

Capítulo 10

Carregamentos combinados

*Por: Prof. Paulo de Tarso R Mendonça, Ph.D., e
Prof. Lauro C. Nicolazzi, Dr.Eng.,
Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC.*

O objetivo deste capítulo é o de completar a análise de tensões em problemas mais complexos de vigas submetidas a carregamentos oblíquos, ou carregamentos envolvendo simultaneamente diferentes tipos de solicitações, como momentos fletores, torçores e esforços axiais. Nesses casos tensões normais axiais e de flexão, e cisalhamento por torção ocorrem simultaneamente.



Figura 10.1: Foto de eixo de redutor de velocidade, mostrando rolamento (na extremidade direita), e diversas engrenagens helicoidais.

Em duas classe importante de estruturas, os componentes de barras e vigas encontram-se sob a ação de forças que geram simultaneamente esforços normal, cortantes e de momentos fletores e torçores. Essas classes são:

1. Componentes mecânicos, como os eixos rotativos em redutores de engrenagens, mecanismos, manipuladores robóticos, máquinas ferramentas;
2. Estruturas de construção civil, em vigas e colunas em prédios, pontes e viadutos.

A Figura 10.1 ilustra a foto de um eixo de redutor de velocidade, mostrando um rolamento montado na extremidade direita, e diversas engrenagens helicoidais. No detalhe aparecem também um rolamento radial de esferas e uma engrenagem cilíndrica de dentes retos. Cada engrenagem se acopla a uma outra, que é montada num eixo distinto, formando um conjunto, que é uma caixa de redução de velocidade. Um esboço simplificado dessa situação é visto na Figura 10.2a, com um par de eixos que suportam um par de engrenagens acopladas. A interação entre as engrenagens resulta em forças que se transmitem a ambos os eixos. Considerando o eixo AC e a engrenagem B, temos na Figura 10.2b as forças na engrenagem B devidas ao acoplamento. Essas forças são F_r e F_t , nas

direções radial e tangencial à engrenagem e, se a engrenagem for helicoidal como aquela ilustrada, desenvolve-se também uma força axial F_a .

Quando se analisa isoladamente o eixo, como faremos nesse capítulo, fazemos a transferência dessas três forças, F_r , F_t e F_a , para a seção B do eixo. Nesse caso, devemos também incorporar os momentos concentrados decorrentes, como indicado na Figura 10.2c. Esses momentos aplicados são:

$$\begin{aligned} \cdot \text{Momento fletor devido a } F_a: & \rightarrow m_z^a = F_a R, \\ \cdot \text{Torque devido a } F_t: & \rightarrow m_x^t = F_t R. \end{aligned} \quad (10.1)$$

As forças aplicadas no dente da engrenagem também causam distribuições de esforços ao longo da viga:

1. A força radial F_r está na direção y , logo causa um esforço de momento fletor M_z em toda a viga, e esforço cortante V_y ;
2. A força tangencial F_t está na direção z , logo causa um esforço de momento fletor M_y em toda a viga, e esforço cortante V_z .

Agora, devemos considerar o que ocorre na situação prática de um redutor de velocidades. O eixo AC em geral não suportará apenas uma engrenagem, em B como mostrado, mas terá pelo menos duas. Note que, na foto do redutor na Figura 10.1, o eixo possui diversas engrenagens. Cada uma delas pode estar acoplada a uma engrenagem montada em um eixo distinto. Dessa forma, cada engrenagem montada no eixo AC sofrerá uma força radial F_r com uma orientação distinta no plano xy . Isso fará com que cada seção do eixo AC sofra flexão numa direção no plano xy diferente das demais seções.

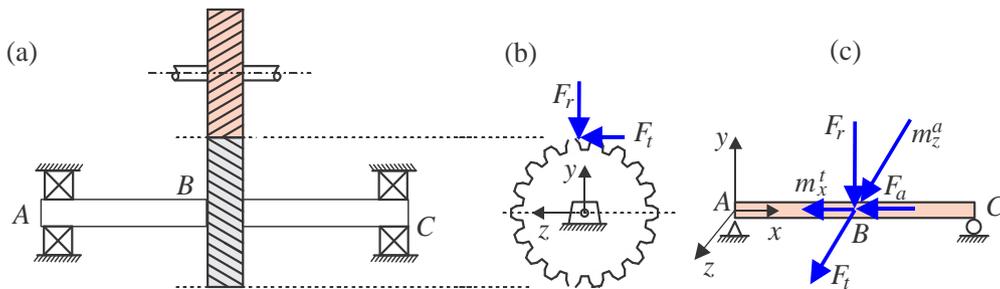


Figura 10.2: (a) Ilustração de eixo com dois mancais e uma engrenagem de dentes helicoidais acoplada a outra engrenagem; (b) forças radial e tangencial na engrenagem B; (c) forças e momentos aplicados no eixo AC na seção B.

10.1 Carregamento combinado - torção e tração

Em muitas aplicações, os eixos de seção circular usados para transmitir potência são submetidos não apenas à torção, que gera as tensões cisalhantes, mas também suportam carga axial, que gera tensões normais uniformes na seção. A carga axial pode surgir, por exemplo, do peso de componentes montados num eixo vertical, por mudança de temperatura durante o serviço, ou devido às forças no contato entre engrenagens helicoidais.

A Figura 10.3a ilustra uma barra tubular submetida a torção e carga axial. Os estados de tensões correspondentes a cada carregamento, **quando aplicados individualmente**, são:

$$\begin{aligned} \text{Tração} & \rightarrow \sigma_x = \frac{N_x}{A}, & \text{uniforme na seção;} \\ \text{Torção} & \rightarrow \tau_{x\theta}(r) = \frac{M_t}{J} r, & \text{varia radialmente na seção.} \end{aligned} \quad (10.2)$$

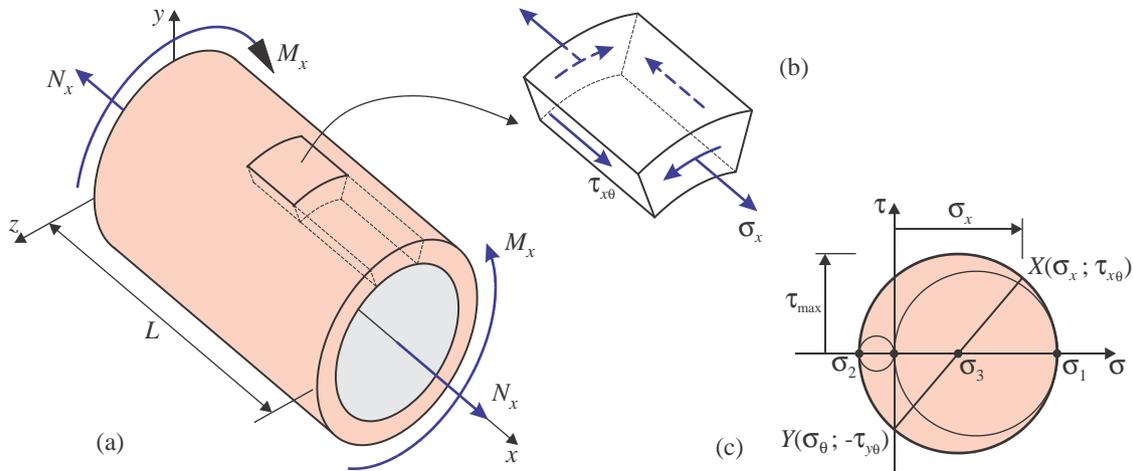


Figura 10.3: Estado de tensões num ponto de uma barra sob carregamento combinado de torção e tração.

onde $A = \pi(d_e^2 - d_i^2)/4$ é a área da seção tubular e J o momento polar dado por $J = \pi(d_e^4 - d_i^4)/32$.

Caso as tensões e deformações sejam suficientemente pequenas tal que o **princípio de sobreposição dos efeitos** possa ser aplicado, o estado de tensões resultante da aplicação simultânea da torção e da tração é constituído pela sobreposição dos estados de tensão individuais. Matematicamente, isso é representado simplesmente pela soma dos tensores tensão correspondentes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{tração} \rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{torção} \rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.3)$$

A Figura 10.3b ilustra essas componentes de tensão num elemento diferencial do tubo. A aplicação de um critério de falha requer uma transformação de tensões. O círculo de Mohr correspondente a esse tensor tensão é visto na Figura 10.3c. Nota-se que, **em todos os problemas de torção+tração, o maior círculo é sempre aquele no plano xt** , uma vez que as tensões principais σ_1 e σ_2 tem sempre sinais contrários, e σ_3 é nula, o que faz com que os outros dois círculos sejam internos.

Assim, a tensão cisalhante máxima absoluta é obtida usando (5.43):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{x\theta}^2} \quad (10.4)$$

onde as tensões máximas são:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{4N_x}{\pi(d_e^2 - d_i^2)} \quad \text{e} \quad \tau_{x\theta} = \frac{M_x}{J} \frac{d_e}{2} = \frac{16M_x}{\pi(d_e^4 - d_i^4)} d_e. \quad (10.5)$$

Lembra-se que, em qualquer problema, a relação solicitação-resistência ao início do escoamento dada pelo **critério de Tresca** é

$$\underbrace{\tau_{\max}}_{\text{Solicitação}} = \frac{\sigma_E/2}{\underbrace{n}_{\text{Resistência}}}, \quad (10.6)$$

então, no presente problema de torção+tração, a tensão solicitante é dada por (10.4), que substituindo as expressões da área e do momento polar de inércia, A e J , em (10.2) torna-se

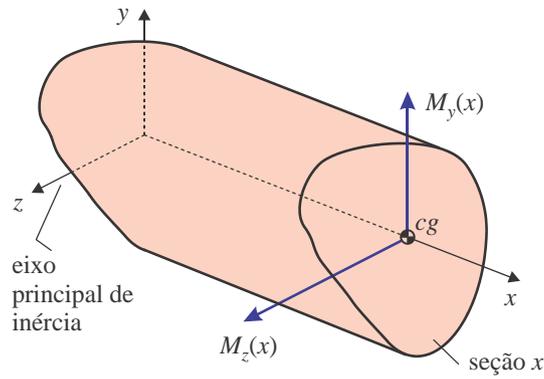


Figura 10.5: Componentes de esforços nas direções principais de uma seção genérica.

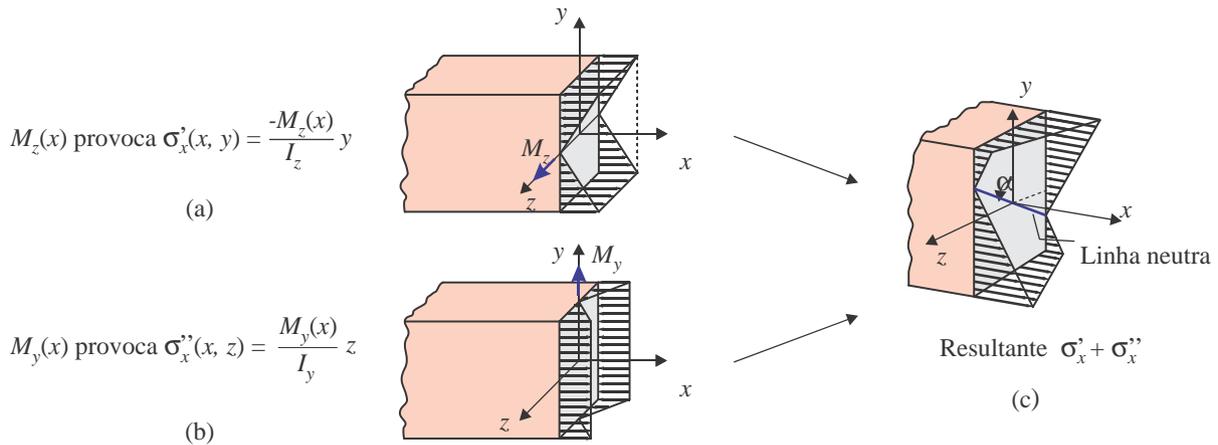


Figura 10.6: Sobreposição de tensões de flexão elásticas.

tensões normais σ_x que cada componente de momento geraria se agisse sozinha. Isso é ilustrado na Figura 10.6. Em (a) temos o efeito de M_z agindo sozinha, que é a distribuição σ'_x . Em (b) temos o efeito de M_y agindo sozinha, produzindo σ''_x . Assim,

$$\sigma'_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_z} y \quad \text{e} \quad \sigma''_x(x, y) = +\frac{M_y(x)}{I_y} z. \quad (10.11)$$

Observe que a expressão para σ''_x devido a M_y foi tomada simplesmente “imitando” a expressão de σ'_x devido a M_z . Uma única alteração se faz necessária, quanto ao sinal: o sinal deve ser positivo pois, interpretando fisicamente (ver Figura 10.6b), sabemos que para $M_y > 0$ e $z > 0$, devemos ter que σ''_x deve ser também positiva.

Se tivermos valores tais que

$$\boxed{|\sigma'_x(x,y)| \leq \sigma_E, \quad |\sigma''_x(x,y)| \leq \sigma_E \quad \text{e} \quad |\sigma'_x(x,y) + \sigma''_x(x,y)| \leq \sigma_E} \quad (10.12)$$

para qualquer y, z na seção x , então o estado de tensões na seção proveniente da aplicação simultânea de $M_y(x)$ e $M_z(x)$ é dado pela sobreposição de σ'_x e σ''_x , i.e.,

$$\boxed{\sigma_x(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y} \quad (10.13)$$

A Figura 10.6c ilustra essa distribuição, que é também linear na seção.

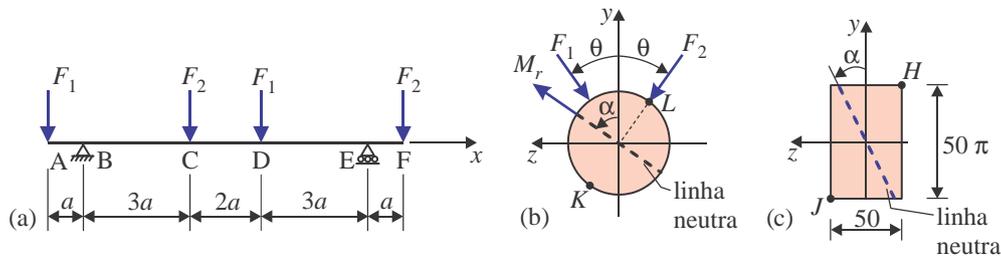


Figura 10.8: Dados do Exemplo 10.2.

Solução:

Uma vez que o posicionamento do centroide e dos eixos principais de inércia é óbvio em ambas as seções, pode-se iniciar diretamente pelo **cálculo dos esforços** em cada plano.

Forças no plano xy - momentos em z A Figura 10.9a mostra a viga com as componentes y do carregamento e das reações nos apoios. O processo de solução é o método das seções visto no Capítulo 2. As **reações** nos apoios B e E, vem das equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \sum F_y & \rightarrow R_{By} + R_{Ey} = 2F\sqrt{3}, \\ \sum M_z^B & \rightarrow -F\frac{\sqrt{3}}{2}a + F\frac{\sqrt{3}}{2}(3a) + F\frac{\sqrt{3}}{2}(5a) - R_{Ey}(8a) + F\frac{\sqrt{3}}{2}(9a) = 0. \end{cases}$$

Logo, $R_{By} = \sqrt{3}F$ e $R_{Ey} = \sqrt{3}F$.

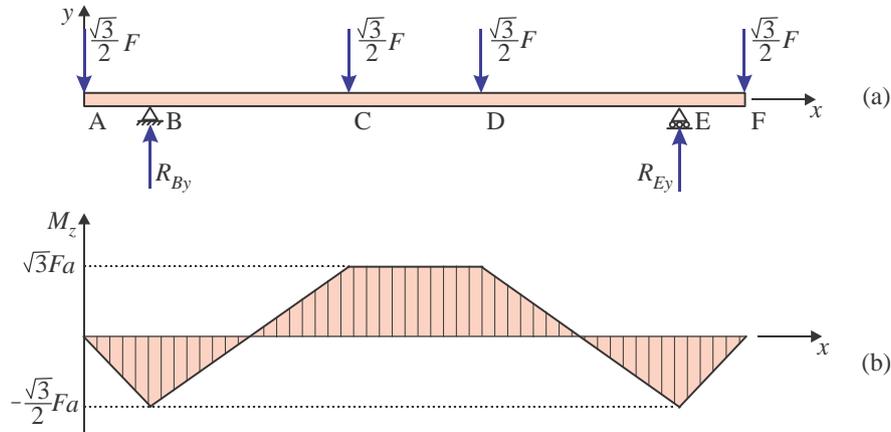


Figura 10.9: Carregamento no plano xy e diagrama de momentos $M_z(x)$.

Os esforços M_z são obtidos usando o método das seções e o diagrama é visto na Figura 10.9b.

Forças no plano xz - momentos em y Na Figura 10.10a temos as componentes z do carregamento, e as componentes das reações são obtidas pelas equações de equilíbrio como: $R_{Bz} = R_{Ez} = F/2$.

O método das seções pode ser aplicado para M_y usando a mesma convenção de sinais definida para M_z , como detalhado na Figura 2.16, página 23. Deve-se ter atenção para o fato que, numa seção tomada à esquerda do corte, M_y é positivo se estiver no sentido positivo do eixo y . Por exemplo, para a seção C^- (logo à esquerda da seção C), o diagrama de corpo livre do lado esquerdo do corte é como na Figura 10.11. Os esforços em C^- são obtidos por

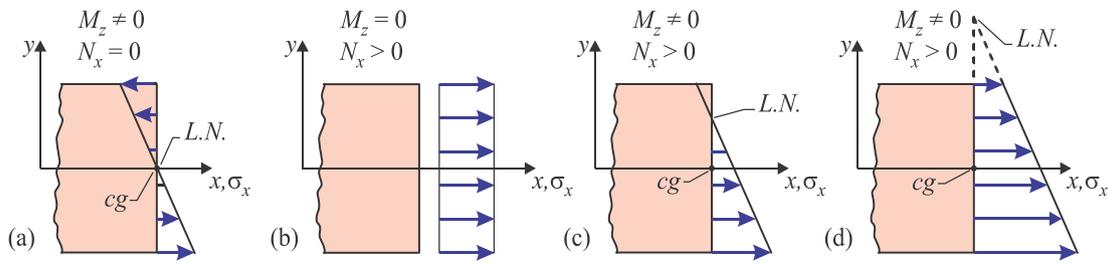


Figura 10.12: Sobreposição de tensões em viga sob flexão plana e esforço normal de tração.

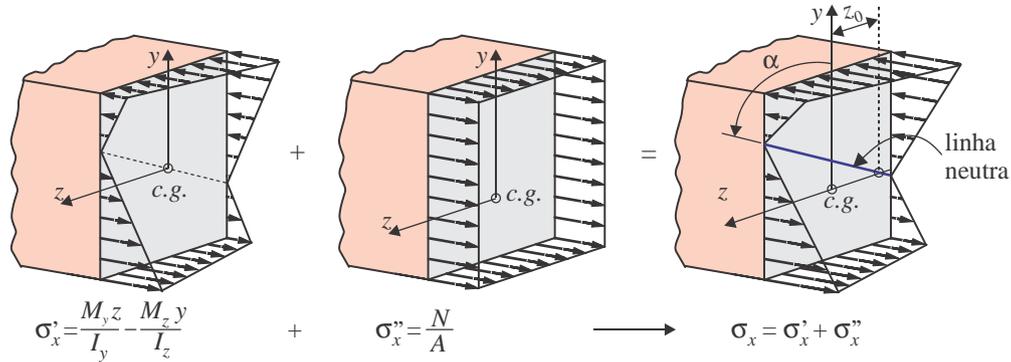


Figura 10.13: Sobreposição de tensões de flexão oblíqua e de esforço axial na viga. Em (a) $\sigma'_x = -M_z y/I_z + M_y z/I_y$; (b) $\sigma''_x = N/A$; (c) $\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x$.

Uma primeira observação sobre a equação (10.19) e sobre as Figuras 10.12 e 10.13 mostra que agora a **linha neutra não mais passa pelo centroide da seção**. De fato, se $y = z = 0$, temos que $\sigma_x = N/A \neq 0$, i.e., se o esforço normal é não nulo, a linha neutra sofre um deslocamento sobre a seção e pode até mesmo localizar-se fora dela.

A equação da **linha neutra** na seção x é obtida fazendo $\sigma_x(x, \bar{y}, \bar{z}) = 0$ em (10.19), o que resulta

$$\bar{z} = \underbrace{\frac{I_y M_z}{I_z M_y}}_{\text{tg } \alpha} \bar{y} - \underbrace{\frac{I_y N}{A M_y}}_{z_o} \quad \text{caso } M_y \neq 0 \text{ e } M_z \neq 0. \quad (10.20)$$

onde α é a inclinação da linha neutra, medida a partir do eixo y , positiva quando anti-horário em torno do eixo z . A coordenada onde a linha intercepta o eixo $y = 0$ é z_o , como ilustrado na Figura 10.14.

Caso $M_y = 0$, a (10.20) não pode ser usada, e localização da linha neutra deve ser obtida da eq.(10.19), impondo $\sigma_x(x, \bar{y}, \bar{z}) = 0$ com $M_y = 0$, o que resulta em

$$\bar{y} = \frac{I_z N}{A M_z} = \text{const.} \quad \text{caso } M_y = 0 \text{ e } M_z \neq 0. \quad (10.21)$$

Exemplo 10.3 - Problema de flexão oblíqua e carga axial

Considere a estrutura da Figura 10.15, sob as cargas concentradas $F_1 = F_2 = 100$ N, atuando nas direções x e z respectivamente e a carga distribuída $q = 1$ kN/m na direção y . Determine a tensão normal máxima agindo no trecho BC da viga. A seção transversal no trecho BD é retangular, com seção 10×20 mm².

Solução:

As primeiras etapas na análise consistem na identificação dos tipos de apoios, no cálculo das

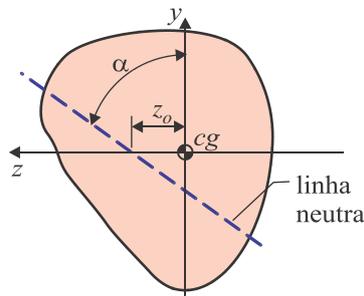


Figura 10.14: Posição e orientação da linha neutra.

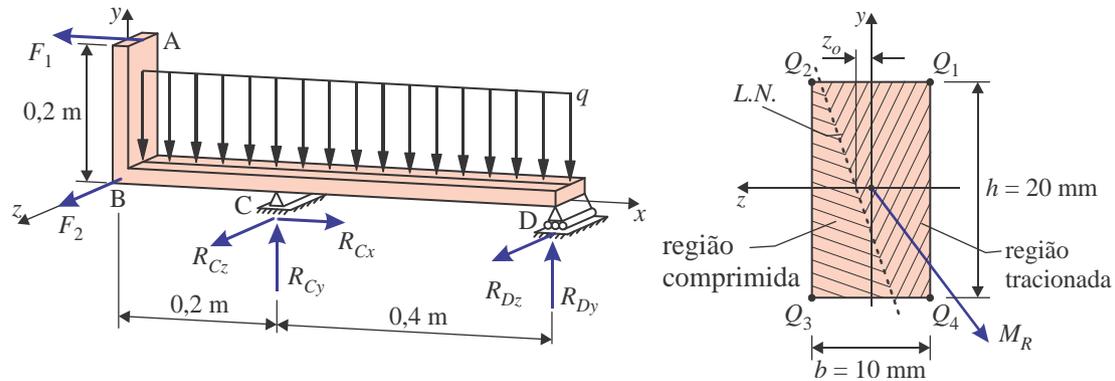


Figura 10.15: Dados do Exemplo 10.3.

reações e na determinação dos esforços normais e de momentos fletores M_y e M_z . Os valores das **reações nos apoios** C e D, nas direções y e z são:

$$\begin{aligned} R_{Cy} &= 50 \text{ N}, & R_{Dy} &= 100 \text{ N}, & R_{Cx} &= 100 \text{ N}, \\ R_{Cz} &= -150 \text{ N}, & R_{Dz} &= 50 \text{ N}, & & \end{aligned}$$

onde as orientações positivas são aquelas dos eixos cartesianos xyz mostradas na figura.

Os esforços em cada trecho, BC e CD são obtidos pelo método das seções:

$$\begin{aligned} \text{Trecho BC:} & \quad \left\{ \begin{array}{l} N_x = 100 \text{ [N]} \\ M_y(x) = -100x \text{ [Nm]} \\ M_z(x) = -500x^2 - 20 \text{ [Nm]} \end{array} \right. \\ \text{Trecho CD:} & \quad \left\{ \begin{array}{l} N_x = 0 \\ M_y(x) = -50x - 30 \text{ [Nm]} \\ M_z(x) = -500x(1-x) - 120 \text{ [Nm]} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Os diagramas de esforços e seus valores máximos são vistos na Figura 10.16.

A próxima etapa é o cálculo dos momentos de inércia e a área da seção:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = bh = 10 \times 20 = 200 \text{ mm}^2, \\ I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 10^3}{12} = 1666,7 \text{ mm}^4, \\ I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 6666,7 \text{ mm}^4. \end{array} \right.$$

Finalmente, identificamos a seção crítica como a seção C, onde simultaneamente os três esforços são máximos: $N_{xC} = 100 \text{ N}$, $M_{yC} = -20 \text{ Nm}$ e $M_{zC} = -40 \text{ Nm}$. Assim, a tensão máxima ocorre

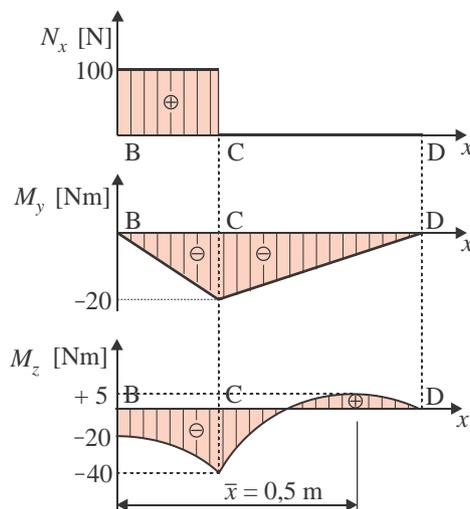


Figura 10.16: Diagramas de momento no Exemplo 8.5.

na seção C, onde a distribuição de tensões é dada pela eq. (10.19):

$$\begin{aligned}
 \sigma_x(x_C; y; z) &= \frac{N_x}{A} + \frac{M_{yC}}{I_y}z - \frac{M_{zC}}{I_z}y \\
 &= \frac{100}{200} + \frac{(-20 \cdot 10^3)}{1,67 \cdot 10^3}z - \frac{(-40 \cdot 10^3)}{6,67 \cdot 10^3}y \\
 &= 0,5 - 12z + 64 \quad \text{em mm e MPa.}
 \end{aligned} \tag{10.22}$$

Como a tensão máxima na seção deve ocorrer no ponto mais distante da linha neutra, certamente ocorrerá num dos quatro vértices da seção, (pontos Q_1 , Q_2 , Q_3 ou Q_4 na Figura 10.15b), e certamente **será aquele ponto cujas coordenadas faz com que as três parcelas de (8.54) tenham o mesmo sinal**. Após certa análise identificamos o ponto Q_1 como aquele de tensão máxima: $y_{Q_1} = +h/2$ e $z_{Q_1} = -b/2$. Assim, (10.22) produz

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\max} &= \sigma_x(x_C; y = +20/2; z = -10/2) = 0,5 - 12(-5) + 6(10) \\
 &= 0,5 + 60 + 60 = 120,5 \text{ MPa.}
 \end{aligned}$$

Note que o ponto de máxima tensão poderia ter sido identificado primeiro determinando a **linha neutra** usando (10.20), o que resulta $\alpha = 26,57^\circ$ e $z_o = -0,0417$ mm. A linha neutra e a orientação do momento fletor resultante são ilustrados na Figura 10.15b. Claramente, o ponto Q_1 é o mais afastado da linha neutra.

Exemplo 10.4 - Colunas sob carga excêntrica

Considere uma coluna de seção retangular de lados $b \times h$, submetida a uma carga axial compressiva F . Essa carga é aplicada com uma excentricidade em relação ao centroide da seção, nas coordenadas $(y_o; z_o)$, como mostrado na Figura 10.17. Determine o seguinte: (a) a tensão no ponto A da base; (b) as posições de aplicação da carga que garantem que o ponto A permaneça comprimido contra a base de apoio.

Solução:

Na seção da base a força F gera um esforço normal $N = F$. Entretanto, a excentricidade da carga gera um efeito de flexão oblíqua. As componentes de momento fletor são causadas pela

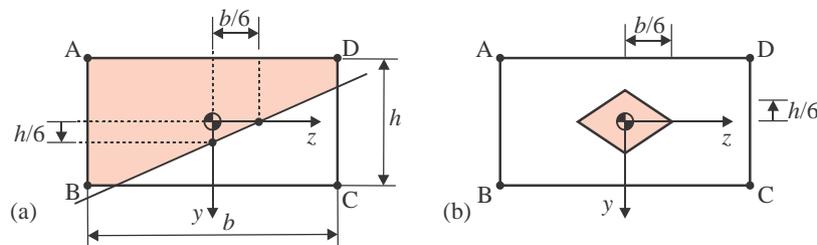


Figura 10.18: Regiões de carregamento que garantem compressão em toda a base da coluna.

Esse é um dos mais tradicionais problemas em engenharia civil clássica. As colunas utilizadas em épocas pré-industriais, antes do advento do concreto armado (com sua capacidade de suportar tração), eram simplesmente apoiadas sobre o solo, sem nenhum encravamento na base que pudesse suportar tração. Assim, a única capacidade da coluna para suportar cargas de flexão era o peso próprio. No caso de colunas leves, a carga devia ser apenas vertical, compressiva, e bastante bem centrada em torno do centroide da seção, a fim de manter toda a base comprimida, uma vez que uma flexão excessiva devido à excentricidade de carga faria parte da seção da base simplesmente perder o contato e se descolar, deixando de contribuir para suportar a carga. Estendendo a solução do exemplo, nota-se que **a região tolerada para aplicação da carga axial que gere apenas compressão em toda a base é um trapézio de diâmetros $b/3$ e $h/3$, em torno do centroide**, como ilustrado na Figura 10.18b.

10.4 Propriedades geométricas de uma seção

Quando observamos a fórmula de flexão oblíqua (10.19) notamos que existem apenas cinco parâmetros a serem determinados, $N_x(x)$, $M_y(x)$, $M_z(x)$, $I_y(x)$ e $I_z(x)$ numa dada seção de coordenada x . Em **problemas isostáticos**, a determinação dos esforços normal e de momentos fletores segue os procedimentos próprios, vistos no Capítulo 2, de forma que apenas o correto posicionamento dos eixos principais da inércia na seção e a determinação dos momentos de inércia $I_y(x)$ e I_{zz} podem apresentar algum desafio. De fato, essas etapas devem ser trabalhadas de forma criteriosa. Apresentaremos nessa seção um detalhamento do estudo das propriedades de área que são relevantes no cálculo das tensões de flexão. Caso o leitor sinta-se seguro do tema, esta seção pode ser suprimida e a leitura continuada na próxima seção.

10.4.1 Momentos estáticos e centroide de uma seção assimétrica

Considere uma seção de formato arbitrário, como na Figura 10.19a, na qual desejamos localizar o centroide. A **primeira etapa** consiste em definir um **sistema provisório de eixos**, OYZ , como ilustrado. Esses eixos podem ser definidos em qualquer posição do espaço em relação à seção. Em relação a esses eixos, buscaremos determinar as coordenadas \bar{Y} e \bar{Z} do centroide.

Por definição, os momentos estáticos da inércia em relação aos eixos Y e Z são:

$$\boxed{Q_z = \int_A Y \, dA \quad \text{e} \quad Q_Y = \int_A Z \, dA.} \quad (10.26)$$

As coordenadas do centroide são obtidas por

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{1}{A} \int_A Y \, dA \quad \text{e} \quad \bar{Z} = \frac{1}{A} \int_A Z \, dA.} \quad (10.27)$$

onde A é a área total da seção. As equações acima podem também ser postas como

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{Q_z}{A} \quad \text{e} \quad \bar{Z} = \frac{Q_Y}{A}} \quad (10.28)$$

Como os momentos I_{YY} e I_{ZZ} têm índices repetidos, para simplificar a notação, frequentemente usam-se apenas I_Y e I_Z . (10.32)

10.4.3 Teorema dos Eixos Paralelos para momentos de inércia

Caso os momentos de uma área em relação a um par de **eixos centroidais** $y_c - z_c$ sejam conhecidos, podemos determinar os momentos em relação a **qualquer par de eixos YZ paralelos a $y_c z_c$** usando o chamado Teorema dos Eixos Paralelos, cuja dedução é como segue.

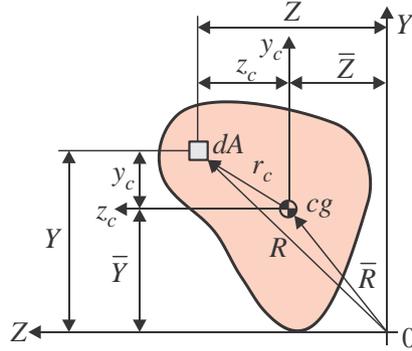


Figura 10.20: Eixos arbitrários YZ e centroidais $y_c z_c$ numa seção.

Considere a Figura 10.20 com os pares de eixos YZ e $y_c z_c$, sendo que as distâncias entre os eixos são \bar{Y} e \bar{Z} . Podemos usar as definições (10.30) para obter, por exemplo, I_{YY} . Como $Z = z_c + \bar{Z}$,

$$I_{YY} \equiv \int_A (z_c + \bar{Z})^2 dA.$$

Expandindo a potência temos

$$I_{YY} = \underbrace{\int_A z_c^2 dA}_{I_{y_c}} + 2\bar{Z} \underbrace{\int_A z_c dA}_{Q_{y_c=0}} + \bar{Z}^2 \underbrace{\int_A dA}_A.$$

A primeira integral é o momento de inércia em relação ao eixo centroidal y_c , a segunda é o momento estático em relação ao eixo centroidal y_c , logo é igual a zero. A última integral é simplesmente o valor da área da seção. Assim temos

$$\boxed{I_{YY} = I_{y_c y_c} + \bar{Z}^2 A} \quad (10.33)$$

Repetindo o mesmo procedimento para os demais momentos temos:

$$\boxed{I_{ZZ} = I_{z_c z_c} + \bar{Y}^2 A, \quad J_O = J_{cg} + \bar{R}^2 A \quad \text{e} \quad I_{YZ} = I_{y_c z_c} + \bar{Y} \bar{Z} A} \quad (10.34)$$

A relação para J_O pode ser detalhada observando na Figura 10.20 que, se \bar{R} é a distância do centroide ao ponto 0, R é a posição do elemento diferencial dA ao ponto 0, e r_c é a distância do ponto ao centroide, segue-se que, vetorialmente, $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} + \mathbf{r}_c$. Em componentes cartesianas se tem: $R_z = \bar{Z} + z_c$ e $R_y = \bar{Y} + y_c$. O momento polar em relação ao polo O é

$$J_O \equiv \int_A \|\mathbf{R}\|^2 dA = \int_A (R_z^2 + R_y^2) dA.$$

Substituindo em termos de \bar{Z} , z_c , \bar{Y} e y_c , temos

$$J_O = \int_A (\bar{Z} + z_c)^2 dA + \int_A (\bar{Y} + y_c)^2 dA.$$

Abrindo os quadrados obtemos

$$\begin{aligned}
 J_O &= \int_A (\bar{Z}^2 + 2\bar{Z}z_c + z_c^2) dA + \int_A (\bar{Y}^2 + 2\bar{Y}y_c + y_c^2) dA, \\
 &= \left(\underbrace{\bar{Z}^2 \int_A dA}_A + \underbrace{2\bar{Z} \int_A z_c dA}_{Q_{y_c=0}} + \underbrace{\int_A z_c^2 dA}_{I_{y_c}} \right) dA + \left(\underbrace{\bar{Y}^2 \int_A dA}_A + \underbrace{2\bar{Y} \int_A y_c dA}_{Q_{z_c=0}} + \underbrace{\int_A y_c^2 dA}_{I_{z_c}} \right) dA. \quad (10.35)
 \end{aligned}$$

Nota-se que, como $z_c^2 + y_c^2 = r_c^2$, do terceiro e do sexto termos acima se tem que $J_{cg} = I_{y_c} + I_{z_c}$, onde J_{cg} é o momento polar de inércia da seção em relação a seu centroide. Com isso, se obtém (10.34)₂. Observe que \bar{Y} e \bar{Z} possuem sinais algébricos, porém aparecem ao quadrado em I_{ZZ} e I_{YY} . Esses sinais são necessários apenas ao produto de inércia I_{YZ} .

10.4.4 Rotação de eixos - Eixos Principais de Inércia

Conhecidos os momentos de inércia de uma seção em relação a um par de eixos, por exemplo os eixos centroidais $y_c z_c$, buscamos expressões para determinar os momentos em relação a um outro par de eixos, $y'_c z'_c$, determinados por uma rotação plana de $y_c z_c$ em torno do eixo x_c . Esses dois pares de eixos são ilustrados na Figura 10.21. Observe que estaremos deduzindo aqui as expressões para relacionar momentos de inércia entre dois pares de eixos centroidais, porém as expressões serão válidas para eixos arbitrários também.

Podemos tomar as definições (10.30) para os momentos e aplicá-las aos eixos y_c e z_c :

$$I_{y_c} \equiv \int_A z_c^2 dA, \quad I_{z_c} = \int_A y_c^2 dA, \quad I_{y_c z_c} = \int_A y_c z_c dA \quad (10.36)$$

Entretanto, de trigonometria (ou diretamente das expressões para transformação de coordenadas em rotação plana), as coordenadas do ponto na área dA (Figura 10.21) em relação aos novos eixos ($y'_c z'_c$) são dadas por

$$\begin{cases} y'_c = y_c \cos \theta + z_c \sin \theta, \\ z'_c = -y_c \sin \theta + z_c \cos \theta. \end{cases} \quad (10.37)$$

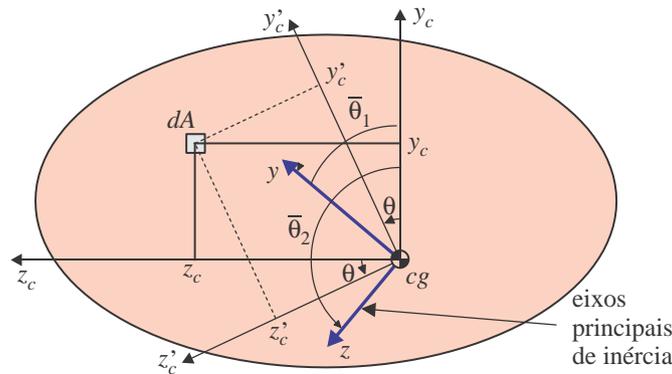


Figura 10.21: Rotação de eixos centroidais $y_c z_c$ e $y'_c z'_c$ para os eixos principais de inércia da seção yz .

Substituindo em (10.36) e reconhecendo que $I_{y_c} = \int_A z_c^2 dA$, etc., obtemos

$$\begin{cases} I_{z'_c} = I_{y_c} \sin^2 \theta + I_{z_c} \cos^2 \theta + 2I_{y_c z_c} \sin \theta \cos \theta, \\ I_{y'_c} = I_{z_c} \cos^2 \theta + I_{y_c} \sin^2 \theta - 2I_{y_c z_c} \sin \theta \cos \theta, \\ I_{y'_c z'_c} = (I_{z_c} - I_{y_c}) \sin \theta \cos \theta + I_{y_c z_c} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{cases} \quad (10.38)$$

por dois pontos de coordenadas $Y_c = (I_{y_c}; -I_{y_c z_c})$ e $Z_c = (I_{z_c}; I_{y_c z_c})$. O círculo então apresenta-se como na Figura 10.22.

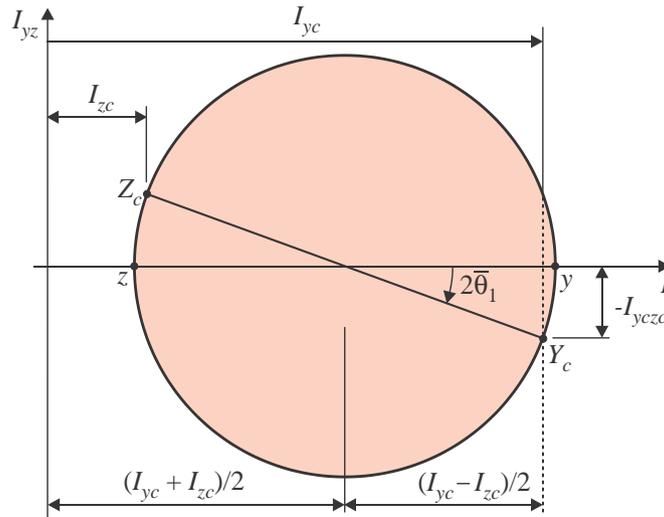


Figura 10.22: Círculo de Mohr para determinação de direções e valores principais de momentos de inércia.

Os valores principais do momento de inércia, I_y e I_z , tanto podem ser obtidos de (10.41) quanto pelas expressões advindas da trigonometria do círculo (análogo a (5.44)):

$$\left. \begin{array}{l} I_y \\ I_z \end{array} \right\} = \frac{(I_{y_c} + I_{z_c})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2} \quad (10.44)$$

10.5 Flexão em viga de seção assimétrica

Exemplo 10.5 - Flexão em viga de seção L

Determine a tensão máxima na seção mostrada na Figura 10.23a, submetida a um esforço de momento fletor $m = 7,5 \cdot 10^5$ Nmm na orientação indicada pelo ângulo $\delta = 20^\circ$ anti-horário a partir do eixo centroidal z_c , paralelo à base (a posição do centroide é ainda desconhecida). As dimensões são: $h = t = 12,7$ mm, $B = 76,1$ mm, $H = 88,9$ mm.

Solução:

Parametrizamos a geometria como se segue. A largura e altura total da seção são designadas por $b = 76,2$ mm e $h_1 = 101,6$ mm. Dividimos a seção nas duas regiões hachuradas mostradas na Figura 10.23a. A região vertical é denominada **área 1**, de dimensões $b_1 = h = 12,7$ mm e altura $h_1 = H + t = 101,6$ mm. A região horizontal é a **área 2**, de dimensões $b_2 = b = B - h = 63,4$ mm e altura $h_2 = t = 12,7$ mm. As áreas são

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Área 1} \rightarrow A_1 = b_1 h_1 = 101,6 \times 12,7 = 1.290,32 \text{ mm}^2, \\ \text{Área 2} \rightarrow A_2 = b_2 h_2 = 63,4 \times 12,7 = 805,18 \text{ mm}^2, \\ \text{Área} \rightarrow A = A_1 + A_2 = 2.095,5 \text{ mm}^2. \end{array} \right.$$

Etapa 1 - Posição do centroide. São definidos os eixos temporários OYZ , como ilustrado na Figura 10.23a. As coordenadas \bar{Y} e \bar{Z} do centroide são obtidas usando (10.29):

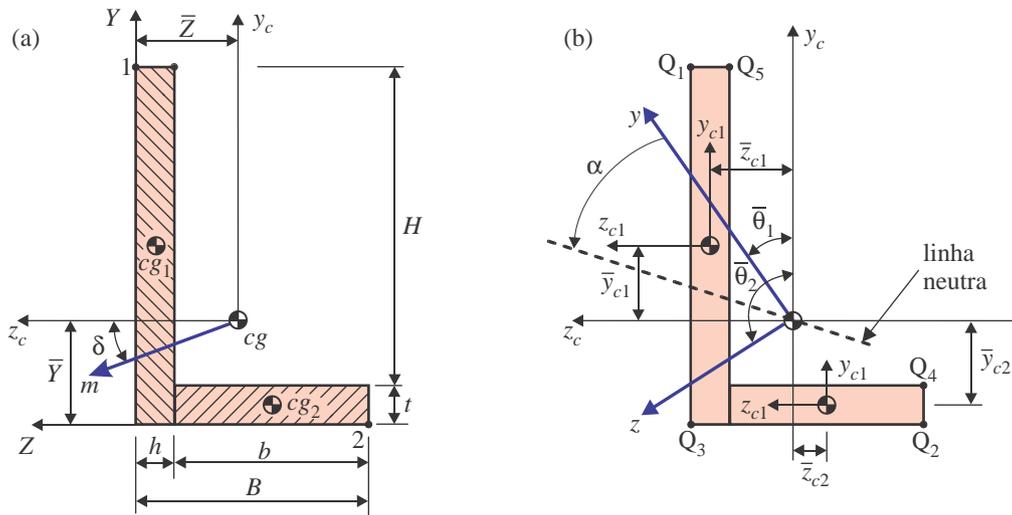


Figura 10.23: Seção L sob flexão no Exemplo 10.5.

$$\left\{ \begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = 2.096,8 \text{ mm}^2, \\ \bar{Y} &= \frac{1}{A} [\bar{Y}_1 A_1 + \bar{Y}_2 A_2] = \frac{1}{2.096,8} \left[\frac{101,6}{2} A_1 + \frac{12,7}{2} A_2 \right] = 33,7 \text{ mm}, \\ \bar{Z} &= \frac{1}{A} [\bar{Z}_1 A_1 + \bar{Z}_2 A_2] = \frac{1}{2.096,8} \left[\frac{-12,7}{2} A_1 + (-44,45) A_2 \right] = -21,0 \text{ mm}. \end{aligned} \right.$$

Etapa 2 - Momentos de inércia centroidais. Tem-se agora definidos os eixos centroidais ($y_c; z_c$) indicados na figura 10.23b. Primeiro obtém-se as coordenadas centroidais de cada área em relação a esse sistema:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{c1} &= \bar{Y}_1 - \bar{Y} = 17,1 \text{ mm}, & \bar{z}_{c1} &= \bar{Z}_1 - \bar{Z} = 14,6 \text{ mm}, \\ \bar{y}_{c2} &= \bar{Y}_2 - \bar{Y} = -27,4 \text{ mm}, & \bar{z}_{c2} &= \bar{Z}_2 - \bar{Z} = -23,4 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Usando (10.33)-(10.34), tem-se

$$\begin{aligned} I_{y_C} &= I_{y_c}^{(1)} + I_{y_c}^{(2)} = [I_{y_{c1}} + \bar{z}_{c1}^2 A_1] + [I_{y_{c2}} + \bar{z}_{c2}^2 A_2], \\ &= \left[\frac{h_1^3 b_1^3}{12} + 14,65^2 \times 1.290 \right] + \left[\frac{h_2^3 b_2^3}{12} + 23,45^2 \times 806,5 \right], \\ &= 2,94 \cdot 10^5 + 7,14 \cdot 10^5 = 1,01 \cdot 10^6 \text{ mm}^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{z_C} &= I_{z_c}^{(1)} + I_{z_c}^{(2)} = [I_{z_{c1}} + \bar{y}_{c1}^2 A_1] + [I_{z_{c2}} + \bar{y}_{c2}^2 A_2], \\ &= \left[\frac{b_1^3 h_1^3}{12} + 17,1^2 \times 1.290 \right] + \left[\frac{b_2^3 h_2^3}{12} + 27,35^2 \times 806,5 \right], \\ &= 1,49 \cdot 10^6 + 6,14 \cdot 10^5 = 2,10 \cdot 10^6 \text{ mm}^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_C z_C} &= I_{y_c z_c}^{(1)} + I_{y_c z_c}^{(2)} = \bar{y}_{c1} \bar{z}_{c1} A_1 + \bar{y}_{c2} \bar{z}_{c2} A_2, \\ &= 17,1 \times 14,65 \times 1.290 + (-27,75)(-23,45) \times 806,5 \\ &= 8,39 \cdot 10^5 \text{ mm}^4. \end{aligned} \tag{10.45}$$

Etapa 3 - Direções e momentos principais de inércia. Os valores principais dos momentos podem ser obtidos diretamente de (10.44):

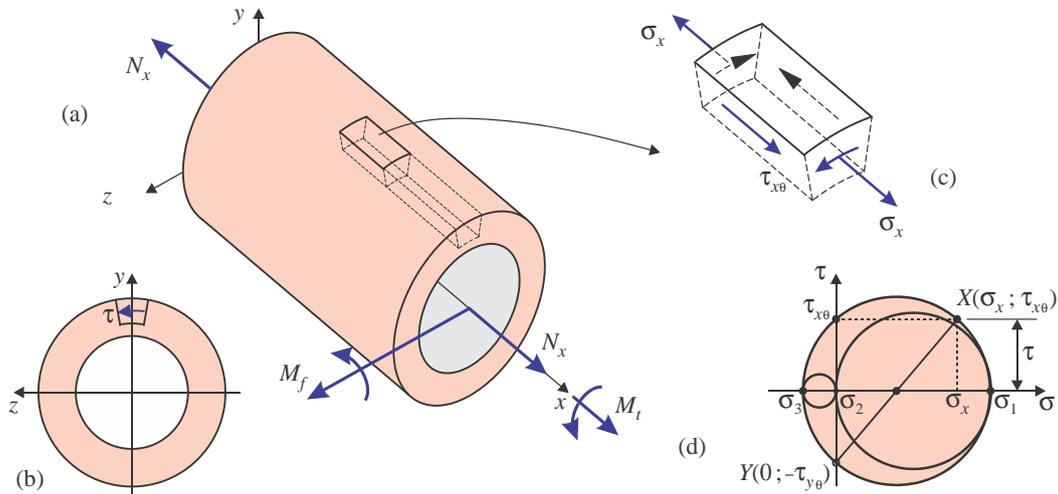


Figura 10.26: Estado de tensões no ponto crítico de uma barra sob carregamento combinado de torção, flexão e tração.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{tração} \rightarrow \sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{tr}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{flexão} \rightarrow \sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{fl}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{torção} \rightarrow \sigma &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{tr}} + \sigma_x^{\text{fl}} & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.52)$$

As Figuras 10.26b e c ilustram essas componentes de tensão no elemento diferencial do tubo em que as tensões de torção e de flexão são máximas. A aplicação de um critério de falha requer uma transformação de tensões. O círculo de Mohr correspondente a esse tensor tensão é visto na Figura 10.26d. Nota-se que, **em todos os problemas de torção+flexão+tração, o maior círculo é sempre aquele no plano xt** , uma vez que as tensões principais σ_1 e σ_2 tem sempre sinais contrários, e σ_3 é nula, o que faz com que os outros dois círculos sejam internos.

Assim, a tensão cisalhante máxima absoluta é obtida usando (5.43):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{x\theta}^2} \quad (10.53)$$

onde as tensões máximas são:

$$\sigma_x = \frac{M_f d}{I_{zz} 2} + \frac{N_x}{A} = \frac{32M_f}{\pi(d_e^4 - d_i^4)} d_e + \frac{4N_x}{\pi(d_e^2 - d_i^2)} \quad \text{e} \quad \tau_{x\theta} = \frac{M_t d_e}{J 2} = \frac{16M_t}{\pi(d_e^4 - d_i^4)} d_e. \quad (10.54)$$

M_f e M_t são os esforços de momento fletor e torçor na seção. Deve-se lembrar que, em qualquer problema, a relação sollicitação-resistência ao início do escoamento dada pelo **critério de Tresca** é

$$\underbrace{\tau_{\max}}_{\text{Sollicitação}} = \underbrace{\frac{\sigma_E/2}{n}}_{\text{Resistência}}. \quad (10.55)$$

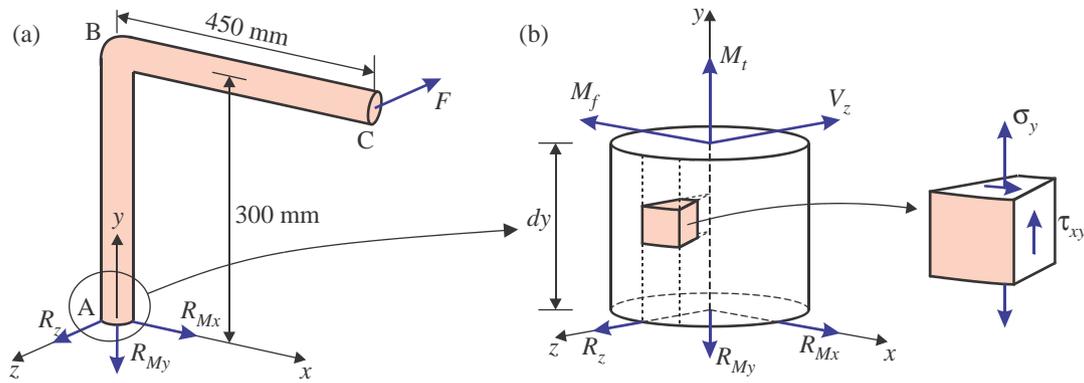


Figura 10.27: Estrutura do Exemplo 10.6, esforços na seção do engaste e tensões de flexão e torção.

As **tensões** de flexão e de torção no ponto crítico são mostradas na Figura 10.27c. Nota-se que o estado de tensões é plano, do mesmo tipo mostrado na Figura 10.26. O momento polar de inércia da seção é $J = \pi d^4/32 = \pi 30^4/32 = 7,95 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, e o momento resultante na seção do engaste é $M_R = \sqrt{M_f^2 + M_t^2} = \sqrt{540^2 + 810^2} = 973 \text{ kNmm}$. Assim, a tensão cisalhante máxima no ponto é dada pela eq. (10.57):

$$\tau_{\max} = \frac{d_e}{2J} M_R = \frac{30}{2 \times 7,95 \cdot 10^4} 973 \cdot 10^3 = 183,7 \text{ MPa}.$$

Finalmente, utilizando o **critério de Tresca**, o coeficiente de segurança é obtido por $n = \sigma_E/2\tau_{\max} = 250/(2 \times 183,7) = 0,68 < 1$. Então, o diâmetro utilizado não é satisfatório para a estrutura sob esse carregamento.

Exemplo 10.7 – Dimensionamento de barra sob flexão e torção

Considerar o mesmo suporte do Exemplo 6, mostrado na Figura 10.27a, de seção circular uniforme, submetido ao mesmo carregamento. Determinar o diâmetro necessário (a) caso a barra seja maciça, e (b) caso seja um tubo em que os diâmetros interno e externo tenham entre si a relação $\beta = d_e/d_i = 1,6$. Utilizar o critério de Tresca com um coeficiente de segurança $n = 1,3$.

Solução:

Os esforços na seção de engaste são os mesmos já calculados no Exemplo 7. No caso de **seção maciça**, o diâmetro necessário é dado pela eq. (10.59) $d_e = \left(\frac{32nM_R}{\pi\sigma_E} \right)^{1/3} = \left(\frac{32 \times 1,3 \times 973 \cdot 10^3}{\pi 250} \right)^{1/3} = 37,2 \text{ mm}$. Para a **seção tubular**, primeiramente obtém-se o diâmetro interno necessário pela eq. (10.60) $d_i = \left(\frac{32nM_R}{\pi\sigma_E} \frac{\beta}{\beta^4 - 1} \right)^{1/3} = \left(5,154 \cdot 10^4 \frac{1,6}{1,6^4 - 1} \right)^{1/3} = 24,6 \text{ mm}$, e em seguida o diâmetro externo é obtido por $d_e = \beta d_i = 1,6 \times 24,6 = 39,3 \text{ mm}$.

10.7 Exercícios

- | | |
|--|--|
| 10.1 Detalhe a dedução da eq. (10.7). | 10.5 Detalhe a dedução da eq. (10.21). |
| 10.2 Detalhe a dedução da eq. (10.58). | 10.6 Detalhe a dedução da eq. (10.25). |
| 10.3 Detalhe a dedução da eq. (10.59). | 10.7 Detalhe a dedução da eq. (10.35). |
| 10.4 Detalhe a dedução da eq. (10.60). | 10.8 Detalhe a dedução da eq. (10.38). |
| | 10.9 Detalhe a dedução da eq. (10.40). |

Capítulo 11

* Aplicações de elasticidade e plasticidade plana

Nesse capítulo¹ alguns problemas mecânicos importantes são desenvolvidos utilizando, em grande parte, a teoria de elasticidade linear. Em adição à importância dos problemas tratados, a apresentação serve para ilustrar e exercitar o uso das equações gerais da mecânica dos sólidos, que são as seguintes: (1) as equações diferenciais de equilíbrio, (2) as relações deformação-deslocamento, (3) relação constitutiva (no presente caso a lei de Hooke 3D), e (4) condições de contorno. Essas equações foram deduzidas nos capítulos anteriores, porém, devido ao fato do presente livro ser a primeira apresentação do assunto ao estudante, os problemas anteriores foram bastante simples, geralmente estados uniaxiais de tensão (problemas de barras, vigas e torção). As aplicações no presente capítulo visam evitar que o estudante permaneça com uma visão incorreta da mecânica dos sólidos, inteiramente restrita a problemas uniaxiais. Assim, aqui as equações gerais são aplicadas a problemas de estado plano de tensões, em que as componentes de tensão variam de forma acentuada ao longo da geometria do corpo. Com isso se introduz, de forma natural, o conceito de concentração de tensões, que, embora não seja assunto natural de um primeiro curso, é essencial nos estudos seguintes.

O capítulo trata dos problemas de distribuições de tensão em discos sob carga coplanar, que são importantes em aplicações industriais como os volantes de motores. Em seguida a formulação é adaptada para a solução do problema de cilindros pressurizados com paredes espessas. Inicialmente o desenvolvimento é feito para a relação tensão-deformação elástica, e em seguida a solução é adaptada para os casos em que a pressão é tal que plastifica completamente a parede do cilindro, e também o caso de plastificação parcial, usando o modelo de material elasto-plástico ideal, isto é, sem encruamento. Finalmente a formulação é aplicada a toda a grande classe de barras de seção não circular sob torção.

11.1 Equações gerais em coordenadas cartesianas e polares

As equações gerais para a solução de qualquer problema não-térmico em mecânica dos sólidos foram deduzidas anteriormente, em coordenadas cartesianas, e são as seguintes:

- Equações diferenciais de movimento, eqs.(3.23), pg.(75):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_{cx} &= \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_{cy} &= \rho \frac{d^2 v}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_{cz} &= \rho \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \quad (11.1)$$

¹Os tópicos do presente capítulo são opcionais, e podem ser suprimidos pelo professor num curso rápido de Resistência dos Materiais de formato tradicional, ou pode ser deslocado para o final do curso, como complementação na formação do aluno em Mecânica dos Sólidos.

- Relações deformação-deslocamento (restritas ao caso linear), eqs.(4.12), pg.(97):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z(\mathbf{x}) &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

- Relações constitutivas (restritas ao caso linear elástico isotrópico da lei de Hooke generalizada), eqs.(4.60), pg.(120):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

As **equações de equilíbrio** são obtidas das equações do movimento, eliminando as forças de inércia do lado direito das eqs.(11.1). Essas 15 equações devem ser suplementadas de **condições de contorno** e condições iniciais adequadas para a solução de um problema. u, v e w são as componentes de deslocamento de um ponto de coordenadas $\mathbf{x} = (x, y, z)$, e $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ e $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ são as componentes dos tensores tensão $\boldsymbol{\sigma}$ e deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ nas direções cartesianas.

Uma vez que esse é um sistema de 15 equações e 15 funções incógnitas (u, v e $w, \boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$) em problemas arbitrariamente complexos, soluções exatas são impossíveis de serem obtidas, e se pode contar apenas com soluções aproximadas via métodos numéricos como o de elementos finitos. Entretanto, para o projeto de componentes mecânicos, é útil dispor de soluções analíticas. Frequentemente essas soluções são viáveis para condições simplificadas, como nos casos de estados planos de tensão, axisimetria e outros.

Nessa seção apresentaremos, sem dedução, as equações gerais convertidas para **coordenadas polares, em estado plano de tensões**, de forma a permitir a solução dos problemas desenvolvidos na seqüência. Considera-se o sistema de eixos cartesiano xyz e o sistema polar de coordenadas $r\theta z$, como ilustrado na Figura 11.1.

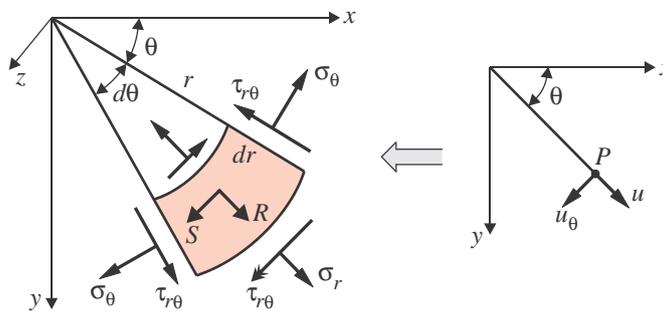


Figura 11.1: Sistema polar de coordenadas e componentes de tensão.

As **equações gerais em coordenadas polares**, para estados planos de tensões (EPT) e de deformações (EPD), são as seguintes:

- Equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S &= 0 \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\text{EPT} \quad \longrightarrow \quad \boxed{u(r) = \frac{Pa^2r}{E\Delta} \left[\frac{b^2}{r^2} (1 + \nu) + (1 - \nu) \right]} \quad (11.35)$$

$$\text{EPD} \quad \longrightarrow \quad \boxed{u(r) = \frac{Pa^2r(1 + \nu)}{E\Delta} \left[\frac{b^2}{r^2} + (1 - 2\nu) \right]} \quad (11.36)$$

Então, o deslocamento radial tem variação hiperbólica (proporcional a $1/r$). Nota-se que o deslocamento interno é maior que o externo, $u(a) > u(b) > 0$.

Observa-se que a tensão radial é sempre compressiva e a tangencial é sempre trativa, i.e., $\sigma_r < 0$ e $\sigma_\theta > 0$. Em módulo, ambas as componentes são máximas na **borda interna** do tubo, em $r = a$:

$$\sigma_\theta^{\max} = \frac{P}{\Delta}(a^2 + b^2) > P \quad \text{e} \quad \sigma_r^{\max} = -P_i. \quad (11.37)$$

As tensões na **borda externa** do tubo, em $r = b$, são:

$$\sigma_\theta^{\min} = \frac{2a^2P}{\Delta} \quad \text{e} \quad \sigma_r^{\min} = 0. \quad (11.38)$$

As distribuições das tensões ao longo da parede do tubo são ilustradas na Figura 11.3 para o caso de apenas pressão interna aplicada.

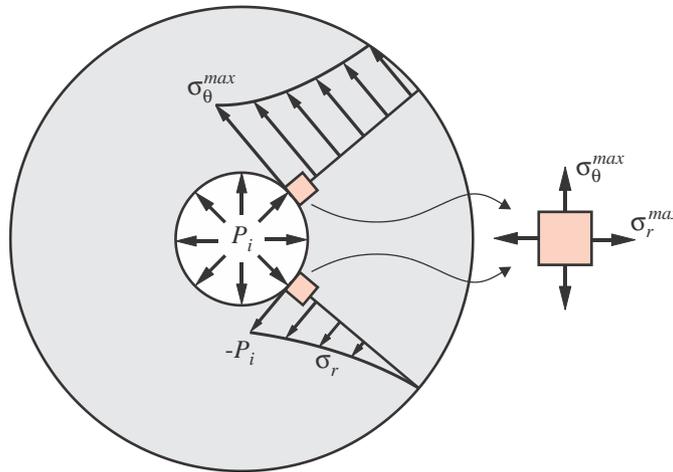


Figura 11.3: Distribuições das tensões radial e tangencial ao longo da parede de um tubo de parede espessa, submetido à pressão interna.

Aplicação do critério de Tresca

Uma vez calculadas as tensões no tubo de parede espessa sob pressão interna, pode-se aplicar um critério de falha por início de escoamento. Uma vez que na **borda interna ambas as componentes de tensão são máximas** em módulo, esse é o ponto crítico, mais propenso a iniciar o escoamento.

Se o tubo é fechado nas extremidades, formando um vaso de pressão, a tensão axial σ_z em pontos distantes das cabeças devem ser uniformes em qualquer ponto (r, θ, z) . Fazemos o equilíbrio de uma parte do vaso cortado num plano transversal ao eixo z , como na Figura 11.4. A força que a pressão exerce sobre o fluido contido no lado considerado do vaso é $F_p = \pi a^2 P$, e a força total atuando no anel de material do vaso é $F_v = \pi (b^2 - a^2) P_i$. Como $F_v = F_p$, tem-se que a **tensão axial média** na parede é

$$\sigma_z = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2} \quad (11.39)$$

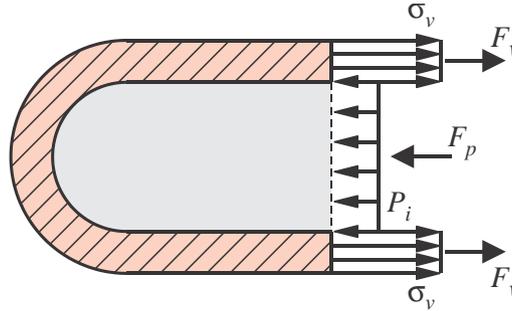


Figura 11.4: Corte num cilindro, com as forças resultantes axiais na parede e no fluido.

Aplica-se o critério da máxima tensão cisalhante, considerando as tensões radial e tangencial num ponto qualquer da borda interna, dados pelas eqs. (11.37). Então o estado de tensões nas direções $r\theta z$ num ponto da borda interna é dado pelo tensor tensão

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & P \frac{(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Pa^2}{b^2 - a^2} \end{bmatrix} \quad (11.40)$$

Uma vez que as tensões cisalhantes são nulas, as tensões normais são as próprias **tensões principais**, i.e.,

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = P \frac{(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)}, \quad \sigma_2 = \sigma_z = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_3 = \sigma_r = -P. \quad (11.41)$$

Observa-se que $\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1$. Então, a tensão cisalhante máxima absoluta (na peça inteira) (obtida da eq. (5.74)) é dada por:

$$\begin{aligned} \tau_{\max}^{abs} &= \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1 - \sigma_3|; |\sigma_2 - \sigma_3| \}, \\ &= \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_\theta - \sigma_r|; |\sigma_r - 0|; |\sigma_2 - 0| \}, \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) = P \frac{b^2}{(b^2 - a^2)}. \end{aligned} \quad (11.42)$$

As tensões são visualizadas no círculo de Mohr na Figura 11.5.

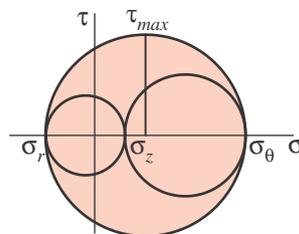


Figura 11.5: Círculos de Mohr para ponto na superfície interna de tubo de parede espessa pressurizado.

parede fina.

A equação (11.49) pode ser invertida para a forma

$$\text{Parede espessa: } \frac{P}{\sigma_{adm}} = \left(\frac{c}{h} + 1 + \frac{h}{4c} \right)^{-1} \quad (11.50)$$

i.e., a relação entre a pressão interna aplicada e a tensão admissível no material é uma função apenas da relação h/c . Essa função $P/\sigma_{adm} = f(h/c)$ para **parede espessa** é plotada na Figura 11.6. Para um tubo de **parede delgada**, se tem

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\theta}}{2}. \quad \text{Pelo critério de Tresca, } \tau_{\max} = \frac{\sigma_E/2}{n}.$$

$$\text{Logo, } \frac{Pc}{2h} = \frac{\sigma_E/2}{n}, \quad \text{o que resulta em } \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{h}{c}.$$

onde a tensão admissível é definida como $\sigma_{adm} = \sigma_E/n$. Essa expressão também é plotada na Figura 11.6. Nota-se que, enquanto a variação é linear no tubo delgado, ela é variável no de parede espessa. Uma inspeção nas duas curvas mostra que a diferença no valor previsto de pressão é bastante pequena para espessuras pequenas, em que h/c sejam inferiores a algo como 0,1. Para espessuras maiores, a pressão admissível prevista pelo modelo de parede fina se torna não conservativa, com erros progressivamente crescentes do lado não seguros. Deve-se atentar que os valores de h/c devem variar de zero (limite idealizado de espessura nula), até 2, em que o raio é igual à metade espessura, o que significaria o tubo completamente maciço (outra situação limite idealizada). Observando a curva do modelo de parede espessa, nota-se que, conforme a espessura tende ao máximo, $h/c = 2$, a máxima pressão admissível tende assintoticamente a um limite de 50 % da tensão admissível, i.e., $P/\sigma_{adm} \rightarrow 0,5$. Já para valores de espessura altos, por exemplo $h/c > 1$, crescimentos grandes de espessura geram apenas pequenos aumentos na capacidade de pressão do tubo.

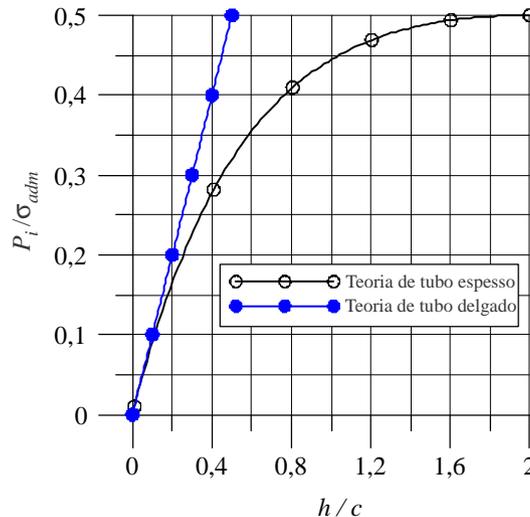


Figura 11.6: Variação de P_i/σ_{adm} com h/c pelos modelos de tubo pressurizado de parede espessa (eq. (11.50)) e de parede delgada ($P_i/\sigma_{adm} = h/c$).

11.3 Plastificação num cilindro de parede espessa

11.3.1 Pressão para início de plastificação

A pressão que leva a parede do cilindro ao **limiar da plastificação** é obtida de (11.43) como

$$P_E = \frac{\sigma_E (b^2 - a^2)}{2b^2} \quad (11.51)$$

se os raios interno/externo são a e b respectivamente. Para esse valor de pressão, toda a parede é elástica, e apenas na superfície interna a tensão cisalhante máxima aplicada é $\sigma_E/2$, com as componentes de tensão são dadas em (11.40).

11.3.2 Pressão para plastificação total da parede

Consideramos agora que o material tem a curva tensão-deformação aproximada por um modelo elasto-plástico ideal, i.e., um material com plasticidade sem encruamento, como na Figura 11.7. Claramente, as **equações diferenciais de equilíbrio independem do tipo de material**. No presente problema, de estado axisimétrico, a única das equações de equilíbrio não triviais é (11.4)₁, que toma a forma

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (11.52)$$

uma vez que $\partial/\partial\theta = 0$. A condição de início de escoamento, segundo o critério de Tresca, é

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r) = \frac{\sigma_E}{2}. \quad (11.53)$$

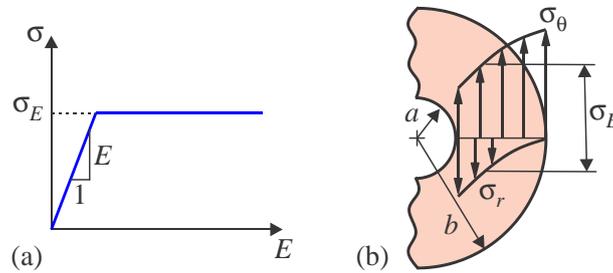


Figura 11.7: Distribuição das tensões ao longo da espessura num tubo em plastificação total.

As equações (11.52) e (11.53) formam um sistema de duas equações e duas funções incógnitas. Eliminando $(\sigma_\theta - \sigma_r)$ do segundo termo de (11.52) com o uso de (11.53), tem-se a equação diferencial

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_E}{r} \quad \text{solução: } \sigma_r(r) = \sigma_E \ln r + C. \quad (11.54)$$

A constante C é obtida aplicando a **condição de contorno** na superfície externa da parede do cilindro, $\sigma_r(b) = \sigma_E \ln b + C = 0$, o que resulta em $C = -\sigma_E \ln b$. Assim, a solução do estado de tensões vem de (11.54) e (11.53):

$$\boxed{\sigma_r(r) = \sigma_E \ln \frac{r}{b} \quad \text{e} \quad \sigma_\theta(r) = \sigma_r + \sigma_E = \sigma_E \left(1 + \ln \frac{r}{b}\right)} \quad (11.55)$$

A pressão que leva à **plastificação completa da parede**, P_P , é obtida fazendo $P_P = -\sigma_r(r = a)$, i.e.

$$\boxed{P_P = -\sigma_E \ln \frac{a}{b}} \quad (11.56)$$

P_P é a pressão máxima de colapso plástico no cilindro para um material que tenha ductibilidade suficiente para a deformação plástica completa na parede. A distribuição das tensões na plastificação total, equações (11.55), é visualizada na Figura 11.7.

dado valor de raio intermediário c :

$$\sigma_r = \frac{c^2 P_c}{b^2 - c^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad \text{e} \quad \sigma_\theta = \frac{c^2 P_c}{b^2 - c^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad \text{para } c \leq r \leq b \quad (11.62)$$

As distribuições das tensões nas regiões plástica e elástica do tubo, eqs.(11.60) e (11.62), são visualizadas na Figura 11.9. Da formulação observa-se que, dado um valor para o raio c da interface entre as regiões plastificada e elástica, a pressão interna P_i necessária é diretamente obtida de (11.61) e a distribuição das tensões vem de (11.62). Entretanto, na situação mais comum, em que se conheça a pressão interna aplicada, a determinação de c não pode ser obtida explicitamente de (11.61), mas deve ser obtida numericamente por um método de determinação de raiz de uma equação não-linear.

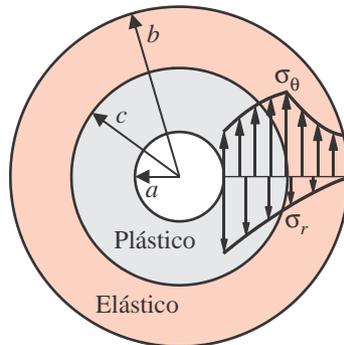


Figura 11.9: Tensões nas regiões plástica e elástica do tubo sob plastificação parcial.

11.3.4 Exemplo 11.2 - Pressões máximas em cilindro de parede espessa

Considere-se um cilindro fechado com raios interno e externo de valores $a = 100$ mm e $b = 150$ mm, respectivamente. O material tem tensão de escoamento $\sigma_E = 220$ MPa.

- Determinar a pressão de início de escoamento na parede do cilindro e a pressão de plastificação total;
- Para a pressão interna de $P = 77$ MPa, determinar a profundidade plastificada,
- e as tensões nas superfícies interna, externa, e na interface entre as regiões elástica e plástica.

Solução:

(a) As pressões para início de escoamento e para plastificação total da parede vêm diretamente de (11.51) e (11.56):

$$P_E = \frac{\sigma_E (b^2 - a^2)}{2b^2} = \frac{220 (150^2 - 100^2)}{2 \times 150^2} = 61,11 \text{ MPa,}$$

$$P_P = -\sigma_E \ln \frac{a}{b} = -220 \ln \frac{100}{150} = 89,2 \text{ MPa.}$$

(b) A equação (11.61) relaciona a pressão interna com a profundidade plastificada. Entretanto, quando a pressão é conhecida, a determinação da profundidade c precisa ser obtida via um método de determinação de raízes de equação não linear, como o método de Newton-Raphson. Entretanto, a equação (11.61) pode ser posta em termos de apenas três invariantes: P/σ_E , b/c e b/a , i.e.:

$$\frac{P}{\sigma_E} = \ln \frac{b/c}{b/a} - \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{b/c} \right)^2 \right] \quad (11.63)$$

Arbitrando valores para os invariantes geométricos, a/c e b/c , podem-se plotar os valores de P/σ_E como na Figura 11.10. Para os dados do problema tem-se que $P/\sigma_E = 77/220 = 0,35$ e $b/a = 1,5$. Do gráfico pode-se obter aproximadamente o valor $b/c \approx 1,3$. Usando-se a outra opção, do método de Newton-Raphson, obtém-se uma solução mais precisa como $b/c \approx 1,29$, o que resulta na profundidade plasticada $c = b/1,29 = 116,2$ mm.

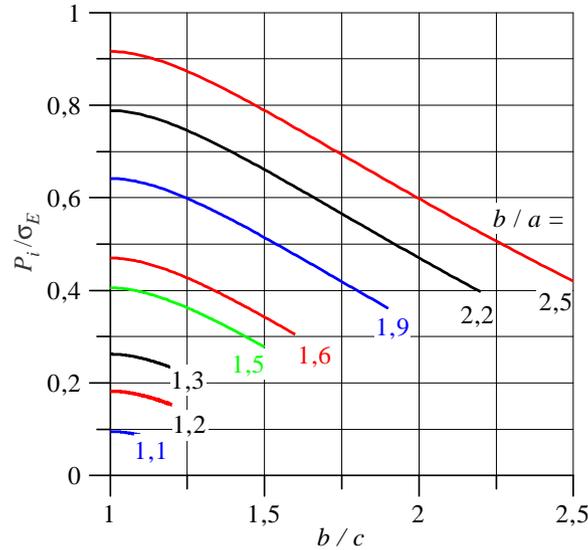


Figura 11.10: Valores de pressão de plastificação parcial, P_i/σ_E , versus parâmetros geométricos a/c e b/c .

(c) Para a pressão interna $P = 77$ MPa, as tensões nas superfícies interna e externa e na superfície da interface são dadas nas eqs.(11.60), usando o valor $c = 116,2$ mm:

$$\begin{aligned} \sigma_r(a) &= \sigma_E \ln \frac{a}{c} - \frac{\sigma_E (b^2 - c^2)}{2b^2} = -P = -77 \text{ MPa}, \\ \sigma_\theta(a) &= \sigma_E + \sigma_r = 220 - 77 = 143 \text{ MPa}, \end{aligned}$$

Na interface, a pressão exercida na superfície interna da camada externa elástica é dada por (11.58), que se pode colocar na forma

$$P_c = \frac{\sigma_E}{2} \left(1 - \frac{1}{(b/c)^2} \right) = \frac{220}{2} \left(1 - \frac{1}{1,29^2} \right) = 43,9 \text{ MPa}.$$

Assim, as tensões nas superfícies interna e externa da camada elástica são obtidas por (11.62):

$$\begin{aligned} \sigma_r(c) &= \frac{c^2 P_c}{b^2 - c^2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) = -P_c = -43,9 \text{ MPa}, \\ \sigma_\theta(c) &= \frac{c^2 P_c}{b^2 - c^2} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) = \frac{43,9}{1,29^2 - 1} (1 + 1,29^2) = 176,1 \text{ MPa}, \\ \sigma_r(b) &= 0, \\ \sigma_\theta(b) &= \frac{2c^2 P_c}{b^2 - c^2} = \frac{2 \times 43,9}{1,29^2 - 1} = 132,2 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

11.4 Furo circular em placa sob tração

Considera-se nessa seção o problema idealizado de uma placa infinita com um furo circular de raio a , submetida a tração uniforme σ_0 em pontos distantes do furo. Esse problema é importante devido a diversos aspectos. Por um lado, sua solução será válida em situações mais práticas, em que a placa não é de fato infinita, mas simplesmente “grande”, em relação ao diâmetro do furo, devido ao Princípio de St.-Venant. Isso torna a análise útil na estimativa de solução das tensões em furos de chapas tracionadas, em que os furos são usados para ventilação ou passagem de cabos ou outros acessórios. Em segundo lugar, a presente análise é útil como forma de exercitar e exemplificar a manipulação das equações gerais de mecânica dos sólidos, partindo de sua forma diferencial, em problemas não uniaxiais. Finalmente, a solução obtida ilustra de forma bastante concreta e evidente o conceito de **gradiente de tensões** num corpo, a concentração de tensões próximo de irregularidades geométricas e o **fator de concentração de tensões**, K_t .

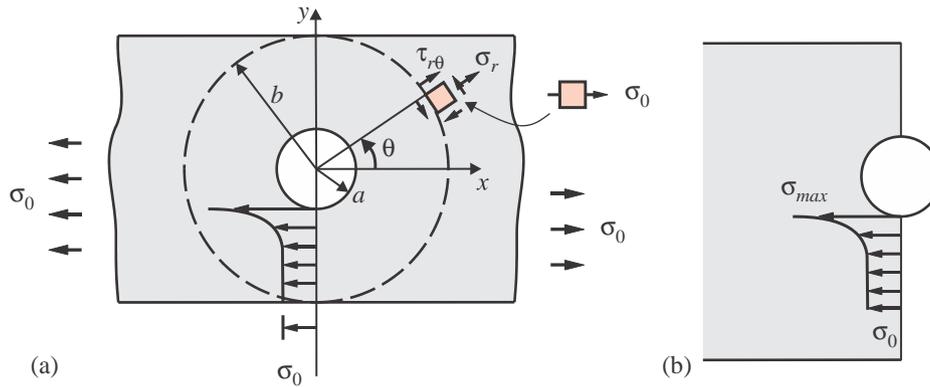


Figura 11.11: Diagrama de corpo livre de região em torno de furo em placa sob tração.

Considera-se uma placa infinita com um furo circular de raio a . Coloca-se um sistema de eixos cartesianos xyz no centro do furo. O carregamento é constituído por uma tensão $\sigma_x = \sigma_0$ uniforme em pontos infinitamente distantes do furo. Então, nessa região distante, o estado de tensões é simples e conhecido: uniaxial. A questão que se põe é: qual o estado de tensões nas imediações do furo? A priori, já se sabe que próximo do furo o estado de tensões não pode ser uniaxial. Por exemplo, no ponto $(x; y) = (a; 0)$, é impossível que σ_x seja igual a σ_0 ou a qualquer valor não nulo.

O procedimento de solução consiste em, primeiramente, definir um problema auxiliar, que consiste em isolar um disco de raio externo b e raio interno a , como no tracejado da Figura 11.11. Esse raio externo b não tem seu valor explicitado, porém é requerido que seja suficientemente grande tal que **as tensões em $r = b$ não sofram nenhuma influência do furo**. Assim, em vez de uma placa infinita, tem-se um disco, em que o estado de tensões na borda externa é conhecido, i.e., $\sigma_x(r = b) = \sigma_0$. Deseja-se obter as tensões nos pontos internos ao disco.³

Como agora a geometria é de revolução, é mais adequado utilizar um sistema cilíndrico de coordenadas, $r\theta z$, como ilustrado na Figura 11.11. Na borda, $r = b$, o **estado de tensões plano é conhecido no sistema xyz** , dado por: $\{\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}\} = \{\sigma_0; 0; 0\}$. Torna-se necessário fazer **transformação das componentes de tensões** para o sistema cilíndrico, i.e., $\{\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}\} \rightarrow \{\sigma_r; \sigma_\theta; \tau_{r\theta}\}$. Isso é obtido pelas equações de transformação de tensão, eqs. (5.17)

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x c^2 + \sigma_y s^2 + 2\tau_{xy} sc, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x s^2 + \sigma_y c^2 - 2\tau_{xy} sc, \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) sc + \tau_{xy}(c^2 - s^2),\end{aligned}\tag{11.64}$$

onde $c \equiv \cos \theta$ e $s = \sin \theta$. Aplicando ao ponto $r = b$, ($\sigma_x = \sigma_0$ e $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$) obtém-se

³Essa solução é devida a Kirsch, G, 1898, conforme [9].

Inspecionando as equações (11.76), esses valores limites são facilmente determinados:

$$\begin{aligned} r = a &\longrightarrow \begin{cases} \sigma_\theta(r = a) = \boxed{\sigma_{\theta \max} = 3\sigma_0} \\ \sigma_r(r = a) = 0. \end{cases} \\ r \longrightarrow \infty &\longrightarrow \begin{cases} \sigma_\theta(r \longrightarrow \infty) = \sigma_0, \\ \sigma_r(r \longrightarrow \infty) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.77)$$

- Linha $\theta = 0$ (eixo $y = 0$)

$$\sigma_r(r) = \frac{\sigma_0}{2} \left[2 - 5\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right], \quad \sigma_\theta(r) = \frac{\sigma_0}{2} \left[\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4} \right]. \quad (11.78)$$

No ponto $(r, \theta) = (a, 0)$ ocorre a tensão normal mínima, como pode ser visto inspecionando essas equações para seus valores limites:

$$\begin{aligned} r = a &\longrightarrow \begin{cases} \sigma_\theta(r = a) = \boxed{\sigma_{\theta \min} = -\sigma_0} \\ \sigma_r(r = a) = 0. \end{cases} \\ r \longrightarrow \infty &\longrightarrow \begin{cases} \sigma_\theta(r \longrightarrow \infty) = 0, \\ \sigma_r(r \longrightarrow \infty) = \sigma_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.79)$$

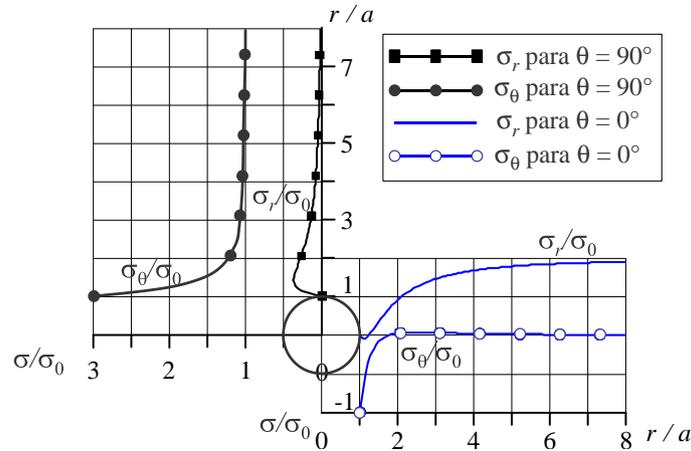


Figura 11.13: Variação das tensões normais em torno de um furo circular em placa infinita.

A Figura 11.13 mostra a variação das tensões ao longo das linhas $x = 0$ e $y = 0$, dadas nas equações (11.76) e (11.78). Analisando a curva de $\sigma_\theta(r)$ ao longo da linha $\theta = 90$, observa-se que rapidamente os valores decrescem do máximo, $3\sigma_0$, e se aproximam assintoticamente do valor nominal σ_0 . Utilizando a eq. (11.76), obtém-se os seguintes valores para pontos gradualmente afastados da borda do furo:

r/a	$\sigma_\theta(r)/\sigma_0$
1	3
2	1,22
3	1,07
4	1,04

Então, a uma distância de dois diâmetros do centro do furo, a diferença entre a tensão máxima e a nominal é de apenas 4 %. Esse fenômeno é denominado **efeito de concentração de tensão**. Sua origem reside da irregularidade geométrica, que no presente caso é a presença do furo. Entretanto, o efeito ocorre em qualquer tipo de peça: barras retas de seção uniforme com qualquer tipo de entalha, chapas, etc, submetidas a qualquer tipo de carregamento: tração, flexão, torção. Com o

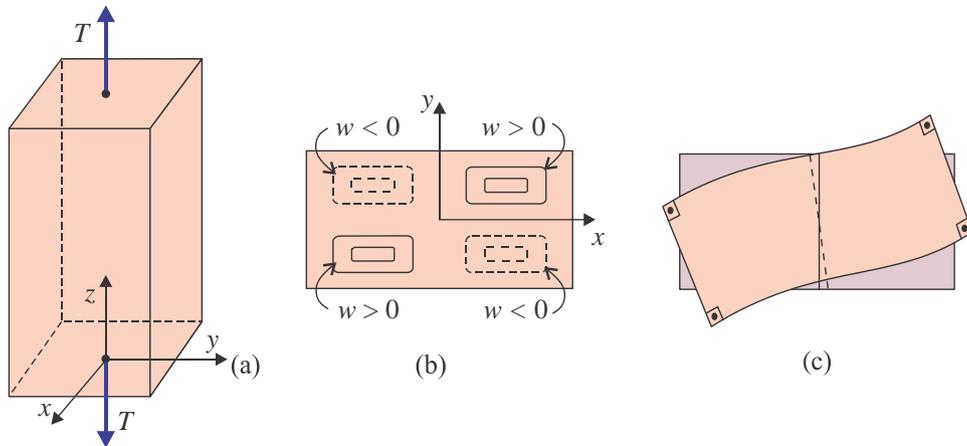


Figura 11.14: (a) Barra de seção transversal retangular sob torção; (b) seção transversal e ilustração das curvas de nível de deslocamento w na direção axial z ; (c) configuração deformada da seção transversal.

com seção uniforme. As componentes de deslocamentos de um ponto arbitrário P são u , v e w . As hipóteses cinemáticas do modelo de St.-Vanant são sumarizadas por:

1. w é independente de z , i.e., $w = w(x, y)$ apenas. Isso significa considerar que os empenamentos de todas as seções são idênticos.
2. u e v são determinados apenas pela rotação da seção em torno de O . Essa rotação é de corpo rígido, exceto pelo empenamento axial.

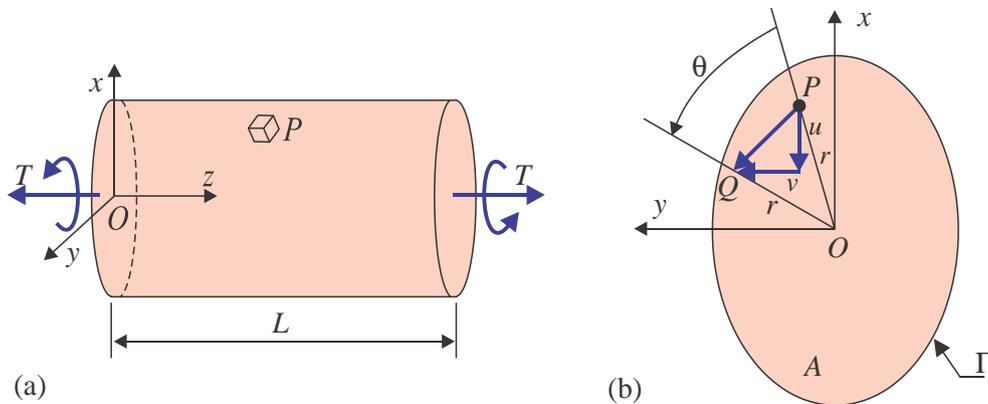


Figura 11.15: (a) Barra de seção arbitrária, eixos; (b) seção transversal com u e v de um ponto arbitrário P e rotação θ da seção em torno de O .

Consideremos que o ponto O de origem dos eixos se localize no centro de torção da seção. Tomemos um segmento de material OP como na Figura 11.15b. A rotação da seção faz com que P desloque-se para a posição Q , porém mantendo a mesma distância r de O . O deslocamento PQ é circunferencial, definido pelo **ângulo θ de rotação da seção, por unidade de comprimento**. Então, os campos de deslocamentos u , v e w tomam a seguinte forma simplificada

$$u = u(y, z) = -\theta zy, \quad v = v(x, z) = \theta zx, \quad w = w(x, y) = \theta \psi(x, y). \quad (11.81)$$

Nota-se que a componente w é separada em termos da **função de empenamento** $\psi(x, y)$. Então, o campo cinemático é inteiramente determinado por apenas uma função incógnita, $\psi(x, y)$ e um escalar θ . Resta aplicar esse campo nas equações gerais: equilíbrio, relações deformação-deslocamento e

relações constitutivas, eqs.(11.1)-(11.3). Substituindo (11.81), as relações de deformação-deslocamentos (11.2) simplificam-se para

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \text{e} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right), \end{aligned} \quad (11.82)$$

e a lei de Hooke 3D em (11.3) gera

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} &= G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \text{e} \quad \tau_{yz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (11.83)$$

Note-se que não há tensões normais na barra, em qualquer das direção xyz . Cada ponto sofre apenas cisalhamento puro τ_{xz} e τ_{yz} , ambos dependentes de θ e ψ , como na Figura 11.16a. Substituindo as tensões (11.83) nas equações locais de equilíbrio, (11.1), sem forças de corpo, nota-se que as duas primeiras equações são identicamente satisfeitas, e (11.1)₃ fica

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega} \quad (11.84)$$

Aqui utiliza-se uma conceituação matemática, em que se considera a seção transversal da barra como constituída por um conjunto de pontos no seu **contorno**, denominado Γ , e pontos internos ao contorno, denominados pontos do **domínio** das funções, representado aqui por Ω . Então, a equação (11.84) é a condição de equilíbrio de qualquer ponto no domínio, i.e., pontos internos ao contorno, mas não pode se aplicar a pontos localizados no contorno. Torna-se necessário identificar outra expressão para a condição de equilíbrio em pontos sobre o contorno.

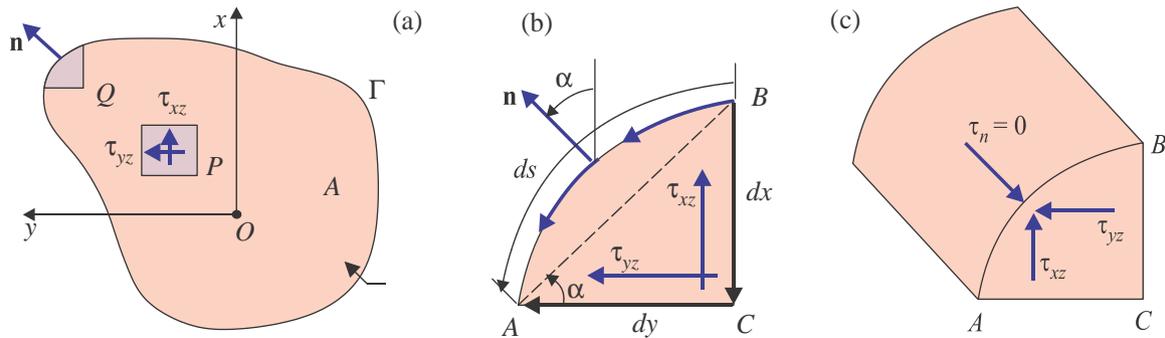


Figura 11.16: (a) Tensões num ponto P interno à seção e num ponto Q sobre seu contorno Γ . (b) elemento diferencial em Q sobre o contorno. (c) vista em perspectiva do elemento diferencial de contorno.

Para um ponto situado no **contorno lateral** Γ da barra, tomemos um ponto Q no contorno e isolemos um elemento diferencial como aquele nas Figuras 11.16b e (c). As componentes τ_{xz} e τ_{yz} atuantes na seção devem ter uma resultante τ_n que satisfaz à **condição de contorno lateral**. Essa condição é que $\tau_n = 0$, uma vez que a superfície lateral da barra é considerado livre de cargas. O arco AB tem comprimento ds e o vetor normal à superfície é \mathbf{n} sendo positivo quando apontando para fora do corpo. \mathbf{n} tem inclinação α em relação ao eixo x . Como ds é infinitesimal, o arco pode ser aproximado pela reta AB . O vetor \mathbf{n} tem componentes

$$n_x = \cos \alpha \quad \text{e} \quad n_y = \text{sen} \alpha. \quad (11.85)$$

$$\boxed{-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G\theta, \quad \forall (x, y) \in \Omega} \quad (11.98)$$

Note-se que, embora τ_{xz} e τ_{yz} variem ponto a ponto da seção transversal, a soma das derivadas acima é uma constante em toda a seção.

A solução do problema de torção é a função tensão ϕ que satisfaz (11.96) e (11.97). Observando a condição de contorno (11.97), nota-se que, uma vez que $d\phi ds = 0$ no contorno, então ϕ deve ser constante ao longo do contorno, i.e.,

$$\phi = C = \text{const.}, \quad \forall (x, y) \in \Gamma \quad (11.99)$$

Se a seção não contiver furos, i.e., se ela for definida por uma única curva, a constante C pode ser arbitrada para qualquer valor, como por exemplo $C = 0$ no contorno.

As últimas partes do contorno do corpo a serem consideradas são as **extremidades da barra**. Uma vez que a solução obtida pressupõe que o empenamento independe de z , então não se pode vincular as seções completas das extremidades. Pode-se apenas aplicar tensões nelas, distribuídas da mesma forma que as tensões nas seções internas. As tensões nas extremidades devem ter resultante de momento na direção z , i.e., M_z , igual ao torque T que se deseja aplicar.

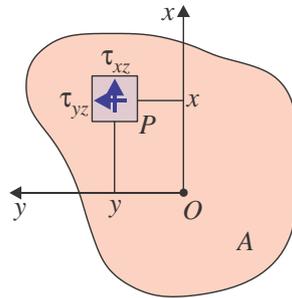


Figura 11.18: Seção transversal no extremo da barra e tensões atuantes.

Consideremos um ponto na extremidade da barra, como na Figura 11.18. O elemento diferencial de momento torçor em torno do eixo z é $dM_z = (\tau_{yz}dA)x - (\tau_{xz}dA)y$. Integrando sobre toda a área A da extremidade, se tem

$$\boxed{T = \int_A dM_z = \int_A (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dA} \quad (11.100)$$

Substituindo (11.94) em (11.100),

$$T = - \int_y \left(\int_x \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx \right) dy - \int_x \left(\int_y \frac{\partial \phi}{\partial y} y dy \right) dx. \quad (11.101)$$

Integrando por partes cada termo se tem

$$T = - \int_y \left(\phi x|_{\Gamma} - \int_x \phi dx \right) dy - \int_x \left(\phi y|_{\Gamma} - \int_y \phi dy \right) dx, \quad (11.102)$$

A notação $\phi x|_{\Gamma}$ representa a diferença de valores de ϕx em pontos extremos do contorno Γ . O detalhamento depende da forma geométrica da seção. Entretanto, como se deve ter $\phi = 0$ em todo o contorno, segue-se que $\phi x|_{\Gamma} = \phi y|_{\Gamma} = 0$, e se tem a relação entre o torque aplicado T e ϕ :

$$\boxed{T = -2 \int_A \phi dA} \quad (11.103)$$

Deve-se observar que o torque deve ser aplicado nas extremidades através de uma força distribuída tangente à superfície da extremidade, se distribuindo exatamente como as tensões da solução. Entretanto, do ponto de vista prático, essa restrição não é forte, devido ao Princípio de St.-Venant, em que os efeitos provocados por uma forma arbitrária de aplicação de T se restringe a uma pequena extensão da barra próxima de suas extremidades. Tipicamente, a perturbação no campo de tensões estende-se até uma distância menor que aproximadamente d ou $2d$, onde d é uma dimensão representativa da largura da seção transversal. No resto da barra, na região distante das extremidades, as tensões e deslocamentos tendem a se comportarem de forma bastante similares aos resultados da formulação mostrada, independentemente da forma de aplicação das forças nas extremidades.

O **processo de solução** normalmente começa pela definição do ângulo de torção θ , e em seguida passa à resolução do problema diferencial (11.96)-(11.97) para a determinação da função tensão ϕ . Em seguida as tensões são obtidas de (11.94), os deslocamentos coplanares u e v de (11.81) e o torque aplicado de (11.103). A determinação da função empenamento ψ exige a solução de outro problema diferencial, e não é tão simples de ser obtida.

Observação:

Comparando as eqs.(11.101)-(11.103), observamos que o torque na seção é constituído por duas partes iguais, uma devido a τ_{xz} e outra devido a τ_{yz} .

(11.104)

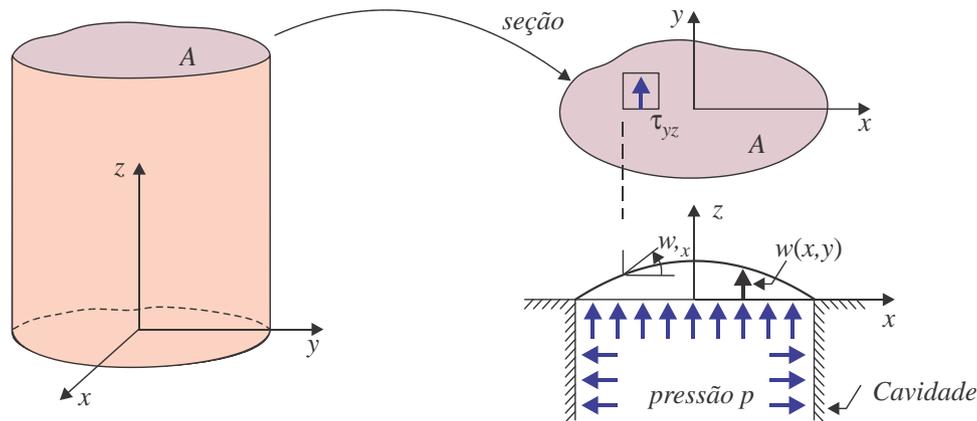


Figura 11.19: Seção transversal de uma barra e cavidade com membrana pressurizada.

11.6.1 Analogia da membrana

Prandtl observou que as equações diferenciais do problema de torção, (11.96) e (11.97), são as mesmas que definem o problema de deflexão transversal de uma membrana pressurizada. O problema é definido da seguinte forma. Considere uma cavidade com borda plana, de área A , com o contorno Γ de mesmo formato e dimensões que a seção transversal da barra reta sob torção (ver Figura 11.19). Sobre essa cavidade, monta-se uma película bastante fina e aplica-se uma pressão interna p . Se a deflexão transversal $w = w(x, y)$ da membrana for suficientemente pequena, prova-se que ela pode ser determinada pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{p}{\sigma}, \quad \forall (x, y) \in A, \\ w(x, y) &= C = \text{const.}, \quad \forall (x, y) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (11.105)$$

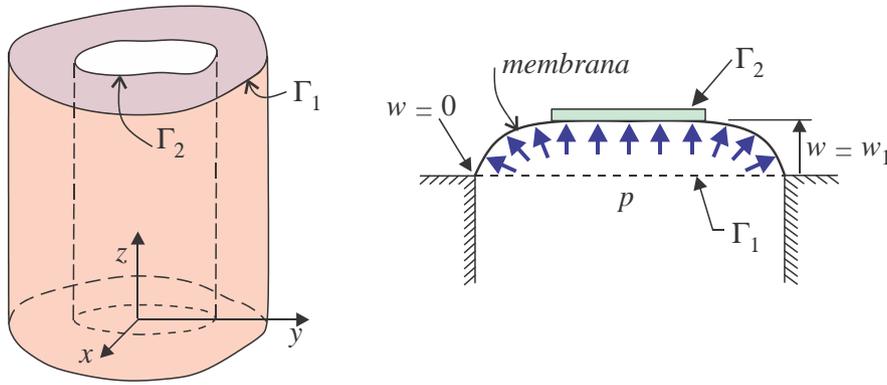


Figura 11.21: (a) Barra com furo na seção transversal; (b) cavidade com membrana pressurizada e placa que representa a geometria do furo da barra.

y . Devido ao maior comprimento b em y , espera-se que as inclinações $\partial w/\partial y$ da membrana sejam pequenas em todos os locais, da mesma forma que τ_{xz} . Usa-se então a hipótese que $\partial w/\partial y \approx 0$, o que implica considerar $w = w(x)$ apenas, i.e., a membrana assume aproximadamente a forma de um cilindro de seção uniforme ao longo de toda a largura b .

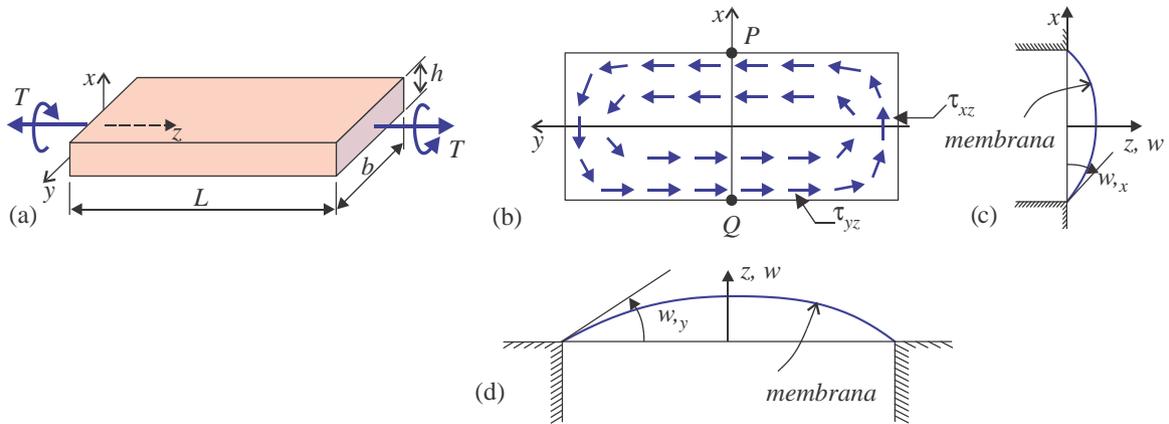


Figura 11.22: (a) Barra de seção retangular delgada, (b) tensões na seção; (c) e (d) vistas laterais da cavidade e da membrana inflada correspondente.

Uma solução aproximada para as tensões consiste em considerar que a forma da membrana varia em x numa forma parabólica, o que significa que $\partial w/\partial x$, e por analogia, τ_{yz} , variam de forma linear em x :

$$\tau_{yz}(x) = \frac{\tau_{yz \max}}{h/2} x, \quad \forall (x, y) \in A, \quad (11.107)$$

como pode ser vista na Figura 11.23. $\tau_{yz \max}$ é o valor máximo de τ_{yz} , que ocorre nas bordas $\pm h$. A parcela T_y do torque T devida a τ_{yz} é a resultante do momento devido a τ_{yz} na seção:

$$T_y = 2b \int_{x=0}^{h/2} \tau_{yz} x \, dx. \quad (11.108)$$

Usando (11.107), e integrando, se obtém $T_y = \tau_{yz \max} b h^2 6$. Da observação em (11.104), sabe-se que **essa é apenas metade do torque na seção**, sendo que a outra metade é devida a τ_{xz} . Apesar de pequenas essas tensões τ_{xz} , elas atuam sobre braços de alavanca muito maiores que os de τ_{yz} , de forma a gerarem o mesmo torque. Então, o torque total aplicado na seção é $T = 2T_y$, i.e.,

$$T = \frac{\tau_{yz \max} b h^2}{3} \quad \rightarrow \quad \tau_{yz \max} = \frac{3T}{b h^2} \quad (11.109)$$

Então, dado o valor do torque que se deseja aplicar, se tem uma estimativa da tensão máxima na barra, que ocorre no meio do lado mais longo da seção.

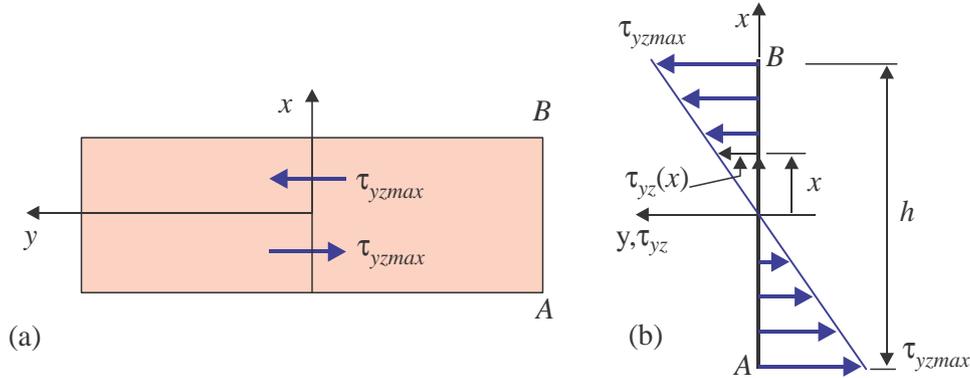


Figura 11.23: (a) tensões $\tau_{yz \max}$ na seção retangular delgada. (b)Variação linearizada de τ_{yz} ao longo de x .

O ângulo de torção θ pode ser relacionado a τ_{yz} através de (11.98), fazendo $\tau_{xz} \approx 0$ e tomando τ_{yz} de (11.107):

$$-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = -2G\theta,$$

$$\boxed{-\frac{\tau_{yz \max}}{h/2} = -2G\theta}. \quad \text{De (11.109)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{3T}{b h^3 G} \quad \text{ou} \quad T = \frac{\theta b h^3 G}{3}} \quad (11.110)$$

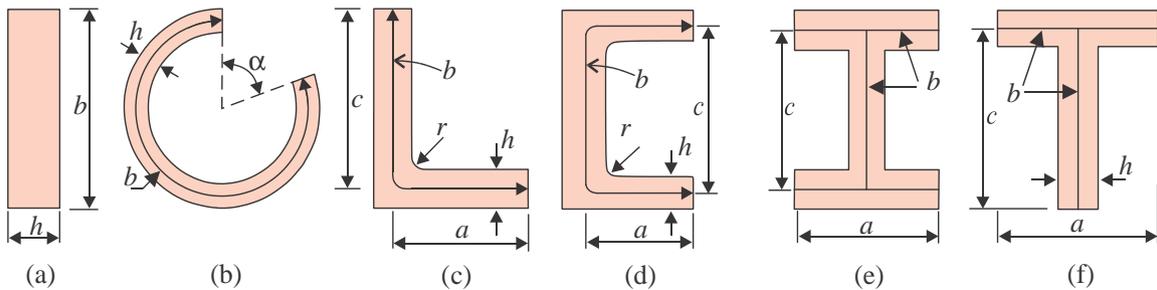


Figura 11.24: Alguns perfis abertos de parede delgada. Em todos os casos, $\tau_{\max} = 3T/bh^2$ e $\theta = 3T/bh^3G$. b é o comprimento do perímetro médio do perfil.

Torção em outros perfis delgados

A analogia de membrana pode fornecer subsídios para estimar as tensões nominais máximas e a rigidez de barras de seções abertas delgadas, como os exemplos da Figura 11.24. Nesses casos, se a seção for uniforme, τ_{\max} e θ são obtidos com as mesmas expressões (11.109) e (11.110) do caso de seção reta (Figura 11.24a), apenas tomando b como o comprimento da curva média da seção, indicada nas figuras. Entretanto, **a tensão é concentrada** nos raios de concordância internos nos casos (c) e (d). Assim, a formulação provê, nesses casos, apenas os **valores nominais de tensão**.

Observação: para um dado valor de ângulo de torção θ , as eqs. (11.110) e (11.109) permitem

Após a integração e simplificação, se obtém o torque em termos do ângulo de torção:

$$T = \frac{G\theta(2a)^3(2b)}{3} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \left(\frac{a}{b}\right) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right] \quad (11.119)$$

Essa expressão também pode ser facilmente usada para obter θ em termos de um torque T conhecido.

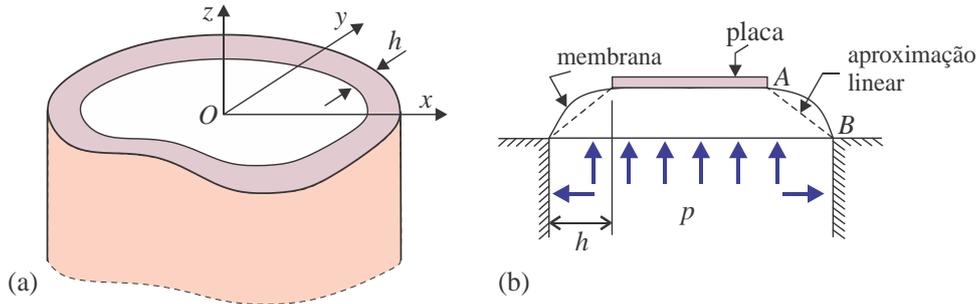


Figura 11.27: (a) Seção tubular de parede delgada fechada arbitrária com furo e (b) analogia da membrana com aproximação linear desta.

11.6.4 Tubos de parede delgada

Consideramos seções com um único furo, como na Figura 11.27a. A analogia de membrana permite visualizar que as tensões na seção transversal do tubo sejam proporcionais à inclinação da membrana no aparato mostrado na figura (b), em que a membrana se apoia sobre a borda externa B , e uma placa em peso, com a forma do furo, é apoiada sobre a membrana, de forma a manter contato em toda a borda da placa.

Caso a parede seja fina, é possível usar a hipótese que a membrana entre A e B seja bem aproximada por uma reta. Isso significa considerar que a tensão τ , que atua na direção tangente à linha média da parede, seja uniforme ao longo da espessura.

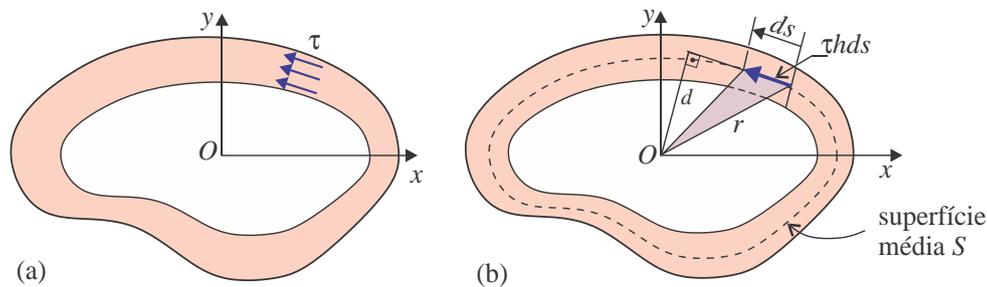


Figura 11.28: (a) Tensões τ tangentes à parede da seção tubular de parede delgada arbitrária e (b) perímetro médio S e braço de alavanca d para o momento devido a τ .

Consideramos o caso em que a espessura da seção seja uniforme. Podemos identificar uma força diferencial $\tau h ds$ atuando ao longo de uma região diferencial de área $h ds$. Essa força exerce um momento $dM_x = (\tau h ds)d$, como na Figura 11.28b, onde d é o braço de alavanca perpendicular à força até o ponto O . O momento resultante em toda a seção deve ser igual ao torque aplicado:

$$T = \tau h \oint_S d ds. \quad (11.120)$$

O símbolo \oint_S indica que a integral de d deve ser feita para s que percorra todo o perímetro médio S da seção indicado na figura. Nota-se que $d ds$ é o dobro da área do triângulo hachurado na Figura 11.28b. Então, de fato, a integral em (11.120) é simplesmente igual a $2\bar{A}$, tal que

$$T = 2\tau h\bar{A} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{T}{2h\bar{A}} \quad (11.121)$$

A área \bar{A} não é a área A da seção transversal da barra, mas é a área cheia, interna ao perímetro médio S . Nota-se que, conhecido o torque, se tem uma estimativa simples para a tensão na parede. Claramente, essa expressão não inclui efeitos de **concentração de tensões** em cantos internos que possam existir na seção.

Ângulo de Torção

O ângulo de torção será deduzido usando o conceito de energia de deformação, a ser detalhado apenas no Capítulo 14. Utiliza-se a primeira lei da termodinâmica, que no presente caso se simplifica em um balanço entre o trabalho W aplicado na barra pelo torque T e a variação da energia de deformação elástica U , dados por

$$W = U \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}T\theta = \frac{1}{2} \int_A \tau\gamma \, dA. \quad (11.122)$$

γ é a deformação cisalhante, que pode ser relacionada à tensão pela lei de Hooke: $\gamma = \tau/G$. Trazendo a tensão τ de (11.121) se obtém

$$\frac{1}{2}T\theta = \frac{1}{2G} \int_A \tau^2 dA = \frac{\tau^2 A}{2G} = \frac{T^2 A}{8G\bar{A}^2 h^2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{TS}{4G\bar{A}^2 h} \quad (11.123)$$

A área A da seção transversal pode ser representada para o tubo de parede fina, por $A = Sh$, onde S é o comprimento do perímetro médio da parede. Então,

$$\theta = \frac{TS}{4G\bar{A}^2 h} \quad (11.124)$$

As equações (11.121) e (11.124) permitem a determinação da tensão e de θ para um dado torque T . Essas equações **podem ser aplicadas a todas as geometrias de tubo retos de paredes fechadas delgadas de espessura uniforme, com um único furo**, como os casos da Figura 11.29. A rigidez torcional de um tubo é obtida de (11.124):

$$K_t = \frac{T}{\theta} = \frac{4G\bar{A}^2 h}{S} \quad (11.125)$$

Nota-se que a rigidez é proporcional ao quadrado da área interna S , não à área da própria seção de material, como no caso do perfil aberto, eq.(11.110), em que a rigidez é $K_a = T/\theta = bh^3G/3 = Ah^2G/3$, onde $A = bh$ é a área de material na seção.

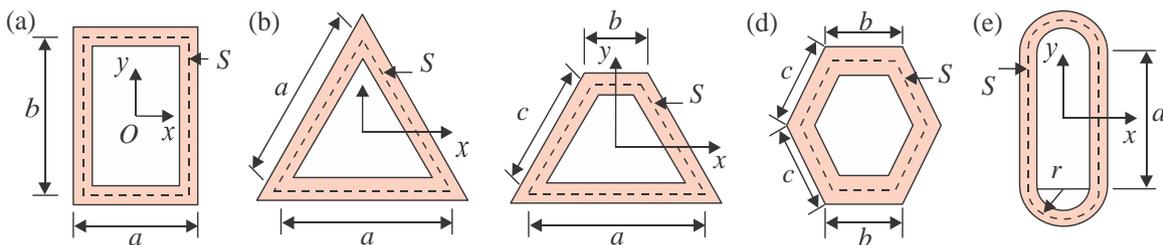


Figura 11.29: Algumas seções tubulares fechadas de parede delgada em que se pode usar as equações (11.121) e (11.124).

Exemplo 11.4 - Rigidez torcional de tubo de seção retangular

Considere uma barra com a seção tubular retangular como na Figura 11.29a, com lados $a = 20$ mm, $b = 30$ mm e espessura $h = 2$ mm, submetida a um torque $T = 200$ Nm. Determine a tensão cisalhante nominal e o ângulo de torção. Use $G = 80$ GPa. Ignore a concentração de tensões nos cantos internos da seção. Qual o ângulo de torção de uma extremidade em relação à outra, se o comprimento do tubo for $L = 1$ m?

Solução:

A tensão cisalhante é estimada de (11.121), com área interna dada por $\bar{A} = ab = 600$ mm². Então, $\tau = T/2h\bar{A} = 200.000/(2 \times 600 \times 2) = 83,3$ MPa. O ângulo de torção por unidade de comprimento é obtido de (11.124), com o perímetro $S = 2(a+b) = 100$ mm. Então, $\theta = TS/4G\bar{A}^2h = 8,68 \cdot 10^{-5}$ rad/mm. Para o tubo de $L = 1$ m, a rotação relativa entre as extremidades é $\Delta\varphi = \theta L = 8,68 \cdot 10^{-2}$ rad/mm = $4,97^\circ$.

11.7 Vigas curvas

Existem diversos tipos de componentes mecânicos que podem ser classificados como vigas curvas. São elementos delgados que suportam carga desenvolvendo esforços de momento fletor, de maneira análoga às vigas retas. O exemplo mais típico é o do gancho de elevação de carga, como mostrado na Figura 11.30. Essa classe de vigas se caracterizam por possuírem pequenos valores de raio de curvatura, quando comparado à altura da seção, i.e., altos valores h/R . Nessas situações, a distribuição de tensões normais na seção transversal é bastante diferente daquela das vigas retas.



A teoria detalhada nessa seção é restrita à seguinte situação:

- a barra curva é toda contida num único plano (xy), de forma a suprimir efeitos de torção;
- a seção transversal da barra pode variar suavemente, mas todas as seções deve ser simétrica em relação ao plano xy ;
- o esforço de momento fletor deve ser perpendicular ao plano xy que contém a viga;
- a formulação é válida apenas na faixa elástico-linear do material;
- o material é isotrópico, tal que o módulo de elasticidade é o mesmo em tração e compressão.

Os aspectos principais da teoria são ilustrados na Figura 11.31, que mostra um segmento do arco. Se consideramos um plano normal à seção ab , podemos rotacionar a viga inteira de forma a

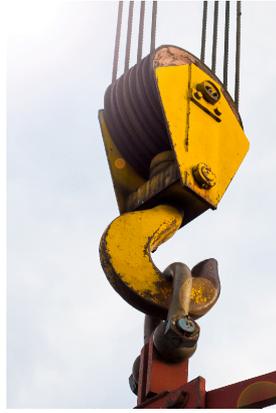


Figura 11.30: Detalhe de um gancho de elevação de cargas em guindaste, com polias e cabos de aço.

tornar essa seção coincidente com os eixos yz . Consideramos uma extensão de arco de comprimento diferencial, definido pelo ângulo $d\phi$ em torno de z . Essa região do arco é caracterizada pelos seguintes raios de curvatura:

$$\begin{aligned} r_i \text{ e } r_e &= \text{raios de curvatura das superfícies interna e externa do arco;} \\ r_c &= \text{raio de curvatura do centróide da seção naquela região;} \end{aligned} \quad (11.126)$$

Os raios de curvatura são medidos a partir do centro de curvatura O , e são perpendiculares ao arco. Note que a viga curva como um todo não precisa ter raio de curvatura único em toda a sua extensão, o que a limitaria a um arco de círculo. Cada ponto de sua extensão pode possuir um centro de curvatura próprio no plano, e um valor distinto de raio de curvatura. Entretanto, para a presente análise, é suficiente considerar uma região arbitrária, de extensão diferencial, como aquela hachurada na Figura 11.31a, em que os raios de curvatura são designados como em (11.126).

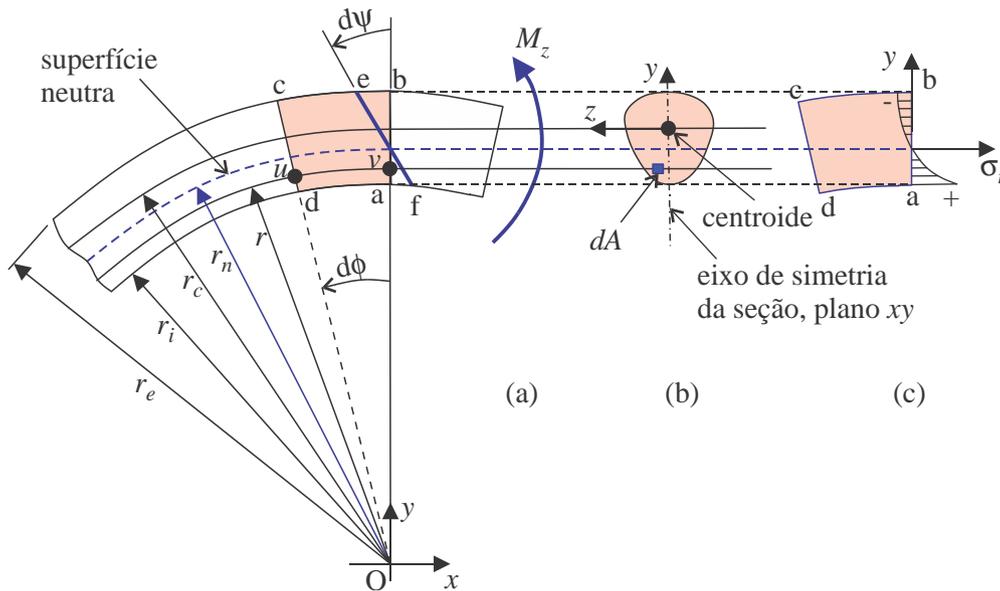


Figura 11.31: Elementos do modelo de vigas curvas sob flexão pura plana.

A teoria é baseada na mesma hipótese fundamental cinemática usada no caso de vigas retas: que as seções transversais, como ab , se mantêm planas após a aplicação do momento fletor M_z , apenas sofrendo rotação $d\psi$ para ef , como indicado na Figura 11.31a. Então o elemento $abcd$ se deforma para $fec d$. Nesse ponto é que os resultados das teorias para vigas retas e curvas se diferenciam.

$$\boxed{\frac{d\psi}{Ed\phi} = \frac{\sigma r}{(r_n - r)}} \quad (11.134)$$

Então (11.133) fica

$$M_z = \frac{\sigma r}{(r_n - r)} \int_A \frac{(r_n - r)^2}{r} dA. \quad (11.135)$$

Expandindo os termos se obtém

$$M_z = \frac{\sigma r}{(r_n - r)} \left[r_n \underbrace{\left(r_n \int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA \right)}_0 - r_n \underbrace{\int_A dA}_A + \underbrace{\int_A r dA}_{r_c A} \right] \quad (11.136)$$

O primeiro termo entre parênteses é nulo uma vez que a linha neutra é tal que r_n satisfaz a nulidade do colchete em (11.131). A última integral é exatamente aquela que identifica a **posição do centróide**:

$$\boxed{r_c = \frac{1}{A} \int_A r dA} \quad (11.137)$$

Então, (11.136) fica na forma

$$M_z = \sigma r A \frac{(r_c - r_n)}{(r_n - r)} \implies \boxed{\sigma = \frac{M_z(r_n - r)}{r A (r_c - r_n)} = \frac{M_z(r_n/r - 1)}{A (r_c - r_n)}, \quad \forall r_i \leq r \leq r_e} \quad (11.138)$$

Essa é a relação final que produz a tensão normal em uma fibra arbitrária como uv na Figura 11.31a, de raio de curvatura r . Nota-se que essa expressão não é linear em r , mas apresenta uma variação hiperbólica como esboçado na Figura 11.31c, através do termo r_n/r . Isso é diferente da variação linear da fórmula de flexão, $\sigma = M_z y / I_z$ da viga reta. A formulação é tal que sempre o denominador é positivo: $r_c - r_n > 0$. Então, se $M_z > 0$ e a fibra uv se encontra abaixo da linha neutra, $r_n - r < 0$, a tensão é trativa. De qualquer forma, as máximas tensões em módulo sempre ocorrem na borda interna do arco de viga, quando $r = r_i$.

Linha neutra para alguns tipos de seção transversal

Podemos usar (11.131) para determinar a posição da linha neutra r_n a partir do centro de curvatura, para diversas geometrias típicas de seção transversal.

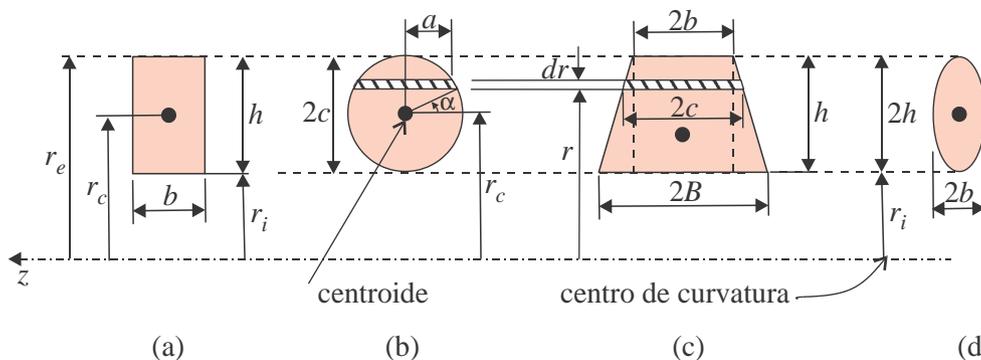


Figura 11.32: Parâmetros geométricos para diversos tipos de seção transversal.

Para **seção retangular** como na Figura 11.32a. Podemos determinar uma expressão geral para

se tem uma expressão para cada caso:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{caso } b = 0 \quad S = 2B \left[-1 + \frac{r_e}{h} \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right) \right] \\ \text{caso } B = 0 \quad S = 2b \left[1 - \frac{r_i}{h} \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right) \right] \end{array}} \quad (11.146)$$

Note-se que as expressões dependem apenas o tamanho da base e da altura da seção, não da forma do triângulo: ele não precisa ser isóceles, mas pode ser escaleno.

Para **seção elíptica** como na Figura 11.32d, dados o raio centroidal r_c e os raios b e h da elipse, o raio r_n de curvatura da linha neutra, a área A , o fator S são dados por

$$\boxed{A = \pi bh, \quad S = \frac{2\pi b}{h} \left(r_c - \sqrt{r_c^2 - h^2} \right), \quad r_n = A/S} \quad (11.147)$$

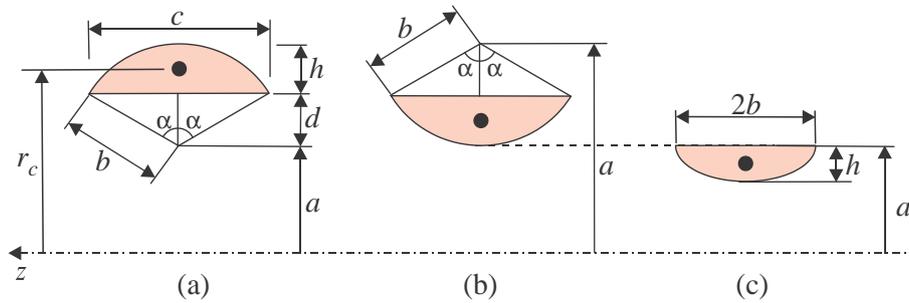


Figura 11.33: (a) e (b) Seções de setor de arco de circunferência, (c) semi elipse.

Consideramos a seção em forma de **setor de arco de circunferência**, como na Figura 11.33a, definida em termos do raio b e do ângulo α . Os raios de curvaturas da linha centroidal r_c , da linha neutra r_n , a área A , o fator S são dados por:

$$A = b^2\alpha - \frac{b^2}{2}\text{sen}2\alpha, \quad r_c = a + \frac{4b\text{sen}^3\alpha}{3(2\alpha - \text{sen}2\alpha)}.$$

$$\text{Caso } a > b: \quad S = 2a\alpha - 2b\text{sen}\alpha - \sqrt{a^2 - b^2} \left[\pi - 2\text{arcsen} \left(\frac{b + a \cos \alpha}{a + b \cos \alpha} \right) \right], \quad (11.148)$$

$$\text{Caso } a < b: \quad S = 2a\alpha - 2b\text{sen}\alpha + 2\sqrt{b^2 - a^2} \ln \left[\frac{b + a \cos \alpha + \sqrt{b^2 - a^2}\text{sen}\alpha}{a + b \cos \alpha} \right].$$

Para seção em forma de **setor de arco de circunferência**, como na Figura 11.33b, o raio da linha centroidal r_c , o raio r_n de curvatura da linha neutra, a área A , o fator S são dados por:

$$A = b^2\alpha - \frac{b^2}{2}\text{sen}2\alpha, \quad r_c = a - \frac{4b\text{sen}^3\alpha}{3(2\alpha - \text{sen}2\alpha)}.$$

$$S = 2a\alpha + 2b\text{sen}\alpha - \sqrt{a^2 - b^2} \left[\pi + 2\text{arcsen} \left(\frac{b - a \cos \alpha}{a - b \cos \alpha} \right) \right]. \quad (11.149)$$

Freqüentemente, a definição do setor de circunferência é feita em termos da largura c da corda e da altura do arco h , como indicado na Figura 11.33a. Uma dedução rápida mostra a relação entre esses parâmetros e aqueles usados nas equações de S acima, α e o raio b . Essas relações são:

$$\boxed{d = \frac{1}{8h} (c^2 - 4h^2), \quad b = d + h \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \frac{d}{b}} \quad (11.150)$$

Para seção em forma de **setor de semi elipse**, como na Figura 11.33c, o raio da linha centroidal r_c , o raio r_n de curvatura da linha neutra, a área A , o fator S são dados por:

$$A = \frac{\pi b h}{2}, \quad r_c = a - \frac{4h}{3\pi} \quad S = 2b + \frac{\pi b}{h} \left(a - \sqrt{a^2 - h^2} \right) - \frac{2b}{h} \sqrt{a^2 - h^2} \arcsen\left(\frac{h}{a}\right) \quad (11.151)$$

Exemplo 11.5 - Vigas curvas espessas e delgadas

Calcule as tensões em duas vigas curvas, com raios de curvatura centroidais (a) $r_c = 100$ mm e (b) $r_c = 300$ mm. A seção transversal é retangular, com dimensões $b \times h = 40 \times 60$ mm². O esforço de momento fletor na seção é $M_z = 1$ kNm. Compare as tensões máximas com aquelas obtidas pela teoria de vigas retas. A Figura 11.34 mostra uma visualização em escala das duas vigas curvas. Pode-se notar que no caso (a) a relação $h/r_c = 60/100 = 0,6$ e no caso (b) é $h/r_c = 60/300 = 0,2$.

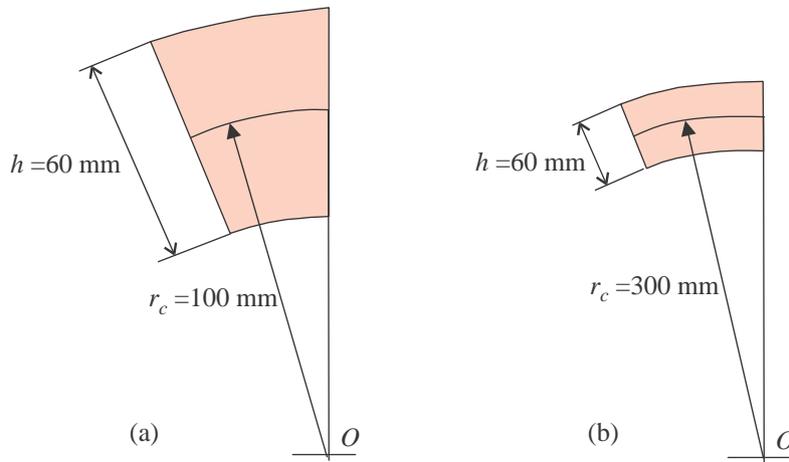


Figura 11.34: Visualização das duas vigas curvas do Exemplo 5. Cada viga está em escala, mas as escalas são distintas entre as duas vigas.

Solução:

Viga reta. Nesse caso se usa a fórmula de flexão, com momento de inércia $I_z = bh^3/12 = 40 \times 60^3/12 = 72 \cdot 10^4$ mm⁴:

$$\sigma_l = \frac{M_z(h/2)}{I_z} = \frac{10^6 \times (60/2)}{72 \cdot 10^4} = 41,667 \text{ MPa.} \quad (11.152)$$

(a) Viga curva de $r_c = 100$ mm. Como a seção retangular tem dois planos de simetria, o centroide se encontra no centro da seção, e os raios interno e externo são $r_i = r_n - h/2 = 70$ mm e $r_e = r_n + h/2 = 130$ mm.

Podemos determinar uma expressão para a posição r_n de uma seção retangular, em termos dos raios interno e externo r_i e r_e . A solução é obtida usando (11.139) para obter o centroide, e (11.138) para obter a tensão máxima, que ocorre em $r = r_i$:

$$r_n = \frac{h}{\ln(r_e/r_i)} = \frac{60}{\ln(130/70)} = 96,9 \text{ mm,}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z(r_n - r)}{rA(r_c - r_n)} = \frac{10^6 \times (96,9 - 70)}{70 \times 240 \times (100 - 96,9)} = 41,7 \text{ MPa.} \quad (11.153)$$

onde $A = bh = 40 \times 60 = 240$ mm².

(b) **Viga curva de $r_c = 300$ mm.** Os raios interno e externo são $r_i = r_n - h/2 = 270$ mm e $r_e = r_n + h/2 = 330$ mm. A solução é obtida da mesma forma do caso (a) em $r = r_i$:

$$r_n = \frac{h}{\ln(r_e/r_i)} = \frac{60}{\ln(330/270)} = 299 \text{ mm}, \quad (11.154)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z(r_n - r)}{rA(r_c - r_n)} = \frac{10^6 \times (299 - 270)}{270 \times A(300 - 299)} = 44,663 \text{ MPa}.$$

Podemos comparar as tensões obtidas pela formulação de vigas curvas, σ_{\max} , com as de vigas retas, σ_l , analisando a relação entre h/r_c e σ_{\max}/σ : (unidades em mm e MPa)

h	r_c	r_n	σ_{\max}	σ_l	h/r_c	σ_{\max}/σ
60	100	96,9	52,11	41,667	0,6	1,250
60	300	299	44,663	41,667	0,2	1,071

(11.155)

Essa tabela resume diversas tendências do comportamento das vigas curvas em relação às retas. Em geral, conforme a viga curva aumenta seu raio de curvatura, i.e., tende a ficar mais reta, todos os resultados tendem rapidamente àqueles de vigas retas. A distância entre a linha neutra e a linha centroidal vai se reduzindo, como pode ser visto comparando r_n e r_c . Essas relações também podem ser visualizadas nos gráficos da Figura 11.35 da variação da tensão normal ao longo da seção, para as vigas curvas dos casos (a) e (b), de raios de linha centroidais $r_c = 100$ mm e 300 mm. Nesses gráficos nota-se claramente que para a viga de raio maior, a distribuição se aproxima muito da solução linear, e os valores máximos e a posição da linha neutra quase se coincidem. Já na viga de raio menor, a solução se afasta mais da solução de viga reta, e se nota a distância entre a linha neutra e o centro da seção.

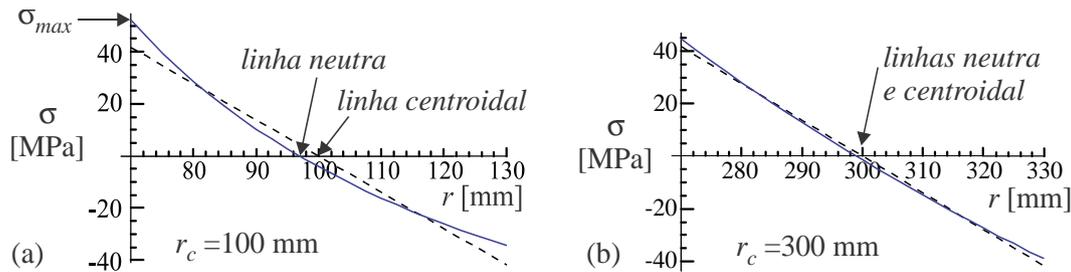


Figura 11.35: Gráficos de tensão normal versus r , para as vigas curvas dos casos (a) e (b), de raios de linha centroidais $r_c = 100$ mm e 300 mm.

A distribuição da tensão máxima tende rapidamente ao valor obtido na viga reta, como visto na relação σ_{\max}/σ_l . Essa tendência pode ser colocada mais claramente através de um gráfico $h/r_c \times \sigma_{\max}/\sigma$ obtido para toda uma faixa de alturas h , tomando um r_c fixo, como no gráfico da Figura 11.36, para a faixa h/r_c entre 0,0133 e 0,667. Para um dado raio fixo, por exemplo $r_c = 75$ mm, essa faixa corresponde a alturas de seção h entre 1 mm e 50 mm. O valor σ_{\max}/σ indica o erro incorrido em usar a formulação de viga reta em uma viga curva. Do gráfico nota-se que esse erro não depende estritamente de h ou do raio r_c , mas apenas da relação entre eles, h/r_c . Então h/r_c indica se a viga é delgada ou espessa. Se ela for delgada, por exemplo com $h/r_c \lesssim 0,2$, o erro na tensão máxima pela fórmula de viga reta fica abaixo de 7%, o que é bem tolerado em cálculos de engenharia rotineira. Por outro lado, se a viga é espessa, com $h/r_c \simeq 0,5$, o erro na tensão passa a ser em torno de 20%.

Seções compostas

Quando se observa a eq. (11.131) para a determinação do raio de curvatura r_n da linha neutra, nota-se que ela pode ser facilmente adaptada para o cálculo de seções compostas, i.e., seções em

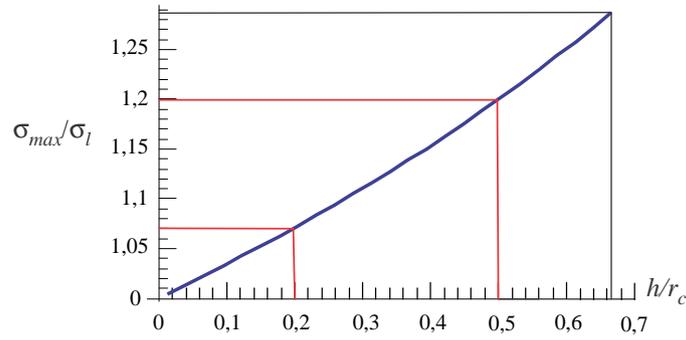


Figura 11.36: Gráfico $h/r_c \times \sigma_{\max}/\sigma$.

que a geometria pode ser decomposta em um número de partes simples (setores de circunferência, triângulos, retângulos,...), como por exemplo a seção trapezoidal da Figura 11.32c, que pode ser decomposta em dois triângulos e um retângulo central. Para isso, lembremos que r_n é dado por $r_n = A/S$, onde $S = \int_A (1/r) dA$. Como S é uma integral sobre a área, ela pode ser facilmente desmembrada em uma soma de integrais de cada uma das áreas:

$$S = \int_A \frac{1}{r} dA = \sum_{j=1}^n \int_{A_j} \frac{1}{r} dA \quad \rightarrow \quad \boxed{S = \sum_{j=1}^n S_j} \quad (11.156)$$

Exemplo 11.6 - Tensões em gancho, seção composta

A Figura 11.37a mostra um modelo de um gancho de elevação de carga típico, como o da foto na Figura 11.30. A seção transversal crítica é AB, e pode ser bem aproximada por uma área composta por um setor de circunferência A_1 , um trapezio A_2 e uma semi-elipse A_3 , como na Figura 11.37b.

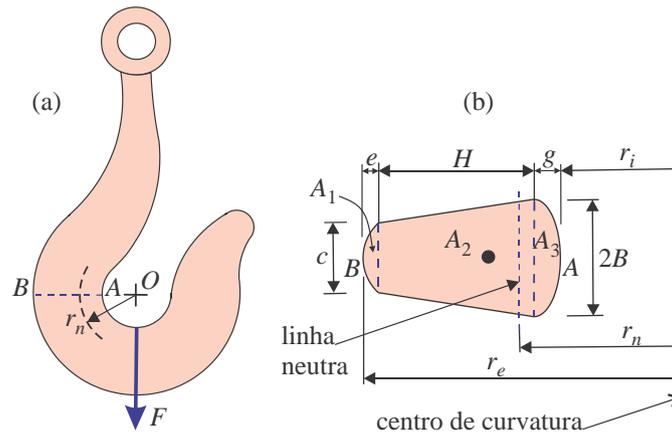


Figura 11.37: Parâmetros geométricos de um gancho.

O material é aço ductil com tensão de escoamento $\sigma_E = 350$ MPa. Determine a máxima carga F_{\max} que pode ser aplicada para satisfazer um coeficiente de segurança $n = 1,7$ quanto ao início do escoamento. Considere nos cálculos apenas a região do gancho distante do olhal superior.

Use os valores: $c = 30$ mm, $2B = 90$ mm, $e = 6$ mm, $H = 90$ mm, $g = 20$ mm, $r_i = 65$ mm.

Solução:

A tensão máxima é obtida de (11.138). Então é necessário calcular r_n , r_c , A e o momento M_z na seção AB. Divide-se a seção em um setor de circunferência A_1 , um trapezio A_2 e uma semi-elipse