

Capítulo 2

Tensões - equações de equilíbrio

2.1 Conceito de tensão

A necessidade de estabelecer uma medida do estado de solitação interna de um corpo levou à criação dos conceitos de **vetor tensão** e **tensor tensão**. Embora sejam inúmeras as tentativas de tornar estas abstrações *confortáveis ao entendimento*, elas são bastantes sutis e nada óbvias. Este texto não tem o intuito de apresentar toda a estrutura matemática que conduz à demonstração rigorosa da construção destes elementos, mas visa mostrar uma forma ordenada que facilite sua compreensão. Mais detalhes podem ser vistos em textos clássicos como os de Malvern [67] e Gurtin [42].

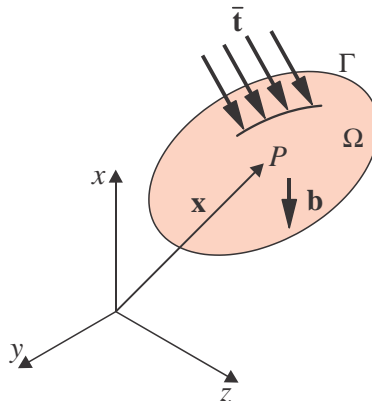


Figura 2.1: Domínio, contorno e esforços externos.

Começamos por identificar os tipos de solitações que atuam sobre um corpo contínuo ou sobre partes deste:

1. **Forças de contato ou de superfície aplicadas pelo meio externo sobre o contorno** do corpo considerado. São forças distribuídas, cuja unidade é força por unidade de área $[F/L^2]$. Como exemplo, se o corpo ou sistema considerado é o eixo de um motor, as forças aqui citadas correspondem às forças de contato produzidas pelo mancal, por exemplo, além das forças provenientes dos elementos montados sobre o eixo - polias, engrenagens, rotores. Denotaremos estas forças por $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$. (Figura 2.1).
2. **Forças de corpo**, também chamadas forças de campo, são exercidas pelo meio externo diretamente sobre cada partícula do corpo. Estas forças são exercidas a distância, sem contato físico. Forças gravitacionais (peso próprio), magnéticas ou inerciais são as mais frequentes. Neste caso, as ações tem dimensão de força por unidade de volume $[F/L^3]$ e serão denotadas por $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ (Figura 2.1).

3. **Forças de contato ou superfície entre as diferentes partes do corpo** em consideração. Estas ações, cujas unidades são idênticas às das forças $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$, são denotadas por $\mathbf{t}(\mathbf{x})$. Esta abstração foi postulada originariamente por Cauchy e sua natureza tentaremos descrever a seguir.

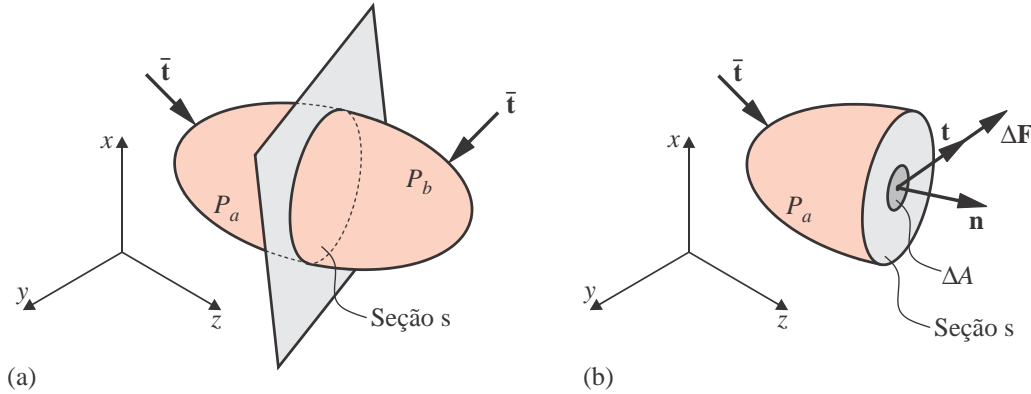


Figura 2.2: Auxílio para o conceito de vetor tensão.

Consideremos um corpo \mathcal{B} em equilíbrio estático sob a ação de uma distribuição de sollicitações externas $\bar{\mathbf{t}}$ e \mathbf{b} como ilustrado na Figura 2.1. Se realizamos um corte no corpo, de forma a separá-lo em duas partes, P_a e P_b , então cada uma dessas partes também estará em equilíbrio estático. A Figura 2.2b mostra o diagrama de corpo livre da uma parte P_a do corpo onde se coloca em evidência a superfície S gerada pelo corte. O vetor normal unitário num ponto \mathbf{x} desta superfície interna é $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Ao redor deste ponto de S delimitamos uma área ΔA , e chamamos $\Delta \mathbf{F}$ à força resultante que o corpo P_b exerce sobre P_a nesta área. Esta força não é necessariamente paralela ao vetor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. O limite de $\Delta \mathbf{F} / \Delta A$ quando $\Delta A \rightarrow 0$ define um outro vetor denominado **vetor tensão**¹ $\mathbf{t}(\mathbf{x})$. Então, pode-se definir de maneira formal a tensão num ponto de coordenadas \mathbf{x} , agindo na área cuja normal é $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, como sendo

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}. \quad (2.1)$$

O vetor tensão $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ possui uma componente normal à superfície, denominada **tensão normal** σ_{nn} e uma componente paralela à superfície denominada **tensão cisalhante** σ_{nc} , como ilustrado na Figura 2.3. Essas componentes podem ser calculadas por:

$$\boxed{\sigma_{nn} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad \sigma_{nc} = \mathbf{t} - \sigma_{nn}.} \quad (2.2)$$

Para entender essas operações, basta lembrar que o produto escalar entre dois vetores, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, é igual à componente de \mathbf{a} na direção de \mathbf{b} , (ou equivalentemente, a componente de \mathbf{b} na direção de \mathbf{a}). Assim, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$ é a componente de \mathbf{t} na direção normal. A parcela cisalhante é obtida por adição vetorial. Os módulos são $\|\sigma_{nn}\| = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})$ e $\|\sigma_{nc}\| = \sqrt{\|\mathbf{t}\|^2 - \|\sigma_{nn}\|^2}$, respectivamente.

As hipóteses de Cauchy admitem também que este vetor $\sigma_n(\mathbf{x})$ varia continuamente com a normal \mathbf{n} . Isto é, **se no mesmo ponto do corpo, de coordenada \mathbf{x} , a inclinação do corte for modificada, o vetor $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ também muda**. Veremos a seguir que \mathbf{t} varia **linearmente** com \mathbf{n} ou, em outras palavras, que existe uma **transformação linear** do vetor \mathbf{n} que fornece o vetor \mathbf{t} . Esta transformação linear define o chamado **tensor tensão**.

¹Devemos observar que este conceito só é possível de ser formulado em virtude da hipótese que o corpo é um contínuo, isto é, cada ponto dele contém matéria. Caso considerássemos o corpo como ele realmente é, isto é, particulado, à medida em que a área fosse diminuindo, chegaríamos a uma escala molecular, e fisicamente, chegaríamos a uma região do espaço sem matéria.

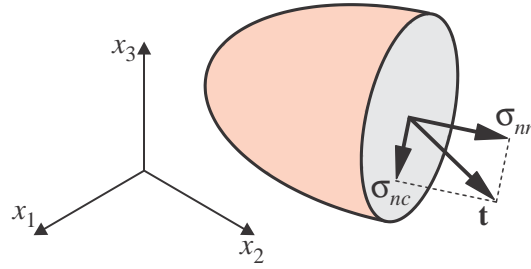


Figura 2.3: Vetor tração numa superfície orientada segundo o vetor \mathbf{n} e suas componentes normal e cisalhante à superfície, σ_{nn} e σ_{nc} .

2.2 Tensor tensão

Tomamos novamente o corpo genérico \mathcal{B} e no ponto de \mathbf{x} realizamos três cortes paralelos aos planos cartesianos, com normais $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Nesse ponto \mathbf{x} , as forças por unidade de área, isto é, os vetores tensão atuando nas três faces com normais $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ são, respectivamente, $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ e \mathbf{t}_3 . Como os três planos passam pelo ponto \mathbf{x} , sua visualização gráfica pode se tornar confusa. Assim, é usual representar graficamente tais vetores tensão num paralelogramo com suas faces orientadas ao longo dos vetores da base, como ilustrado na Figura 2.4a. Nota-se, entretanto, que se trata de um recurso gráfico, dado que os três planos citados passam pelo ponto \mathbf{x} .

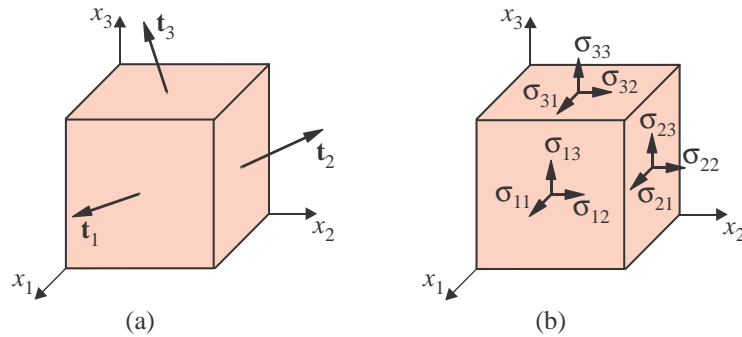


Figura 2.4: (a) Vetores tensão; (b) componentes de tensão.

Os vetores tensão \mathbf{t}_j ($j = 1, 2$ ou 3) atuam sobre as três faces anteriores desse paralelogramo, nas direções positivas dos eixos cartesianos. Como ilustrado na Figura 2.4b, cada vetor tensão possui três componentes nas direções cartesianas: uma normal e duas cisalhantes. Assim, as componentes desses três vetores tensão são as nove componentes do tensor tensão, σ_{ij} , (i e $j = 1, 2$ ou 3). De forma puramente construtiva, as componentes de tensão são obtidas pela seguinte operação

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}^T &= \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{e}_i \\
 &= \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \{ 1 \ 0 \ 0 \} + \begin{Bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \{ 0 \ 1 \ 0 \} + \begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \{ 0 \ 0 \ 1 \} \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Este tensor tem a propriedade que, aplicado sobre qualquer um dos vetores cartesianos, fornece o vetor tensão que atua no plano perpendicular ao vetor cartesiano usado. Por exemplo, para um vetor \mathbf{e}_j , $j = 1, 2$ ou 3 ,

$$\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e}_j = (\boldsymbol{\sigma}_i \otimes \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j = \sigma_i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sigma_i \delta_{ij} = \mathbf{t}_j. \tag{2.4}$$

Por exemplo, para a face normal a \mathbf{e}_1 , o vetor tensão atuante tem componentes

$$\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \mathbf{t}_1,$$

É importante destacar que as faces opostas dos cortes, isto é, os planos cujas normais são, respectivamente, $-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$ e $-\mathbf{e}_3$, também estão sujeitas a vetores tensão que, obedecendo ao princípio de ação e reação, possuem sentido oposto aos primeiros, isto é,

$$\mathbf{t}_1(-\mathbf{e}_1) = -\mathbf{t}_1, \quad \mathbf{t}_2(-\mathbf{e}_2) = -\mathbf{t}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{t}_3(-\mathbf{e}_3) = -\mathbf{t}_3. \quad (2.5)$$

Essa propriedade é totalmente consistente com a definição de $\boldsymbol{\sigma}^T$ em (2.3) e sua propriedade (2.4). Efetivamente, se operamos o tensor $\boldsymbol{\sigma}^T$ do ponto \mathbf{x} sobre o vetor normal $-\mathbf{e}_1$, temos

$$\boldsymbol{\sigma}^T(-\mathbf{e}_j) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \\ -\sigma_{13} \end{Bmatrix} = -\mathbf{t}_1.$$

É possível observar que os elementos situados na diagonal principal da matriz são componentes normais aos planos onde atuam, e por isto denominadas **tensões normais**. De forma semelhante, as componentes situadas fora da diagonal são componentes paralelas a estes planos e portanto denominadas **tensões cisalhantes**.

As notações usadas na bibliografia para escrever este tensor respondem às mais variadas preferências. Além disso, será visto em breve que o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico e portanto se escreve, por comodidade,

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

onde os termos designados por τ (tau minúsculo) indicam as componentes cisalhante e σ (sigma minúsculo) indica as tensões normais.

As equações de equilíbrio, deduzidas a seguir, permitirão relacionar este tensor com os vetores tensão atuando em planos de corte arbitrários.

2.3 Equações de equilíbrio

Considere um corpo arbitrário, e considere uma parcela arbitrária dele, delimitado por um volume arbitrário Ω , com superfície Γ . Considere que que o corpo esteja sujeito à ação de forças de corpo e de superfície. Dado que \mathbf{b} é a força de corpo por unidade de volume atuando num ponto de coordenada \mathbf{x} , tem-se que $\mathbf{b}(\mathbf{x})d\Omega$ é um elemento infinitesimal de vetor força. \mathbf{t} é o vetor tensão, com unidade de força por unidade de área, atuando num ponto do contorno cuja normal é \mathbf{n} , de forma que $\mathbf{t} d\Gamma$ é um elemento infinitesimal de vetor força. A força total aplicada sobre o corpo é obtida simplesmente adicionando (integrando) estas forças sobre todo o corpo. De forma similar ocorre com os momentos. A segunda lei de Newton relaciona a somatória de forças que atuam sobre o corpo com as acelerações sofridas, de acordo com as **equações de equilíbrio**²:

²O termo equilíbrio significa, neste contexto, satisfação do balanço de forças. A observação é feita pois, rigorosamente, um corpo submetido a aceleração não está em equilíbrio. Por isto esta equação é também intitulada de **equação de movimento do corpo** ou **equação de equilíbrio dinâmico**.

$$\text{Forças} \quad \longrightarrow \quad \int_{\Omega} \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, d\Omega, \quad (2.7)$$

$$\text{Momentos} \quad \longrightarrow \quad \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, d\Omega. \quad (2.8)$$

Nestas equações, o operador “ \times ” indica produto vetorial, ρ é a densidade do material e \mathbf{v} a velocidade de um ponto. Enquanto o lado esquerdo das equações corresponde a somatória de forças e momentos aplicados sobre o corpo, o lado direito quantifica as forças e momentos de inércia.

Como estas equações de balanço devem ser satisfeitas em toda parcela do corpo, pode-se tomar um ponto \mathbf{p} no interior de Ω e constroem-se em torno deste um tetraedro de dimensões finitas³ como o da Figura 2.5, apenas pequeno o suficiente para que esteja totalmente contido em Ω . Consideremos que a face inclinada se encontra definida pela normal \mathbf{n} e que h é uma das quatro alturas do tetraedro. Considere \mathbf{n} com componentes $\{n_1, n_2, n_3\}$. Então, n_1 por exemplo, é um dos cossenos diretores de \mathbf{n} , isto é, n_1 é o cosseno do ângulo entre \mathbf{n} e o eixo x . Isso permite escrever

$$\begin{aligned} h &= \overline{OA} n_1, \\ &= \overline{OB} n_2, \\ &= \overline{OC} n_3, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde \overline{OA} é o comprimento do segmento OA . O volume do tetraedro pode ser escrito de quatro diferente formas, dependendo de qual altura se tome:

$$V = \frac{1}{3} h A = \frac{1}{3} \overline{OA} A_1 = \frac{1}{3} \overline{OB} A_2 = \frac{1}{3} \overline{OC} A_3. \quad (2.10)$$

Substituindo h de (2.9)₁ em (2.10)₁, e igualando o resultado a (2.10)₂ obtemos $A n_1 = A_1$. Seguindo procedimento semelhante para as outras faces, obtemos

$$A_1 = A n_1, \quad A_2 = A n_2, \quad A_3 = A n_3. \quad (2.11)$$

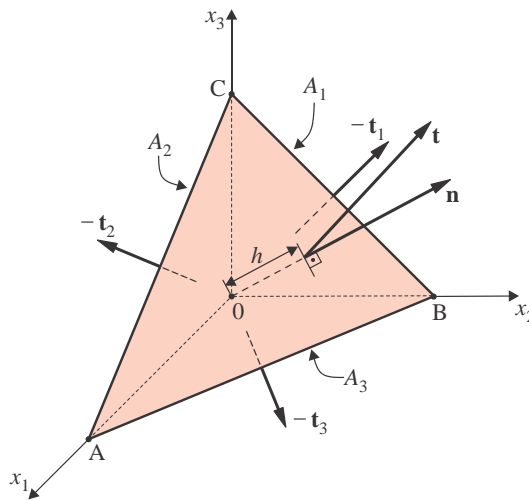


Figura 2.5: Tensões no tetraedro de Cauchy.

Define-se \mathbf{t} como o vetor tensão atuando na face do tetraedro cuja normal é \mathbf{n} , e $(-\mathbf{t}_i)$ são as tensões atuantes nas correspondentes faces de normais $(-\mathbf{n}_i)$. Aplicando a condição (2.7) de

³A expressão “finita” usada na literatura tem um significado que representa “finitesimal”, em oposição a “infinitesimal”, isto é, finito é algo com dimensões mensuráveis, não diferenciais.

equilíbrio linear sobre o tetraedro, temos

$$\int_{A_1} (-\mathbf{t}_1) dA + \int_{A_2} (-\mathbf{t}_2) dA + \int_{A_3} (-\mathbf{t}_3) dA + \int_A \mathbf{t} dA + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega. \quad (2.12)$$

Os vetores \mathbf{t}_i , \mathbf{t} e \mathbf{b} variam ao longo das faces e do volume. Porém, o **teorema do valor médio** permite afirmar que existe um ponto de coordenada \mathbf{x}_i no interior de cada face i , e um ponto de coordenada \mathbf{x}_b dentro do volume, tais que

$$\begin{aligned} \int_{A_i} (-\mathbf{t}_i) dA &= -A_i \mathbf{t}_i(\mathbf{x}_i), & \mathbf{x}_i &\text{ pertence à face } i = 1, 2 \text{ e } 3. \\ \int_{A_i} \mathbf{t} dA &= A \mathbf{t}(\mathbf{x}_n), & \mathbf{x}_n &\text{ pertence à face inclinada,} \\ \int_V \mathbf{b} dV &= V \mathbf{b}(\mathbf{x}_b). & \mathbf{x}_b &\text{ é um certo ponto no volume.} \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados na equação de equilíbrio se obtém

$$-\mathbf{t}_1(\mathbf{x}_1) A_1 - \mathbf{t}_2(\mathbf{x}_2) A_2 - \mathbf{t}_3(\mathbf{x}_3) A_3 + \mathbf{t}(\mathbf{x}_n) A + \mathbf{b}(\mathbf{x}_b) V = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} V.$$

Tomando os A_i 's de (2.11) temos

$$-\mathbf{t}_1(\mathbf{x}_1) A n_1 - \mathbf{t}_2(\mathbf{x}_2) A n_2 - \mathbf{t}_3(\mathbf{x}_3) A n_3 + \mathbf{t}(\mathbf{x}_n) A + \mathbf{b}(\mathbf{x}_b) V = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} V. \quad (2.13)$$

Divide-se pela área A e observa-se que, de (2.10)₁, $V/A = h/3$. Logo, para o limite quando $h \rightarrow 0$, temos que $V/A \rightarrow 0$ e $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_b \rightarrow \mathbf{x}$. Assim, a equação acima resulta em

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{x}) = n_1 \mathbf{t}_1(\mathbf{x}) + n_2 \mathbf{t}_2(\mathbf{x}) + n_3 \mathbf{t}_3(\mathbf{x})} \quad (2.14)$$

Esta equação coloca em evidência que o vetor tensão \mathbf{t} depende **linearmente** de \mathbf{n} . Portanto, considerando a transformação linear (tensor) definida em (2.4), $\mathbf{t}_i = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e}_i$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= n_1 \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e}_1 + n_2 \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e}_2 + n_3 \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e}_3, \\ &= \boldsymbol{\sigma}^T (n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3) \Rightarrow \boxed{\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Assim, o tensor $\boldsymbol{\sigma}$, denominado **tensor tensão de Cauchy**, tem a propriedade de, quando operando sobre um vetor normal a um plano de corte, fornecer o vetor tensão \mathbf{t} atuando neste plano. Note que estas expressões são válidas mesmo em problemas dinâmicos. Isso porque, em (2.13), o termo de inércia também desaparece naturalmente no limite, da mesma forma que o termo associado à força de corpo.

Componentes normal e cisalhante a uma superfície

O vetor tensão \mathbf{t} pode ser decomposto em dois outros vetores, sendo um deles na direção normal à superfície, de módulo σ , e o outro sendo tangente à superfície, com módulo τ . (Nota-se que τ atua numa das infinitas direções \mathbf{c} tangentes à superfície.) Assim, formando um triângulo retângulo como na Figura 2.6, temos

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} + \tau \mathbf{c}, \quad \text{onde } \sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \tau = \mathbf{t} \cdot \mathbf{c}. \quad \text{Logo, } \|\mathbf{t}\|^2 = \sigma^2 + \tau^2, \quad (2.16)$$

o que permite obter o cisalhamento τ a partir de $\boldsymbol{\sigma}$ e da orientação \mathbf{n} da superfície.

2.3.1 Equação de equilíbrio num ponto do contorno - condições de contorno

Quando a face inclinada do tetraedro se encontra no contorno do corpo, o vetor tensão nesta face é o próprio carregamento externo $\bar{\mathbf{t}}$ aplicado na superfície. Neste caso, a equação de equilíbrio (2.15) toma a forma de **condição de contorno**:

$$\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.17)$$

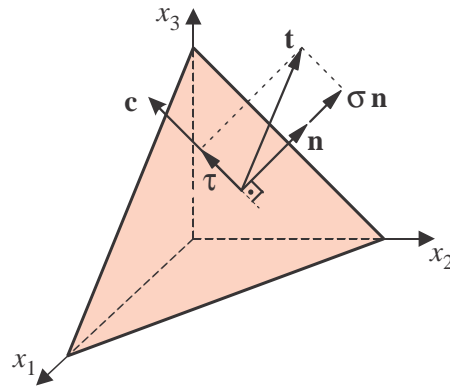


Figura 2.6: Componentes normal e tangente de tensão em um plano arbitrário.

onde \mathbf{n} é o vetor normal à superfície do corpo no ponto \mathbf{x} considerado. É conveniente ressaltar que esta equação é vetorial, o que corresponde a 3 (três) equações algébricas, sendo que $\bar{\mathbf{t}}$ é um carregamento conhecido e as seis componentes de tensão, σ , são incógnitas. Em notação indicial as componentes dessa relação podem ser escritas como,

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{t}_i \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ ou } 3, \quad (2.18)$$

ou, em notação aberta,

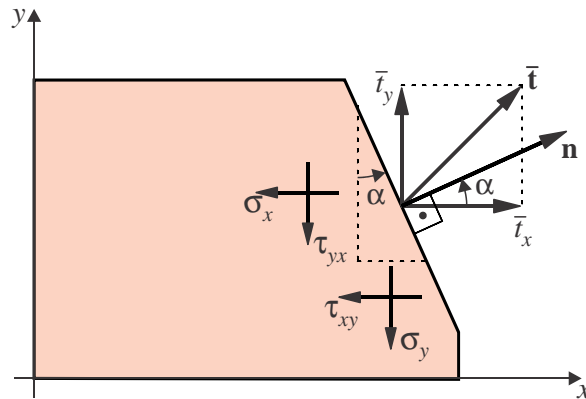


Figura 2.7: Componentes de tensões no plano xy , numa superfície inclinada em torno do eixo z .

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 &= \bar{t}_1, \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 &= \bar{t}_2, \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= \bar{t}_3, \end{aligned} \quad (2.19)$$

ou ainda pode ser usada a forma:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= \bar{t}_x, \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z &= \bar{t}_y, \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= \bar{t}_z. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Essas equações estabelecem, num ponto de contorno, o equilíbrio entre as forças por unidade de área aplicadas e os esforços internos (tensões). Note que, em (2.20), as tensões \bar{t}_x e \bar{t}_y aplicadas sobre o corpo tem unidade de força/área, da mesma forma que as tensões do lado esquerdo.

As equações (2.20) podem ser simplificadas para o caso em que o contorno é tal que sua normal é contida no plano xy , como ilustrado na Figura 2.7. Assim, $n_x = \cos \alpha$, $n_y = \sin \alpha$, e $n_z = 0$, onde

α é o ângulo de orientação da normal ao contorno. Nesse caso as eqs.(2.20) simplificam-se para:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \operatorname{sen} \alpha &= \bar{t}_x, \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \operatorname{sen} \alpha &= \bar{t}_y.\end{aligned}} \quad (2.21)$$

2.3.2 Equação de equilíbrio dinâmico num ponto do interior do corpo

Consideramos agora o equilíbrio de forças num ponto interior ao corpo. Reescrevemos a equação (2.7), de equilíbrio dinâmico de uma região arbitrária Ω do corpo:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, d\Omega,$$

Substituindo o vetor tensão $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$, (eq.(2.15)), e usando em seguida o teorema do divergente no primeiro termo, tem-se:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, d\Omega \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \left(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{b} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \, d\Omega = 0.$$

Como esta integral deve ser satisfeita para qualquer parcela do corpo, o integrando deve ser nulo:

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}} \quad (2.22)$$

Essas são as **equações diferenciais de movimento** do elemento diferencial de massa $dm = \rho dV$, localizado na coordenada \mathbf{x} . Em notação indicial, as componentes cartesianas desta equação vetorial são

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad (2.23)$$

e em forma estendida as três equações ficam:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 &= \rho \frac{dv_1}{dt}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2 &= \rho \frac{dv_2}{dt}, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= \rho \frac{dv_3}{dt},\end{aligned} \quad (2.24)$$

ou ainda podem ser postas na forma:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= \rho \frac{dv_x}{dt}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= \rho \frac{dv_y}{dt}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= \rho \frac{dv_z}{dt}.\end{aligned}} \quad (2.25)$$

No caso estático, quando as acelerações são muito pequenas ou nulas, o lado direito é considerado nulo, e as equações são conhecidas como equações de equilíbrio estático, ou simplesmente equações de equilíbrio. No caso dinâmico geral, essas são as chamadas **equações do movimento**, ou equações de equilíbrio dinâmico, ou ainda equações locais de equilíbrio.

2.3.3 Equilíbrio de momentos - simetria do tensor tensão

A última condição de equilíbrio a ser satisfeita é o balanço de momentos:

$$\int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, d\Omega,$$

onde \mathbf{x} é o vetor posição que representa o braço de alavanca do momento de cada força, em relação à origem do sistema de coordenadas. (Note que se poderia ter escolhido qualquer ponto de referência para fazer o cálculo dos momentos.) Essa relação pode ser aberta e desenvolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e_{ijk} x_j b_k \, d\Omega + \int_{\Gamma} e_{ijk} x_j t_k \, d\Gamma &= \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \frac{dv_k}{dt} \, d\Omega, \quad (\text{usar (2.15) p/ } t_k) \\ \int_{\Omega} e_{ijk} x_j b_k \, d\Omega + \int_{\Gamma} e_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l \, d\Gamma &= \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \frac{dv_k}{dt} \, d\Omega, \quad (\text{usar teorema do div}) \\ \int_{\Omega} [e_{ijk} x_j b_k + (e_{ijk} x_j \sigma_{lk})_{,l}] \, d\Omega &= \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \frac{dv_k}{dt} \, d\Omega, \quad (\text{usar regra da cadeia}) \\ \int_{\Omega} [e_{ijk} x_j b_k + (e_{ijk} x_{j,l} \sigma_{lk})] \, d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \sigma_{lk,l} \, d\Omega &= \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \frac{dv_k}{dt} \, d\Omega, \\ \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \underbrace{\left(b_k + \sigma_{lk,l} - \frac{dv_k}{dt} \right)}_{=0} \, d\Omega + \int_{\Omega} (e_{ijk} x_{j,l} \sigma_{lk}) \, d\Omega &= 0, \quad (\text{usar eq. do movim. (2.15)}) \\ \int_{\Omega} (e_{ijk} x_{j,l} \sigma_{lk}) \, d\Omega &= 0, \quad \Rightarrow \int_{\Omega} (e_{ijk} \sigma_{jk}) \, d\Omega = 0 \end{aligned}$$

(A última operação foi feita porque $x_{j,l} = \delta_{jl}$, e $\delta_{jl} \sigma_{lk} = \sigma_{jk}$). Dado que esta última igualdade deve ser válida em qualquer porção do corpo, o integrando deve ser nulo em qualquer ponto, isto é, $e_{ijk} \sigma_{jk} = 0$. Isto representa três equações algébricas, para $i = 1, 2$ e 3 . Tomemos por exemplo a equação de equilíbrio na direção 3 , isto é, $i = 3$. Por definição, o operador permutação e_{ijk} é não nulo apenas se os três índices forem diferentes. Então a equação reduz-se a $e_{i12} \sigma_{12} + e_{i21} \sigma_{21} = 0$. Mas, como $e_{312} = +1$ e $e_{321} = -1$, segue-se que se $\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$. Repetindo a operação para as direções $i = 2$ e 3 , tem-se que, em geral,

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}} \quad (2.26)$$

Isto significa que o tensor de tensões é simétrico: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.

2.3.4 Equações de equilíbrio - dedução simplificada

As deduções apresentadas nas seções acima, para equilíbrio de forças e momentos de pontos no interior do corpo, são deduções efetuadas de forma consistente com a teoria da mecânica do contínuo. Entretanto, elas podem ser obtidas através de procedimentos intuitivos, que permitem uma compreensão mais clara, como mostrado a seguir.

De forma a simplificar a exposição, consideramos apenas as componentes de tensão que atuam no plano x - y , como indicadas na Figura 2.8. Partimos da constatação de que existe um gradiente de tensões, de forma que o valor de cada componente de tensão muda ponto a ponto. Na figura temos um elemento diferencial de dimensões $dx \times dy \times dz$. Por exemplo, se na face esquerda atua uma componente com valor σ_x , na face direita, localizada a uma distância dx , o valor da componente será distinto, igual a $\sigma_x + (\partial \sigma_{xx} / \partial x) dx$. Note que a face esquerda tem normal $(-\mathbf{e}_x)$ e portanto, a tensão tem sentido oposto àquela em uma face com normal \mathbf{e}_x , como a face à direita. Da mesma forma temos as demais componentes variando nas outras direções do bloco. O equilíbrio de forças nas direções x e y é representado por

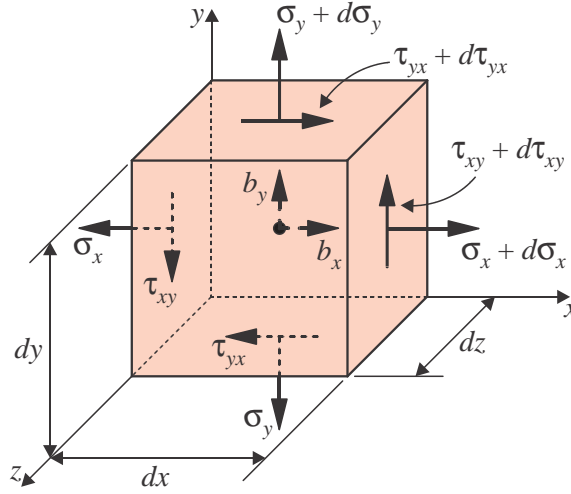


Figura 2.8: Representação de um estado plano de tensões (componentes de tensão nulas na direção z).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x \rightarrow -\sigma_x dy dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{yx} dx dz \\ \quad + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) dy dz + b_x dV = \rho \frac{dv_x}{dt} dV, \\ \sum F_y \rightarrow -\sigma_y dx dz + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dy dz \\ \quad + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + b_y dV = \rho \frac{dv_y}{dt} dV, \end{array} \right.$$

onde $dV = dx dy dz$ é o volume diferencial e b_x e b_y são as componentes das forças de corpo. Algumas simplificações são imediatas e, uma vez que $dV \neq 0$, podemos dividir ambas as equações por dV , o que resulta em:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + b_x = \rho \frac{dv_x}{dt}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = \rho \frac{dv_y}{dt}, \end{array}} \quad (2.27)$$

que são as **equações diferenciais de movimento para um estado plano de tensões**. O procedimento acima pode ser feito facilmente para um estado triaxial de tensões, o que resultará nas equações (2.25) obtidas anteriormente seguindo um procedimento consistente.

A **simetria do tensor** tensão também pode ser deduzida usando os mesmos argumentos intuitivos usados acima. Consideremos por exemplo uma das componentes de momento, M_z , por exemplo. Observando a Figura 2.8 para as componentes de um estado plano de tensões, os momentos, em relação ao eixo paralelo a z passando pela origem do sistema de coordenadas, são:

$$\begin{aligned} & \sigma_{xx} dy dz \left(\frac{dy}{2} \right) - \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz \left(\frac{dy}{2} \right) - \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \left(\frac{dy}{2} \right) - \\ & \sigma_{yy} dx dz \left(\frac{dx}{2} \right) + \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right) dx dz \left(\frac{dx}{2} \right) + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \left(\frac{dx}{2} \right) - \\ & b_x dV \left(\frac{dy}{2} \right) + b_y dV \left(\frac{dx}{2} \right) = \rho \frac{dv_x}{dt} dV \left(\frac{dy}{2} \right) + \rho \frac{dv_y}{dt} dV \left(\frac{dx}{2} \right). \end{aligned}$$

Primeiramente, termos que contém dx^2 ou dy^2 são eliminados como infinitésimos de ordem superior,

em comparação aos demais termos. Com isto restam apenas os seguintes termos:

$$(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) dx dz dy = 0.$$

Uma vez que $dx dy dz = dV \neq 0$, segue-se que $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$. O mesmo procedimento pode ser realizado para os planos yz e xz , resultando que $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ e $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, como já mostrado na seção 2.26. Note que, de fato, a simetria do tensor tensão independe da ausência de forças de corpo e de inércia. A dedução acima chegaria aos mesmos resultados mesmo que tivéssemos incluído todas as componentes de tensão de um estado triaxial, em vez de usar apenas as componentes do estado plano.

2.4 Mudança de base - tensões principais

Como foi comentado no Capítulo 1, o tensor tensão é invariante em relação ao sistema de coordenadas, mas sua representação em componentes depende do sistema. A transformação de componentes de tensão de um sistema cartesiano para outro segue regras idênticas àquelas já apontadas na seção 1.4 (página 16). Admitindo duas bases de vetores unitários $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$, a matriz de rotação \mathbf{R} tem componentes definidas por $R_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_i$. Esta matriz permite transformar componentes de um vetor do sistema $\{\mathbf{e}_i\}$ para o sistema $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ por:

$$\{\bar{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{R}] \{\mathbf{u}\}. \quad (2.28)$$

Consideramos um ponto no corpo e um plano que passa por esse ponto, com normal dada pelo vetor unitário \mathbf{n} . Nesse ponto e nesse plano, as componentes do vetor tensão \mathbf{t} em relação à base $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ são dadas por (2.15):

$$\begin{aligned} \overline{[\boldsymbol{\sigma}]\{\mathbf{n}\}} &= \overline{\{\mathbf{t}\}}, & \text{rotacionar } \overline{\{\mathbf{n}\}} \text{ e } \overline{\{\mathbf{t}\}} \text{ usando (2.28)} \\ \overline{[\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{R}]\{\mathbf{n}\}} &= [\mathbf{R}]\{\mathbf{t}\}, & \text{pré-multiplicar por } \mathbf{R}^{-1} \\ [\mathbf{R}]^{-1} \overline{[\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{R}]\{\mathbf{n}\}} &= \{\mathbf{t}\}, & \text{usar ortogonalidade: } \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \\ [\mathbf{R}]^T \overline{[\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{R}]\{\mathbf{n}\}} &= \{\mathbf{t}\}, & \Rightarrow \boxed{[\boldsymbol{\sigma}]\{\mathbf{n}\} = \{\mathbf{t}\}}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

permitindo identificar a relação

$$\boxed{[\boldsymbol{\sigma}] = [\mathbf{R}]^T \overline{[\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{R}]}} \quad (2.30)$$

que é a expressão buscada para a **transformação de coordenadas das componentes do tensor tensão**.

O próximo conceito, de **tensões principais**, é associado à seguinte questão: *dado um ponto de coordenada \mathbf{x} no corpo, será possível identificar um plano de corte que passe por este ponto, com normal \mathbf{n} , tal que neste plano só existam tensões normais (tensões cisalhantes nulas)?* Considerando a Figura 2.9, observamos que, se a superfície for orientada tal que \mathbf{t} não tenha parcela cisalhante, então \mathbf{t} é normal à superfície, isto é, \mathbf{t} é um vetor paralelo a \mathbf{n} . Assim \mathbf{t} é idêntico a \mathbf{n} exceto pelo comprimento, um escalar λ ainda a ser determinado. Isso pode ser representado matematicamente como $\mathbf{t} = \lambda \mathbf{n}$. Usando (2.15) e a propriedade de simetria de $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}, \quad (2.31)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão. Se existir uma direção \mathbf{n} com essa característica, ela é denominada uma **direção principal de tensão** e o escalar λ que indica o módulo do vetor resultante e a **tensão principal** nesta direção.

Para verificar a existência destes elementos é preciso tentar resolver o sistema acima. Operando

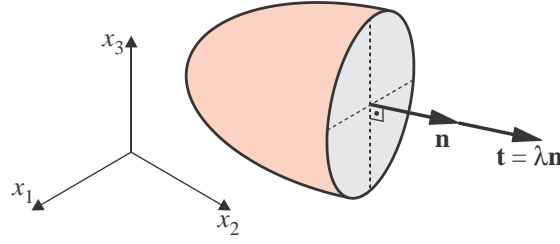


Figura 2.9: Vetor tensão normal à superfície: componente cisalhante nula.

com a matriz identidade $\mathbf{1}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \lambda \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \lambda \mathbf{1} \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \lambda \mathbf{1} \mathbf{n} &= \mathbf{0}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{1})}_{\mathbf{A}} \mathbf{n} = \mathbf{0}.} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Se considerarmos a matriz $\mathbf{A} \equiv (\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{1})$, temos então um sistema algébrico $\mathbf{A} \mathbf{n} = \mathbf{0}$, onde buscamos as três componentes de \mathbf{n} . Da teoria de álgebra linear sabe-se que um sistema desse tipo só tem solução não nula caso a matriz seja singular, isto é, se possuir determinante nulo. Assim, estamos à procura de um particular valor de λ que torna nulo o seguinte determinante:

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{1}) = 0. \quad (2.33)$$

Este problema é conhecido como um problema de **autovalores e autovetores**. Em forma aberta esse problema fica:

$$\det \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \lambda) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & (\sigma_{22} - \lambda) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & (\sigma_{33} - \lambda) \end{bmatrix} = 0. \quad (2.34)$$

O cálculo explícito deste determinante resulta num polinômio cúbico em λ , denominado **equação característica**, com a forma

$$\lambda^3 - I_1^2 \lambda + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (2.35)$$

onde I_1 , I_2 e I_3 são chamados **invariantes de tensão**. Esse nome deve-se ao seguinte fato: uma vez que as tensões e direções principais são propriedades intrínsecas do tensor tensão, elas não podem depender do sistema de referência usado para representar as componentes de tensão em (2.34). Como os tensões principais (as raízes de (2.35)) só dependem dos I 's, o valor desses I 's também não podem depender do particular sistema de coordenadas usado, sendo portanto invariantes de tensão. Isso indica que o seu cálculo terá o mesmo resultado qualquer seja o sistema de coordenadas usado para descrever $\boldsymbol{\sigma}$. Assim, para eixos cartesianos 1 – 2 – 3 arbitrários,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} = \text{tr } \boldsymbol{\sigma}, \\ I_2 &= -(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33}) + \sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{23}\sigma_{32} + \sigma_{13}\sigma_{31}, \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ji} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2), \\ I_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 - \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} = \det \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

O **operador traço de um tensor** é definido de tal forma que sua operação resulta em:

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad (2.37)$$

isto é, o traço de um tensor é a soma dos termos da diagonal da matriz de componentes.

Dado que a matriz $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrica de componentes reais, prova-se que o polinômio característico

(2.35) possui três raízes reais σ_1, σ_2 e σ_3 , denominadas tensões principais, cada uma destas associada a uma direção principal $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2$ e \mathbf{n}^3 . Prova-se também que se as três raízes forem distintas, os autovetores associados são ortogonais. Caso um par dos autovalores seja idêntico o conjunto de direções principais pode ser tornado mutuamente ortogonais usando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt e, em seguida, normalizado (conforme descrito na seção 23.4, página 640).

A direção principal indica o plano onde atua a correspondente tensão principal. O cálculo de cada uma destas direções deve ser feito com a ajuda da equação (2.32). Por exemplo, para determinar \mathbf{n}^1 substituímos o primeiro autovalor (tensão principal) σ_1 no lugar de λ :

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma_1) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & (\sigma_{22} - \sigma_1) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & (\sigma_{33} - \sigma_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^1 \\ n_2^1 \\ n_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.38)$$

Devemos notar que este sistema não tem solução única, uma vez que o valor de σ_1 foi calculado de forma a tornar a matriz singular, e portanto apenas duas das três equações em (2.38) são linearmente independente e existem três incógnitas. A solução é obtida adicionando uma equação extra, que impõe que cada vetor tenha módulo unitário. Por exemplo, para o vetor \mathbf{n}^1 ,

$$\boxed{(n_1^1)^2 + (n_2^1)^2 + (n_3^1)^2 = 1.} \quad (2.39)$$

O resultado é um vetor unitário na direção principal. Este procedimento pode ser repetido para a segunda direção, \mathbf{n}^2 . Se $\sigma_2 \neq \sigma_1$, automaticamente \mathbf{n}^2 será perpendicular a \mathbf{n}^1 . Do contrário, utiliza-se o método de Gram-Schmidt, para obter um novo vetor \mathbf{n}^2 que seja perpendicular a \mathbf{n}^1 . Uma vez obtido os dois primeiros autovetores, o último é obtido simplesmente identificando o vetor ortogonal ao plano formado por eles, isto é:

$$\boxed{\mathbf{n}^3 = \mathbf{n}^1 \times \mathbf{n}^2} \quad (2.40)$$

Mas, que significam afinal estas tensões e direções principais? Por definição, são as direções para as quais as tensões cisalhantes são nulas. Por outro lado, é possível demonstrar que estes são os valores extremos (máximos/mínimos) que as tensões podem atingir no ponto para os todos os diferentes possíveis planos de corte. As **tensões cisalhantes máximas**, por outro lado, são dadas pelas máximas diferenças entre as tensões principais: $|\sigma_1 - \sigma_2|/2$, $|\sigma_1 - \sigma_3|/2$ e $|\sigma_2 - \sigma_3|/2$. Os planos onde as tensões cisalhante máximas atuam se encontram a 45° em relação aos planos principais.

Se estabelecemos um novo sistema de coordenadas onde os vetores da base são os próprios vetores $\{\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3\}$ das direções principais, as componentes do tensor tensão são

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

onde, claramente, os vetores tensão atuando em cada uma das novas direções cartesianas (principais) são:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uma partícula submetida a um estado de tensões com as três tensões principais iguais (três autovalores iguais) corresponde a um **estado de pressão hidrostática**, semelhante ao que acontece a uma partícula imersa num fluido em repouso. O tensor de tensões é um múltiplo do tensor identidade e vetor tensão permanece sempre normal à superfície de corte e do mesmo tamanho para qualquer plano.

Se o estado de tensões possui dois autovalores (tensões principais) iguais, significa que, nas direções coordenadas dadas pelos autovetores associados a estes autovalores, o vetor tensão será sempre normal e do mesmo tamanho para qualquer plano obtido pela combinação destas duas direções principais. Se, finalmente, existem três autovalores diferentes, então existem três e tão somente três direções principais para as quais o vetor tensão é normal ao plano.

No caso particular em que uma das tensões principais é nula, temos um **estado plano de tensões**. Orientando devidamente o sistema para que \mathbf{e}_3 esteja alinhada com esta direção principal, o tensor tensão toma a forma geral

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Finalmente, se duas das tensões principais são nulas, temos o **estado de tensões uniaxial**, representado pelo tensor na forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4.1 Círculo de Mohr - 3D

A determinação das componentes do tensor tensão numa nova base, dadas as componentes numa base antiga é realizada de forma direta com o uso da relação (2.30), enquanto a computação das tensões e direções principais é feita através da aplicação de (2.34) e (2.40) respectivamente. Entretanto, é sabido que todas essas relações possuem caráter intrinsecamente trigonométrico. Mais especificamente, elas estão associadas ao chamado círculo de Mohr⁴, cuja teoria passamos a fazer um breve sumário. Observe que o círculo é uma representação gráfica, visual, do processo de transformação, o que permite uma interpretação qualitativa pelo engenheiro. A determinação de valores numéricos é feita, em geral, diretamente através das equações, embora até os anos 1970 fosse ainda comum a computação gráfica através de medições no círculo feito em escala.

Suponhamos que os eixos x, y, z coincidam com as direções principais, de modo que a matriz de componentes do tensor tensão seja diagonal como em (2.41). Consideramos uma superfície com orientação arbitrária definida pelo vetor normal unitário \mathbf{n} . A componente de tensão normal à superfície é dada pela eq.(2.16), que toma a forma $\|\mathbf{t}\|^2 = \sigma^2 + \tau^2$, onde $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} = \sigma_1 n_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 n_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 n_3 \mathbf{e}_3$, tal que a componente normal é

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \\ &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Então, a eq.(2.16) fica:

$$\|\mathbf{t}\|^2 = \sigma^2 + \tau^2, \quad \rightarrow \quad \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2. \quad (2.44)$$

O vetor \mathbf{n} é unitário, isto é,

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (2.45)$$

⁴Devido a Otto Mohr, alemão, 1835-1918.

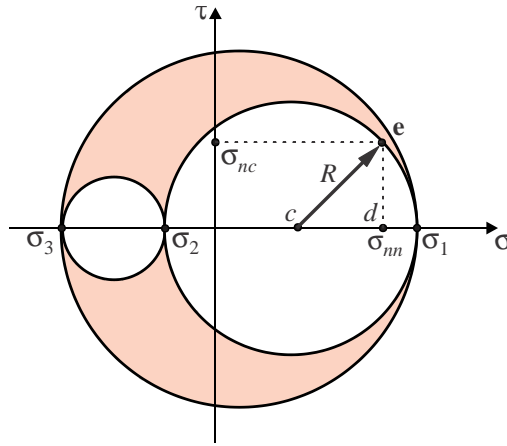


Figura 2.10: Círculos de Mohr para um estado triaxial de tensões.

Se considerarmos dados os valores de σ e de τ , as três equações acima constituem um sistema algébrico para as incógnitas n_1 , n_2 e n_3 , que pode ser posto em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma^2 + \tau^2 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.46)$$

A solução do sistema para o caso em que $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, é:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \\ n_2^2 &= -\frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)}, \\ n_3^2 &= \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Agora, observamos que os n_j^2 são valores não negativos. Então, se as tensões principais são ordenadas de forma

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad (2.48)$$

obrigatoriamente os numeradores em (2.47) devem ser tais que

$$\begin{aligned} (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 &\geq 0, \\ (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 &\leq 0, \\ (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

É possível demonstrar que as três igualdades associadas representam as equações de três círculos, como ilustrados na Figura 2.10. As equações indicam que, para que um par de componentes $(\sigma; \tau)$ representem um estado de tensões fisicamente possível, eles deverão ser tais que satisfaçam as três desigualdades (2.49). A figura representa esse conjunto de valores possíveis como uma região sombreada e delimitada pelos três círculos.

Uma demonstração de que as igualdades (2.49) representam círculos pode ser feita como segue. Consideremos uma das igualdades, a terceira, por exemplo, que envolve as tensões principais σ_1 e σ_2 . Suponhamos que, de fato, $(\sigma; \tau)$ represente um ponto de um círculo num diagrama com eixos σ e τ , como na Figura 2.10. O ponto c é o centro do círculo, com coordenada $\sigma_c = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, e

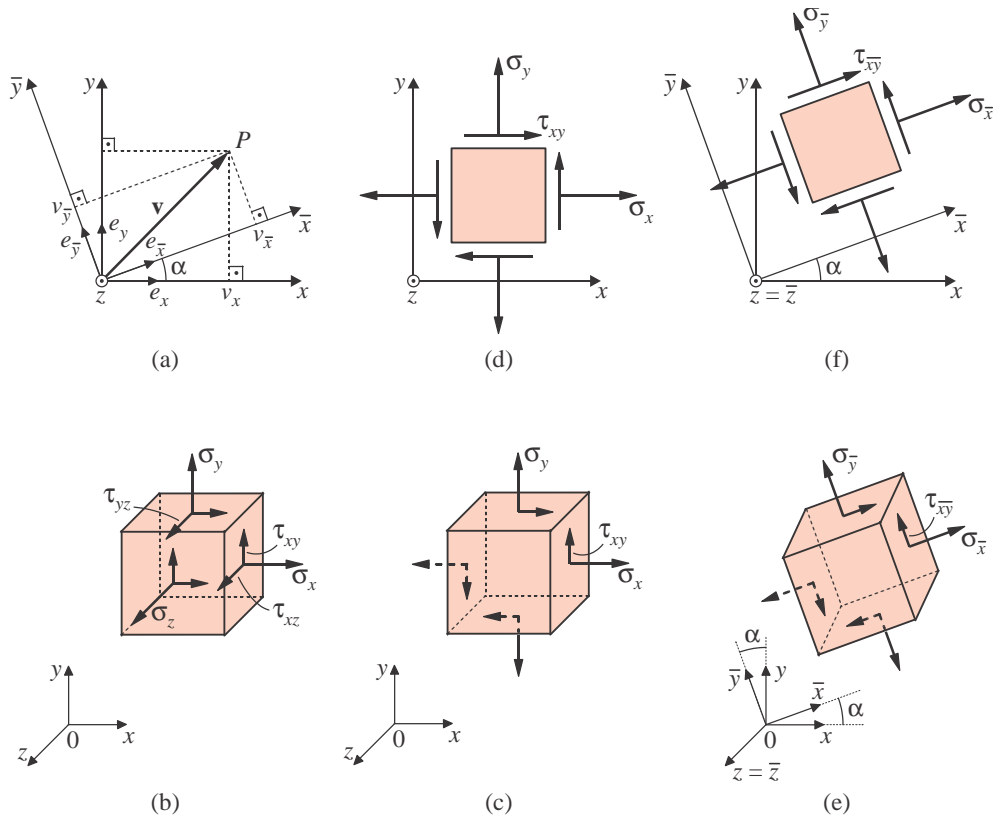


Figura 2.11: Visualização de componentes de estados plano e triaxial de tensões, em dois sistemas de coordenadas.

cde é um triângulo retângulo, com hipotenusa $R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Assim a relação de Pitágoras fica:

$$R^2 = \overline{cd}^2 + \overline{de}^2, \text{ isto é,}$$

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 = \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2.$$

Expandindo os quadrados e simplificando, obtemos

$$\sigma^2 + \tau^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma(\sigma_1 - \sigma_2) = 0,$$

que é exatamente o lado esquerdo de (2.49)₃.

2.4.2 Círculo de Mohr para rotação plana

Consideremos o caso particular em que a transformação de coordenadas seja feita apenas por uma rotação em torno de um dos eixos, por exemplo, o eixo 3. Então o vetor normal à superfície é contido no plano xy , e tem $n_3 = 0$. Nesse caso, a desigualdade de (2.49)₃ reduz-se à igualdade. Isso significa que as possíveis componentes $(\sigma; \tau)$ devem situar-se precisamente sobre o círculo do plano σ_1 e σ_2 indicado na Figura 2.10.

Consideramos aqui um sistema de eixos xyz arbitrário, não necessariamente alinhado com as direções principais, de forma que o tensor tensão é completo, não necessariamente diagonal. Consideramos um segundo sistema, $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ definido por uma rotação α em torno do eixo z . Então a matriz de rotação é aquela dada em (1.54), na página 17. A fórmula de rotação do tensor tensão, eq.(2.30), toma a forma $\overline{[\sigma]} = [\mathbf{R}][\sigma][\mathbf{R}]^T$. Efetuando as operações obtemos:

$$\begin{array}{ll}
\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x c^2 + 2\tau_{xy} sc + \sigma_y s^2, & \tau_{\bar{x}\bar{z}} = \tau_{xz} c + \tau_{yz} s, \\
\sigma_{\bar{y}} = \sigma_x s^2 - 2\tau_{xy} sc + \sigma_y c^2, & \tau_{\bar{y}\bar{z}} = \tau_{yz} c - \tau_{xz} s, \\
\tau_{\bar{x}\bar{y}} = (\sigma_y - \sigma_x) sc + \tau_{xy} (c^2 - s^2), & \sigma_{\bar{z}} = \sigma_z.
\end{array} \tag{2.50}$$

onde $c = \cos \alpha$ e $s = \sin \alpha$. As componentes no plano xy são ilustradas na Figura 2.11 para um ponto genérico do corpo.

A representação gráfica da transformação de tensões no caso de um estado plano de tensões ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$) para a rotação acima é feita através dos círculos ilustrados na Figura 2.10. O procedimento gráfico é descrito a seguir, com o auxílio das Figuras 2.12 e 2.13.

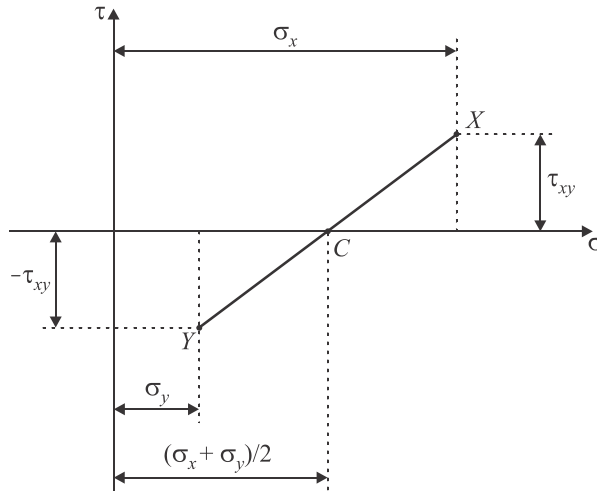


Figura 2.12: Construção do círculo de Mohr.

1. Construir os círculos. Para isto, o estado de tensões deve ser conhecido no sistema xyz , na forma (2.42). Traçam-se num plano cartesiano $\sigma \times \tau$ dois pontos, de coordenadas $X(\sigma_x; \tau_{xy})$ e $Y(\sigma_y; -\tau_{xy})$. Devido às propriedades trigonométricas das equações, esses pontos situam-se diametralmente opostos no círculo, como ilustrado na Figura 2.12.
2. Traça-se o círculo definido por esses pontos, como na Figura 2.13. Esse círculo define os valores das tensões principais σ_1 e σ_2 . Como $\sigma_3 = 0$, pode-se traçar os demais círculos. Aqui abandonamos o ordenamento indicado em (2.48), de forma que faremos $\sigma_1 > \sigma_2$, porém pode-se ter $\sigma_2 < \sigma_3$.
3. Para uma rotação de eixos de um ângulo α anti-horário como na Figura 2.11, os novos eixos $\bar{x}\bar{y}$ são obtidos por uma rotação 2α , em **sentido horário** a partir dos eixos CX e CY no círculo de Mohr, o que define os pontos \bar{X} e \bar{Y} . As coordenadas desses pontos podem ser lidas e valem respectivamente $(\sigma_{\bar{x}}; \tau_{\bar{x}\bar{y}})$ e $(\sigma_{\bar{y}}; -\tau_{\bar{x}\bar{y}})$ (ou podem ser obtidas diretamente de (2.50)).
4. As tensões principais podem ser obtidas graficamente ou através de

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{2.51}$$

onde σ_1 e σ_2 são obtidos com o sinal $+$ e $-$ respectivamente.

5. O ângulo β de orientação do eixo principal 1 em relação ao eixo x é obtido por

$$\tan 2\beta = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}. \tag{2.52}$$

6. A tensão cisalhante máxima em módulo no plano xy são dadas pelos pontos a e b no círculo, e vale

$$\tau_{\max xy} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (2.53)$$

7. A tensão cisalhante máxima no ponto do corpo, considerando todas as possíveis rotações triaxiais é $\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$, onde $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ são a tensão principal máxima e mínima respectivamente. Num problema plano $\sigma_3 = 0$. Assim caso σ_1 e σ_2 tenham sinais opostos, τ_{\max} coincidirá com o resultado de (2.53).

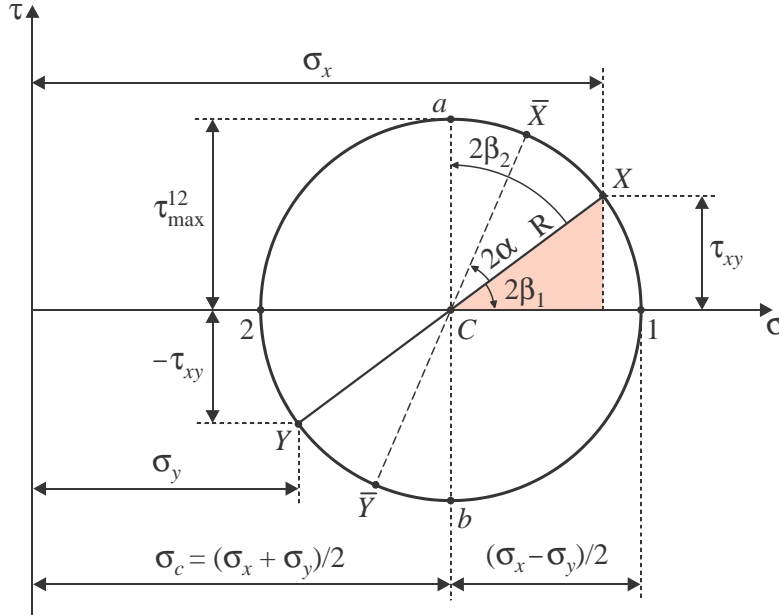


Figura 2.13: Construção do círculo de Mohr.

2.5 Tensões esféricas e deviatóricas - critérios de falha

Dado um tensor tensão arbitrário, podemos decompô-lo em dois tensores com características físicas particulares, isto é, $\sigma = \sigma^e + \sigma^d$, tal que:

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}}_{\sigma^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_m) & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma_m) & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & (\sigma_z - \sigma_m) \end{bmatrix}}_{\sigma^d}, \end{aligned}$$

onde $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = I_1/3$ é denominada **tensão média**. O tensor σ^e , denominado **tensor esférico ou hidrostático**, tem a propriedade de possuir todos os seus autovalores iguais. Um ponto submetido a este estado de tensões, encontra-se livre de tensões cisalhantes, qualquer seja o plano considerado. O segundo tensor, σ^d , ao contrário, é chamado **tensor deviatórico**, representando as solicitações de cisalhamento. Tomando a definição de **traço**, em (2.37), é possível observar que $\text{tr } \sigma = \text{tr } \sigma^e$, enquanto que $\text{tr } \sigma^d = 0$.

Pode-se construir um diagrama onde os eixos correspondem às direções principais (Figura 2.14). Neste caso, todos os tensores esféricos compartilham a propriedade de que suas tensões principais

são iguais. Assim, sua representação neste gráfico deverá ser dada sobre a reta equidistante dos eixos principais, denominado **eixo esférico ou hidrostático**. Os pontos nessa reta têm coordenadas $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Por outro lado, um estados de tensão puramente deviatórico é representado por um ponto sobre o denominado **plano octaédrico**. Esse plano tem a característica de que as coordenadas de qualquer ponto têm a somatória nula. Este plano passa pela origem do diagrama e é perpendicular ao eixo hidrostático. Assim, podemos observar que um tensor pode ser representado mediante uma componente sobre o eixo hidrostático e uma componente sobre o plano octaédrico.

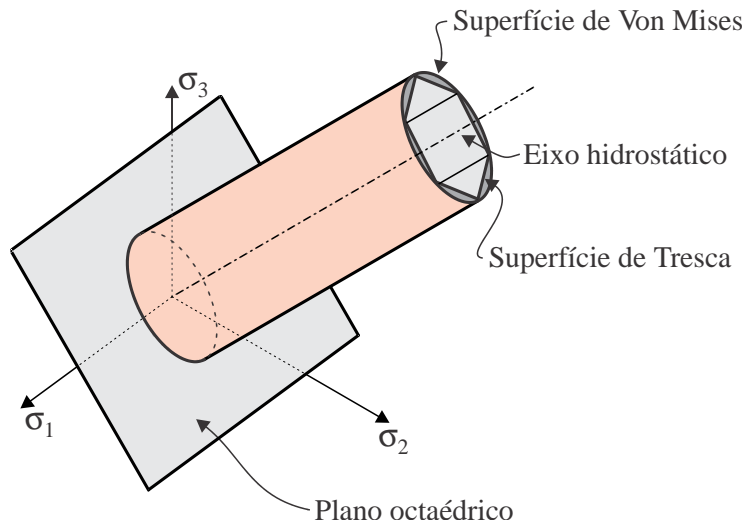


Figura 2.14: Superfícies de falha de Tresca e von Mises.

Esta decomposição tem o intuito de identificar ações de naturezas fisicamente diferentes que estão relacionadas com diferentes características de resistências dos materiais. Por exemplo, alguns materiais têm sua falha associada a esforços normais (associados às tensões esféricas), e outros associada a esforços cisalhantes (tensões deviatóricas). Alguns critérios de falha por início de escoamento ou por fratura frágil, adequados a materiais homogêneo-isotrópicos mais comuns e simples, são listados a seguir.

2.5.1 Critério da máxima tensão normal

Segundo este critério, aplicado normalmente a **materiais frágeis**, a falha ocorre quando alguma das tensões principais ultrapassa o valor de resistência máximo do material, σ_R , obtida por ensaio de tração ou compressão uniaxial. Assim, os estados de tensão seguros são aqueles em que:

$$-\sigma_R^c < \sigma_1 < \sigma_R^t, \quad e \quad -\sigma_R^c < \sigma_2 < \sigma_R^t, \quad e \quad -\sigma_R^c < \sigma_3 < \sigma_R^t, \quad (2.54)$$

onde os índices “ t ” e “ c ” indicam valores obtidos em ensaios de tração e compressão respectivamente. Um material isotrópico, com resistência σ_R idêntica em tração e compressão, o critério pode ser posto em termos de uma tensão equivalente σ_N definida por:

$$\sigma_N = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\}, \quad \rightarrow \quad \sigma_N < \sigma_R. \quad (2.55)$$

A representação gráfica dos limites impostos por este critério forma um cubo de dimensões $2\sigma_R$. O critério indica que um estado de tensões interno ao cubo representa um estado de não falha, enquanto que uma tensão situada na fronteira ou fora do cubo indica uma situação de falha. Este critério é isotrópico no sentido que não faz distinção se a tensão principal é trativa ou compressiva.

2.5.2 Critério da máxima tensão cisalhante

Este critério, chamado também de **critério de Tresca**,⁵ é usado normalmente para avaliar **materiais dúcteis** quando o mecanismo de falha seja associado ao início de fluência do material produzido pela ação de esforços cisalhantes. As máximas tensões cisalhantes são dadas pelas diferenças entre as tensões principais. Assim este critério se escreve

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_E, \quad |\sigma_2 - \sigma_3| < \sigma_E, \quad \text{e} \quad |\sigma_3 - \sigma_1| < \sigma_E. \quad (2.56)$$

De forma compacta, o critério é $\sigma_{int} < \sigma_E$, onde

$$\sigma_{int} = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\}, \quad \rightarrow . \quad (2.57)$$

O valor σ_{int} é muitas vezes referenciado como **intensidade de tensão** (ou ainda tensão equivalente) e σ_E é a **tensão de início de escoamento do material**, que é o valor de tensão que inicia o processo de fluência plástica num ensaio de tração. A representação gráfica dos limites impostos por este critério é mostrada na Figura 2.14, formada por um prisma hexaédrico cujo eixo é o eixo hidrostático. Se o tensor tensão tem componentes cisalhantes que se aproximam da fronteira do prisma, estaremos próximos de uma situação de falha. Se o estado de tensão tiver apenas componentes esféricas, este critério não acusará falha, uma vez que sempre se terá $\sigma_{int} = 0$.

2.5.3 Critério da máxima energia de distorção

Este critério, também conhecido como **critério de von Mises**,⁶ é similar ao anterior e utilizado também para **materiais dúcteis** homogêneo-isotrópicos, cujo mecanismo principal de falha é o início de plastificação devido a tensões cisalhantes. Este critério é baseado na comparação entre a energia elástica de distorção do ponto considerado e a energia elástica de distorção produzida num ensaio uniaxial do material que inicia fluência. O critério indica segurança se $\sigma_{eq} < \sigma_E$, onde σ_{eq} é a **tensão equivalente** ao estado de tensões imposto pelo carregamento no material. O critério estima essa tensão equivalente por:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)}. \quad (2.58)$$

A representação gráfica deste critério corresponde ao cilindro de seção circular que envolve a superfície do critério de Tresca, ilustrado na Figura 2.14. Este critério é menos restritivo que o critérios anterior. Porém é muito utilizado por representar melhor os estados de falha além de apresentar algumas vantagens no tratamento matemático ao não apresentar descontinuidades nas normais na superfície de falha.

2.6 Exercícios

- 2.1 Defina o que é tensão.
- 2.2 Quais as diferenças entre tensor tensão e vetor tensão?
- 2.3 Quantas e quais condições (equações) um corpo rígido deve satisfazer para ser considerado em equilíbrio estático?
- 2.4 Que tipo e quantas equações devem ser satisfeitas para que o tensor tensão seja simétrico?
- 2.5 Quais são os tipos de carregamento admitidos num corpo tridimensional?
- 2.6 Quantas e quais são as equações de equilíbrio de um ponto no interior de um corpo? Quais são as variáveis físicas em equilíbrio nesta equação? Faça uma análise dimensional.

⁵Henri Édouard Tresca, francês, 1814 – 1885.

⁶Richard Edler von Mises, Alemão, 1883 – 1953.

- 2.7 Quantas e quais são as equações de equilíbrio de um ponto na fronteira de um corpo? Quais são as variáveis físicas em equilíbrio nesta equação? Faça uma análise dimensional.
- 2.8 Indicar qual(is) das afirmações são corretas e justificar com um desenho:

- a) σ_{ij} = projeção de σ_i na direção \mathbf{e}_j ;
- b) σ_{ij} = projeção de σ_j na direção \mathbf{e}_i ;
- c) σ_{ij} = projeção de σ_i no plano perpendicular a \mathbf{e}_j ;
- d) σ_{ij} = projeção de σ_j no plano perpendicular a \mathbf{e}_i .

- 2.9 Escrever em forma aberta as três equações diferenciais de equilíbrio no domínio e as três equações de equilíbrio no contorno:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma.\end{aligned}$$

- 2.10 Para o seguinte tensor tensão, identificar as direções e tensões principais. Calcular a tensão equivalente de von Mises e intensidade de tensão (Tresca). Calcular as tensões esférica e deviatórica.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 40 & 15 & -10 \\ 15 & 20 & 10 \\ -10 & 10 & -10 \end{bmatrix} \text{MPa.}$$

- 2.11 Explique o significado do critério de máxima tensão cisalhante (Critério de Tresca) e de Máxima Energia de Distorção (von Mises). Explique porque o primeiro critério é mais restritivo que o segundo. (Dica: Verifique o diagrama dos critérios no plano σ_1, σ_2 quando $\sigma_3 = 0$.)
- 2.12 Justifique a veracidade ou falsidade das seguintes expressões (Dica: Com o círculo de Mohr 3D é possível visualizar a resposta.)
- (a) Dado um ponto submetido a um estado de tensões arbitrário, é sempre possível achar três planos mutuamente ortogonais para os quais as tensões sobre estes planos são normais a estes (não há tensões cisalhantes).
 - (b) Dado um ponto submetido a um estado de tensões arbitrário, é sempre possível achar três planos mutuamente ortogonais para os quais as tensões sobre estes planos são paralelas a estes (não há tensões normais).
- 2.13 Descreva um caso de carregamento físico onde duas tensões principais sejam iguais e a terceira diferente.
- 2.14 Descreva um caso físico onde as três tensões principais são iguais.
- 2.15 Indicar as componentes esférica e deviatórica do tensor tensão de um ponto de um fluido em estado de repouso.
- 2.16 Determinar o tensor tensão e fazer o diagrama das componentes de tensão para os pontos A, B e C da estrutura mostrada na Figura 2.15, com $F_1 = 80 \text{ N}$, $F_2 = 40 \text{ N}$. Ignorar os efeitos de concentração de tensões. Considerar comportamento elástico-linear.

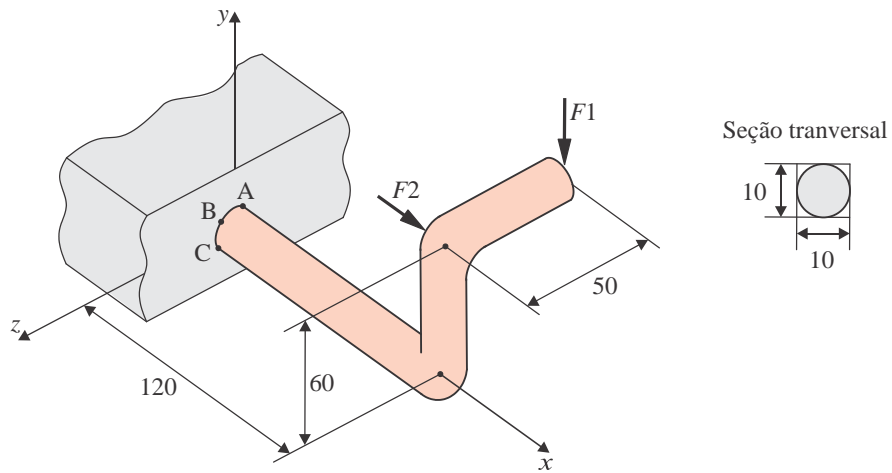


Figura 2.15: Estrutura do Exercício 2.16.