Capítulo 12

Deflexão de vigas

Por: Prof. Lauro C. Nicolazzi, Dr.Eng.
Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC.

No Capítulo 8 mostramos como tratar um problema de flexão de viga sob o ponto de vista de tensões, isto é, foi visto como determinar o campo de tensões e usar seus valores para realizar o dimensionamento da seção, ou determinar o grau de segurança quanto ao limite de escoamento em materiais metálicos dúcteis.[1] O presente capítulo trata da determinação do campo de deslocamentos transversais em vigas sob flexão.

- Note que, numa classe importante de **estruturas mecânicas**, como o caso dos eixos rotativos em redutores de engrenagens, mecanismos, manipuladores robóticos, máquinas ferramentas, os valores de deslocamentos e ângulos de rotação máximos são de fato os fatores importantes no projeto, em lugar das tensões.
- **Estruturas de construção civil**, como prédios altos, pontes e viadutos são bastante susceptíveis às forças de vento e, em algumas regiões do mundo, às forças sísmicas. Mesmo considerando apenas o caso estático em prédios altos, caso não haja os devidos cuidados, as oscilações no topo podem ser tão amplas que serão intoleráveis à presença humana. De fato, este efeito pode causar uma sensação similar ao "enjoo" em navios em alto mar.

A Figura 12.1 mostra a foto de um eixo de redutor de velocidade, mostrando um rolamento montado na extremidade direita, e diversas engrenagens helicoidais. No detalhe aparecem também um rolamento radial de esferas e uma engrenagem cilíndrica de dentes retos. Cada engrenagem se acopla a uma outra, que é montada num eixo distinto, formando um conjunto, que é uma caixa de redução de velocidade.

A Figura 12.2 mostra um eixo escalonado típico em redutores de velocidade (não correspondente aos eixos da Figura 12.1, mas apenas ilustrativo). Em cada escalonamento, um elemento é montado, quer seja uma polia, uma engrenagem ou um rolamento.

Um esboco simplificado dessa situação é visto na Figura 12.3, com um par de eixos que suportam um par de engrenagens. A interação entre as engrenagens resulta em forças aplicadas na superfície de contato entre os dentes das duas engrenagens. Essas forças se transmitem a ambos eixos, como as forças F_r e F_t, nas direções transversal e tangencial ao eixo. Engrenagens helicoidais como aquela ilustrada também desenvolvem forças axiais F_a. Essas três forças exercem **flexão, tração** e **torção no eixo** e geram campos de **deformação**, tensão e **deslocamentos**. A força tangencial F_t é aquela responsável por aplicar o torque concentrado m_x^t no eixo, e pelos esforços de momento fletor M_y^t . A força axial F_a gera um momento fletor m_z^t concentrado no eixo.

Por um lado, os mancais em geral, tanto de rolamento quanto hidrostáticos, não admitem ângulos de desalinhamento muito grandes, (com exceção dos rolamentos autocompensadores). De fato, os

[1]Autor: Prof. Lauro C. Nicolazzi, Dr.Eng. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Florianópolis, SC. (48) 3721-9899, Lauro@grante.ufsc.br.

Figura 12.1: Foto de detalhe de redutor de velocidade, mostrando dois eixos com engrenagens helicoidais acopladas, e rolamento na extremidade direita de um dos eixo.

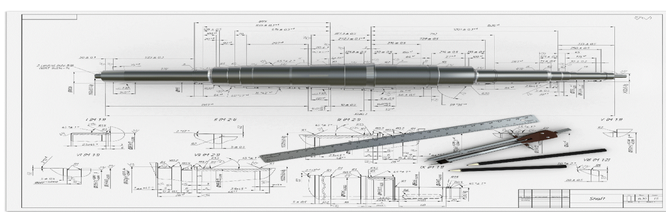


Figura 12.2: Foto de um eixo escalonado típico em redutores de velocidade.

valores máximos admissíveis $\theta_{\max}$ para rolamentos radiais comuns de esferas são da ordem de 2,5° a 3,5° (0,0436 rad a 0,0611 rad).

De forma geral, num mecanismo qualquer em funcionamento correto, o movimento previsto entre as partes exige tolerâncias de fabricação e montagem bastante apertados. Consequentemente, quando em presença das forças de operação, os deslocamentos sofridos devem ser também suficientemente pequenos.

Isso indica a importância da determinação do campo do deslocamento numa estrutura. De fato, em diversas classes de problemas o cálculo dos deslocamentos são fundamentais no processo de projeto, dentre os quais listamos os seguintes:

- **Estruturas de construção civil**. São cruciais, por exemplo, em torres e pontes de vãos longos, devido ao surgimento de oscilações provocadas pelo vento ou pelas cargas úteis móveis.

- **Máquinas ferramentas**. Nessas máquinas, que realizam operações usuais de fabricação por remoção de material, como torneamento, fresamento e outros, o aspecto fundamental é sua rigidez, i.e., o quão pequenos são os deslocamentos e deformações desenvolvidos em suas partes pela ação das forças de corte. Deformações excessivas implicam baixa qualidade de superfície usinada e alto desgaste da ferramenta de corte. Nesse tipo de estrutura, o nível de tensões é tão baixo que não necessita, em geral, sequer ser calculado. As dimensões são determinadas de forma a garantir alta rigidez. Isso é o que explica a forma tão comum dessas máquinas,

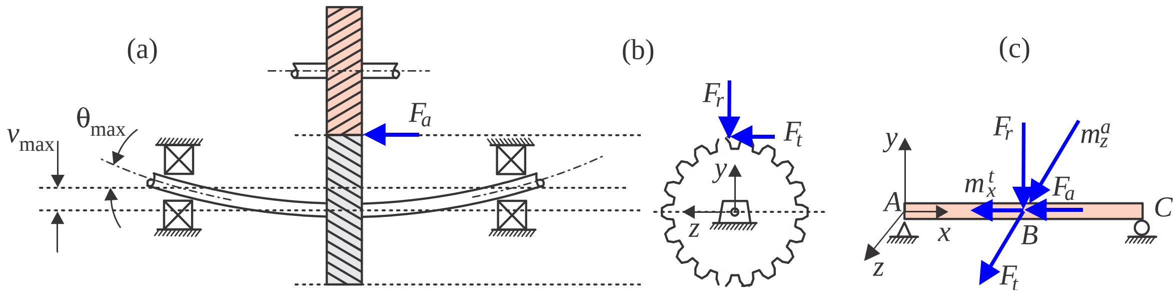


Figura 12.3: Visualização (escala ampliada) de deslocamento e rotação máxima num eixo sob flexão. (a) Ilustração de eixo com dois mancais e uma engrenagem de dentes helicoidais acoplada a outra engrenagem; (b) forças radial e tangencial na engrenagem B; (c) forças e momentos aplicados no eixo AC na seção B.

com seu aspecto massivo e volumoso.

- **Problemas dinâmicos**. Tanto em sistemas mecânicos quanto estruturas civis, os fenômenos dinâmicos em geral, e particularmente as vibrações, se caracterizam por movimentos oscilantes de amplitude e frequência constante ou variável. É visível que a grandeza fundamental envolvida é o deslocamento, que é dependente da inércia e da rigidez do sistema. O campo de tensões nesse caso pode não ser diretamente importante.

- **Problemas hiperestáticos**. O leitor pode lembrar que, trabalhando apenas com forças, no Capítulo 8, tínhamos sido capazes de lidar apenas com vigas isostáticas. Ocorre que problemas reais de engenharia raramente são isostáticos. Como será visto no presente capítulo, um dos benefícios de se poder determinar os deslocamentos em vigas (e qualquer outra estrutura) é o de permitir resolver problemas hiperestáticos. Assim, existem situações em temos pouco interesse em obter os deslocamentos, e o único interesse consiste em determinar as reações ou as tensões. Caso esse problema seja hiperestático, somos obrigados a determinar também as deflexões, ou usar algum método baseado nelas, de forma a chegar ao que nos interessa.

- Problemas de **estabilidade estrutural**. A instabilidade é um fenômeno diretamente ligado ao campo cinemático, que faz com que um componente ou estrutura subitamente mude sua configuração original para uma outra de forma de geometria bastante distinta, que se caracteriza por ter capacidade de suportar carga muito inferior àquela que a estrutura original. Então, geralmente o desencadeamento de um processo de instabilidade caracteriza a falha do componente. Esse tipo de falha ocorre principalmente em estruturas com partes delgados, como colunas em prédios e pontes, barras em mecanismos e placas e cascas, desde que esses componentes possuam regiões com **altos valores de uma ou duas tensões principais compressivas** no plano delgado. Alguns detalhes de cálculo de cargas limites de **flambagem** (instabilidade em barras retas) são mostrados no Capítulo 13.

A teoria aqui apresentada é a denominada **teoria de vigas longas**, ou **teoria de Euler-Bernoulli**, i.e., a mesma usada no Capítulo 8. Isto significa que consideramos apenas a parcela de deslocamento associada ao momento fletor, ignorando-se a parcela proveniente do esforço cortante na seção. Simultaneamente, como em todo o texto até aqui, estamos restritos a **problemas lineares**, i.e., a relação tensão-deformação é linear e os deslocamentos, deformações e rotações são suficientemente pequenos. Em particular, via de regra, **a deflexão máxima na viga deve ser menor que cerca de cinco por cento do comprimento do vão, e também deve ser inferior à espessura da viga** para que os resultados da teoria tenham erros toleráveis. Em resumo, as restrições da teoria são:

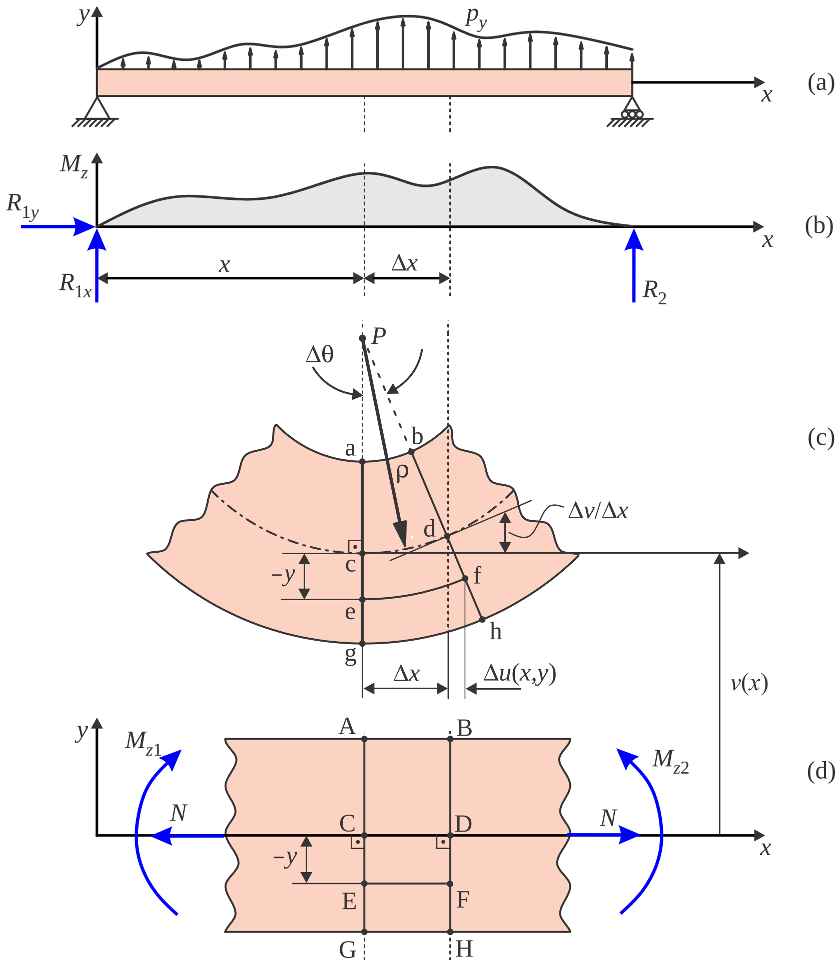


Figura 12.4: Elementos da teoria de flexão de vigas longas. Segmentos Δx de viga indeformada e deformada.

Vale a pena interpretar fisicamente o significado de $d\theta/dx$. Pela definição de derivada e usando (12.2),

$$\frac{d\theta}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} = \frac{1}{\rho}. \tag{12.4}$$

Porém, da teoria de geometria diferencial, sabe-se que $1/\rho$ é a chamada **curvatura** κ de uma curva no plano, i.e.,

$$\kappa \equiv \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}. \tag{12.5}$$

Então a deformação em (12.3) fica

$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}, \qquad \text{i.e.,} \qquad \varepsilon_x = -\kappa\, y. \tag{12.6}$$

Note que até o momento usamos apenas cinemática e trigonometria. Nada foi usado de **forças, carregamento, tensões ou propriedades do material.** Essas grandezas são consideradas através de

$$\begin{array}{lcl} \text{Lei de Hooke} & \rightarrow & \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}, \\ \text{Fórmula de flexão} & \rightarrow & \sigma_x = -\dfrac{M_z}{I_z} y. \end{array} \tag{12.7}$$

Substituindo uma expressão na outra temos

$$\varepsilon_x(x,y) = -\frac{M_z(x)}{EI_z}y, \tag{12.8}$$

e igualando a (12.6), temos expressões para a curvatura e para a deformação:

$$\varepsilon_x = -\kappa y = -\frac{M_z y}{EI_z} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\kappa = \frac{M_z}{EI_z} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_x = -\kappa y}. \tag{12.9}$$

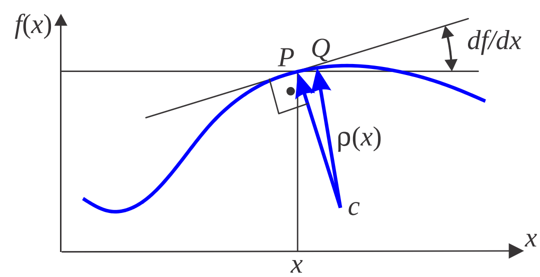


Figura 12.5: Curva plana arbitrária C e raio de curvatura num ponto x.

Em paralelo, consideremos uma curva plana arbitrária, dada por uma função diferenciável $f(x)$ como na Figura 12.5. Num ponto qualquer da curva, definido por x, podem-se definir dois segmentos perpendiculares à curva, uma passando pelo ponto P e outro por Q definido a uma distância infinitesimal de P. Essas retas se interceptarão num ponto c, exceto no caso em que a curva seja, de fato, uma reta. A distância $\rho = \overline{cP}$ é o **raio de curvatura da curva no ponto** P. Da teoria de geometria diferencial, sabe-se que a **curvatura** é dada por

$$\boxed{\kappa = \frac{f''}{[1+(f')^2]^{3/2}}} \tag{12.10}$$

onde $f'' = d^2f\diagup dx^2$ e $f' = df\diagup dx$. Quando buscamos adaptar essa fórmula ao problema de flexão, em que a curva é a linha neutra deformada pela flexão, devemos lembrar que temos as limitações impostas pela teoria de que os deslocamentos e rotações devem ser pequenos. **Rotação significa o ângulo de rotação sofrido pela tangente à linha elástica**, i.e., $\Delta v/\Delta x$ na Figura 12.4d. Designaremos esse ângulo por θ, i.e.,

$$\theta = \frac{dv}{dx}. \tag{12.11}$$

Observe o que ocorre no ponto de uma curva onde θ seja pequeno, por exemplo $\theta = 0,0532$ rad (o que corresponde aproximadamente a $\theta = 3°$). Nesse caso, $\theta^2 = 0,00274$, e o denominador em (12.10) fica $(1+\theta^2)^{3/2} = 1,00412$, i.e., bastante próximo de 1. De fato, quanto menor a rotação melhor o denominador se aproximará da unidade. Assim, para a teoria de viga sendo desenvolvida, a curvatura em (12.9) pode ser tomada, **aproximadamente**, como

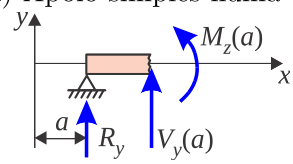
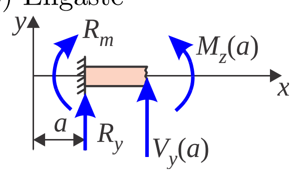
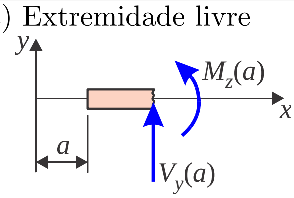
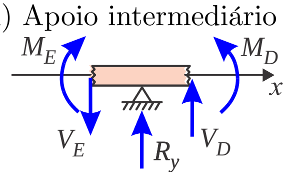
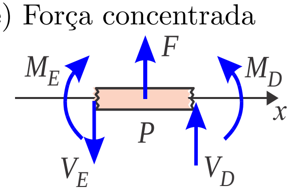
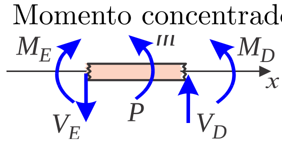
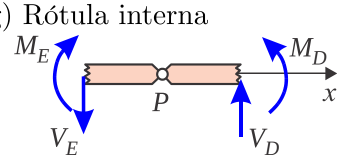
$$\kappa = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{12.12}$$

Levando essa equação a (12.9) temos a deformação e a tensão relacionadas ao deslocamento transversal, dados por

$$\varepsilon_x = -y\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \text{e} \qquad \sigma_x = -Ey\frac{d^2v}{dx^2} \tag{12.13}$$

Eliminando σ_x com o uso de $(12.7)_2$ temos uma relação entre o esforço de momento na seção e

Tabela 12.1: Tipos de condição de contorno e de compatibilidade. Os índices "E"e "D"referem-se às seções diretamente a esquerda e a direita da seção x=a.

	Valores prescritos	Incógnitas
(a) Apoio simples numa extremidade 	$v(a) = 0$ $M_z(a) = 0$	$V_y(a) = -R_y$ $\theta(a) = ?$
(b) Engaste 	$v(a) = 0$ $\theta(a) = 0$	$V_y(a) = -R_y$ $M_z(a) = R_m$
(c) Extremidade livre 	$M_z(a) = 0$ $V_y(a) = 0$	$\theta(a) = ?$ $v(a) = ?$
(d) Apoio intermediário 	$v_E = v_D = 0$ $\theta_E = \theta_D$ $M_E = M_D$	$V_E = V_D + R_y$
(e) Força concentrada 	$v_E = v_D$ $\theta_E = \theta_D$	$V_E = V_D + F$ $M_E = M_D$
(f) Momento concentrado 	$v_E = v_D$ $\theta_E = \theta_D$	$V_E = V_D$ $M_E = M_D + m$
(g) Rótula interna 	$v_E = v_D$ $M_E = M_D = 0$	$V_E = V_D$

$$
\begin{aligned}
EI_z v_{AB} &= \frac{q}{24}\left[-x^4 + 2x^3 L - L^3 x\right], \qquad (12.35)\\
M_{AB} &= -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{2}x \qquad \text{e} \qquad V_{AB} = qx - \frac{qL}{2}.
\end{aligned}
$$

Nota-se que, como esperado, as expressões dos esforços são as mesmas já obtidas pelo método das seções no Exemplo 12.1, na eq.(12.23), a curva elástica é a mesma obtida em (12.27) usando a equação diferencial de segunda ordem.

12.2.3 Exemplo 12.3 – Viga biapoiada sob carga concentrada

Determinar a equação da curva elástica da viga mostrada na Figura 12.8.

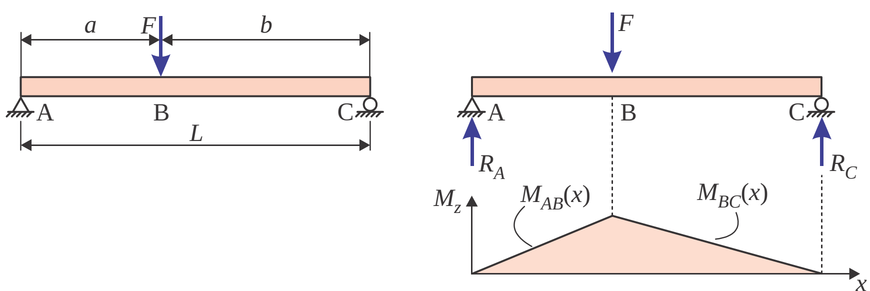


Figura 12.8: Viga do Exemplo 12.3.

Solução:

Primeiramente, identificamos as reações não nulas, R_A e R_C, e verificamos que o problema é isostático. Como segundo passo, podemos então determinar as reações nos apoios: $R_A = Fb/L$ e $R_C = Fa/L$. **Em seguida** usamos o método das seções para obter o diagrama de esforços. As expressões para os **momentos fletores** em cada trecho são:

$$
\begin{aligned}
&\text{Trecho } AB \quad \rightarrow \quad M_{AB}(x) = \frac{Fb}{L}x \qquad \forall x \in (0;a)\\
&\text{Trecho } BC \quad \rightarrow \quad M_{BC}(x) = Fa\,(1 - x/L) \quad \forall x \in (a;L)
\end{aligned} \qquad (12.36)
$$

A notação $\forall x \in (a;L)$ significa que a equação $M_{BC}(x)$ é válida apenas no **intervalo aberto** de x de a a L, i.e., exclui os extremos do intervalo, $x = 0$ e $x = L$.

O **terceiro passo** consiste em integrar a equação diferencial de linha elástica usando (12.29). Entretanto, observe que a distribuição de momento fletor é descrita nesse problema por duas equações distintas, descritas pelos dois segmentos de reta que aparecem no diagrama da Figura 12.8. Note que a equação $EIv'' = M(x)$ é uma relação válida para cada ponto de x de forma individual, i.e., para um certo x, o valor da segunda derivada de v vezes EI é igual ao valor do momento naquela seção. Se o x for menor que a, i.e., se x estiver no intervalo AB, o valor do momento será obtido pelo esforço $M_{AB}(x)$, e se x estiver no intervalo BC, o valor do momento será dado por $M_{BC}(x)$. Isto significa que se integrarmos M_{AB} obteremos uma equação para o deslocamento que será válida apenas para x em AB, e de forma similar, integrando M_{BC} teremos uma equação diferente para v, válida apenas em BC.

Tudo isso significa que, da mesma forma que temos duas equações distintas para momentos, $M_{AB}(x)$ e $M_{BC}(x)$, **teremos também uma curva elástica descrita por duas equações**, $v_{AB}(x)$ e $v_{BC}(x)$. Em qualquer problema, tem-se uma equação diferente para cada trecho de viga.

Deve-se lembrar que um **trecho** é delimitado por duas seções, em que cada uma possui:

12.3 Método de integração para vigas hiperestáticas

Como comentado no início da seção 12.2, o método de integração é efetivo indistintamente em problemas isostáticos e hiperestáticos. Alguns detalhes específicos de sua aplicação a problemas hiperestáticos serão vistos no exemplo que segue.

12.3.1 Exemplo 12.4 – Integração em viga hiperestática

Considere a viga da Figura 12.10. Determine a curva elástica, em termos de q, L, E, I_z.
Solução:

Nota-se que existem três apoios, com reações R_A, R_B e R_C, e apenas duas equações de equilíbrio não triviais, ΣF_y e ΣM_z, o que resulta num problema hiperestático.

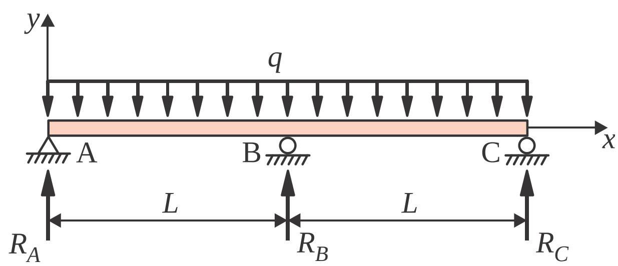


Figura 12.10: Viga do Exemplo 12.4.

Temos dois vãos, e as etapas do cálculo são as mesmas do exemplo anterior, exceto que, como não podemos obter as reações, não temos as equações de esforços de momento fletor. Então não podemos usar a equação diferencial $(12.17)_1$. Usamos então $(12.17)_3$ em cada um dos vãos: (note que $p_y(x) = -q = const.$)

Trecho AB

$$
\begin{aligned}
& EI_z \frac{d^4 v_{AB}}{dx^4} = -q, \\
-V_{AB} = \quad & EI_z \frac{d^3 v_{AB}}{dx^3} = -qx + C_1, \\
M_{AB} = \quad & EI_z \frac{d^2 v_{AB}}{dx^2} = -\frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2, \\
EI\theta_{AB} = \quad & EI \frac{dv_{AB}}{dx} = -\frac{qx^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3, \\
& EI_z v_{AB} = -\frac{qx^4}{24} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4, \qquad \forall x \in (0; L),
\end{aligned}
\tag{12.45}
$$

Trecho BC

$$
\begin{aligned}
& EI_z \frac{d^4 v_{BC}}{dx^4} = -q \\
-V_{BC} = \quad & EI_z \frac{d^3 v_{BC}}{dx^3} = -qx + D_1 \\
M_{BC} = \quad & EI_z \frac{d^2 v_{BC}}{dx^2} = -\frac{qx^2}{2} + D_1 x + D_2 \\
EI\theta_{BC} = \quad & EI_z \frac{dv_{BC}}{dx} = -\frac{qx^3}{6} + \frac{D_1 x^2}{2} + D_2 x + D_3 \\
& EI_z v_{BC} = -\frac{qx^4}{24} + \frac{D_1 x^3}{6} + \frac{D_2 x^2}{2} + D_3 x + D_4, \qquad \forall x \in (L; 2L)
\end{aligned}
\tag{12.46}
$$

Note que, na segunda e na terceira equação de cada trecho, aplicamos também as equações de

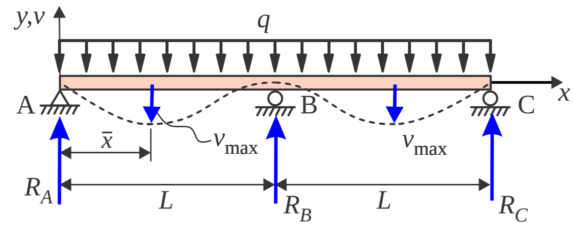


Figura 12.11: Curva elástica do Exemplo 12.4, para $b = 5$ mm, $h = 10$ mm, $E = 200$ GPa, $L = 200$ mm, $q = 10$ N/mm.

A única das três raízes úteis no intervalo $[0 - L]$ é

$$\bar{x} = \frac{L}{16}\left(1 + \sqrt{33}\right) \approx 0,4215L, \tag{12.52}$$

i.e., o máximo ocorre próximo ao centro do vão. Substituindo essa coordenada em (12.49) temos o deslocamento máximo:

$$v_{\max} = v_{AB}(x = \bar{x}) = \frac{-qL^4}{65.536EI_z}\left(39 + 55\sqrt{33}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_{\max} \approx -4,226 \cdot 10^{-3}\frac{qL^4}{EI_z}} \tag{12.53}$$

Da mesma forma, temos $\theta_{\max} = \theta_{AB}(x = 0) = -qL^3/48EI$. As equações dos esforços de **momento fletor** são obtidas substituindo as constantes de integração nas expressões $(12.45)_3$ e $(12.46)_3$:

$$M_{AB} = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3qL}{8}x \qquad \text{e} \qquad M_{BC} = -\frac{qx^2}{2} + \frac{13qL}{8}x - \frac{5qL^2}{4}. \tag{12.54}$$

E os **esforços cortantes** vêm de $(12.45)_2$ e $(12.46)_2$ ou simplesmente diferenciado os momentos:

$$V_{AB} = qx - \frac{3qL}{8} \qquad \text{e} \qquad V_{BC} = qx - \frac{13qL}{8}. \tag{12.55}$$

As reações são obtidas das equações dos esforços, utilizando as relações da Tabela 12.1:

$$\begin{aligned} R_A &= -V_{AB}(0) = C_1 = \frac{3qL}{8}, \\ R_B &= V_{AB}(L) - V_{BC}(L) = D_1 - C_1 = \frac{5qL}{4}, \\ R_C &= V_{BC}(2L) = 2qL - D_1 = \frac{3qL}{8}. \end{aligned} \tag{12.56}$$

12.3.2 Exemplo 12.5 – Carga concentrada em viga hiperestática

Determine a curva elástica da viga da Figura 12.12 usando o método de integração. Dados F, L, a, b, E. A **viga é escalonada**, com seção transversal uniforme em cada trecho, com momentos de inércia I_1 e I_2 respectivamente. Obter resultados numéricos com os seguintes dados: seção transversal retangular com $I_1 = I_2 = 10^3$ mm^4, $E = 200.000$ MPa, $L = 200$ mm, $a = 65$ mm, $F = 100$ N.

Solução:

Inicialmente observarmos que a viga é escalonada, situação bastante comum em eixos rotativos de máquinas. A transição entre as duas seções, em B, deve ser feita utilizando um raio de concordância de forma a passar de maneira suave entre um diâmetro e outro. Entretanto, qualquer que seja o valor do raio de concordância, é gerada na região próxima à seção de transição uma **concentração de tensões**. O estado de tensões nessa região é complexo, não uniaxial, e não é descrito pela

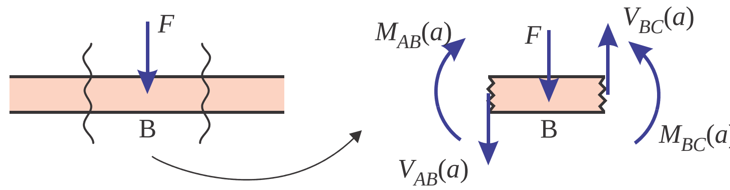


Figura 12.13: Diagrama de corpo livre em torno da força concentrada na seção B.

que são $C_3 = C_4 = 0$. As demais equações geram o sistema matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{L^3}{6} & \frac{L^2}{2} & L & 1 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{2} & L & 1 & 0 \\ \frac{a^3}{6I_1} & \frac{a^2}{2I_1} & \frac{-a^3}{6I_2} & \frac{-a^2}{2I_2} & \frac{-a}{I_2} & \frac{-1}{I_2} \\ \frac{a^2}{2I_1} & \frac{a}{I_1} & \frac{-a^2}{2I_2} & \frac{-a}{I_2} & \frac{-1}{I_2} & 0 \\ a & 1 & -a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{Bmatrix}. \tag{12.59}$$

A solução analítica desse sistema pode ser obtida com um manipulador simbólico de equação. Ela parece bastante complicada, mas devemos lembrar que, em projeto, raramente necessitamos obter soluções em forma analítica como nessa equação. Em vez disso, tem-se valores numéricos para os parâmetros, e tem-se uma simples matriz 6×6 para resolver, o que pode ser conseguido em qualquer calculadora científica moderna. Para facilitar a apresentação nesse ponto, faremos a simplificação de que $I_1 = I_2 = I$, tal que a solução do sistema é

$$\begin{array}{llll} C_3 = C_4 = 0, & C_2 = -\dfrac{Fab^2}{L^2}, & D_2 = \dfrac{Fa^2}{L^2}(2L-a), & D_4 = \dfrac{Fa^3}{6}, \\ C_1 = \dfrac{Fb^2}{L^3}(2a+L), & D_1 = -\dfrac{Fa^2}{L^3}(L+2b), & D_3 = -\dfrac{Fa^2}{2}, & \end{array} \tag{12.60}$$

Substituindo em (12.57) temos

$$\begin{aligned} v_{AB}(x) &= -\frac{Fb^2x^2}{6EIL^3}[3aL - x(2a+b)], \\ v_{BC}(x) &= \frac{Fa^2}{6EIL^3}(L-x)^2[x(2a-3L)+aL], \\ M_{AB}(x) &= \frac{Fb^2}{L^3}[Lx - a(L-2x)] && \rightarrow M_{AB}(0) = -\frac{Fab^2}{L^2}, \\ M_{BC}(x) &= \frac{Fa^2}{L^3}[(2a-3L)x + L(2L-a)] && \rightarrow M_{BC}(L) = -\frac{Fa^2b}{L^2} \\ V_{AB}(x) &= -\frac{Fb^2}{L^3}(3a+b) = cte, \\ V_{BC}(x) &= \frac{Fa^2}{L^3}(a+3b) = cte. \end{aligned} \tag{12.61}$$

As reações são calculadas por último, a partir dos valores dos esforços nas seções próximas aos apoios. Por exemplo, no apoio A, o equilíbrio mostra que

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 & \longrightarrow \quad R_A + V_{AB}(0) = 0, \\ \sum M_z = 0 & \longrightarrow \quad R_{MA} + M_{AB}(0) = 0. \end{cases}$$

Logo, tomando os esforços na seção A de (12.61), tem-se as reações:

$$R_A = \frac{Fb^2}{L^3}(3a+b) \qquad \text{e} \qquad R_{MA} = \frac{Fab^2}{L^2}. \tag{12.62}$$

As reações no apoio C podem ser obtidas da mesma forma, a partir do equilíbrio em torno do ponto C, utilizando os esforços obtidos em (12.61)

$$R_C = V_{BC}(x) = \frac{Fa^2}{L^3}(a+3b) \qquad \text{e} \qquad R_{MC} = -M_{BC}(L) = \frac{Fa^2 b}{L^2}. \tag{12.63}$$

Alternativamente, as equações globais de equilíbrio podem ser utilizadas, juntamente com as reações já obtidas em (12.62).

Consideremos os dados numéricos: seção com $I_1 = I_2 = I = 10^3$ mm^4. $E = 200.000$ MPa, $L = 200$ mm, $a = 65$ mm, $F = 100$ N. Nesse caso teremos (em unidades coerentes),

$$\begin{array}{lll} C_1 = 75,18 & D_1 = -24,8 & D_3 = -2,1125 \cdot 10^5 \\ C_2 = -2.961,6 & D_2 = 3.538,4 & D_4 = 4,5771 \cdot 10^6. \end{array} \tag{12.64}$$

As equações (12.61) então produzem as expressões explícitas da curva elástica e dos esforços, em unidades N e mm:

$$\begin{array}{ll} v_{AB}(x) = -1.481x^2 - 12,5x^3, & v_{BC}(x) = -4,14x^3 + 1.769x^2 - 211.250x + 4,58 \cdot 10^6 \\ M_{AB}(x) = 75,2x - 2.962, & M_{BC}(x) = 24,8x - 3.538, \\ V_{AB}(x) = -75,2, & V_{BC}(x) = 24,8. \end{array} \tag{12.65}$$

Note que, normalmente, como não se resolve primeiro o problema matricial (12.59) de forma analítica, mas numérica, os resultados das constantes e as funções já são obtidos diretamente como em (12.64) e (12.65). Essas funções estão ilustradas na Figura 12.14. Dos esforços obtemos finalmente os valores das reações nos apoios, $R_A = 75,2$ N, $R_C = 24,8$ N, $R_{MA} = 2.962$ Nmm e $R_{MC} = 1.426$ Nmm.

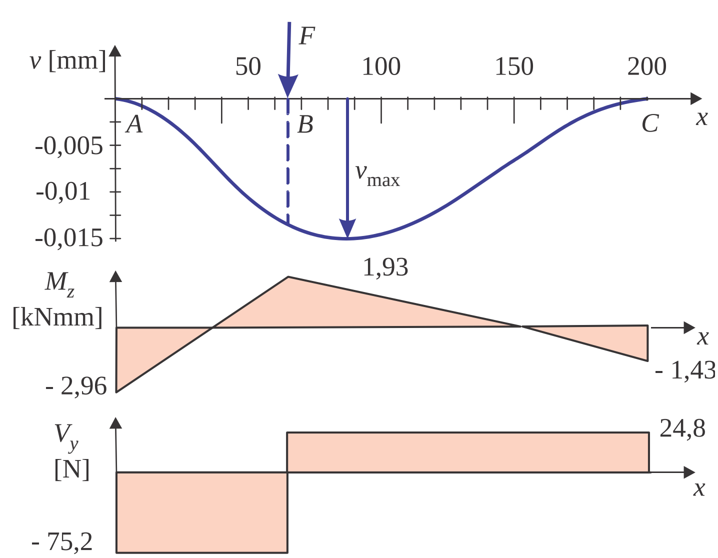


Figura 12.14: Curva elástica e esforços do Exemplo 12.5, para $a = 65$ mm, $L = 200$ mm, $E = 200$ GPa, $q = 100$ N/mm.

problema isostático pode ser vantajosa em relação a outros métodos desde que seja possível decompor o problema em um conjunto de problemas auxiliares cuja solução seja a-priori conhecida ou seja mais simples de obter que o problema original.

Etapa 1 - Considere um problema como o da Figura 12.17a. Primeiramente identificamos as reações não nulas e as equações de equilíbrio não triviais e em seguida calculamos o **grau de redundância** ou grau de hiperestaticidade H como

$$H = N_R - N_{eq}, \tag{12.73}$$

onde N_R é o número de reações não nulas e N_{eq} o número de equações de equilíbrio não triviais. No caso da figura, temos claramente $N_R = 4$ (i.e., R_A, R_B, R_C e R_0) e $N_{eq} = 2$ (i.e., ΣV_y e ΣM_z), o que resulta em $H = 2$, o que significa que existem duas reações a mais que o número de equações estáticas disponíveis para resolve-las.

Etapa 2 - Decompor o problema em $H + 1 = 3$ problemas isostáticos, como ilustrados nas Figuras 12.17b a (d). O procedimento de criação desses problemas é descrito nas próximas etapas.

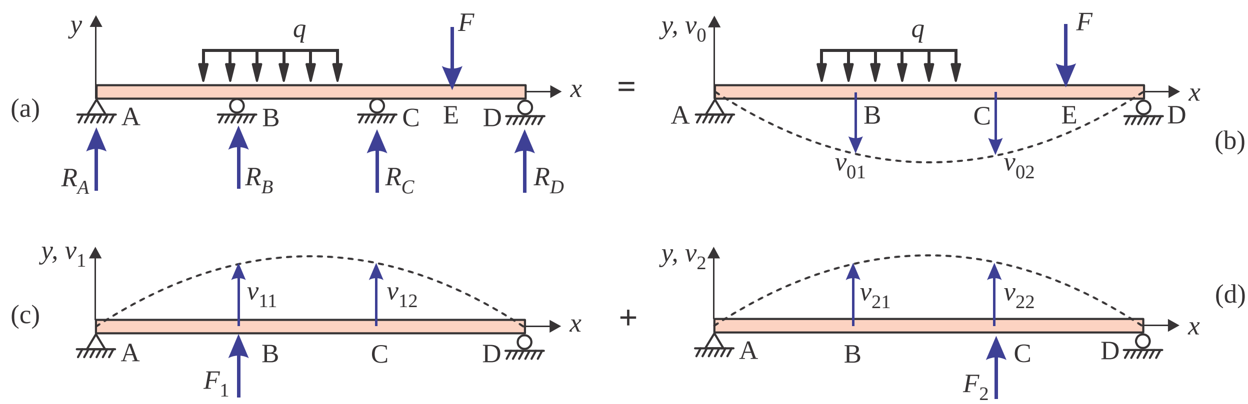


Figura 12.17: Ilustração da decomposição de um problema hiperestático (em (a)), em $H + 1 = 3$ problemas isostáticos (em (b), (c) e (d)).

Etapa 3 - Todos os problemas são construídos com **apoios idênticos**. Este novo conjunto de apoios é obtido pela remoção de $H = 2$ apoios do problema original. Claramente o conjunto de apoios resultante não é unívoco, uma vez que diferentes apoios podem ser escolhidos para serem eliminados. Note que aqui identificamos **um apoio** como **uma restrição em apenas um grau de liberdade**. Isso significa que numa seção engastada, por exemplo, teríamos dois apoios no plano, um de restrição a translação vertical e outro de restrição de rotação. No exemplo, dos quatro apoios originais devemos remover $H = 2$. Aqui escolhemos os apoios B e C, como poderíamos ter escolhido A e B, ou A e C, etc.

Etapa 4 - Deve-se em seguida definir o carregamento de cada problema. O carregamento do primeiro problema é o carregamento do problema original, como visto na 12.17b.

Etapa 5 - Os demais problemas têm uma única força cada um, aplicada na posição de cada apoio removido, e na direção da reação correspondente no problema original. Assim, se eliminarmos $H = 2$ apoios, teremos uma força incógnita F_1 aplicada ao primeiro apoio removido, B no exemplo, e F_2 no segundo apoio removido, C, como visto nas Figuras 12.17c e (d). Em geral teremos H forças. $F_1, F_2, ..., F_H$.

Etapa 6 - Tem-se então $H+1$ problemas isostáticos, porém apenas o primeiro possui carregamento com valores conhecidos. Os demais possuem cargas ainda incógnitas, $F_1, F_2, ..., F_H$. Entretanto, nesta etapa deve-se obter a curva elástica $v_0(x)$, em termos do carregamento conhecido, e as curvas elásticas, $v_1(x), \cdots, v_H(x)$, dos H problemas auxiliares, de forma literal em termos de F_1, F_2, ..., F_H.

pode ser obtida pelo método de integração de $EIv" = M_z$ como se fosse um problema isostático. Ou a curva elástica pode ser obtida como a soma das curvas elásticas de cada um dos problemas auxiliares.

12.4.1 Exemplo 12.7 – Um vão, método de sobreposição

Determinar as reações, os esforços e a curva elástica da viga da Figura 12.18a.

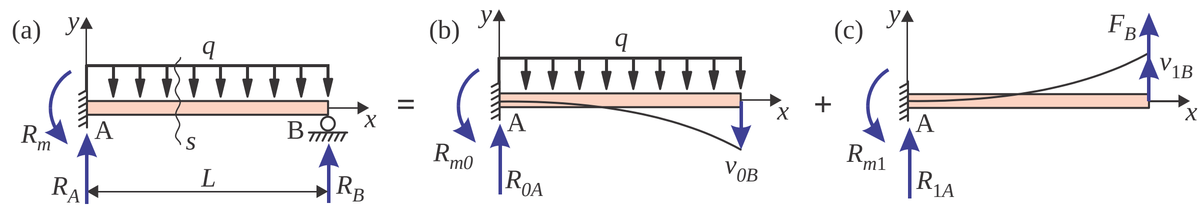


Figura 12.18: Viga do Exemplo 12.7. Em (a) são também indicados os eixos usados para a análise e as reações (ambos não fazem parte do enunciado do problema). (b) e (c) indicam a decomposição isostática do problema.

Solução:

Na Figura 12.18a também indicamos as $N_R = 3$ reações não nulas, e definimos um sistema de eixos para a análise. Como o número de equações de equilíbrio nesse problema é $N_{eq} = 2$, temos $H = 3 - 2 = 1$. Devemos então criar $H + 1 = 2$ problemas isostáticos, removendo $H = 1$ dos três apoios do problema original. O apoio escolhido aqui foi o suporte na seção B, o que gerou os dois problemas auxiliares vistos nas figuras (b) e (c). Como indicado na **etapa 4**, no primeiro problema aplicamos o carregamento original, Figura 12.18b, e no segundo uma força F_B na seção do apoio removido B, figura (c).

Ambos os problemas auxiliares são bastante simples e podem ser resolvidos rapidamente por integração, ou suas soluções podem ser obtidas diretamente numa tabela de soluções como aquela mostrada no **Apêndice**. Dali podemos obter o deslocamento em B para cada um dos problemas auxiliares:

$$v_{0B} = \frac{-qL^4}{8EI} \qquad \text{e} \qquad v_{1B} = \frac{F_B L^3}{3EI},$$

A equação de compatibilidade é

$$v_B = v_{0B} + v_{1B} = 0,$$

o que resulta na expressão para a reação em B:

$$\boxed{F_B = R_B = \frac{3qL}{8}} \tag{12.78}$$

As demais reações podem ser obtidas por dois métodos.

Método 1 - Equilíbrio global do problema original.

$$\begin{cases} \Sigma F_y & \rightarrow \quad R_A + R_B - qL = 0, \\ \Sigma M_z^A & \rightarrow \quad R_B L + R_m - \dfrac{qL^2}{2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_A = 5qL/8, \\ R_m = qL^2/8. \end{cases} \tag{12.79}$$

Método 2 - Sobrepondo as reações dos problemas auxiliares, que são as seguintes:

$$\text{Problema } 0 \rightarrow \begin{cases} R_{0A} = qL, \\ R_{m0} = qL^2/2. \end{cases} \qquad \text{Problema } 1 \rightarrow \begin{cases} R_{1A} = -R_B = -3qL/8, \\ R_{m1} = qL^2/8. \end{cases} \tag{12.80}$$

Essa equação é plotada na Figura 12.20, para os seguintes dados: $q = 0,24$ N/m, $EI = 5 \cdot 10^{-2}$ Nm^2, $L = 1$ m.

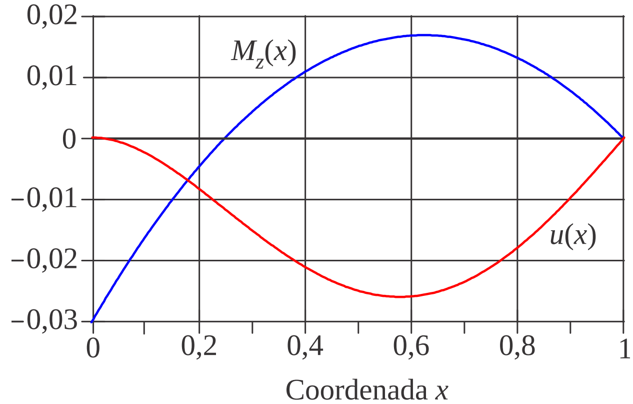


Figura 12.20: Resultados do Exemplo 12.7, com momento da eq.(12.82) e curva elástica de (12.85).

Para o **segundo método de obter uma curva elástica, por sobreposição**, tomamos do Apêndice as equações das curvas de cada um dos problemas auxiliares:

$$\begin{aligned} &\text{Problema 0} \quad \rightarrow \quad v_0(x) = \frac{q}{24EI_z}[-x^4 + 2Lx^3 - 6L^2x^2], \\ &\text{Problema 1} \quad \rightarrow \quad v_1(x) = \frac{R_B}{6EI_z}[x^3 - 3Lx^2]. \end{aligned} \tag{12.86}$$

Tomando a expressão de R_B em (12.78), somando as equações conforme

$$v(x) = v_0(x) + v_1(x),$$

e realizando simplificações chegamos à equação da curva elástica (12.85). Observe que os máximos das funções são os seguintes:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= -\frac{qL^4}{185EI_z} \qquad \text{em } \bar{x} = 0,57846L, \\ M_{\max} &= M(0) = -\frac{qL^2}{8}, \quad \text{porém há um ponto de inflexão em } x = \frac{5L}{8} \text{ onde } M = \frac{9qL^2}{128}. \end{aligned}$$

12.5 O método de multicorpos

Existem diversas situações em que a estrutura é constituída por um conjunto de partes de formato simples (barras, vigas, molas, placas de formato simples), submetida a carregamentos simples (cargas concentradas ou distribuídas). O método é viável quando cada parte pode constituir um problema cuja solução já seja anteriormente conhecida, ou que possa ser rapidamente obtida.

As **etapas do método** são as seguintes:

1. Montar **diagramas de corpo livre de cada parte**, indicando as forças atuantes e os deslocamentos nos pontos de contato com as outras partes;

2. Montar **equações de compatibilidade** geométrica para os deslocamentos de cada ponto de interface entre as partes;

3. Montar **equações de equilíbrio** entre os esforços de cada contato;

Com isso, v_B e v_C são diretamente obtidos de (12.87).

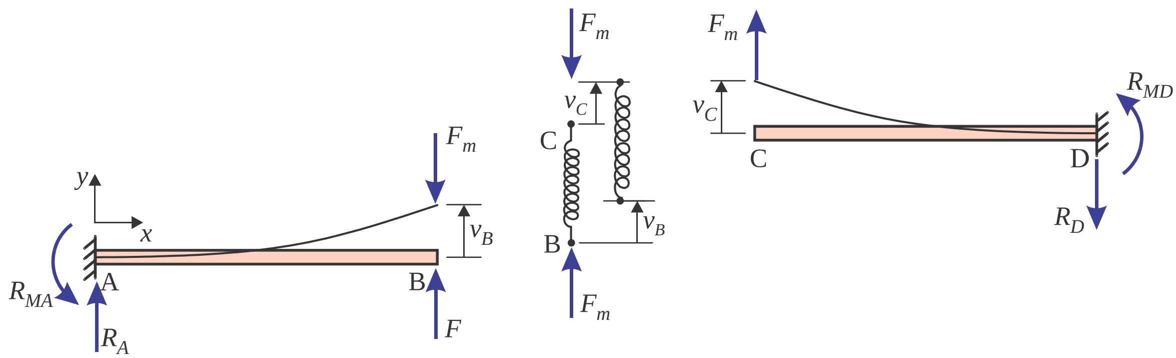


Figura 12.22: Diagramas de corpo livre do Exemplo 8.

As **reações e esforços** em cada componente também podem ser agora diretamente obtidos a partir das condições de equilíbrio em cada componente, a partir da Figura 12.22:

$$
\begin{aligned}
&\text{Viga AB} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} R_A = F - F_m, \\ R_{MA} = (F - F_m)\, L_1, & \forall x \in [0; L_1]. \\ M_{AB}(x) = (F - F_m)\,(L_1 - x)\,. \end{cases} \\
&\text{Viga CD} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} R_D = F_m, \\ R_{MD} = F_m L_2, & \forall x \in [L_1; L_1 + L_2]. \\ M_{CD}(x) = F_m\,(x - L_1)\,. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{12.89}
$$

Na mola o esforço normal é $N_m = -F_m$. Com os esforços determinados, as tensões podem ser facilmente determinadas em cada ponto da estrutura. Conhecida a força F_m, ela pode ser usado para dimensionar a mola, e as rações permitem o dimensionamento dos apoios.

Observação: Quando as equações acima forem usadas com valores numéricos, é necessário testar se estes estão na faixa de validade da teoria usada. As deflexões em ambas as vigas deve ser pequenas o suficiente, i.e., v_B, $v_C \lesssim h/2$, onde h é a altura da seção.

12.6 Problemas diversos

12.6.1 Exemplo 12.9 - Montagem de conjunto viga-mola com deformação inicial

Consideramos o problema de uma mola elástica linear de constante k que deve ser montada na extremidade de uma viga em balanço, como na Figura 12.23a. Na configuração inicial, indeformada, existe uma distância v_0 entre a extremidade C da mola e a seção B da viga. Determine a força na mola na configuração montada como na Figura 12.23b.

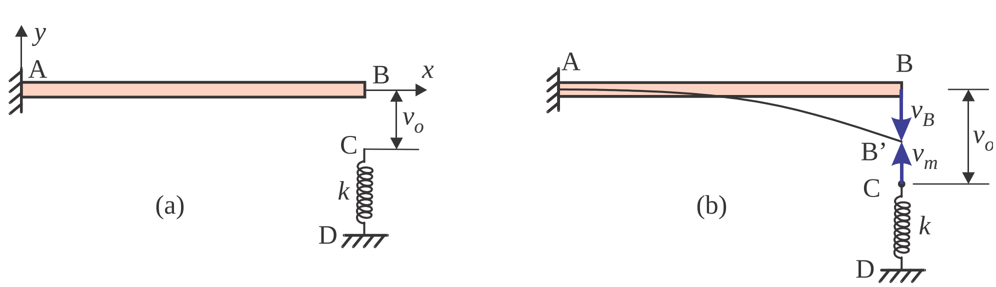


Figura 12.23: Conjunto viga-mola do Exemplo 12.9.

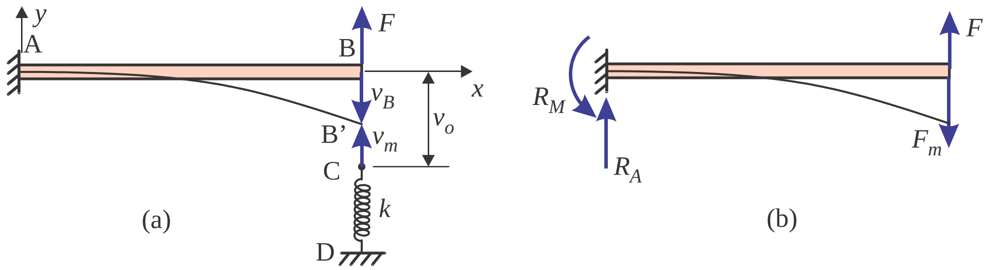


Figura 12.25: Conjunto do Exemplo 12.10.

A **equação de compatibilidade** continua sendo a eq. (12.90), de forma que:

$$-v_B + v_m = v_0 \qquad \Longrightarrow \qquad -(F - kv_m)\frac{L^3}{3EI} + v_m = v_0, \tag{12.95}$$

Isolando v_m tem-se

$$v_m = \frac{v_0 + FL^3/3EI}{kL^3/3EI + 1}, \tag{12.96}$$

que levado à relação de compatibilidade (12.95), produz a deflexão na extremidade da viga

$$v_B = \frac{(F - kv_0)L^3}{kL^3 + 3EI} \tag{12.97}$$

O esforço de momento fletor na viga depende de F_v, que pode ser obtido de (12.93) como $F_v = F - F_m = F - kv_m$. Então, $M_z(x) = F_v(L - x) = (F - kv_m)(L - x)$. Nota-se que na ausência de mola, $k = 0$, se tem que a única rigidez no sistema é devida à viga, e (12.97) produz a deflexão em B na forma esperada para viga em balanço: $v_B = FL^3/3EI$, como no Apêndice.

Observação 1 - Rigidez de viga
Uma viga em balanço com uma força F_v na extremidade pode ser considerada uma **mola flexural**. A rigidez de uma mola é, por definição,

$$\boxed{k_v \equiv \frac{F_v}{v_B}} \tag{12.98}$$

Uma vez que o deslocamento é dado por $v_B = F_v L^3/3EI$, a rigidez da viga é dada por

$$\boxed{k_v = \frac{3EI}{L^3}} \tag{12.99}$$

Observação 2 - Rigidez do conjunto viga-mola
Para o exemplo, com a configuração da Figura 12.25, a rigidez do sistema viga-mola é dada por $k_s = F/v_B$. Usando (12.97), a rigidez fica

$$k_s = \frac{F\left(kL^3 + 3EI\right)}{(F - kv_0)L^3} \tag{12.100}$$

Observação 3 - Rigidez de molas em paralelo
Considere duas molas em paralelo, com comprimentos iguais e rigidezes k_1 e k_2. A força total F é suportada por uma parte F_1 na mola 1 e F_2 na mola 2, tal que $F = F_1 + F_2$. Uma vez que as deflexões em cada uma das duas molas são idênticas, u, tem-se que $F_1 = k_1 u$ e $F_2 = k_2 u$. Então, $F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)\, u$. Assim, a rigidez do conjunto é dada por $k = k_1 + k_2$. Para um conjunto de n molas em paralelo, a rigidez do conjunto é

$$\boxed{k = \sum_{j=1}^{n} k_j} \tag{12.101}$$

Observação 4 - Rigidez de molas em série
Considere duas molas em série, com rigidezes k_1 e k_2. O deslocamento total no conjunto é a soma dos elongamentos de cada mola, i.e., $u = u_1 + u_2$. Uma vez que as forças suportadas em cada uma das duas molas são idênticas, F, tem-se que $u_1 = F/k_1$ e $u_2 = F/k_2$. Então, $u = u_1 + u_2 = F/k_1 + F/k_2$. Assim, a rigidez do conjunto, $k = F/u$, é dada por

$$k = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \tag{12.102}$$

Para um conjunto de n molas em série, a rigidez do conjunto é

$$\boxed{k = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j}\right)^{-1}} \tag{12.103}$$

Observação 5 - Rigidez do conjunto viga-mola
Para o conjunto viga-mola da Figura 12.25, para o caso em que a **folga inicial é nula**, $v_0 = 0$, a rigidez do sistema é dada por (12.100) (com k_m sendo a rigidez da mola)

$$k = \frac{(k_m L^3 + 3EI)}{L^3} \tag{12.104}$$

Comparando essa equação com as expressões da rigidez de uma viga em balanço e de uma mola, observa-se que essa expressão corresponde à rigidez de duas molas em paralelo, como visto na eq.(12.101) com $k_1 = k_v = 3EI/L^3$ e $k_2 = k_m$.

12.6.3 Exemplo 12.11 - Viga e mola flexural

A viga AB da Figura 12.26a está conectada a uma mola flexural de rigidez k, dada em momento fletor por radiano de rotação, i.e., k tem unidades [Nm/rad]. A mola é considerada sem dimensões, tal que se pode ignorar a distância entre sua fixação na base no ponto O, e o ponto A na extremidade da viga. Determinar a deflexão da seção B. Dados k, L, E e I.

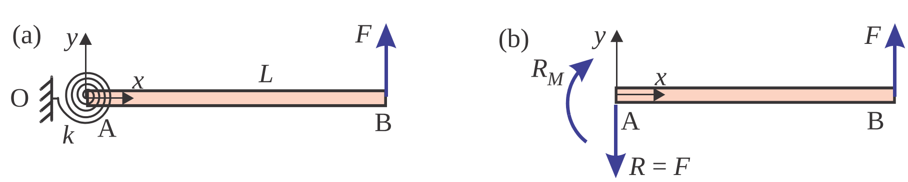


Figura 12.26: (a) Modelo de viga suportado por mola flexural; (b) diagrama de corpo livre da viga.

Solução:
As forças atuando na viga são vistas na Figura 12.26b. As reações e esforços de flexão são: $R_M = FL$ e $M_z(x) = R_M - Fx$. O problema pode ser facilmente resolvido utilizado os resultados do Apêndice para viga em balanço. Entretanto, utilizaremos o método de integração para apontar certos aspectos nas condições de contorno. Assim, a integração da equação diferencial da curva elástica produz:

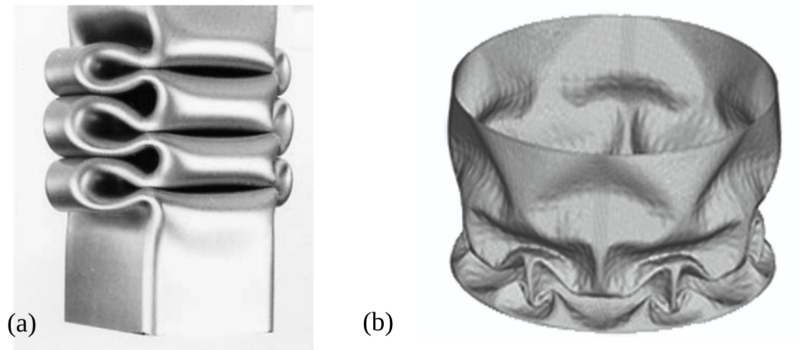


Figura 13.1: Exemplo de instabilidade plástica em tubos de seção retangular e circular, de parede delgada, sob carga compressiva axial.

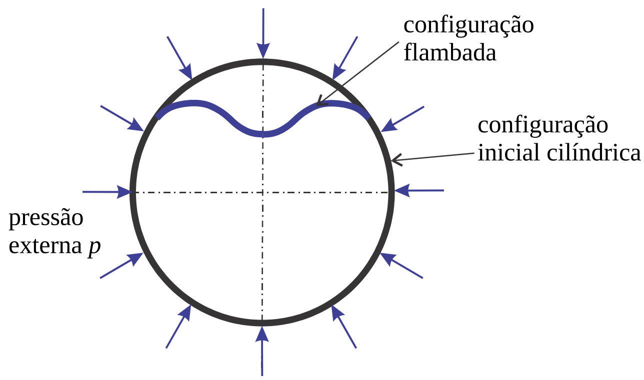


Figura 13.2: Instabilidade em um cilindro de seção circular de parede delgada, submetido à pressão externa.

Equilíbrio e estabilidade. O fenômeno de instabilidade não é algo exclusivo a estruturas, mas, aparentemente, a todo sistema, de qualquer espécie, quer seja econômico, financeiro, biológico, geológico etc. A Figura 13.3 mostra uma ilustração clássica que ajuda a diferenciar dois conceitos: equilíbrio e estabilidade. Tem-se três superfícies cilíndricas, duas curvas e uma plana, com uma **bola em equilíbrio** na posição A em todas as três superfícies. Enfatiza-se que nos três casos, a bola encontra-se em equilíbrio. Entretanto, é visível que algo distingue a situação da bola em cada um dos casos. Esse fator é a estabilidade, i.e., num caso o **equilíbrio** é **estável**, noutro é **instável** ou **neutro**. O que distingue um sistema em equilíbrio estável de um instável, é seu comportamento quando submetido a uma **perturbação**. Perturbação é entendido como qualquer fator que modifica a configuração, por exemplo, uma força F, mesmo que muito pequena, que afasta um pouco a bola da posição A para uma posição B vizinha. **O que ocorre no sistema quando a perturbação é removida, é o que define a estabilidade ou instabilidade do sistema**.

1. Se, após a remoção da perturbação, o sistema volta sozinho à sua configuração inicial de equilíbrio, o sistema é estável, como no caso da Figura 13.3a, i.e., a bola volta sozinha da posição B para A.

2. Se, após a remoção da perturbação, o sistema se afasta progressivamente da sua configuração inicial de equilíbrio, o sistema é estável, como no caso da Figura 13.3c, i.e., a bola continua se afastando de A, indo de B para C, etc. Note-se que, possivelmente, o sistema pode encontrar uma outra configuração de equilíbrio, mas não será A.

3. Se, após a remoção da perturbação, o sistema encontra equilíbrio na última configuração atingida sob a ação da perturbação, ele é neutro, oi indiferente, como na Figura 13.3, i.e., a bola foi perturbada da posição A para B, e depois ela permanece em equilíbrio em B.

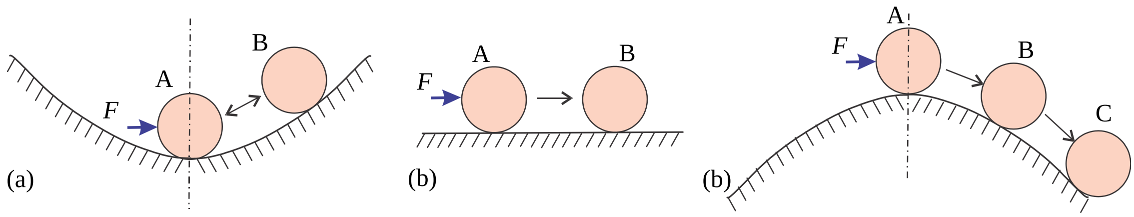


Figura 13.3: Ilustração qualitativa de equilíbrios de tipo (a) estável, (b) indiferente ou neutro, (c) instável.

Exemplo 13.1 – Instabilidade de barra rígida

Consideremos um problema distinto, como o caso clássico de uma barra rígida rotulada numa extremidade A e apoiada por uma mola de rigidez k em B, como ilustrado na Figura 13.4. Na configuração inicial AB, uma força compressiva P é aplicada, como uma força horizontal F. A configuração de equilíbrio AD pode ser facilmente determinada, porém busca-se determinar o comportamento da barra quando $F = 0$. Se P fosse trativo, a barra se deformaria axialmente e permaneceria vertical, qualquer que fosse o valor de P, até atingir algum modo de falha de material, como o início de escoamento. Entretanto, para P compressivo, um fenômeno de instabilidade pode ocorrer, dependendo do valor de P, tal que a barra pode afastar-se bruscamente da configuração vertical e desenvolver um movimento de rotação como ilustrado, para AD, com u crescendo de forma ilimitada para um valor constante de P.

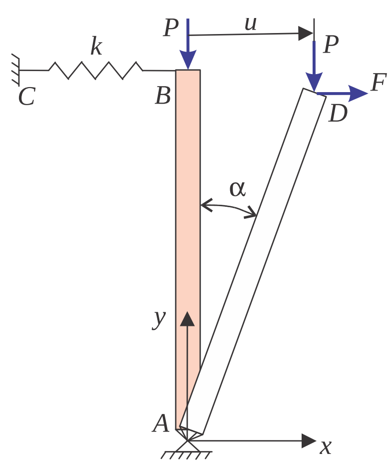


Figura 13.4: Flambagem de uma barra rígida de comprimento L.

A análise pode ser feita considerando o fenômeno separado em algumas etapas.

1. Consideramos a configuração de equilíbrio inicial AB, submetida apenas a P, i.e., com $F = 0$.

2. Nessa configuração AB, **aplica-se uma perturbação** definida por algum valor de F. Nessa configuração AD, o equilíbrio de momentos em relação a z é

$$\sum M_z^A \quad \rightarrow \quad Pu + FL\cos\alpha - kuL = 0. \tag{13.1}$$

A barra se encontra em equilíbrio, e essa equação provê uma relação entre P e u, para dados valores de F, k e L. Restringimos a presente dedução à situação de pequenas rotações. Dessa forma, pode-se aproximar $\alpha \approx 0$, e $\cos\alpha \approx 1$. A Figura 13.5 ilustra curvas para certos valores de perturbação F. Por exemplo, para $P = 1.000$ N, o deslocamento é $u = 1$ mm. As curvas são hipérboles, que tendem assintoticamente ao patamar $P = P_{crit}$ (= 3.000 N no exemplo) mostrado na figura, conforme $F \to 0$. Deve-se notar que as curvas não seguem ao infinito para u como sugerido na figura. Quando a barra se afasta de sua condição vertical, ela pode encontrar uma outra configuração de equilíbrio, no ângulo $\alpha = 180°$, i.e., na posição pendurada para baixo, no caso em que P será trativo. As curvas na Figura 13.5 foram construídas para serem válidas apenas até pequenos valores de α.

3. Para um dado valor de P, a questão que se coloca é se o equilíbrio alcançado é estável ou não. A resposta a isso é definida pelo comportamento do sistema quando F é retornado a zero. Se a barra voltar sozinha, sob a ação de P e da mola, à sua posição original AB, essa configuração AB é estável sob aquele valor de P. Do contrário, a configuração AB é instável.

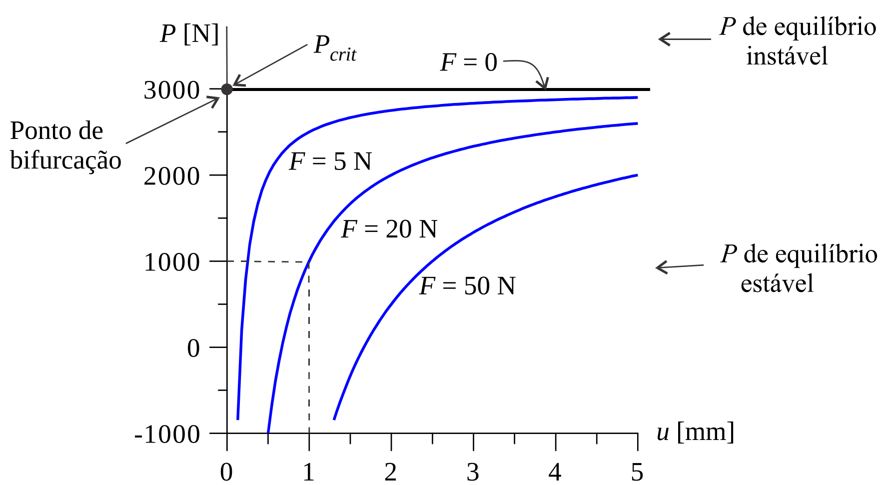


Figura 13.5: Diagrama $P \times u$ para a barra rotulada sob carga axial e perturbação F. Usados $L = 100$ mm, $k = 30$ N/mm.

Podemos observar melhor considerando a equação de equilíbrio da etapa 2, eq.(13.1), permite escrever

$$P = kL - \frac{FL}{u}. \tag{13.2}$$

Quando se retorna F a zero após a deformação transversal, momentaneamente haverá um desequilíbrio de forças.

- Se $P < kL$, então a força na mola é maior que o efeito de P, de forma que a mola vai fazer a barra voltar à posição original AB.
- Se $P > kL$, o momento Pu será maior que o momento devido à mola, kLu, de forma que a mola não conseguirá retornar a barra, e esta continuará aumentando sua rotação. Então se teria que a configuração AB está em equilíbrio instável. Note que todo o processo é fisicamente dinâmico, embora não estejamos considerando explicitamente as forças de inércia.
- O valor $P = kL$ é um valor de transição na carga axial, denominado P_{crit}. Então, se a força aplicada na barra for $P < P_{crit} = kL$, ela estará em equilíbrio estável, e permanecerá vertical, qualquer que seja o valor de P dentro desse limite. Essa região é mostrada no gráfico da Figura 13.5 entre as duas linhas horizontais.
- Por outro lado, se a força aplicada na barra for $P > P_{crit} = kL$, ela estará em equilíbrio instável. Nesse ponto, é interessante se observar um certo aspecto. A barra está vertical, sob uma força axial compressiva $P > P_{crit}$. Se nenhuma perturbação for aplicada, ela permanecerá vertical, qualquer que seja o valor de $P > P_{crit}$. Entretanto, no **mundo real, sabe-se que perturbações sempre existem**. Podem ser provenientes de uma pequena excentricidade na

carga, uma pequena região de heterogeneidade do material, um pequeno erro de retilineidade da barra, ou um veículo pesado que passe na rua e gere uma pequena vibração que atinja a barra. Então, considera-se que **um sistema instável obrigatoriamente entrará em colapso**, já no momento de aplicação da carga, pois sempre existirão perturbações aplicadas sobre ele que desencadearão o processo. Então, instabilidade significa falha.

Consideremos uma outra formulação para o problema. Tomamos a barra em sua configuração vertical AB, sob P compressivo e $F = 0$. Em vez de perturba-la com uma força transversal F, usemos um deslocamento infinitesimal δu como perturbação, i.e., um deslocamento imposto. O equilíbrio de momentos em torno de A é representado por

$$(P - kL)\,\delta u = 0 \tag{13.3}$$

Essa equação possui duas soluções distintas: (a) $\delta u = 0$ (a barra fica vertical) e P pode ser qualquer. Entretanto, o interesse é verificar se existe uma outra configuração de equilíbrio. (b) Essa segunda configuração considera que $\delta u \neq 0$, é arbitrário embora infinitesimal, tal que o termo entre parênteses em (13.3) deve ser nulo para satisfazer a igualdade, i.e., deve-se ter $P_{crit} = kL$. Então, para P_{crit}, existem duas possíveis soluções, uma com a barra vertical, e outra com a barra rotacionada por um δu arbitrário. Esse ponto de P_{crit} é denominado **ponto de bifurcação** na literatura. No gráfico da Figura 13.5, se $P < P_{crit}$ a resposta é o segmento vertical $u = 0$ do eixo das ordenadas. Para $P = P_{crit}$, a resposta pode ser tanto $u = 0$, quanto qualquer valor u ao longo da segunda linha horizontal do gráfico.

13.0.1 Exemplo 13.2 - "Snap-through" em barras no plano

No exemplo da Figura 13.4 a barra era absolutamente rígida, e a flexibilidade do sistema era gerada pela mola, o que permitia a cinemática do conjunto. Nas situações reais de estruturas, geralmente o próprio componente é considerado flexível, possuindo sua própria rigidez. Consideremos o problema clássico ilustrado na Figura 13.6, em que duas barras iguais são rotuladas entre si e nos apoios, e é submetida a uma força F. Consideramos o material das barras elastico linear ideal. Conforme F cresce, o sistema se deforma gradualmente, tal que a rótula B se move para D, descrevendo um deslocamento vertical v. Experimentalmente se observa que existe um determinado ponto (F, v) com $v < H$, em que um aumento infinitesimal de F faz o sistema saltar da configuração em que D (que está acima do eixo x), para uma configuração em que E se encontra abaixo, como na figura.

Buscaremos obter uma formulação para relacionar F com v ao longo de todo o trajeto do sistema, e em seguida aplicaremos para os valores $L = 100$ mm, $A = 100$ mm, $E = 200$ GPa, $\sigma_E = 500$ MPa, e ângulo inicial $\alpha = 5°$ e $\alpha = 8°$.

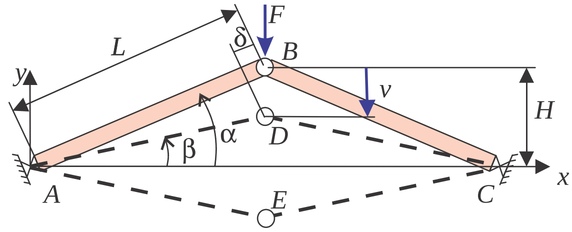


Figura 13.6: Exemplo de instabilidade por "snap-through" em um sistema plano de duas barras.

Solução:

Esse é um problema não linear, então é necessário que o equilíbrio seja representado numa configuração deformada arbitrária, como a linha tracejada ADC na Figura 13.6. Usando o método das seções, se pode representar o equilíbrio vertical da rótula B:

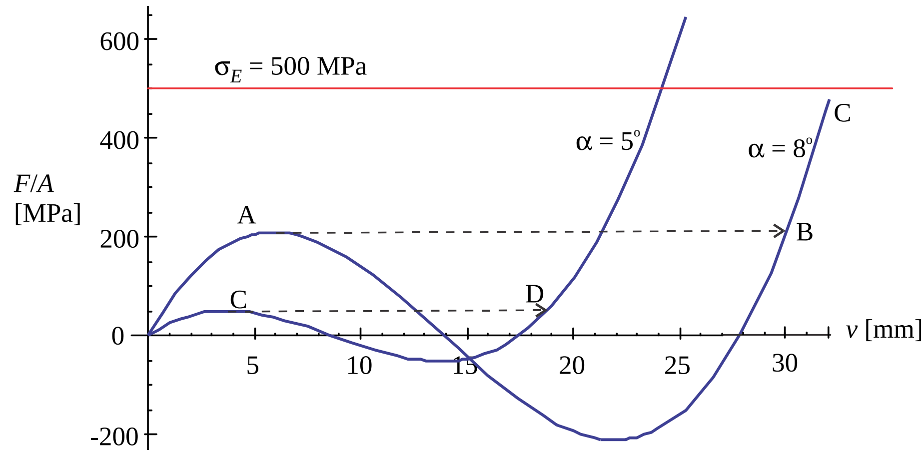


Figura 13.7: Relação tensão média numa barra F/A versus deslocamento v para dois ângulos iniciais α.

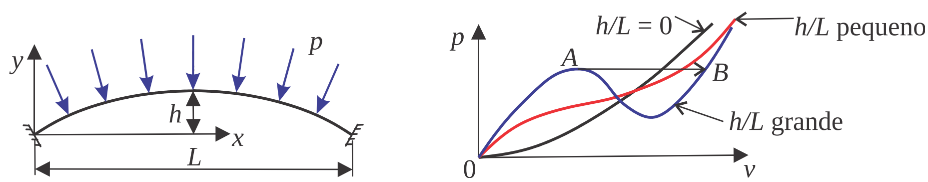


Figura 13.8: (a) arco plano sob pressão p uniforme. (b) curvas p versus deslocamento vertical v na seção central, para três tipos de coeficientes h/L.

dade são muito diversas, envolvendo todos os tipos de componentes de parede delgada, como barras, arcos, placas e cascas, submetidos a carregamentos que gerem **estados de tensão em que uma ou mais componentes de tensão principal seja compressivas**. Entretanto, a complexidade da maioria desses problemas os tornam inviáveis de serem tratados num texto introdutório. Em vez disso, é usual considerar, como um primeiro passo, apenas os problemas de instabilidade em barras retas, como faremos no restante do presente capítulo.

As falhas em barras causadas por instabilidade, comumente denominadas de **flambagem**, acontecem repentinamente e, assim, são perigosas e potencialmente catastróficas para a estrutura como um todo. O escopo deste capítulo é o estudo de barras e vigas submetidas a cargas de compressão e flexão.

Flambagem em estruturas de barras é o principal modo de falha em estruturas como torres de transmissão e guindastes, por exemplo, ilustrados na Figura 13.9, em que se observa um caso de colapso de uma torre de transmissão elétrica.

1. O início do processo de flambagem frequente é elástico, como nos modelos descritos no resto do presente capítulo, e que são usados no processo de cálculo de projeto e dimensionamento da estrutura.

2. Após a primeira fase da instabilidade, um subconjunto das barras da estrutura afasta-se levemente da sua configuração reta, e se desenvolvem tensões de flexão, que se caracteriza por reduzir drasticamente a rigidez da estrutura e aumentar os níveis de tensão locais nas seções.

3. A partir desse ponto, frequentemente o processo de deformação continua, numa fase denominada **pós-flambagem**, tal que, a partir de certo ponto, as tensões ultrapassam o limite de escoamento do material. Com a continuidade, a falha final ocorre por **plastificação** completa das seções de um grande conjunto de barras da estrutura.

Observação 1: **Não será estudado o problema de flambagem lateral que ocorre em vigas feitas de perfis tipo U, I ou cantoneiras.**

Figura 13.9: Ilustração de estrutura de barras num guindaste, e torre de transmissão elétrica em colapso.

Observação 2: Normalmente, na literatura de engenharia civil, o comportamento de flambagem é característico de **colunas**, i.e., elementos retos, longos, construídos de forma vertical, que suportam cargas axiais compressivas. Por outro lado, em máquinas, diversos tipos de componentes estruturais são **barras**, que quando submetidas a carga axial compressiva, podem apresentar falha por flambagem. Ao longo do presente capítulo, usaremos indistintamente ambas as nomenclaturas, coluna e barra, para indicar o elemento esbelto sob compressão sendo analisado.

13.1 Equação diferencial para viga-coluna

Consideremos uma viga submetida a uma carga axial de compressão P e uma carga distribuída transversal arbitrária de intensidade $p(x)$, como mostrado na Figura 13.10.

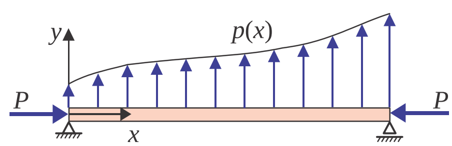


Figura 13.10: Viga sob carga transversal e axial de compressão.

Sob a ação da carga transversal, ocorre o deslocamento na direção y, denominado $v(x)$. Uma vez que a seção transversal se afasta do eixo de referência x, a força axial P gera um momento fletor que contribui para aumentar a deflexão transversal $v(x)$ (Figura 13.11). Então, a deflexão transversal é devida à carga transversal, e também à carga axial.

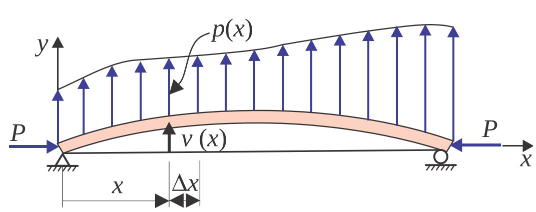


Figura 13.11: Configuração deformada de viga sob flexão e carga axial.

Nas deduções de todo o resto do livro se faz uso da hipótese que os deslocamentos sejam pequenos, de forma que a configuração deformada é bastante similar à indeformada. Isso permitia que o equilíbrio fosse sempre feito considerando o carregamento aplicado na configuração indeformada. Uma consequência, é que cargas axiais não provocavam deflexões transversais. Entretanto, o estudo de flambagem exige que se considere de forma mais precisa o fenômeno. Isso é feito representando o **equilíbrio das forças quando atuando na configuração deformada**, o que é coerente com a realidade física. Isso permite identificar adequadamente a resposta de flexão devida ao carregamento axial. Deste modelo, isola-se um elemento de viga de comprimento Δx, como na Figura 13.12, em que se considera o segmento em sua configuração deformada, i.e., sob translação transversal $v(x)$ e

Para $n = 1$, se tem a carga crítica de flambagem:

$$\boxed{P_{crit} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{L^2}EI} \tag{13.58}$$

A forma assumida pela barra pode ser obtida obtendo as constantes do sistema (13.55). Das equações 2 e 4 temos que $C_2 = C_3 = 0$. Da equação 1, $C_4 = -C_1$, e da equação 3 se tem $C_1\lambda^2 \cos\lambda L = 0$. Como já foi identificado que $\cos\lambda L = 0$, segue-se que C_1 não pode ser determinado, e a formulação permite apenas conhecer o modo de flambagem associado à primeira carga crítica:

$$v(x) = C_1 (\cos\lambda x - 1). \tag{13.59}$$

Outra abordagem para a solução deste problema

Considera-se o diagrama de corpo livre do lado direito de um corte s realizado em uma coordenada x, como mostrado na Figura 13.18. O deslocamento na seção x é $v(x)$, e na extremidade $x = L$, é δ. O somatório de momentos fletores produz o esforço $M_z(x) = P(\delta - v)$.

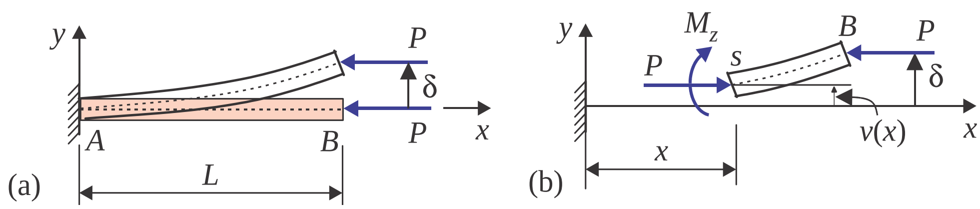


Figura 13.18: (a) Configuração deformada e deslocamento δ na extremidade da barra; (b) diagrama de corpo livre do lado direito do corte.

Então, a equação diferencial elástica fica $EId^2v/dx^2 = P(\delta - v)$, a qual, dividindo por EI, separando os termos, e usando a definição $\lambda^2 = P/EI$, toma a forma

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = \lambda^2\delta. \tag{13.60}$$

Essa é uma **equação diferencial ordinária, de coeficientes constantes, não-homogênea, de segunda ordem**. A solução desta equação consiste na solução particular, v_p, (que depende do termo à direita), somada com a solução homogênea, v_h (solução com o lado direito nulo). Usando a teoria para a solução desse tipo de problema tem-se:

$$v_h = C_1 \cos\lambda x + C_2 \text{sen }\lambda x \qquad \text{e} \qquad v_p = \delta.$$

A **solução geral** é a soma de ambas, i.e., $v(x) = v_h(x) + v_p(x)$, que resulta em:

$$v(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \text{sen }\lambda x + \delta. \tag{13.61}$$

As **condições de contorno** são $\theta(0) = 0$ e $M_z(L) = 0$. Substituindo na solução geral obtém-se o sistema algébrico em termos das constantes C_1 e C_2:

$$\begin{aligned} 0 &= -C_1\lambda \text{ sen } 0 + C_2\lambda\cos 0, \\ 0 &= -C_1\lambda^2\cos\lambda L - C_2\lambda^2 \text{sen }\lambda L. \end{aligned} \tag{13.62}$$

Da primeira expressão obtém-se $C_2 = 0$ e a segunda equação torna-se $C_1\lambda^2\cos\lambda L = 0$. Como λ e C_1 não podem ser nulos, é necessário que $\cos\lambda L = 0$. As raízes dessa equação são $\lambda_n L = (2n-1)\pi/2$, para $n = 1, 2, 3, \cdots$. Como $\lambda^2 = P/EI$, pode-se escrever as raízes diretamente em termos da carga axial P:

$$\sqrt{\frac{P_n}{EI}}L = \frac{(2n-1)}{2}\pi \qquad \longrightarrow \qquad P_n = \left(\frac{(2n-1)}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}EI. \tag{13.63}$$

A carga crítica é a mais baixa, dada por $n = 1$:

$$\boxed{P_{crit} = \frac{\pi^2}{4L^2}EI} \tag{13.64}$$

Nota-se que essa é a mesma expressão para a carga crítica obtida antes, eq.(13.58). A equação da linha elástica é obtida da eq. (13.61) substituindo λ_n e $C_2 = 0$:

$$v(x) = C_{1n}\cos\left[\left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{\pi}{L}x\right] + \delta. \tag{13.65}$$

Ainda C_{1n} é uma incógnita, associada à carga P_n, porém pode-se relacioná-la com o deslocamento na extremidade da viga, δ, aplicando a condição $v(0) = 0$:

$$0 = C_{1n} + \delta \qquad \rightarrow \qquad C_{1n} = -\delta. \tag{13.66}$$

Substituindo a expressão de C_1 de volta a (13.65), obtém-se as autofunções ou **funções de forma de flambagem** da viga engastada-livre para qualquer modo n:

$$\boxed{v(x) = \delta\left\{1 - \cos\left[\left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{\pi}{L}x\right]\right\}} \tag{13.67}$$

que é a mesma expressão obtida em (13.59) por outro método. A Figura 13.19 mostra os quatro primeiros modos de flambagem, associados às primeiras cargas de flambagem. Nota-se que essa solução ainda não é completamente definida, pois a amplitude de cada módulo é δ, incógnito. Seu valor não pode ser identificado pela presente teoria. Na figura, foi arbitrado um valor δ para todas as curvas.

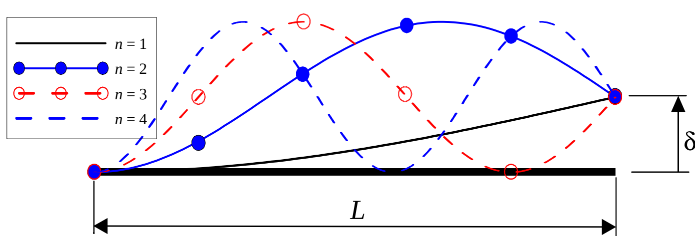


Figura 13.19: Os quatro primeiros modos de flambagem ($n = 1,\ 2,\ 3$ e 4) para a viga engastada-livre do Exemplo 4.

13.1.6 Exemplo 13.6 - Carga de flambagem de barra engastada-rotulada

Resolver o problema de estabilidade de uma barra engastada-rotulada, como ilustrada na Figura 13.20.

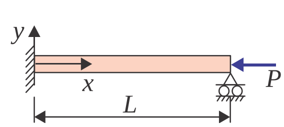


Figura 13.20: Barra engastada-rotulada do Exemplo 6.

Essa é a tensão nominal compressiva em toda a barra, no limiar do processo de instabilidade.

3. Finalmente, define-se o **índice de esbeltez** (L/r) da barra como a relação entre seu comprimento e seu raio de giração. Esse coeficiente dá informação sobre o quão longa é a barra, em relação a sua seção transversal.

Com essas definições, a carga crítica da barra bi-apoiada pode ser reescrita como:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2}{L^2} EI = \frac{\pi^2}{(L/r)^2} EA. \tag{13.75}$$

Dividindo a expressão pela área A da seção transversal, tem-se:

$$\boxed{\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}} \tag{13.76}$$

Observação: o valor do raio de giração r a ser utilizado nas equações de flambagem deve ser o menor dos dois raios de giração da seção, associados aos dois momentos de inércia principais. Isso é necessário porque a flambagem ocorre em torno do eixo de menor momento de inércia (no caso de as vinculações serem iguais em ambas as direções).

Até agora foram analisados quatro casos de combinações de vinculação de colunas submetidas à cargas de compressão. A Figura 13.21 mostra as quatro situações e em seguida são colocadas as respectivas equações.

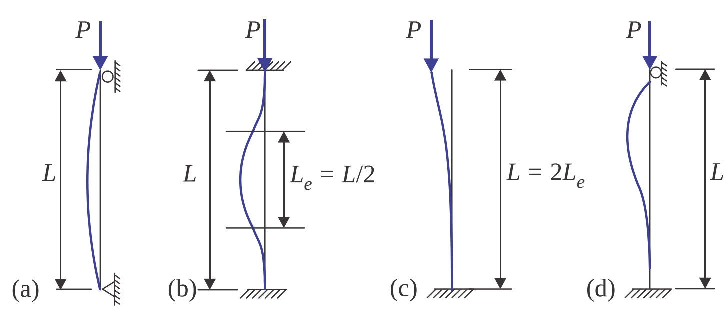


Figura 13.21: Modos críticos de flambagem para quatro diferentes combinações de condições de contorno: (a) bi-rotulada; (b) bi-engastada; (c) engastada-livre; (d) engastada-rotulada.

(a) Barra bi-rotulada. $P_{crit} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$. Com a dedução na eq. (13.76) tem-se a tensão crítica: $\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$.

(b) Barra bi-engastada. $P_{crit} = \frac{4\pi^2}{L^2} EI$. Logo, $\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$, onde $L_e = L/2$ é o comprimento equivalente para a barra bi-engastada.

1. Barra engastada-livre. $P_{crit} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{L^2} EI$. Logo, $\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$, onde $l_e = 2L$ é o comprimento equivalente para a barra engastada-livre.

(c) Barra engastada-rotulada. $P_{crit} = 2,045\frac{\pi^2}{L^2} EI$. Logo, $\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$, onde $L_e = 0,7L$ é o comprimento equivalente para a barra engastada-rotulada.

O **comprimento efetivo** L_e significa que, numa barra engastada-livre, por exemplo, em que $L_e = 2L$, a carga crítica de flambagem é a mesma de uma barra bi-rotulada com comprimento $2L$. Já no caso da barra bi-engastada, a carga crítica é a mesma de uma barra bi-rotulada de comprimento $L/2$. Nota-se que todas as expressões de tensão crítica são iguais, para todas as vinculações de

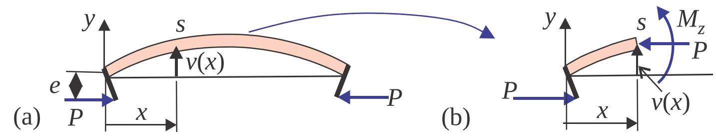


Figura 13.22: (a) Modelo de barra sob carga aplicada com excentricidade e. (b) Esforços numa seção arbirária s.

$$v = C_1 \text{ sen}(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) - e. \tag{13.78}$$

As constantes de integração são obtidas pelas **condições de contorno** $v(0) = 0$ e $v(L) = 0$. Aplicando essas condições em (13.78) obtém-se $C_2 = e$ e

$$C_1 = e\frac{[1 - \cos(\lambda L)]}{\text{sen}(\lambda L)}. \tag{13.79}$$

A seguir realizam-se transformações algébricas buscando simplificar essa equação. Aplicam-se duas conhecidas identidades trigonométricas, $1 - \cos \lambda L = 2\text{sen}^2(\lambda L/2)$ e $\text{sen}(\lambda L) = 2\text{sen}(\lambda L/2)\cos(\lambda L/2)$, ao numerador e ao denominador de (13.79), o que resulta em

$$C_1 = e\frac{\text{sen}^2(\lambda L/2)}{\text{sen}(\lambda L/2)\cos(\lambda L/2)} = e\frac{\text{sen}(\lambda L/2)}{\cos(\lambda L/2)} = e \text{ tg}(\lambda L/2), \tag{13.80}$$

e a linha elástica para este problema é dada por (13.78):

$$\boxed{v(x) = e\left[\text{tg } (\lambda L/2)\text{sen}(\lambda x) + \cos(\lambda x) - 1\right]} \tag{13.81}$$

Devido à simetria do problema, a máxima deflexão ocorre em $x = L/2$, como na A Figura 13.23a. Logo

$$v_{\text{max}} = v(L/2) = e\left[\text{tg}(\lambda L/2)\text{sen}(\lambda L/2) + \cos(\lambda L/2) - 1\right]. \tag{13.82}$$

Separando a tangente, tem-se

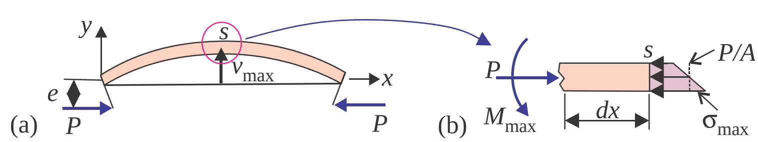


Figura 13.23: (a) Modelo de barra sob carga aplicada com excentricidade e. (b) Esforços e tensões na seção central.

$$v_{\text{max}} = e\left[\frac{\text{sen}^2(\lambda L/2) + \cos^2(\lambda L/2)}{\cos(\lambda L/2)} - 1\right] \quad \longrightarrow \quad \boxed{v_{\text{max}} = e\left[\frac{1}{\cos(\lambda L/2)} - 1\right], \quad \text{onde } \lambda^2 = \frac{P}{EI}} \tag{13.83}$$

Essa expressão mostra que, **se a excentricidade não é nula, sempre ocorrerá deflexão transversal, qualquer que seja o valor da carga** P. Isso é distinto do caso em que $e = 0$, em que a barra permanece sem flexão qualquer que seja a carga, desde que seja inferior a $P_{crít}$. Apenas nessa carga $P_{crít}$ a barra se afasta instantaneamente da configuração reta para a flexionada. Como visto nas soluções de Euler, a deflexão flambada tem magnitude indefinida, onde a teoria fornece apenas o modo de flambagem. Entretanto, com a presença de excentricidade, (13.83) fornece o valor da deflexão, desde que $P < P_{crít}$.

Observa-se que quando $(\lambda L/2) \longrightarrow \pi/2$ se tem $v_{\text{max}} \longrightarrow \infty$, o que significa que **a estrutura torna-se instável para qualquer valor de excentricidade**. Uma vez que $\lambda^2 = P/EI$, tem-se

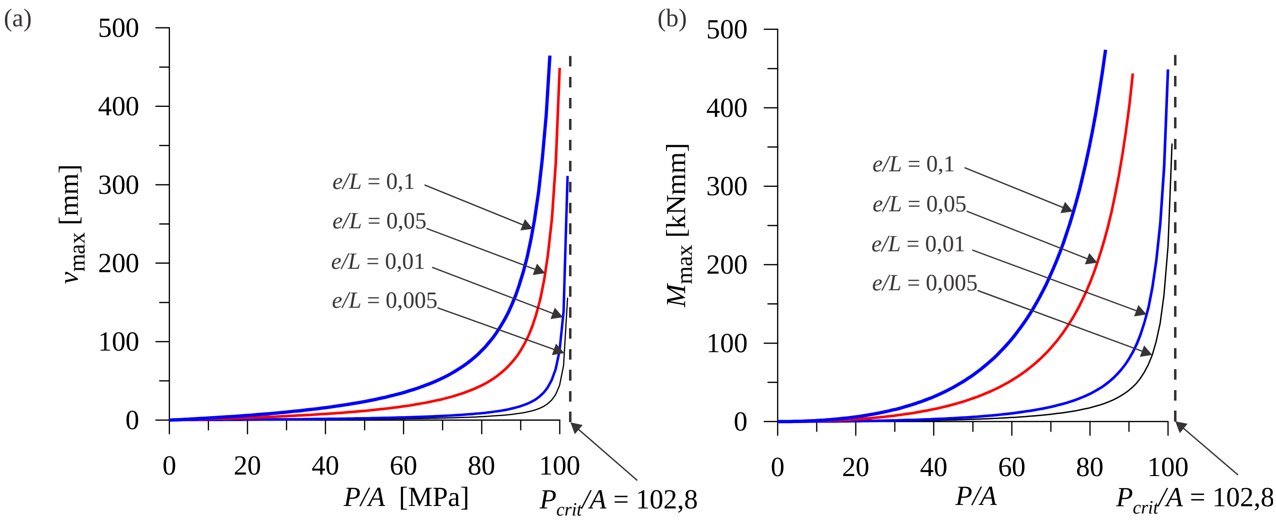


Figura 13.24: Barra bi-rotulada com $E = 200$ GPa, $L = 200$ mm, $b \times h = 5 \times 10$ mm^2. (a) $P/A \times v_{\max}$. (b) $P/A \times M_{\max}$, com $L/r = 138,6$. Curvas com diversas excentricidades e/L.

a carga crítica de flambagem, que é a mesma do modelo de Euler

$$P_{crít} = \frac{\pi^2}{L^2} EI. \tag{13.84}$$

A expressão do deslocamento máximo em (13.83) pode ser modificada convertendo o termo $\lambda L/2$, tal que:

$$v_{\max} = L\left(\frac{e}{L}\right)\left[\sec\left(\frac{L/r}{2\sqrt{E}}\sqrt{P/A}\right) - 1\right]. \tag{13.85}$$

A Figura 13.24a mostra a variação de $v_{\max}$ na barra bi-rotulada do Exemplo 7, em termos da tensão média P/A, para diversos valores de excentricidade adimensional e/L. Nota-se que quando P/A se aproxima de $P_{cr}/A = 102,808$ MPa calculado no Exemplo 7, o deslocamento tende ao infinito, qualquer que seja o valor da excentricidade.

Uma vez que $v_{\max}$ ocorre no centro da viga, o mesmo ocorre com o momento fletor máximo, cujo valor absoluto é:

$$M_{z_{\max}} = |-P\,(e + v_{\max})| = P\,[e + e\,(\sec(\lambda L/2) - 1)] \quad \longrightarrow \quad \boxed{M_{z_{\max}} = Pe\sec(\lambda L/2)} \tag{13.86}$$

Modificando o termo o termo $\lambda L/2$, essa expressão pode ser organizada da seguinte forma:

$$M_{z_{\max}} = \left(\frac{P}{A}\right)\left(\frac{e}{L}\right) AL\sec\left(\frac{L/r}{2\sqrt{E}}\sqrt{P/A}\right). \tag{13.87}$$

A Figura 13.24b mostra a variação do momento fletor máximo $M_{z_{\max}}$ na barra bi-rotulada do Exemplo 3, em termos da tensão média P/A, para diversos valores de excentricidade adimensional e/L, para uma esbeltez fixa $L/r = 138,6$. Para um valor dado de tensão média P/A, o momento fletor cresce com a excentricidade e/L. A taxa de crescimento do momento cresce conforme P/A se aproxima da carga crítica, quando a barra entra em flambagem, qualquer que seja a excentricidade da carga.

As **tensões** máximas devidas à carga axial são obtidas sobrepondo a tensão de flexão à tensão axial na seção central da viga. Considerando a **coordenada do ponto mais distante da linha neutra** na seção central é c, se tem

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{z_{\max}}}{I}c = \frac{P}{A} + \frac{M_{z_{\max}}}{Ar^2}c \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{r}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)\right]} \tag{13.88}$$

Essa é a chamada **fórmula da secante** e mostra um comportamento não-linear entre a tensão máxima e a carga P. Nota-se que o termo P/A à direita é a tensão média na seção, e o termo contendo a secante é a correção devido à excentricidade. A tensão máxima depende do fator $d = ec/r^2$, que contém a excentricidade e os parâmetros c e r da seção. A máxima força de início de escoamento na barra, P_E, é obtida resolvendo a equação para $\sigma_{\max} = \sigma_E$. A equação (13.88) é transcendental e não se pode obter uma expressão explícita para P_E. Em vez disso, dado o valor de $\sigma_{\max} = \sigma_E$ e as demais constantes, a raiz P_E pode facilmente ser obtida numericamente.
Observação - Na eq. (13.88), o raio de giração a ser utilizada pode não ser o valor mínimo entre os dois eixos principais da seção. Em vez disso, r pode ser aquele associado ao eixo principal transversal àquele ao longo do qual a excentricidade da carga existe.

Uma visualização gráfica de (13.88) pode ser obtida convertendo a equação para a forma

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{P}{A}\right)\left[1 + d\sec\left(\frac{L/r}{2\sqrt{E}}\sqrt{P/A}\right)\right] \qquad \text{com } d \equiv \frac{ec}{r^2}. \tag{13.89}$$

onde d é um parâmetro de excentricidade. A Figura 13.25a mostra $\sigma_{\max}$ em termos de P/A, para $L/r = 138,6$, para diversos valores de $d = ec/r^2$. Tanto quanto o momento fletor máximo, a tensão máxima tende ao infinito conforme a força axial tende ao valor crítico, para qualquer excentricidade. Para um valor $P < P_{cr}$, a tensão é maior quanto maior a excentricidade.

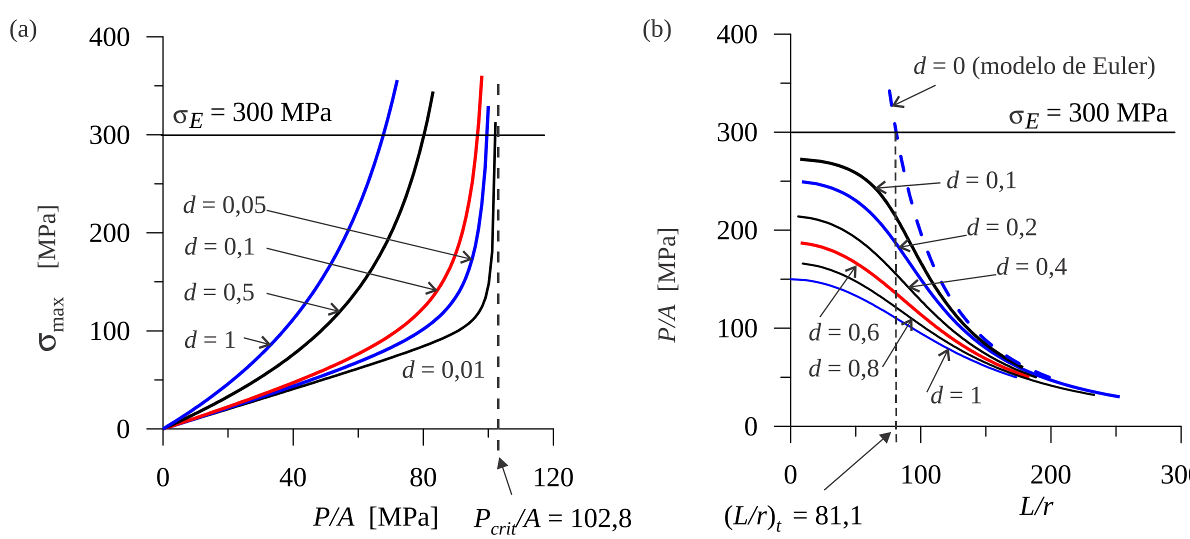


Figura 13.25: Barra bi-rotulada com $E = 200$ GPa, $b \times h = 5 \times 10$ mm^2. (a) $P/A \times \sigma_{\max}$ para $L/r = 138,6$. (b) $L/r \times P/A$, para $\sigma_{\max} = \sigma_E = 300$ MPa. Curvas para diversos valores de excentricidade $d = ec/r^2$.

13.2.1 Escoamento

A teoria desenvolvida na seção 13.1 tem a característica de considerar que o material da barra se comporta de forma elástico-linear até a tensão crítica de flambagem. Essa é a chamada teoria de flambagem de Euler, ou **carga crítica de Euler**, em homenagem a seu criador. Entretanto, observando-se a fórmula de Euler, $\sigma_{crit} = \pi^2 E/\left(L_e/r\right)^2$, conforme a barra se torna curta (baixo valor do índice de esbeltez L_e/r), a tensão crítica que a barra suportaria, de acordo com a teoria de Euler, cresceria indefinidamente. Claramente, abaixo de certo valor, de L_e/r, se teria σ_{crit} superior

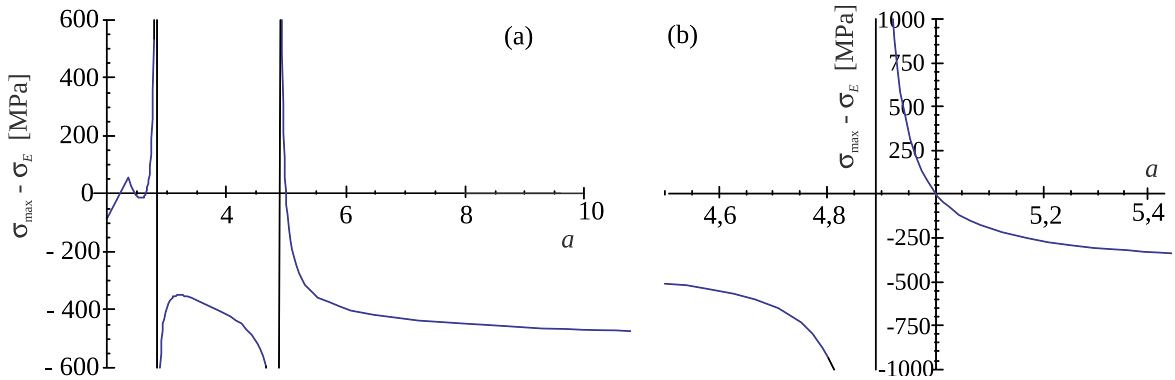


Figura 13.28: Variação do erro $(\sigma_{\max} - \sigma_E)$ com a dimensão a para o Exemplo 9, para duas faixas de esbeltez: (a) a de 2 a 11 mm e (b) a de 4,5 a 5,5 mm

Essas fórmulas se baseiam na fórmula de Euler e em alguns conceitos de plastificação de barras curtas, incorporando **coeficientes de segurança pré-determinados** que levem em conta quantificação estatística de resultados experimentais de erros de fabricação e de tolerância dimensional em perfis estruturais padronizados, pequenos desvios de excentricidade na carga, desvios nas vinculações e não homogeneidade de material. Esses fatores foram identificados estatisticamente a partir de extensas séries de ensaios realizados desde o final do século 19.

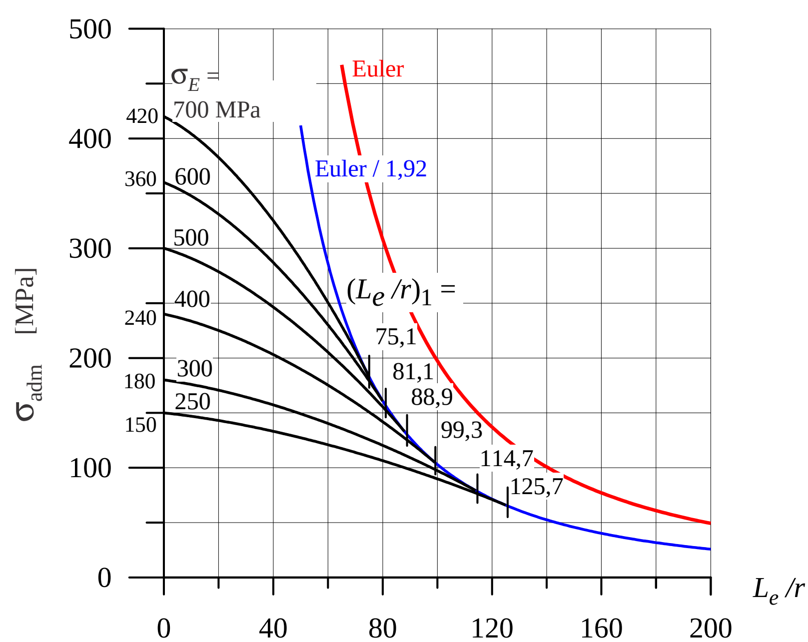


Figura 13.29: Curvas $\sigma_{adm} \times (L_e/r)$ de flambagem para diversos módulos de elasticidade, pelas fórmulas de Euler e de colunas curtas. À curva de Euler foi aplicado um fator de segurança de $23/11 = 1{,}92$.

Resumimos a seguir a formulação normalizada pelo AISC [3] (American Institute of Steel Construction) para **projeto colunas de aço sob compressão de força nominalmente concêntrica**. Para outros materiais (alumínio, madeira), existem outras normas adequadas emitidas por outras organizações de engenharia. São duas equações, uma para barras longas e outra curtas, sendo que a fórmula para barras longas é a de Euler, incorporando um fator de segurança $m = 23/12 = 1,92$. Então, a tensão admissível de Euler, dada em (13.76), $\sigma_{crit} = \pi^2 E / (L_e/r)^2$,

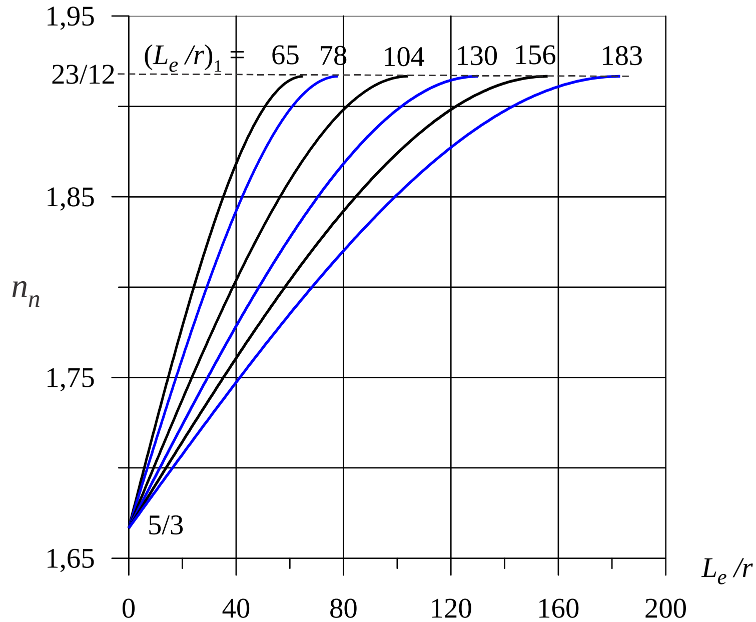


Figura 13.30: Variação do coeficiente de segurança intrínseco da norma, n_n, obtido por (13.96), aplicado na curva de tensão crítica de coluna curta, para diversos valores de esbeltez de transição $(L_e/r)_1$. Usado $E = 200$ GPa.

segurança m, (eq.(13.97)), e de curta (eq.(13.97)). Nota-se que o índice de esbeltez de transição $(L_e/r)_1$ varia conforme o material, conforme a eq.(13.95) e Figura 13.30.

Um sumário do critério de determinação de tensões admissíveis em compressão de barras, é o seguinte:

1. **Colunas longas de aço**. A coluna de índice de esbeltez L_e/r é considerada longa se $(L_e/r)_1 < L_e/r < 200$. O **índice de esbeltez de transição** é dado por

$$e_1 \equiv \left(\frac{L_e}{r}\right)_1 = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_E}} \tag{13.98}$$

Note-se que **vigas super-longas**, com $L_e/r > 200$, **são proibidas**. A tensão admissível para a viga longa é definida por um coeficiente de segurança igual a $n = 23/12$ (aproximadamente igual a 1,917) aplicado à fórmula de Euler:

$$\boxed{\sigma_{adm} = \frac{12}{23}\frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}} \tag{13.99}$$

2. **Colunas curtas de aço**. Para índices de esbeltez menores que o de transição, $L_e/r < (L_e/r)_1$, deve ser usado

$$\boxed{\sigma_{adm} = \frac{P_{adm}}{A} = \frac{\sigma_E}{n_n}\left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2\,(L_e/r)_1^2}\right], \quad \text{com} \quad n_n = \left[\frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(L_e/r)}{(L_e/r)_1} - \frac{1}{8}\frac{(L_e/r)^3}{(L_e/r)_1^3}\right]} \tag{13.100}$$

Note-se que σ_{adm} é um valor admissível de tensão média na seção, i.e., $\sigma_{adm} = P_{adm}/A$ onde P_{adm} é a carga compressiva admissível, considerada ser aplicada de forma coaxial .

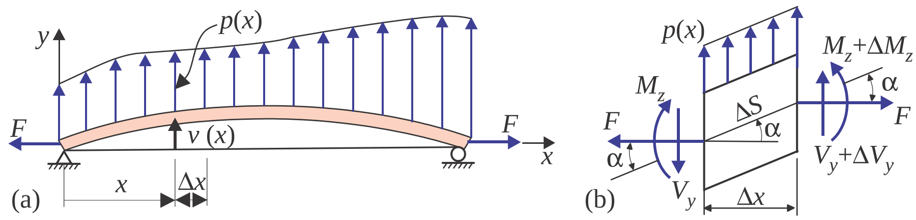


Figura 13.32: Configuração deformada de viga sob flexão e tração.

13.4.1 Solução da equação homogênea

Busca-se a solução do problema homogêneo associado a $(13.101)_3$, (com $p(x) = 0$), ou seja

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} - \lambda^2 M_z = 0. \tag{13.102}$$

Da teoria das equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes, sabe-se que essa equação é satisfeita para qualquer função na forma $M_z(x) = Ce^{mx}$, sendo C e m números reais a serem determinados. A prova que essa função satisfaz a equação diferencial consistem em simplesmente fazer a substituição, o que resulta em $Ce^{mx}m^2 - \lambda^2 Ce^{mx} = 0$. Como C e e^{mx} são não nulos, obtém-se a condição para que a função seja solução: $m^2 - \lambda^2 = 0$. Essa é a **equação característica** do problema diferencial. Uma vez que $\lambda^2 > 0$, as raízes deste polinômio são reais, dadas por: $m_1 = \lambda$ e $m_2 = -\lambda$. Desta forma, prova-se que a solução homogênea é:

$$\boxed{M_z = c_1^* \cosh \lambda x + c_2^* \text{senh } \lambda x} \tag{13.103}$$

onde as constantes c_1^* e c_2^* devem ser determinados a partir das condições de contorno da viga.

Em seguida passa-se à solução da equação $(13.101)_1$, tomando M_z de (13.103). Isso resulta em

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{c_1^*}{EI}\cosh \lambda x + \frac{c_2^*}{EI}\text{senh } \lambda x. \tag{13.104}$$

Integrando duas vezes obtém-se

$$v = -\frac{c_1^*}{\lambda^2 EI}\cosh \lambda x - \frac{c_2^*}{\lambda^2 EI}\text{senh}\lambda x + c_3 x + c_4. \tag{13.105}$$

Coletam-se as constantes de forma a simplificar a notação para:

$$\boxed{v(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \text{senh} \lambda x + c_3 x + c_4} \tag{13.106}$$

onde $c_1 = c_1^*/\lambda^2 EI$ e $c_2 = c_2^*/\lambda^2 EI$. Observa-se que (13.106) é a solução da equação de quarta ordem, eq. $(13.101)_2$.

13.4.2 Exemplo 13.12 - Enrijecimento em viga bi-rotulada

Consideremos uma viga perfeitamente reta (Figura 13.33a) de seção transversal uniforme, sob carga axial trativa perfeitamente centrada nos centroides, com apoios que permitem a rotação no plano. Determine a curva elástica da viga incluindo o efeito da força axial F na deflexão. Desejamos comparar a resposta com aquela obtida para a deflexão sem o efeito de F, como obtido no Capítulo 12. Os dados são: $p = 0,5$ N/mm, $E = 207$ GPa, o comprimento $L = 1$ m, e a seção transversal é tubular com diâmetros interno/externo $d/D = 12/20$ mm.
Solução:

$$
\begin{aligned}
v(0) &= 0 = C_1 \cosh 0 + C_2 \operatorname{senh} 0 - \frac{p}{F\lambda^2}, \\
v(L) &= 0 = C_1 \cosh \lambda L + C_2 \operatorname{senh} \lambda L - \frac{p}{F\lambda^2} + \frac{pL^2}{2F} - \frac{pL^2}{2F}.
\end{aligned} \qquad (13.113)
$$

da primeira equação obtém-se $C_1 = p/F\lambda^2$ e da segunda equação obtém-se $C_2 = [p/(F\lambda^2 \operatorname{senh} \lambda L)][1 - \cosh \lambda L]$. Substituindo as constantes em (13.112) se tem a curva elástica da viga. A deflexão máxima ocorre em $x = L/2$, tal que

$$v_{\max} = \frac{p}{8EI\lambda^4}\left[-8 + (\lambda L)^2 + 8\operatorname{sech}(\lambda L/2)\right]. \qquad (13.114)$$

Deve-se notar que essa solução se aplica apenas para $F > 0$. Para $F = 0$, a equação diferencial (13.108) toma outra forma em que a solução é aquela descrita com os métodos do Capítulo 12 para curva elástica. No presente caso, da viga bi-apoiada, o Apêndice 17.1, caso 14, mostra que $v_{\max} = pL^4/384EI$ para $F = 0$. Aplicando os valores numéricos, podemos comparar os valores de $v_{\max}$ obtidos com e sem aplicação de força axial trativa F. Essa comparação é mostrada na Figura 13.34 para os dados numéricos do enunciado do exemplo. Nota-se que, como esperado, a aplicação da tração F reduz a deflexão transversal, i.e., a tração provoca um aumento da rigidez transversal da viga. Esse é o mesmo efeito que se observa em cordas de instrumentos musicais, como violão, que são adequadamente enrijecidos pelo aperto de afinamento aplicado. Cabos de aço suportando cargas também apresentam esse efeito.

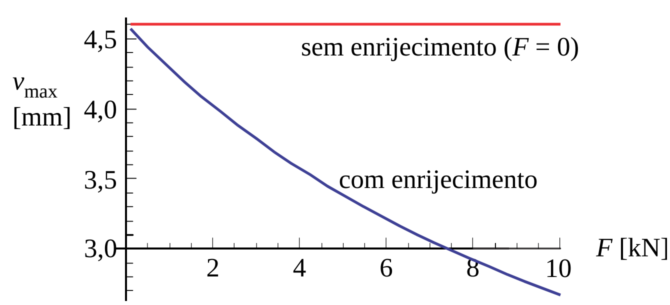
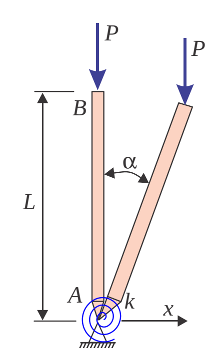


Figura 13.34: Deflexão máxima na viga bi-apoiada sem e com o efeito do enrijecimento.

13.5 Exercícios

13.1 A barra AB é rígida de comprimento L está engastada na posição vertical na seção A. Pode-se representar a rigidez da base como uma mola flexural de rigidez k [Nm] na extremidade inferior A. A barra é submetida a uma força compressiva P. (a) Determine a força crítica axial P_{cr} do sistema para instabilidade no plano xy. (b) determine P_{cr} para $L = 1$ m, $k = 1{,}2 \cdot 10^4$ kNmm/rad.



13.2 A barra rígida AB é rotulada em A e suportada em B na posição vertical por um cabo BC de comprimento c e submetida a uma força compressiva P. Determine a força crítica axial P_{cr} do sistema para insta-