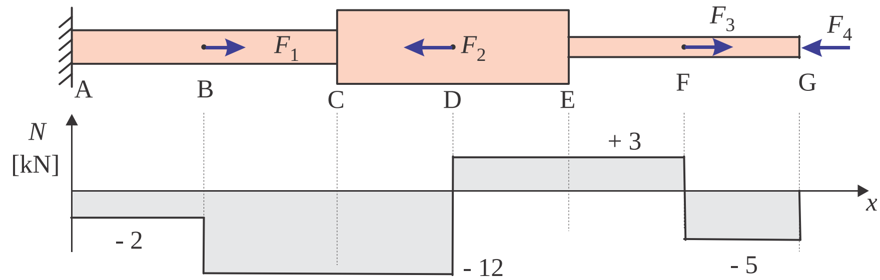


Figura 3.15: Diagrama de esforços normais do Exemplo 2.

- Falha do material, sendo a ruptura (separação da peça em duas partes) apenas a mais óbvia dentre inúmeras outras formas;
- Falha por flambagem ou instabilidade, como brevemente descrita no Capítulo 13;

Consideramos no momento apenas a **falha do material**. Sabe-se que em grande parte dos casos **esse tipo de falha é diretamente associada ao nível de tensões aplicadas em cada ponto do corpo.** Grosso modo, podemos entender que cada material existente, por exemplo, aço, alumínio, concreto, madeira, polímeros, cerâmicos etc, é capaz de suportar tensões até um certo valor. Existe então um nível crítico de tensão, definido para cada material que, dentro de certas condições, faz com que o material falhe.

Para um ponto do corpo submetido a um estado triaxial de tensões (aquele em que as nove componentes do tensor são não nulas), o processo de análise de falha (e segurança) necessita uma elaboração mais detalhada, através de teorias próprias, (algumas das quais serão vistas no Capítulo 13). Entretanto, para os **estados uniaxiais de tensão**, as ideias são bastante imediatas, como visto a seguir, através dos dois casos típicos:

1. Para uma porção de material no ponto de coordenada $\mathbf{x}$, **sob tensão normal simples**, define-se o **coeficiente de segurança** n no ponto por:

$$n(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_{resist}}{\sigma_{aplic}(\mathbf{x})} = \frac{\text{máxima tensão de resistência do material}}{\text{tensão aplicada no ponto de coordenada } \mathbf{x} \text{ da peça}}. \qquad (3.28)$$

   σ_{aplic} é a tensão aplicada no ponto analisado. É a tensão que resulta da aplicação do carregamento na peça. Note que σ_{aplic} é conceitualmente distinto de σ_{resist}, sendo esta uma característica do material, sem relação com o carregamento ou com as dimensões da peça de que o material é construído. Nos Capítulos 4 e 6 serão detalhados tipos e formas de determinação de σ_{resist}. A ideia em (3.28) é que só há segurança no ponto se a tensão aplicada for menor que a tensão que o material pode resistir quando submetido num ensaio ao mesmo tipo de estado de tensões, i.e., tensão normal simples O coeficiente de segurança é então uma função do ponto. Entretanto, numa grande quantidade de situações, a falha de um ponto do corpo leva à falha da estrutura como um todo. Assim, **o coeficiente de segurança da estrutura, n_{estr}, é definido pelo ponto mais solicitado, isto é, aquele ponto de menor** n. Então, n_{estr} é obtido por

$$n_{estr} = \operatorname*{Min}_{\mathbf{x}} n(\mathbf{x}),$$

   Assim, para se ter segurança na estrutura deve-se ter $n_{estr} > 1$, enquanto $n_{estr} < 1$ indica falha.

2. Para elementos submetidos apenas a **cisalhamento puro**, i.e., a uma única das três componentes de tensão cisalhante, (3.28) pode ser reescrito como

$$n = \frac{\tau_{resist}}{\tau_{aplic}} \qquad (3.29)$$

$$A_3 = \frac{N_{FG}}{\sigma_{adm}} = \frac{-5.000 \text{ N}}{-200 \text{ N/mm}^2} = 25,0 \text{ mm}^2.$$

Temos então a primeira estimativa do dimensionamento da barra. Outras verificações ainda se tornam necessárias, como por exemplo a verificação quanto a possibilidade de flambagem nas barras comprimidas (como será visto em capítulo próprio), ou outro modo de falha qualquer. Isso pode tornar necessárias alterações subsequentes nas dimensões.

Exemplo 5 - Força peso em coluna

Considere uma coluna de concreto, como na Figura 3.16a, de altura $L = 4$ m, com área de seção transversal de raio $R = 200$ mm, suportando o peso próprio e uma carga uniformemente distribuída no topo com resultante $F = 10$ kN. Determine a tensão normal média em função da distância z da seção à base. A densidade do concreto é $\rho = 2.300$ kg/m^3.

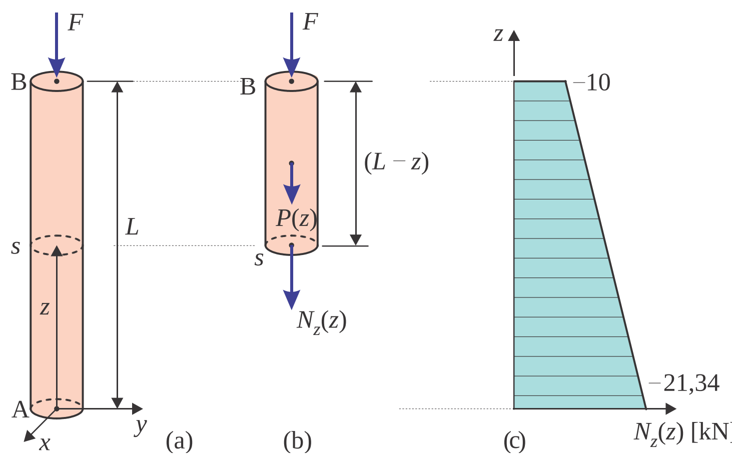


Figura 3.16: Coluna do Exemplo 5 e diagrama de esforços normais.

Solução:

Normalmente, na resolução de um problema, deveríamos primeiramente determinar as reações nos apoios. Porém, como neste problema a barra possui apenas um apoio, é possível aplicar o método das seções sem o conhecimento da reação, bastando tomar o diagrama de corpo livre do lado da estrutura que não contém o apoio. Assim, fazemos um corte na seção s, de coordenada z, e tomamos o lado superior, como na Figura 3.16b. Ali temos indicadas todas as forças atuantes: a carga F, o esforço na seção, $N(z)$, e a força peso do segmento, $P(z)$. O equilíbrio de forças é

$$\sum F_z \rightarrow \quad N_z(z) + P(z) + F = 0. \tag{3.33}$$

$P(z)$ corresponde apenas ao peso do material acima do corte na coordenada z, isto é,

$$P(z) = \rho g(L - z)A,$$

onde g é a aceleração da gravidade. Assim, (3.33) produz

$$\boxed{N_z(z) = -F - \rho g A(L - z)} \tag{3.34}$$

Essa equação é plotada na Figura 3.16c. Para os dados do problema a função toma a forma: $N_z(z) = -21.340 + 2.835,4z$, com z dado em metros e N_z em Newtons, para $\forall z \in (0;4)$m. A **tensão média** em cada seção também será uma função de z, dada por

$$\sigma_z(z) = \frac{N_z(z)}{A} = \frac{2.835,4z - 21.340}{\pi\ 0,2^2} = 22.556\ z - 1,698.10^5.$$

Essa também é uma distribuição linear, uma vez que a área A da seção é constante. As tensões máximas e mínimas ocorrem respectivamente na base e no topo:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\max} &= \sigma_z(z=0) = -1,698.10^5 \text{ Pa}, \\
\sigma_{\min} &= \sigma_z(z=4)\text{m} = -7,95.10^4 \text{ Pa}.
\end{aligned}
$$

3.4.3 Usos da tensão cisalhante média - Pinos e chapas coladas

Consideremos alguns casos bastante comuns em estruturas de engenharia que são normalmente analisadas através do conceito de tensões cisalhantes médias. O primeiro caso é o das **uniões coladas,** como visto na Figura 3.17a. Se usamos o método das seções seccionando o conjunto na interface colada, podemos gerar o diagrama de corpo livre mostrado na figura (b). A força interna na interface, o esforço cortante V_x, deve equilibrar a força externa F. As tensões cisalhantes τ_{xz} distribuem-se na superfície de tal forma que sua resultante seja V_y, i.e., a equação (3.26) é aplicável. Entretanto, a relação entre τ_{xz} e V_x não é simples. Usando métodos consistentes de solução, sabe-se que a distribuição de τ_{xz} na superfície não é uniforme, mas tem uma forma como aquela ilustrada qualitativamente na Figura (c). Como forma de simplificar os procedimentos de cálculo, usa-se a tensão cisalhante média na área, representada pela linha tracejada na Figura 3.17c. Claramente, a tensão média é inferior ao valor máximo da tensão correta, que ocorre em algum ponto da região de contato. Então, **deve-se observar que o uso de tensões médias exige o uso de coeficientes de segurança maiores, que compensem a falta de precisão no cálculo da tensão aplicada**.

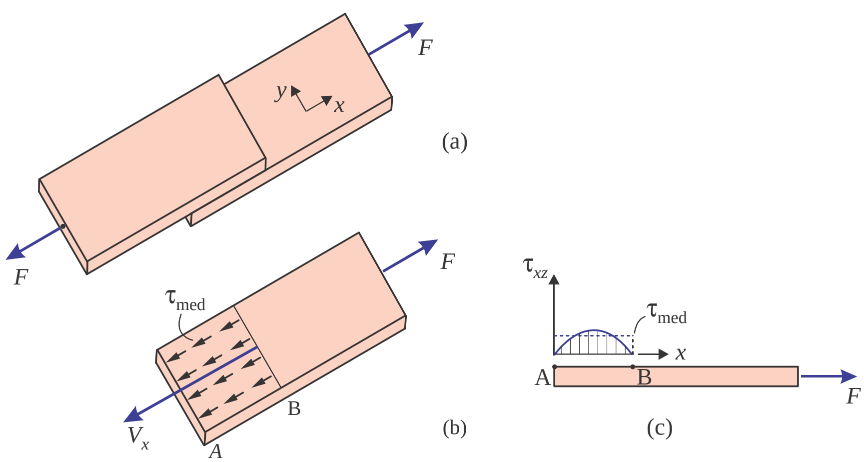


Figura 3.17: Distribuição de tensões reais τ_{xz} e média τ_{med}, numa união colada.

União por pinos

Uma segunda forma clássica de união entre barras é aquela através de pinos, como na foto da Figura 3.18, que ilustra um caso simples de junção de vigas através de abraçadeira aparafusada. Nessa junção, por ter apenas um parafuso, deixa a barra livre para se rotacionar, funcionando como uma rótula. Uma situação mais complexa é como na estrutura de vigas do edificio mostrado na Figura 3.4.3a. Nota-se no detalhe da figura (b), uma junta que une vigas horizontais, verticais e duas diagonais. Nota-se que as vigas diagonais são fixadas por dois e quatro parafusos, o que funciona como um engaste, sendo capaz de transmitir momentos, o que confere maior rigidez à estrutura como um todo.

Note-se que em estruturas de barras, os **principais modos de falha** são:

- flambagem (instabilidade) nas barras comprimidas e

Figura 3.18: Junta entre vigas, constituída por abraçadeira aparafusada.

- falha nas juntas em torno dos pinos, nas barras tracionadas.

(a) (b)

A Figura 3.19 apresenta uma representação esquemática desse tipo de junta. Diversos modos de falha são possíveis, sendo que os principais são os seguintes:

1. **Cisalhamento no pino**

   Na Figura 3.19a temos uma indicação das forças aplicadas pelas barras sobre o pino. **Claramente outras forças devem estar também sendo aplicadas, uma vez que o equilíbrio de momento do pino não é satisfeito apenas pelo par de forças resultantes** F. O efeito do cisalhamento no pino pode ser imaginado com a ajuda da Figura 3.20b, i.e., o cisalhamento tende a gerar uma ruptura plana na seção de interface entre as cargas aplicadas pela superfície do furo na lateral do pino. A visualização mostrada é apenas uma idealização, uma vez que uma eventual ruptura ocorre acompanhada de um campo de deformações preliminares que é dependente das características do material.

   A Figura 3.20c mostra o esforço cortante na seção transversal do pino, que coincide com a interface das barras. Finalmente, a Figura 3.20d indica as tensões cisalhantes τ distribuídas na seção. A distribuição precisa dessas tensões é complexa, de forma que geralmente os cálculos são realizados usando a tensão média:

$$\tau_{\text{pino}} = \frac{V}{A_{\text{pino}}}. \tag{3.35}$$

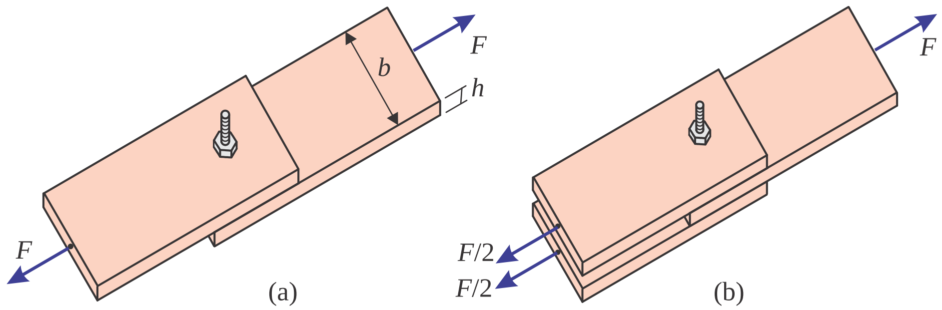


Figura 3.19: Uniões entre chapas através de pinos.

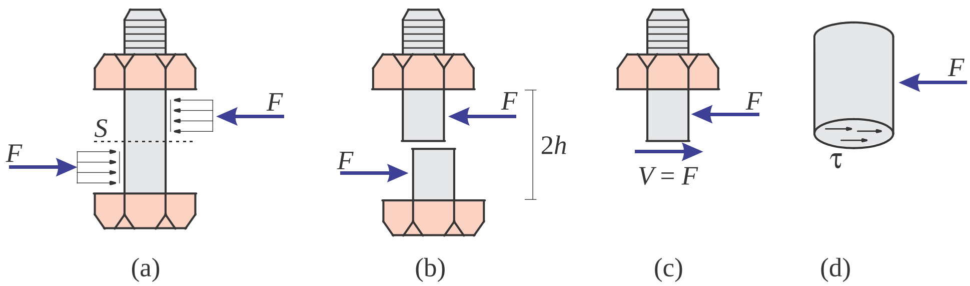


Figura 3.20: Tensões cisalhantes no pino.

2. **Falha na seção líquida da barra**

   Um diagrama da barra é visto na Figura 3.21b. O pino exerce uma força F distribuída na borda do furo como ilustrado. Essa força é a resultante de uma distribuição de tensões normais na seção s_1, indicada na figura (b). A tensão normal média na seção líquida é dada por

$$\sigma_{\text{liq}} = \frac{F}{A_{\text{liq}}} = \frac{F}{(b-d)h}. \tag{3.36}$$

   A_{liq} é a área líquida da seção, i.e., a área de material no corte s_1 da Figura 3.21a, e h é a espessura da chapa.

3. **Rasgamento na borda**

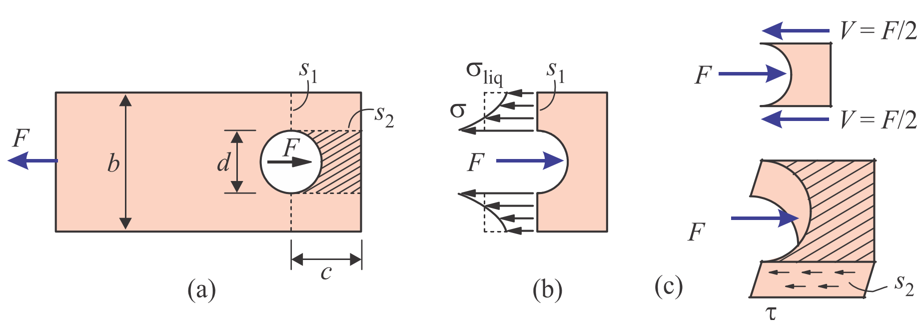


Figura 3.21: Tensões na chapa. (b) tensão normal na seção líquida; (c) tensões cisalhantes de rasgamento na borda.

Quando o furo é posicionado muito próximo da borda da barra, existe o risco de rasgamento ao longo da seção s_2 (indicada na região hachurada na Figura 3.21a). No caso desse tipo de falha ocorrer, toda a peça de material marcada nas figuras (a) e (c) é sacada da barra. O esforço cortante que se desenvolve na superfície s_2 equilibra a força exercida pelo pino. A

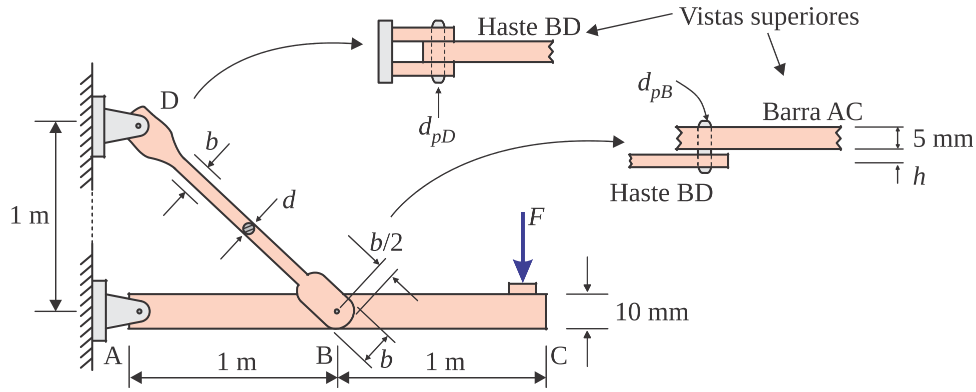


Figura 3.23: Dados do Exemplo 6.

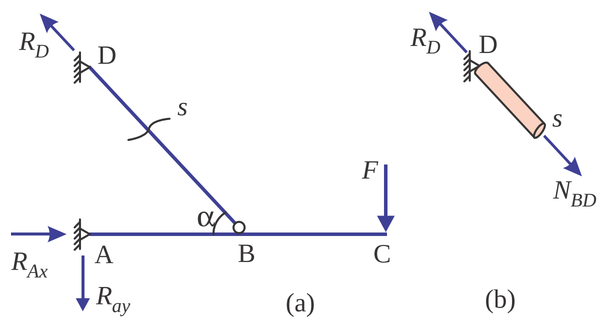


Figura 3.24: Reações nos apoios do Exemplo 6 e esforço na haste.

$$\begin{aligned}
\sum F_x \quad &\rightarrow \qquad R_{Ax} - R_D \cos\alpha = 0, \\
\sum F_y \quad &\rightarrow \qquad R_D \text{ sen } \alpha - R_{Ay} - F = 0, \\
\sum M_z^A \quad &\rightarrow \qquad R_D \cos\alpha \ (1) - F \ (2) = 0,
\end{aligned}$$

onde $\alpha = 45^o$. A solução do sistema é: $R_D = 28,3$ kN, $R_{Ay} = 10$ kN e $R_{Ax} = 20$ kN.

O **esforço normal na haste** é obtido pelo método das seções, por um corte numa seção genérica s, como visto na Figura 3.24(b), donde se obtém $N_{BD} = R_D = +28,3$ kN. O conhecimento desse esforço é fundamental, uma vez que essa é a força transmitida através dos pinos e pela região central da haste.

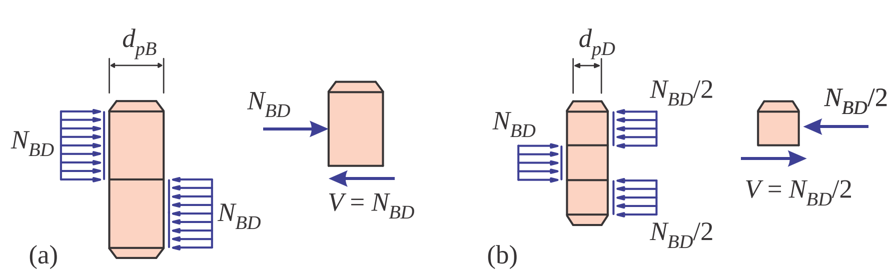


Figura 3.25: (a) Pino no apoio B; (b) pino no apoio D.