

Capítulo 8

Tecnologia de elementos finitos - I

A grande diferença existente entre elementos finitos unidimensionais (barras e vigas) e os elementos finitos de modelos de elasticidade bi e tridimensional é que os primeiros são, por definição, elementos discretos, isto é, a cada barra, geralmente é associado apenas **um** elemento finito de barra ou viga. No caso de elasticidade bi ou tridimensional, o domínio que o corpo em análise ocupa é particionado por uma “malha de elementos finitos”. Dito de outra forma, dado um domínio de análise, este pode ser particionado através de malhas diferentes, cada uma delas associada a um grau de precisão na aproximação da solução exata.

A seguir é apresentado o modelo geral de elasticidade linear tridimensional e algumas de suas particularizações para casos específicos que permitem modelagens planas. A presente abordagem tem como intuito principal permitir a compreensão da aplicação da técnica de elementos finitos em diversas outras classes de problemas físicos (estruturais, térmicos, eletromagnéticos, piezoelétricos, por exemplo) em que envolvem uma ou mais variáveis em duas ou três dimensões

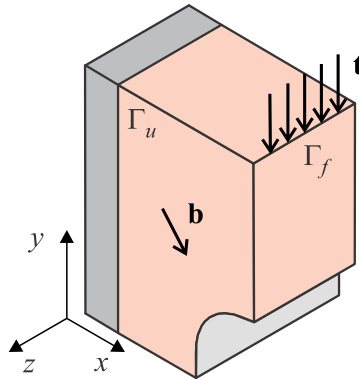


Figura 8.1: Carregamento num corpo arbitrário.

8.1 O problema de elasticidade linear

Seja um corpo ocupando uma região Ω no espaço tridimensional R^3 (Figura 8.1), limitado por um contorno Γ com normal \mathbf{n} definida univocamente em quase todo ponto. Esse contorno é dividido em duas regiões. A primeira, Γ_u , é a parte de Γ onde os deslocamentos tem valor prescrito conhecido $\bar{\mathbf{u}}$. A segunda, Γ_f , é a parte do contorno onde são aplicadas forças de superfície $\bar{\mathbf{t}}$ (forças por unidade de superfície), de valor conhecido.¹ No domínio Ω podem atuar as forças de corpo \mathbf{b} (forças por unidade de volume). A partir destas definições o problema de equilíbrio em elasticidade

¹As condições de contorno de deslocamentos são também conhecidos por condição de contorno **essenciais, ou de Dirichlet**, e as condições de força são também conhecidas por condições **naturais ou de Neumann**. De fato, essa nomenclatura é proveniente do estudo de equações diferenciais em geral, e, claramente, se aplicam também ao conjunto particular de equações associadas à mecânica dos sólidos sendo tratado aqui.

tridimensional e descrito mediante o seguinte conjunto de equações diferenciais (ver as equações do movimento (2.25), página 32 e as equações de Navier (4.43), página 74):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{em } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) & \text{em } \mathbf{x} \in \Gamma_f, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \text{em } \mathbf{x} \in \Gamma_u. \end{cases} \quad (8.1)$$

Estas equações são suplementadas por uma relação cinemática e uma constitutiva. A relação cinemática usada aqui é a linear, mostrada em (3.27), página 54. Elas definem uma relação $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^s$. As equações constitutivas relacionam tensões e deformações, isto é, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$ ou $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}))$. Para o caso de elasticidade linear isotrópica estas equações são mostradas nas eqs. (4.15), na página 65. Da mesma forma que no caso de barras ou vigas, é necessário descrever o problema de equilíbrio de um sólido em R^3 numa forma alternativa à formulação diferencial, o denominada **princípio dos trabalhos virtuais**. Naqueles modelos, o princípio dos trabalhos virtuais foi obtido mediante integração, ao longo do domínio da barra, do produto entre a equação diferencial de equilíbrio e uma função peso arbitrária $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$. No presente caso, a integração no domínio corresponde a uma integral de volume de funções vetoriais. Assim, será necessário fazer uso teorema do divergente, eq. (1.66) na página 20 e a regra de diferenciação de produto de funções, principalmente entre uma função tensorial e uma vetorial, dada em (1.62) na página 19.

8.1.1 Da formulação diferencial ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Considere o problema de equilíbrio dado em (8.1). Γ_u é a parte do contorno onde os deslocamentos são conhecidos, de valor $\bar{\mathbf{u}}$. Corresponde, por exemplo, às partes do corpo apoiadas ou fixadas à uma base de sustentação, quando $\bar{\mathbf{u}}$ pode, eventualmente, ser uma função nula. Γ_f é a parte do corpo onde são aplicados carregamentos distribuídos por unidade de área, de valor conhecido $\bar{\mathbf{t}}$. Nesta região de contorno os deslocamentos são inicialmente ignorados: fazem parte das incógnitas do problema e são obtidos apenas no fim da análise. Por exemplo, a superfície livre de um corpo pertence a Γ_f . Ali a força aplicada é conhecida, $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$. O campo de deslocamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ que soluciona a equação diferencial de equilíbrio é aquele campo de deslocamentos que deforma o corpo produzindo um estado de tensões em equilíbrio com os esforços externos. Este campo de deslocamentos pertence ao **conjunto de funções cinematicamente admissível**, definido por

$$\boxed{Kin = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \text{ é suficientemente regular tal que } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u\}} \quad (8.2)$$

Esta definição é análoga àquela já vista para os casos de barras. Em outras palavras, a solução do problema se encontra dentro do conjunto das funções que satisfazem às condições de contorno e seja suficientemente regular para permitir a realização das operações necessárias para a solução.²

A diferença entre duas funções arbitrárias $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ e $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ pertencentes ao conjunto Kin , é uma terceira função $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ que possui o valor zero em pontos $\mathbf{x} \in \Gamma_u$. O conjunto de todas as funções de deslocamento com valor zero em Γ_u é denotado como o **espaço das variações** Var , definido por

$$\boxed{Var = \{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \text{ é suficientemente regular tal que } \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u\}} \quad (8.3)$$

Novamente, este conjunto tem interpretação análoga ao apresentado para o caso do modelo de barras. Feitas estas definições, se está em condições de formular o princípio dos trabalhos virtuais.

Considera-se que a equação diferencial (8.1)₁ é satisfeita para todo ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, isto é

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (8.4)$$

²No presente caso, a equação diferencial de domínio em (8.1), junto com as equações constitutivas e cinemáticas, exigem continuidade da segunda derivada da função \mathbf{u} , se a força de corpo \mathbf{b} for uma função contínua em Ω . Então, para poder operar a equação diferencial, “regularidade suficiente” em Kin significa que $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)$. Veremos a seguir que ao trocar a equação diferencial pelo PTV, tal exigência de regularidade é reduzida, sendo possível utilizar um conjunto de funções mais amplo que $C^2(\Omega)$.

$\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}) = \hat{\varepsilon}$, é a chamada **deformação virtual**. Esta é definida como a parte simétrica de $\nabla\hat{\mathbf{u}}$, usando (3.27) ou (1.41), i.e.:

$$\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\nabla\hat{\mathbf{u}} + \nabla\hat{\mathbf{u}}^T) = \nabla^s\hat{\mathbf{u}}. \quad (8.13)$$

Nota-se que em (8.12) não foi incorporada nenhuma característica do material, de forma que esse enunciado para o PTV é bastante geral, servindo para qualquer modelo constitutivo adotado, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$.

Se consideramos que a **equação constitutiva** seja elástica linear, pode-se escrever as tensões em função das deformações produzidas pelo deslocamento real $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, isto é

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}\varepsilon(\mathbf{u}), \quad (8.14)$$

onde \mathbf{C} é a matriz elástica do material. Com isso, pode se escrever a expressão do **princípio dos trabalhos virtuais** (8.12), adaptada aos **materiais elástico lineares**, como

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in Var} \quad (8.15)$$

A origem do nome **princípio dos trabalhos virtuais** pode ser explicado como segue:

- **Princípio** porque pode-se definir o equilíbrio de um sistema como aquele conjunto de esforços externos ($\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{b}$) e internos ($\boldsymbol{\sigma}$) que satisfazem a equação integral acima.
- **Virtuais** porque $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ não é um deslocamento real e sim uma função arbitrária, utilizada como função “peso” na verificação de satisfação da equação integral.
- **Trabalhos** porque cada um dos termos tem a dimensão de trabalho ou energia. Como as forças são reais mas atuam sobre deslocamentos fictícios, os trabalhos também são fictícios. Esses trabalhos são

– **Trabalho virtual interno:**

$$\delta U = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \varepsilon(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega. \quad (8.16)$$

- – **Trabalho virtual externo**

$$\delta W = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma. \quad (8.17)$$

Concluindo, ao invés de se buscar as funções ($\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}$) que satisfazem o problema diferencial de equilíbrio (8.1), busca-se a função vetorial \mathbf{u} que satisfaz à equação integral do PTV para qualquer $\hat{\mathbf{u}} \in Var$, conforme (8.15). O motivo de se utilizar a forma integral para escrever a condição de equilíbrio, é que o mesmo é apropriado para à determinação de soluções aproximadas por diversos métodos, como o de Galerkin e o de elementos finitos.

8.1.2 Do Princípio dos Trabalhos Virtuais à formulação diferencial

O resultado obtido na seção 8.1.1 mostra que toda função $\mathbf{u} \in Kin$ que satisfaz as equações locais (8.1) também satisfaz a igualdade (8.12). Entretanto, a equivalência entre as duas formulações requer provar a relação inversa, i.e., que toda função $\mathbf{u} \in Kin$ que satisfaz a forma integral (8.12) é também solução de (8.1). Esta demonstração é apresentada a seguir.

Admita-se que se dispõe da função \mathbf{u} que satisfaz o PTV (8.12). Considerando que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ é simétrico, também satisfaz a igualdade

inverso, i.e., que a função que satisfaz a forma diferencial do equilíbrio, também satisfaz a Forma Variacional. Com isso se tem provado a equivalência entre as duas formas. Entretanto, cabe uma observação. Uma função \mathbf{u} , para satisfazer a FV, necessita ser apenas $C^0(\Omega)$, enquanto que para satisfazer o equilíbrio local precisa ser $C^2(\Omega)$, se os dados $(\mathbf{C}, \mathbf{b}, \bar{\mathbf{t}} \text{ e } \bar{\mathbf{u}})$ forem funções contínuas, i.e., \mathbf{u} precisa ter segundas derivadas contínuas, para que $\nabla \boldsymbol{\sigma}$ resulte contínuo, uma vez que $\nabla \boldsymbol{\sigma}$ deve ser igual a $-\mathbf{b}$.

Observação. A dedução está segue o mesmo raciocínio do chamado Lema Fundamental do Cálculo Variacional. Este teorema é demonstrado com uma formalização mais compacta em (14.135), página 394.

A formulação apresentada até este ponto tem sido geral no sentido de ser tridimensional. A seguir são apresentados os modelos denominados estados planos de elasticidade, mediante a incorporação de hipóteses particulares de comportamento que permitem uma descrição plana do problema. Quando essa redução de dimensão é admissível, os esforços de modelamento e de processamento numérico são extremamente reduzidos em relação à análise tridimensional do problema. A rigor, o tratamento de elementos finitos para problemas tridimensionais é praticamente idêntico ao utilizado para estados planos, e, de fato, bastante mais simples, porém esses últimos permitem a visualização gráfica dos campos, o que facilita a compreensão da metodologia e por isto são apresentados primeiro.

8.2 Estado plano de deformação (EPD)

8.2.1 Princípio dos trabalhos virtuais em EPD

A hipótese de estado plano de deformação pode ser aplicada em situações com as seguintes características:

1. Peça é de geometria prismática com comprimento do eixo apreciável em relação às dimensões da seção transversal da peça;
2. É usual orientar o eixo z ao longo do comprimento do corpo, de forma que a seção transversal fica paralela ao plano xy ;
3. O carregamento é todo contido no plano da seção transversal (Figura 8.1), isto é, as componentes z são nulas;
4. Todos os dados do problema (geometria, carregamentos, material e condições de contorno) não variam na direção longitudinal z ;
5. As condições de contorno são tais que os deslocamentos na direção axial z são nulos ($w = 0$ em toda a peça).

Com essas hipóteses, os carregamentos aplicados e o campo de deslocamentos ficam restritos a

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t}(x, y) = \begin{Bmatrix} t_x(x, y) \\ t_y(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b}(x, y) = \begin{Bmatrix} b_x(x, y) \\ b_y(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8.29)$$

E o tensor de deformações é

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{u_{,y} + v_{,x}}{2} & 0 \\ \frac{u_{,y} + v_{,x}}{2} & v_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.30)$$

A relação constitutiva de um sólido isotrópico elástico linear para o EPD foi dada na eq. (4.26), página 67, reorganizando as três componentes não nulas independentes de tensão e de deformação em notação de Voigt (em forma de arranjo unidimensional):

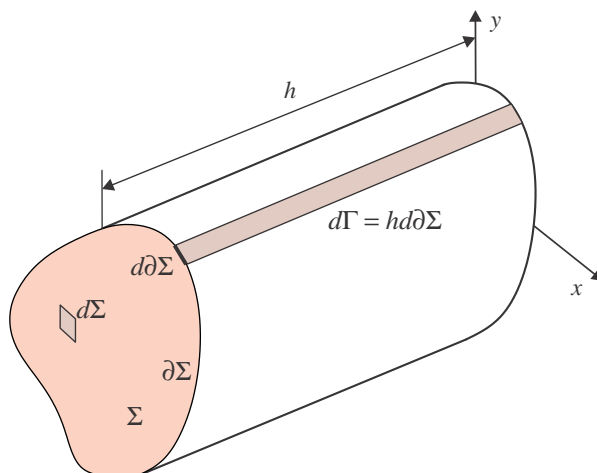


Figura 8.2: Dados geométricos de um corpo modelado para um estado plano de deformações

$\partial\Sigma_f$ é a parte do contorno da área sob forças prescritas. O problema consiste então na determinação das funções de deslocamentos $u(x, y)$ e $v(x, y)$ que satisfazem à condição acima. Procura-se obter uma solução **aproximada** via elementos finitos.

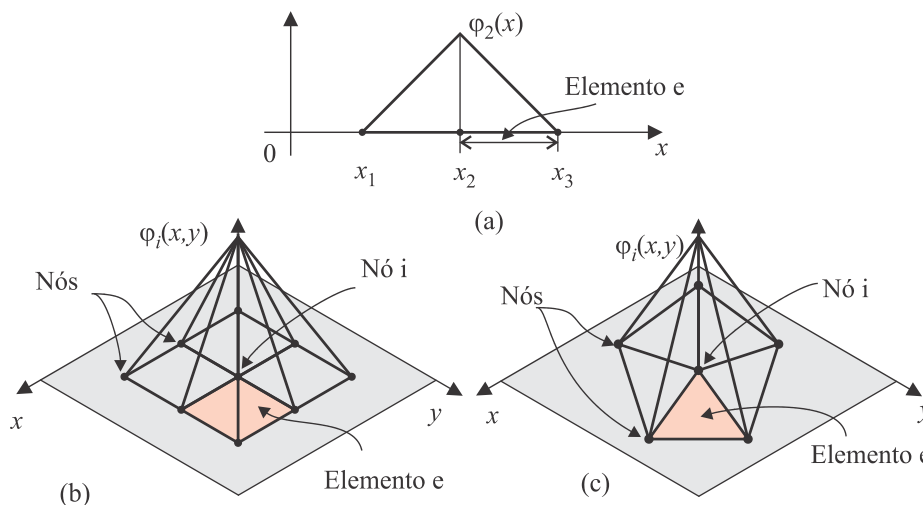


Figura 8.3: Funções de forma (a) unidimensional, (b) bilinear em elemento quadrilateral, (c) linear em elemento triangular.

8.2.2 Elementos finitos em estado plano de deformações

A proposta do método de elementos finitos consiste em aproximar as funções u e v por uma combinação linear de funções de aproximação, seguindo a mesma idéia que a apresentada no modelo de barras no Capítulo 7. A primeira diferença notável reside no fato que naquele modelo a função de aproximação depende de uma única coordenada, isto é, $\varphi = \varphi(x)$ enquanto no presente caso, estas dependem de duas coordenadas: $\varphi = \varphi(x, y)$. Na Figura 8.3a é possível observar o formato de uma função de interpolação típica para um problema unidimensional, no caso uma função linear associada ao nó 2. Nas Figuras 8.3b e (c) aparecem suas extensões para um nó arbitrário i em um domínio bidimensional, associado a elementos triangulares e quadrilaterais.

As funções de aproximação são construídas de forma tal que o valor da função φ_i (associada ao nó i da malha) avaliada na coordenada \mathbf{x}^i do nó i , tem valor unitário, isto é,

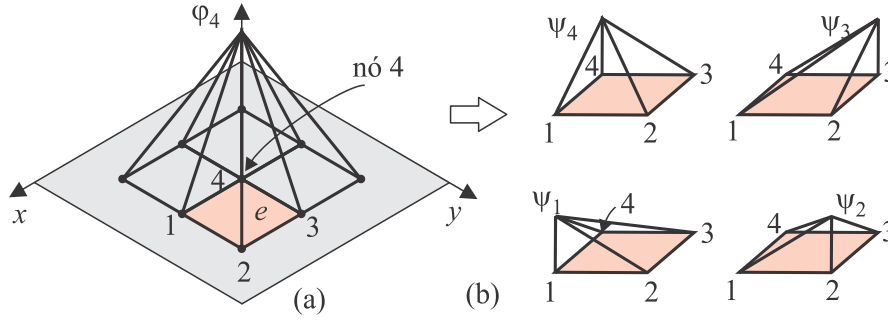


Figura 8.5: (a) Função de interpolação global φ_4 , associada ao nó global 4. (b) Funções locais associadas aos nós no elemento e .

Os deslocamentos no elemento são interpolados como

$$\mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{U}^e, \quad (8.50)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \hat{\mathbf{U}}^e, \quad \forall (x, y) \in \Sigma_e, \quad (8.51)$$

onde Σ_e é o domínio do elemento e , \mathbf{U}^e e $\hat{\mathbf{U}}^e$ são vetores de dimensão igual a duas vezes o **número de nós do elemento** N_{ne} (número de funções de aproximação associadas ao elemento) e a matriz $\mathbf{N}^e(x, y)$ é a matriz das funções de aproximação elementares correspondentes ao elemento arbitrário:

$$\mathbf{N}^e(x, y) = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \dots & \psi_{N_{ne}} & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & \dots & 0 & \psi_{N_{ne}} \end{bmatrix}. \quad (8.52)$$

A relação entre as funções globais e elementares é ilustrado na Figura 8.5. A Figura 8.5a mostra a função linear global φ_4 , associada ao nó 4. Essa função cobre todos os elementos que contêm o nó 4. Na região do elemento e , essa função define a função elementar ψ_4 do elemento e , mostrada na Figura 8.5b. De forma análoga, as funções globais φ_1, φ_2 e φ_3 geram, no elemento e , as funções elementares ψ_1, ψ_2 e ψ_3 , também mostradas na figura.

A matriz de deformação discreta \mathbf{B}^e do elemento é calculada da mesma forma que no caso anterior, usando o mesmo operador diferencial \mathbf{D} :

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{D}^d \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \psi_{1,x} & 0 & \dots & \psi_{N_{ne},x} & 0 \\ 0 & \psi_{1,y} & \dots & 0 & \psi_{N_{ne},y} \\ \psi_{1,y} & \psi_{1,x} & \dots & \psi_{N_{ne},y} & \psi_{N_{ne},x} \end{bmatrix}. \quad (8.53)$$

A matriz de rigidez e o vetor força nodal equivalente elementares são agora

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_{\Sigma_e} \mathbf{B}^e{}^T \mathbf{C}^d \mathbf{B}^e d\Sigma \\ \mathbf{F}^e &= \int_{\Sigma_e} \mathbf{N}^e{}^T \mathbf{b} d\Sigma + \int_{\partial\Sigma_e \cap \partial\Sigma_f} \mathbf{N}^e{}^T \bar{\mathbf{t}} d\partial\Sigma \end{aligned}} \quad (8.54)$$

Σ_e é a área do elemento e $\partial\Sigma_e \cap \partial\Sigma_f$ é a parte do contorno do elemento que intercepta o contorno do domínio global onde existem cargas distribuídas aplicadas. O processo de **sobreposição** destas matrizes elementares nas matrizes globais é feito em forma idêntica ao caso de barras e vigas, através da tabela de conectividade dos elementos, como detalhado no Capítulo 5. Esse procedimento é, muitas vezes, representado simbolicamente por:

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{F} = \sum_e \mathbf{F}^e.$$

Reações no apoio Uma vez tendo sido determinados os valores de todos os deslocamentos nodais, o cálculo de reações nos apoios segue os mesmos passos detalhados nos capítulos de barras e vigas. As reações são calculadas mediante o produto da matriz de rigidez completa pelo vetor de deslocamentos nodais completo, dando como resultado o vetor de carregamento completo, incluindo as reações: $\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}^a$, onde \mathbf{F}^a e \mathbf{R} são o vetor de forças aplicadas, (conhecidas) e o de reações, respectivamente.

Deformações e tensões As deformações e tensões são finalmente calculadas mediante as equações cinemáticas e constitutivas, elemento a elemento. Conhecido completamente o vetor global de deslocamentos nodais \mathbf{U} , monta-se o vetor de deslocamentos nodais de um certo elemento, $\hat{\mathbf{U}}^e$. Assim, utilizando a equação (8.39) tem-se para qualquer ponto dentro do elemento:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}^e(x, y) &= \hat{\mathbf{N}}(x, y)\hat{\mathbf{U}}^e, \\ \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) &= \hat{\mathbf{B}}(x, y)\hat{\mathbf{U}}^e, \\ \boldsymbol{\sigma}(x, y) &= \mathbf{C}^d \boldsymbol{\varepsilon}(x, y).\end{aligned}\tag{8.55}$$

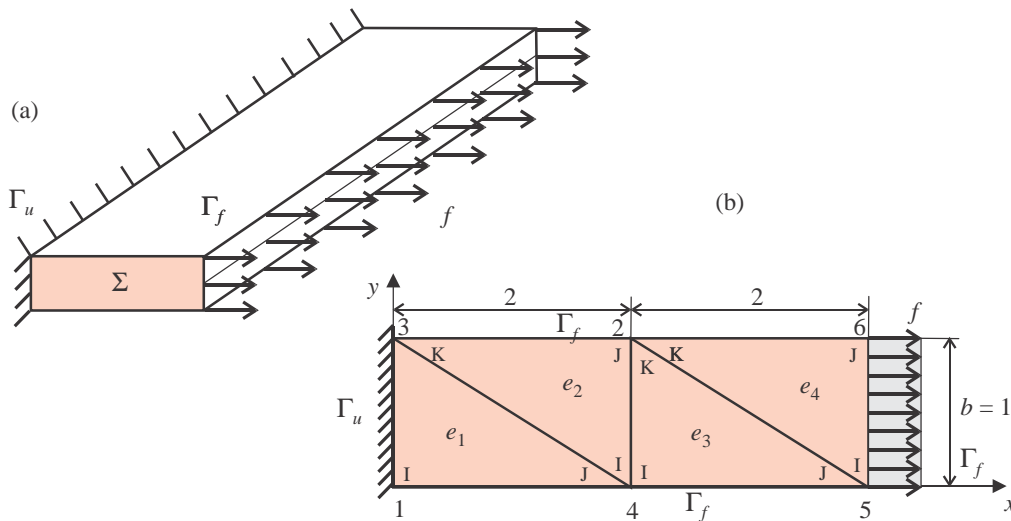


Figura 8.6: Exemplo de componente analisado com estado plano de deformações. (a) vista geral, (b) seção transversal.

8.2.3 Exemplo 8.1 - Bloco sob tração

Consideramos um bloco tracionado, cuja seção transversal é a região mostrada na Figura 8.6. Em (a) se tem a vista geral do corpo e em (b) o domínio Σ da seção transversal que é analisado pelo modelo de elasticidade plana. Se consideramos que as faces do bloco ao longo do eixo z sejam restringidas de tal forma a impedir deslocamentos nessa direção, podemos modelar o problema como um EPD. Nesse caso, apenas a seção transversal, no plano xy precisa ser modelada. Nesse exemplo foi utilizada a malha mostrada na Figura 8.6b, composta por 6 nós e 4 elementos triangulares de três nós cada ($N_{ne} = 3$ nós por elemento). O material tem $E = 200$ GPa e o coeficiente de Poisson é adotado como nulo para simplificar os valores numéricos. Ao longo da região de contorno entre os nós 5 e 6 atua uma força distribuída uniforme $f = 2$ MPa. A parte do contorno entre os nós 1 e 3 consiste na região $\partial\Sigma_u$, onde os deslocamentos são conhecidos. No caso essa é a região do engaste, onde $u = v = 0$. Os dados de coordenadas nodais e conectividade dos elementos são:

(apenas para simplificar a notação no texto) a matriz de elasticidade \mathbf{C}^d para EPD (8.31) fica

$$\mathbf{C}^d = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E/2 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}. \quad (8.60)$$

Finalmente, a matriz de rigidez do elemento 1 é

$$\mathbf{K}^{e_1} = \int_{\Sigma_e} \mathbf{B}^{e_1 T} \mathbf{C}^d \mathbf{B}^{e_1} d\Sigma, \quad (8.61)$$

que expandindo fica

$$\mathbf{K}^{e_1} = \int_0^2 \int_0^{1-x} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} dy dx \quad (8.62)$$

Como $\int_0^2 \int_0^{1-x/2} dy dx = 1$, que é a área do elemento 1, a matriz fica

$$\mathbf{K}^{e_1} = \frac{E}{8} \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 & -2 & -4 & 0 \\ & 9 & 0 & -1 & -2 & -8 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 2 & 0 \\ & & & & 4 & 0 \\ \text{sim.} & & & & & 8 \end{bmatrix}. \quad (8.63)$$

Esta matriz de 6×6 componentes deve ser sobreposta na matriz global \mathbf{K} , de 12×12 componentes, através dos dados de conectividade (ver detalhes no Capítulo 5), ficando assim

$$\mathbf{K} = \frac{E}{8} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 & u_6 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccc} u_1 & 6 & 2 & & & -4 & 0 & -2 & -2 & & & & \\ v_1 & 2 & 9 & & & -2 & -8 & 0 & -1 & & & & \\ u_2 & & & & & & & & & & & & \\ v_2 & & & & & & & & & & & & \\ u_3 & -4 & -2 & & & 4 & 0 & 0 & 2 & & & & \\ v_3 & 0 & -8 & & & 0 & 8 & 0 & 0 & & & & \\ u_4 & -2 & 0 & & & 0 & 0 & 2 & 0 & & & & \\ v_4 & -2 & -1 & & & 2 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ u_5 & & & & & & & & & & & & \\ v_5 & & & & & & & & & & & & \\ u_6 & & & & & & & & & & & & \\ v_6 & & & & & & & & & & & & \end{array} \end{array} \quad (8.64)$$

Após a sobreposição de todos os elementos, (denotamos com \times os elementos não nulos e os

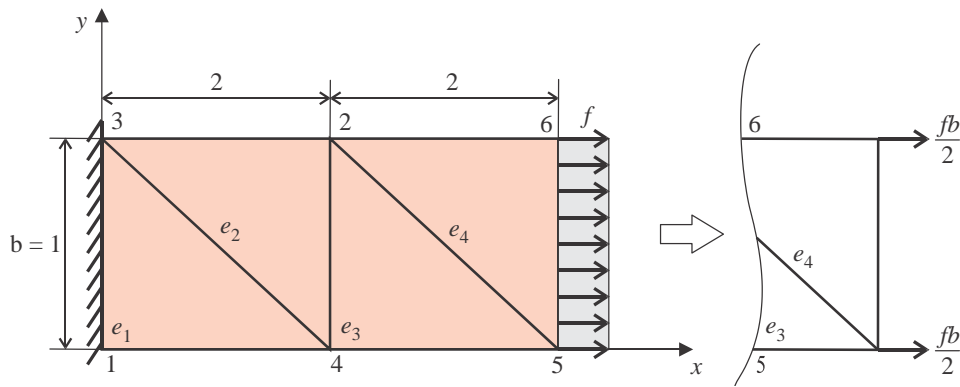


Figura 8.8: Carga distribuída no contorno e forças nodais equivalentes nos nós 5 e 6.

	u_2	v_2	u_4	v_4	u_5	v_5	u_6	v_6	$\bar{\mathbf{U}}$	$\bar{\mathbf{F}}$
u_2	×	×	×	×	×	×	×	×	u_2	0
v_2	×	×	×	×	×	×	×	×	v_2	0
u_4	×	×	×	×	×	×			u_4	0
v_4	×	×	×	×	×	×			v_4	0
u_5	×	×	×	×	×	×	×	×	u_5	$fb/2$
v_5	×	×	×	×	×	×	×	×	v_5	0
u_6	×	×			×	×	×	×	u_6	$fb/2$
v_6	×	×			×	×	×	×	v_6	0

$$= \quad (8.68)$$

Observações:

1. Esse processo de imposição de condições e contorno foi apresentado e exemplificado nos capítulos 5 e 6 sem uma explicação matematicamente adequada. Agora, com o embasamento do PTV, o procedimento pode ser precisamente explicado. Para isso, observa-se a forma discretizada do PTV, eq. (8.47). Cada linha do sistema algébrico (8.68) corresponde a um termo do colchete de (8.47), que multiplica um valor nodal de deslocamento virtual $\hat{\mathbf{U}}$. No exemplo, (8.47) fica:

$$\begin{aligned}
 & \{K_{11}u_1 + K_{12}v_1 + K_{13}u_2 + \cdots K_{1,12}v_6 - F_{x1}\} \hat{u}_1 + \\
 & \{K_{21}u_1 + K_{22}v_1 + K_{23}u_2 + \cdots K_{2,12}v_6 - F_{y1}\} \hat{v}_1 + \\
 & \{K_{31}u_1 + K_{32}v_1 + K_{33}u_2 + \cdots K_{3,12}v_6 - F_{x2}\} \hat{u}_2 + \\
 & \quad \vdots \\
 & \{K_{10,1}u_1 + K_{10,2}v_1 + K_{10,3}u_2 + \cdots K_{10,12}v_6 - F_{y5}\} \hat{v}_5 + \\
 & \{K_{11,1}u_1 + K_{11,2}v_1 + K_{11,3}u_2 + \cdots K_{11,12}v_6 - F_{x6}\} \hat{u}_6 + \\
 & \{K_{12,1}u_1 + K_{12,2}v_1 + K_{12,3}u_2 + \cdots K_{12,12}v_6 - F_{y6}\} \hat{v}_6 = 0,
 \end{aligned} \quad (8.69)$$

Essa equação deve ser nula para qualquer $\hat{\mathbf{U}}$ em $R^{2N_{nos}}$, tal que $\mathbf{N}(x, y) \mathbf{U} \in Kin_h$ e $\mathbf{N}(x, y) \hat{\mathbf{U}} \in Var_h$. Isto significa que $\hat{\mathbf{U}}$ deve ser nulo nos nós vinculados, isto é, deve-se ter $\hat{u}_1 = \hat{v}_1 = \hat{u}_3 = \hat{v}_3 = 0$. Então, as linhas 1, 2, 5 e 6 do sistema algébrico são multiplicadas por zero para gerar o balanço de energia virtual em . Isso é o que explica o procedimento apresentado nos capítulos iniciais para a imposição de condições de contorno de deslocamento: “*primeiramente eliminar as linhas vinculadas.*”

2. Note-se que o fato dessas linhas da matriz estarem multiplicadas por zero no PTV não significa que seus termos sejam nulos. De fato, os coeficientes de rigidez estão presentes, representando

a rigidez do corpo. Os valores de força F_{x1} , F_{y1} , F_{x5} e F_{y5} não são nulos. Apenas são desconhecidos, pois parte deles são as **reações** na base do corpo.

3. As **deformações e tensões** são calculadas em cada ponto de cada elemento via as eqs. (8.55). Uma vez que a formulação de MEF usada no presente exemplo tem matriz \mathbf{B} constante em cada elemento, (as funções de aproximação são lineares nos elementos) as deformações e tensões em cada elementos deste problema são constantes também. É por este motivo que este elemento é denominado **triângulo de tensão constante**.

8.3 Estado plano de tensões

A formulação de EPT fornece uma boa aproximação em problemas que possuem algumas características:

1. Geometria da peça em forma de placa;
2. Carregamento coplanar, aplicadas no plano da superfície media da placa, e não varia ao longo da espessura. Também, as propriedades do material não variam com a espessura (usualmente a direção da coordenada z);
3. Nessas condições, o tensor tensão possui componentes não nulas somente no plano, e todas as variáveis do problema independem de z , isto é, deslocamentos, deformações e tensões dependem apenas de (x, y) . A placa ilustrada na Figura 8.9 incorpora os elementos para a aplicação da formulação de EPT.

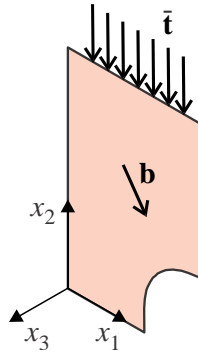


Figura 8.9: Carregamentos e geometria típica para um estado plano de tensões.

O equacionamento básico do EPT é listado na seção 4.2.3. Pode-se mostrar que, para peças delgadas (pequenas relações espessura/comprimento h/L), as componentes transversais de tensões σ_z , σ_{xz} e σ_{yz} são bastante pequenas em relação às demais. Estas tensões decaem com a redução da espessura. Isso justifica a teoria de Estado Plano de Tensões, EPT, onde se faz a aproximação que estas componentes são exatamente nulas. Assim, o tensor tensão num ponto arbitrário tem a forma:

$$\sigma(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.70)$$

Para um sólido elástico linear isotrópico, as relações tensão-deformação para as componentes não nulas de tensão são reorganizadas, em notação de Voigt, $\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{C}^t \varepsilon(\mathbf{u})$ são:

8.4 Problema axissimétrico

8.4.1 Formulação

Este modelo é adequado a problemas tridimensionais que satisfazem a algumas condições, que permitem um tratamento simplificado, também em duas dimensões, de forma análoga ao EPD e EPT. Considere um problema onde o corpo seja um sólido de revolução e o carregamento sobre este seja axissimétrico, isto é, geometria e carregamento independem do ângulo θ (Figura 8.11). Para este caso a descrição no sistema cartesiano de coordenadas deixa de ser conveniente e é adotado o sistema cilíndrico (Figura 8.11). Num problema axissimétrico todas as funções são independentes de θ . Neste sistema os deslocamentos num ponto do corpo são descritos pelas componentes radial e axial de deslocamento. O problema pode ser modelado apenas no plano da geratriz (r, z) :

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_r(r, z) \\ u_\theta = 0 \\ u_z(r, z) \end{Bmatrix}. \quad (8.80)$$

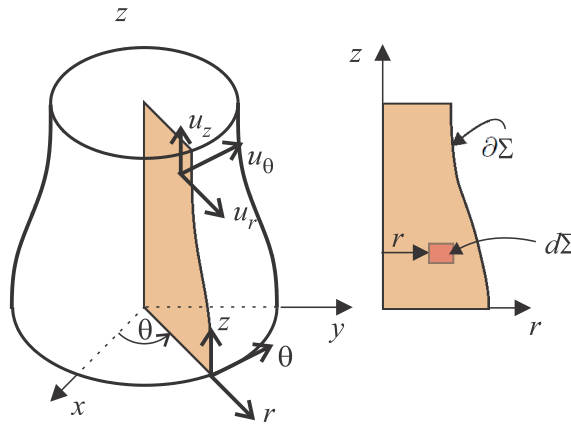


Figura 8.11: Sólido axissimétrico e sistema de coordenadas cilíndrico.

Este modelo é utilizado para simular o comportamento de sólidos cuja geometria pode ser obtida mediante a rotação de uma área plana ao redor de um eixo, dando lugar ao que se conhece como sólido de revolução. É considerado também que o carregamento da peça pode ser obtido da mesma forma, configurando um carregamento de revolução. Estas hipóteses novamente permitem fazer uma descrição plana de um problema tridimensional ao se observar que o comportamento de todos os planos que passam pelo eixo são equivalentes.

O equacionamento para o modelo axissimétrico é visto na seção 4.2.4. O tensor de deformação, em coordenadas cilíndricas, num estado geral de deformações infinitesimais é dado por [67]

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}, \quad (8.81)$$

onde o gradiente é

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (8.82)$$

Aplicando as condições de axissimetria: $\partial/\partial\theta$ e (8.80), o tensor fica simplificado como

contorno do corpo são

$$d\Omega = 2\pi r d\Sigma \quad \text{e} \quad d\Gamma = 2\pi r d\partial\Sigma. \quad (8.87)$$

Com isso, o PTV fica descrito em termos de integrais no plano Σ :

Determinar o campo de deslocamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in Kin_h$ tal que:

$$\int_{\Sigma} r \mathbf{C}^r \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) d\Sigma = \int_{\Sigma} r \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} r \bar{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\partial\Sigma \quad \forall \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \in Var_h \quad (8.88)$$

8.4.2 Elementos finitos em modelo axissimétrico

Para simplificar a notação, renomeamos os deslocamentos radial e axial por

$$u(r, z) = u_r(r, z) \quad \text{e} \quad v(r, z) = u_z(r, z),$$

e fazendo $\theta = 0$, mudamos a notação de r, z para x, y . A aproximação dos deslocamentos via elementos finitos é análoga ao dos modelos planos anteriores. Primeiro definem-se as funções de aproximação tal que o campo de deslocamento seja aproximado por

$$\mathbf{u}(x, y) \cong \mathbf{u}_h(x, y) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & \varphi_{N_{nos}} & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & \varphi_{N_{nos}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_{N_{nos}} \\ v_{N_{nos}} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{U}, \quad (8.89)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_h(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \hat{\mathbf{U}}. \quad (8.90)$$

As deformações aproximadas são calculadas a partir dos deslocamentos aproximados:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) = \mathbf{D}^r \mathbf{u}_h = \mathbf{D}^r \mathbf{N} \mathbf{U} = \mathbf{B}^r \mathbf{U} \quad (8.91)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}_h) = \mathbf{D}^r \hat{\mathbf{u}}_h = \mathbf{D}^r \mathbf{N} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{B}^r \hat{\mathbf{U}} \quad (8.92)$$

onde \mathbf{B}^r é a matriz de deformações de EF, dada por

$$\mathbf{B}^r(x, y) = \mathbf{D}^r \mathbf{N}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} & 0 \\ 1/x & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & \varphi_{N_{nos}} & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & \varphi_{N_{nos}} \end{bmatrix} \quad (8.93)$$

$$\mathbf{B}^r(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial\varphi_{N_{nos}}}{\partial x} \\ \varphi_1/x & 0 & \varphi_2/x & \dots & \varphi_{N_{nos}}/x \\ 0 & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial\varphi_{N_{nos}}}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial\varphi_{N_{nos}}}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_{N_{nos}}}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (8.94)$$

Substituindo estas aproximações na expressão (8.88) do PTV tem-se a sua forma discretizada

$$\begin{array}{l}
 \text{Determinar o vetor de parâmetros } \mathbf{U} \in R^{2N_{nos}} \text{ que satisfaz à condição} \\
 \left\{ \int_{\Sigma} x \mathbf{C}^r \mathbf{B}^r \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}^r d\Sigma - \int_{\Sigma} x \mathbf{b} \cdot \mathbf{N} d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} x \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{N} d\partial\Sigma \right\} \hat{\mathbf{U}} = 0 \\
 \forall \hat{\mathbf{U}} \in R^{2N_{nos}}, \text{ tal que } \mathbf{u}_h = \mathbf{N}\mathbf{U} \in Kin_h \text{ e } \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}\hat{\mathbf{U}} \in Var_h.
 \end{array} \quad (8.95)$$

Manipulando algebricamente, e considerando que $\hat{\mathbf{U}}$ multiplica todos os termos, a condição acima pode ser escrita como

$$\hat{\mathbf{U}}^T \left\{ \int_{\Sigma} x \mathbf{B}^{rT} \mathbf{C}^r \mathbf{B}^r d\Sigma \mathbf{U} - \int_{\Sigma} x \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} x \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\partial\Sigma \right\} = 0 \quad (8.96)$$

$$\forall \hat{\mathbf{U}} \in R^{2N_{nos}}.$$

Esta expressão deve ser satisfeita para qualquer valor de $\hat{\mathbf{U}}$ em $R^{2N_{nos}}$, gerando um sistema de $N = 2N_{nos}$ equações lineares algébricas da forma $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$:

$$\underbrace{\left[\int_{\Sigma} x \mathbf{B}^{rT} \mathbf{C}^r \mathbf{B}^r d\Sigma \right]}_{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \underbrace{\int_{\Sigma} x \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} x \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\partial\Sigma}_{\mathbf{F}} \quad (8.97)$$

Define-se a **matriz de rigidez** e o **vetor de carregamento nodal equivalente** do modelo de sólido de revolução por

$$\mathbf{K} = \int_{\Sigma} x \mathbf{B}^{rT} \mathbf{C}^r \mathbf{B}^r d\Sigma, \quad \mathbf{F} = \int_{\Sigma} x \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} x \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\partial\Sigma \quad (8.98)$$

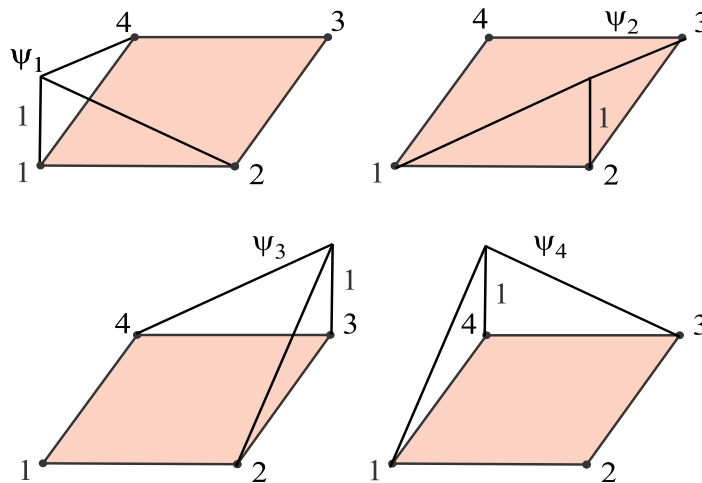


Figura 8.12: Elemento bilinear de 4 nós e suas funções de aproximação.

O conceito de **matriz elementar** é aplicado integralmente a este caso, sendo que não há nenhuma diferença em relação aos casos de estados planos de deformação ou tensão. Considerando, por exemplo, um elemento quadrilateral de quatro nós, como o da Figura 8.12, tem-se quatro funções de aproximação que permitem descrever o deslocamento dentro do elemento como

$$\mathbf{u}^e(x, y) = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{U}^e. \quad (8.99)$$

As deformações, tensões, matriz de rigidez e termo de carga elementar são dadas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^e(x, y)) &= \mathbf{D}^r \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{U}^e, \\ &= \mathbf{B}^r(x, y) \mathbf{U}^e, \end{aligned} \quad (8.100)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^e(x, y)) = \mathbf{C}^r \mathbf{B}^r(x, y) \mathbf{U}^e, \quad (8.101)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_{\Sigma_e} x \mathbf{B}^{e r T} \mathbf{C}^r \mathbf{B}^e d\Sigma, \\ \mathbf{F}^e &= \int_{\Sigma_e} x \mathbf{N}^{e T} \mathbf{b} d\Sigma + \int_{\partial \Sigma_e \cap \Gamma_f} x \mathbf{N}^{e T} \bar{\mathbf{t}} d\partial \Sigma. \end{aligned} \quad (8.102)$$

Assim, a matriz de rigidez deste elemento de $N_{ne} = 4$ nós (quatro funções de aproximação associadas) possui ordem $N_{gle} = 2N_{ne} = 8$ (quatro funções de aproximação e dois graus de liberdade por nó: u, v).

8.5 Elementos volumétricos

Entendidos os conceitos básicos de elementos finitos em problemas unidimensionais e bidimensionais, a compreensão da aproximação por elementos finitos de problemas de elasticidade tridimensional não oferece dificuldade. O único inconveniente aparece na impossibilidade de visualizar o formato das funções de aproximação utilizadas nos elementos volumétricos. Em problemas planos é possível graficar o domínio do elemento e o valor da função de aproximação, mediante uma representação tridimensional. Por outro lado, o domínio de um elemento volumétrico (sólido) já ocupa as três dimensões espaciais, impedindo visualização da função de aproximação numa quarta dimensão. É este o motivo pelo qual primeiramente foram tratados os problemas planos e não por alguma dificuldade matemática na formulação. De fato, a formulação de elementos volumétricos em elasticidade é mais simples que a dos estados planos, dado que não é preciso adicionar nenhuma hipótese adicional de comportamento às equações originais de equilíbrio dadas pelo princípio dos trabalhos virtuais. Em outras palavras, o MEF propõe uma aproximação mediante funções de aproximação para cada uma das três componente do vetor deslocamento $\mathbf{u}(x, y, z)$, seguindo o mesmo procedimento reiteradamente efetuado ao longo dos modelos planos.

A aproximação do campo de deslocamentos para um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ é dada por uma base de funções de aproximação $\varphi_i(\mathbf{x})$ que são definidas de forma a obedecerem as regras (8.34) e (8.35). O campo \mathbf{u} é aproximado por \mathbf{u}_h em termos de valores nodais u_i, v_i e w_i da seguinte forma

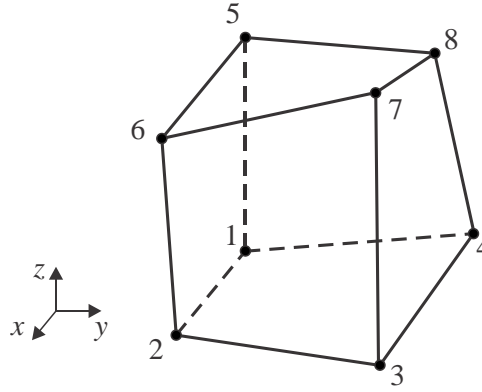


Figura 8.13: Elemento hexaédrico trilinear e sua numeração intrínseca de nós.

\mathbf{B}^e do elemento é

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{D}\mathbf{N}^e, \quad (8.111)$$

e a matriz de rigidez e termo de carga elementares de um elemento arbitrário,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C} \mathbf{B}^e d\Omega, \\ \mathbf{F}^e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f \cap \partial\Omega_e} \mathbf{N}^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma, \end{aligned} \quad (8.112)$$

tem dimensões $N_{gle} = 3N_{ne} = 24$. Na seção seguinte são apresentadas algumas das funções de aproximação elementares mais utilizadas, junto com os conceito de mapeamento e de elemento finito padrão. Na última integral, $\Gamma_f \cap \partial\Omega_e$ indica a parte do contorno do elemento que pertence ao contorno de Neuman do corpo, Γ_f .

8.6 Termoelasticidade linear

A formulação de elementos finitos para elasticidade linear tridimensional, incluindo os efeitos de uma distribuição de temperatura conhecida, $\Delta\mathcal{T} = \Delta\mathcal{T}(x, y, z)$, é feita como se segue. Partimos do princípio das trabalhos virtuais na forma (8.15). A inclusão do efeito térmico é feita pelo uso da relação tensão deformação, a lei de Hooke, colocada de forma a incorporar as deformações térmicas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 & e & e & & & \\ e & 1 & e & & & \\ e & e & 1 & & & \\ & & & c & & \\ & & & & c & \\ & & & & & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha\Delta\mathcal{T} \\ \varepsilon_y - \alpha\Delta\mathcal{T} \\ \varepsilon_z - \alpha\Delta\mathcal{T} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (8.113)$$

onde $c = (1 - 2\nu) / 2(1 - \nu)$, $d = E(1 - \nu) / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$ e $e = \nu / (1 - \nu)$. De forma simbólica,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T). \quad (8.114)$$

Essa forma da lei de Hooke é para materiais elásticos, lineares, homogêneo e isotrópicos. Com modificações adequadas, a formulação dessa seção pode ser aplicada a um material elástico linear homogêneo **anisotrópico**, bastando utilizar a matriz adequada, (ver [72] por exemplo). Em seguida usamos a discretização do deslocamento:

- Cálculo do vetor de forças nodais térmicas \mathbf{F}^T , conforme (8.119).
- Resolvendo o sistema (8.120) tem-se os deslocamentos nodais \mathbf{U} . Estes deslocamentos permitem o cálculo das **deformações totais**, ε , usando $\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{U}$ e as **tensões fictícias** $\sigma'(\mathbf{x})$ associadas nos pontos de integração, que são obtidos por

$$\sigma'(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}. \quad (8.122)$$

em um ponto \mathbf{x} de cada elemento.

- **Etapa 3** - O estado real de tensões, devidas às forças mecânicas \mathbf{F}^m e ao efeito térmico, é obtido sobrepondo os resultados em cada ponto:

$$\sigma = \sigma' - \mathbf{C}\varepsilon^T \quad \text{isto é} \quad \sigma = \mathbf{C}(\mathbf{B}\mathbf{U} - \varepsilon^T). \quad (8.123)$$

8.7 Elementos isoparamétricos e outros

Uma das dificuldades que se apresenta na construção das matrizes de rigidez dos elementos é a definição das funções de aproximação, cuja expressão depende das características polinomiais das mesmas e das coordenadas que definem o elemento. Assim, salvo alguns casos particulares mais simples, como os elementos do Exemplo 1, a identificação das equações que definem as funções de aproximação de um elemento de formato arbitrário, em coordenadas globais, e em forma explícita, é uma tarefa custosa, geralmente inviável.

Normalmente, as funções de aproximação são definidas primeiramente num **domínio padrão**, utilizando um outro sistema de coordenadas denominadas **coordenadas intrínsecas**. O domínio padrão geralmente tem um formato regular (quadrado, triângulo ou cubo), com dimensões pré-estabelecidas, geralmente de lados unitários ou bi-unitários. Na literatura existe uma quantidade de famílias de funções de aproximação já bastante tradicionais, algumas das quais revisamos a seguir. Uma vez essas funções tenham sido estabelecidas, é utilizado um procedimento de mapeamento das funções, das coordenadas intrínsecas para as coordenadas físicas, globais, da estrutura (Figura 8.14).

8.7.1 Elemento triangular linear

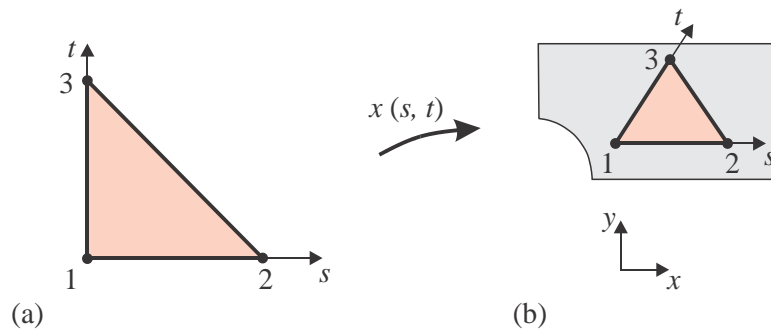


Figura 8.14: Mapeamento do elemento, entre (a) o domínio padrão triangular e (b) o domínio físico.

Devido a sua simplicidade, consideremos inicialmente as funções de aproximação do elemento triangular dado na Figura 8.15. Esse é um **elemento no domínio padrão**, definido nas coordenadas intrínsecas s, t , retangular, com lados unitários. As três funções de aproximação lineares para esse elemento são facilmente determináveis. Lembre que essas funções devem satisfazer às condições $\psi_i(s_j, t_j) = 1$ se $i = j$ e $\psi_i(s_j, t_j) = 0$ se $i \neq j$, onde (s_j, t_j) são as coordenadas intrínsecas do nó j do elemento, para $j = 1, 2, 3$, isto é, a função associada a um certo nó deve ser unitária ali e nula nos outros dois nós do elemento. As funções de aproximação lineares deste elemento são:

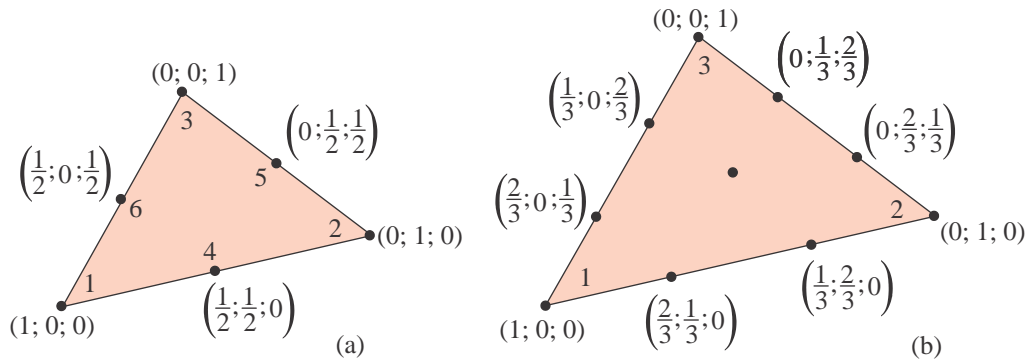


Figura 8.16: Numeração nodal intrínseca e coordenadas nodais de área nos elementos (a) quadráticos e (b) cúbicos.

Em qualquer tipo de elemento, o processo de integração da matriz de rigidez significa efetuar a operação

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Sigma^e} \mathbf{B}^e \mathbf{C} \mathbf{B}^e d\Sigma \quad (8.129)$$

A matriz \mathbf{B}^e contém as derivadas parciais das funções ψ_i em relação as variáveis (x, y) , como se tivessemos $\psi_i = \psi_i(x, y)$. Mas temos agora funções de aproximação definidas em termos das coordenadas padrão (s, t) , isto é, temos explicitamente $\psi_i = \psi_i(s, t)$. Mas observa-se que, através das funções de mapeamento (8.125) no caso de elemento linear, e (8.127) nos elementos arbitrários, os deslocamentos são, implicitamente, em função de (s, t) , como em (8.128). Precisamos agora determinar um procedimento para obter as derivadas $\psi_{i,x}$ e $\psi_{i,y}$ nessas condições. Um resumo da situação é o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^e &= \mathbf{B}^e(x, y) \text{ e} \\ \psi_i &= \psi_i(s, t). \text{ Porém tem-se o mapeamento:} \\ x &= x(s, t), \text{ e } y = y(s, t). \end{aligned}$$

Primeiramente supomos que existe uma relação inversa do mapeamento (8.125), isto é, funções

$$s = s(x, y) \text{ e } t = t(x, y).$$

Não é necessário que essas relações sejam determinada explicitamente. É suficiente que se saiba que existam. (Posteriormente se comentará sobre as condições que o mapeamento deve satisfazer para que essa inversa exista.) Então é possível usar a regra da cadeia em sequência para cada função nodal ψ_i , $i = 1, \dots, N_{ne}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(s(x, y), t(x, y)) &= \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}, \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y}(s(x, y), t(x, y)) &= \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}. \end{aligned} \quad (8.130)$$

Em forma matricial essas relações ficam

$$\nabla_x \psi_i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \end{array} \right\} = \mathbf{J}^{-1} \nabla_s \psi_i. \quad (8.131)$$

$\nabla_x \psi$ e $\nabla_s \psi$ são as componentes planas do gradiente de ψ_i em relação às coordenadas (x, y) e (s, t) ,

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (8.143)$$

onde $y_{ij} = y_i - y_j$ e $x_{ij} = x_i - x_j$.

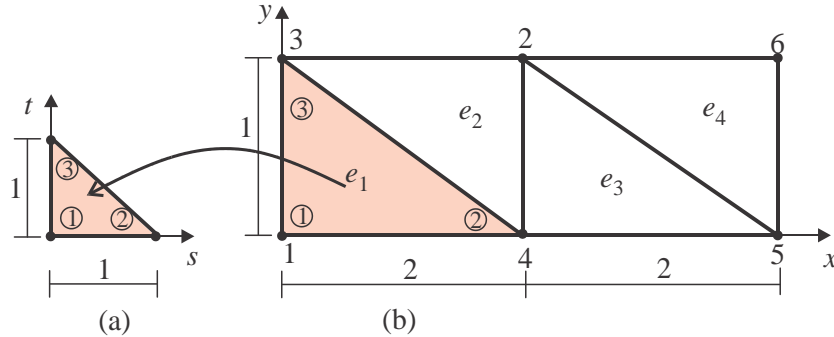


Figura 8.17: Elemento e_1 na figura (b) mapeado na figura (a).

8.7.3 Exemplo 8.2 - Modelo de EPD com mapeamento

Consideremos o caso específico da malha da Figura 8.6, página 191, do Exemplo 1 desenvolvido na seção 8.2.3 de estado plano de deformações. A matriz Jacobiana, sua inversa e o determinante são dados em (8.141) em termos das coordenadas nodais do elemento. Tomemos por exemplo, para o **elemento 1**, mostrado na Figura 8.17 em sua forma física e no plano de coordenadas intrínsecas. Suas coordenadas nodais (usando a numeração intrínseca de seus nós), são: $(x_1; y_1) = (0; 0)$, $(x_2; y_2) = (2; 0)$ e $(x_3; y_3) = (0; 1)$. Então se tem

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e seu determinante é

$$\det \mathbf{J} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 2 = 2A. \quad (8.144)$$

e a inversa do Jacobiano

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (8.145)$$

Com isso se pode calcular as derivadas das três funções de aproximação no **elemento 1**, em relação às coordenadas (x, y) , conforme a eq. (8.131), usando (8.144) e (8.140), isto é, $\nabla_x \psi = \mathbf{J}^{-1} \nabla_s \psi$. Organizam-se os resultados para os 3 nós da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com essas derivadas calculadas, a matriz de deformação do **elemento 1** pode ser calculada usando (8.143)

$$\mathbf{B}^{e_1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que esta matriz de deformação é idêntica a matriz (8.59) já obtida na seção anterior onde não se fazia o mapeamento. Finalmente, considerando que $\det \mathbf{J}$ e as matrizes $\overset{e}{\mathbf{B}}$ e \mathbf{C}^d são constantes, a matriz de rigidez do elemento 1 é integrada:

$$\overset{e}{\mathbf{K}} = \overset{e}{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}^d \overset{e}{\mathbf{B}} \det \mathbf{J} \int_0^1 \int_0^{1-t} ds dt \quad (8.146)$$

A integral $\int_0^1 \int_0^{1-t} ds dt$ é a área do domínio padrão, que é sempre igual a 1/2. Nesse tipo simples de elemento, essa integral cancela $\det \mathbf{J} = 2$, e a matriz fica simplesmente

$$\overset{e}{\mathbf{K}} = \overset{e}{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}^d \overset{e}{\mathbf{B}}.$$

Este exemplo, embora didático, não é a situação mais usual. Elementos de outros tipos não fornecem matrizes de deformação constantes quando possuírem funções de aproximação não lineares. A integração da matriz de rigidez em geral exige procedimento próprio, que será visto na seção 9.

8.8 Tipos de elementos e suas funções

Nas seções anteriores indicamos as funções de mapeamento e de forma apenas de maneira simbólica, sem explicitá-las, exceto pelo caso particular de funções lineares de triângulo. Nessa seção apresentamos explicitamente as principais famílias de funções mais usadas no MEF.

8.8.1 Elementos unidirecionais

Consideremos o **domínio padrão unidimensional** $D^1 = \{r : r \in R, -1 \leq r \leq 1\}$. Nesse domínio, podem-se definir, por exemplo, os **polinômios lagrangeanos** de graus 1 e 2:

$$\begin{aligned} \text{Grau 1} &\longrightarrow L_1(r) = \frac{1}{2}(1-r), & L_2(r) &= \frac{1}{2}(1+r), \\ \text{Grau 2} &\longrightarrow L_1(r) = \frac{r}{2}(r-1), & L_2(r) &= (1-r^2), & L_3(r) &= \frac{r}{2}(r+1), \end{aligned} \quad (8.147)$$

e para grau 3,

$$\begin{aligned} 16L_1(r) &= -9(r-1) \left(r - \frac{1}{3}\right) \left(r + \frac{1}{3}\right), & 16L_3(r) &= 27(r-1) \left(r + \frac{1}{3}\right) (r+1), \\ 16L_2(r) &= 27(r-1) \left(r - \frac{1}{3}\right) (r+1), & 16L_4(r) &= 9 \left(r - \frac{1}{3}\right) \left(r + \frac{1}{3}\right) (r+1). \end{aligned} \quad (8.148)$$

Cada função é associada a um nó. Por exemplo, os polinômios quadráticos, são associados aos nós 1, 2 e 3, como ilustrados na Figura 8.18, localizados nas coordenadas $r_1 = -1$, $r_2 = 0$ e $r_3 = 1$. No polinômio cúbico, os nós 1, 2, 3 e 4 estão nas coordenadas intrínsecas $r_1 = -1$, $r_2 = -1/3$, $r_3 = 1/3$ e $r_4 = 1$. Uma função lagrangeana $L_s(r)$ tem a característica de ser unitária no nó j e nula nos demais. Por exemplo, na figura, L_1 é unitário no nó 1 e nulo nos nós 2 e 3. As funções L_1 e L_2 do polinômio linear também tem essa característica, isto é, $L_1(r_1) = 1$, $L_1(r_2) = L_2(r_1) = 0$ e $L_2(r_2) = 1$. De forma geral, **para qualquer grau**,⁷

$$L_i(r_j) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N_{ne}} L_i(r) = 1, \quad \text{para } -1 \leq r \leq 1. \quad (8.149)$$

⁷O operador delta de Kronencker δ_{ij} é definido de tal forma que $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

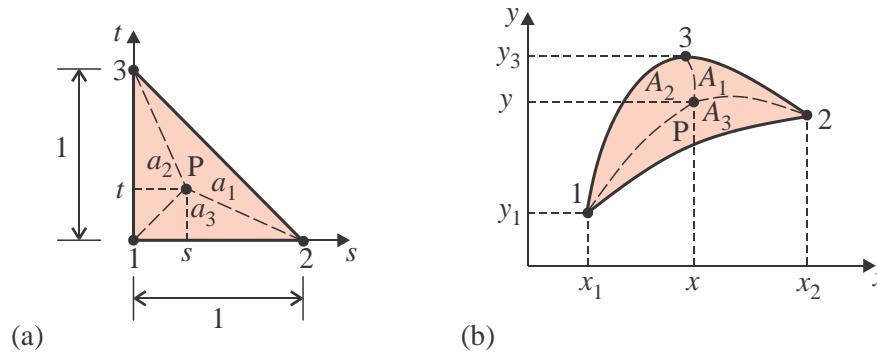


Figura 8.19: Coordenadas intrínsecas e físicas de um ponto P no: (a) elemento padrão e (b) elemento físico com coordenadas de área.

$$\begin{aligned} x &= x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3, \\ y &= y_1\psi_1 + y_2\psi_2 + y_3\psi_3. \end{aligned} \quad (8.154)$$

Nesse caso é possível fazer o mapeamento inverso de forma explícita, isto é, obter expressões para $s = s(x, y)$ e $t = t(x, y)$. Para isso, consideremos inicialmente um resultado de álgebra, que a área de um triângulo pode ser obtida da seguinte forma:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}. \quad (8.155)$$

onde $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ e $(x_3; y_3)$ são as coordenadas físicas dos nós do triângulo. Essa expressão pode ser adaptada para determinar as áreas dos três triângulos internos definidos por um ponto arbitrário P de coordenadas $(x; y)$ e pelos nós do elemento, como ilustrado na Figura 8.19. Então as áreas são:

$$A_1 = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_3 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (8.156)$$

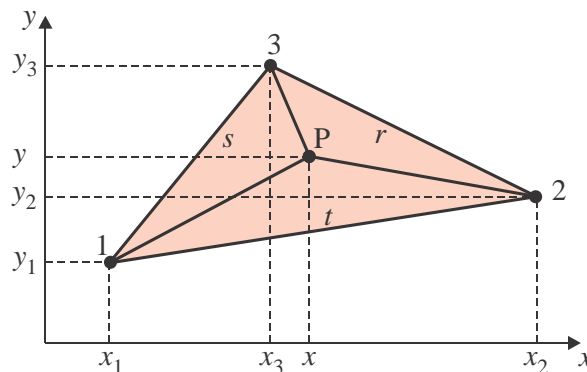


Figura 8.20: Triângulo arbitrário, com nós locais 123, coordenadas globais e ponto P interno arbitrário de coordenadas (x, y) .

Então, se o elemento for linear, as áreas podem ser expressas em termos das coordenadas nodais via (8.155) e (8.156). Nesse caso, dadas as coordenadas físicas do ponto, pode-se calcular as coordenadas

intrínsecas:

$$\begin{aligned} 2Ar &= [(x_2y_3 - x_3y_2) + xy_{23} + yx_{32}], \\ 2As &= [(x_3y_1 - x_1y_3) + xy_{31} + yx_{13}], \\ 2At &= [(x_1y_2 - x_2y_1) + xy_{12} + yx_{21}], \end{aligned} \tag{8.157}$$

onde $y_{23} = y_2 - y_3$, etc. Nota-se que se P encontra-se sobre o nó 1, tem-se $A_1 = A \implies r = 1$, (logo $s = t = 0$). Da mesma forma, se P se encontra sobre os nós 2 ou 3, tem-se $s = 1$ ou $t = 1$, respectivamente.

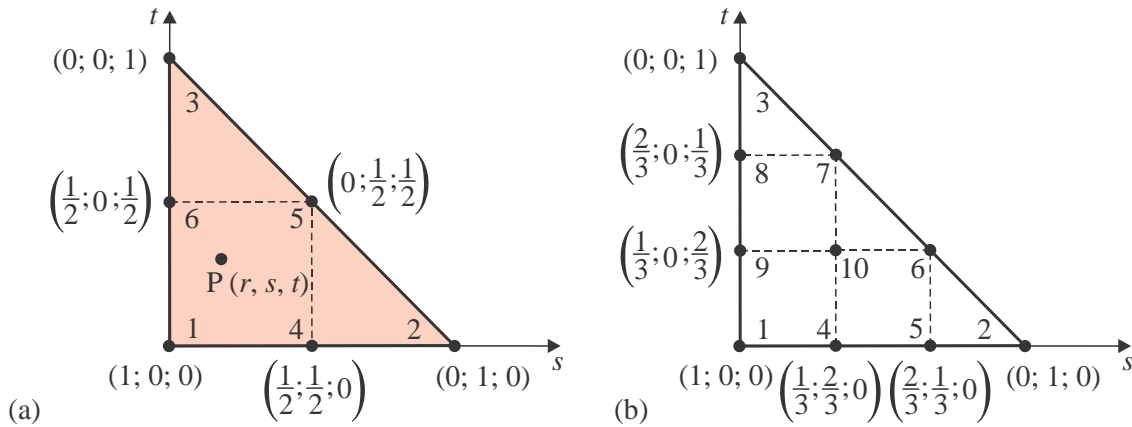


Figura 8.21: Numeração nodal intrínseca e coordenadas nodais de área nos elementos (a) quadráticos e (b) cúbicos, em domínio padrão.

8.8.3 Elementos triangulares de alta ordem

Na prática, evitam-se utilizar elementos lineares devido a sua baixa precisão (e também devido a diversos problemas e patologias que pode apresentar em diversas situações), e utilizam-se elementos com ordem mais alta. Os códigos comerciais de elementos finitos limitam-se, tipicamente, a oferecer duas opções: elementos lineares e quadráticos. Verificaremos a seguir a construção de **elementos quadráticos**. Esses elementos possuem 6 nós, como nas Figuras 8.16 e 8.21, e sua numeração local deve ser aquela indicada, isto é, os nós 1, 2 e 3 são anti-horário, e os nós 4, 5 e 6 são nos lados 12, 23 e 31, respectivamente. Assim, as **funções de aproximação quadráticas** associadas a cada nó são as seguintes (com $r = 1 - s - t$):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= r(2r - 1), & \psi_2 &= s(2s - 1), & \psi_3 &= t(2t - 1), \\ \psi_4 &= 4rs & \psi_5 &= 4st & \psi_6 &= 4rt. \end{aligned} \tag{8.158}$$

A Figura 8.22 ilustra a forma de algumas das funções quadráticas no elemento. Esse conjunto de funções, assim como todos os demais mostrados, satisfazem às condições

$$\psi_i(r_j, s_j, t_j) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N_{ne}} \psi_i(r, s, t) = 1, \quad \forall (r, s, t) \in \Omega_e. \tag{8.159}$$

Elementos de funções cúbicas podem ser construídos em elementos triangulares de 10 nós, numerados como na Figura 8.16b. Nessa figura podem ser vistas ainda as coordenadas nodais de área para os elementos quadráticos e cúbicos. As **funções de aproximação cúbicas** associadas a cada nó são as seguintes:

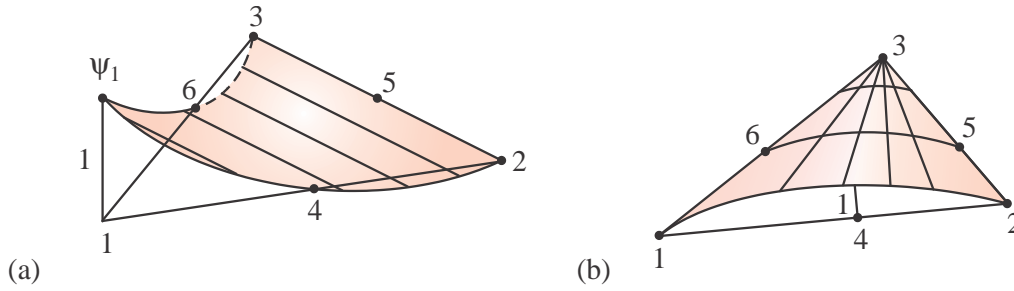


Figura 8.22: Funções de aproximação ψ_1 e ψ_4 no elemento triangular quadrático.

$$\begin{array}{lll}
 2\psi_1 = r(3r-1)(3r-2), & 2\psi_2 = s(3s-1)(3s-2), & 2\psi_3 = t(3t-1)(3t-2), \\
 2\psi_4 = 9rs(3r-1) & 2\psi_5 = 9rs(3s-1) & 2\psi_6 = 9st(3s-1), \\
 2\psi_7 = 9st(3t-1), & 2\psi_8 = 9rt(3t-1), & 2\psi_9 = 9rt(3r-1), \\
 2\psi_{10} = 54rst. & &
 \end{array} \quad (8.160)$$

Em cada um dos elementos triangulares mostrados, o conjunto de monômios presentes nos deslocamentos é resumido no Triângulo de Pascal de monômios mostrado na Tabela 8.1. O grau p do elemento e dos monômios é a soma máxima dos graus de cada coordenada nos monômios presentes.

Tabela 8.1: Monômios presentes nos campos de deslocamentos de elementos triangulares.

Grau $p = i + j$	Número de nós	Monômios					
0	→	1					
1	→	3	r	s			
2	→	6	r^2	rs	s^2		
3	→	10	r^3	r^2s	rs^2	s^3	
4	→	15	r^4	r^3s	r^2s^2	rs^3	s^4

O **mapeamento** e o **jacobiano** dos elementos de alta ordem são detalhados na seção 8.7.2.

8.8.4 Elementos Lagrangeanos quadriláteros

Elementos quadriláteros são formados para interpolações lineares e de ordens mais elevadas. O elemento mais simples é o **bilinear**, de 4 nós, com lados retos, como visto na Figura 8.23. Também são ilustradas as geometrias dos elementos **biquadrático**, de 9 nós, e bi-cúbico, de 16 nós, que podem ter lados curvos, variando de forma quadrática e cúbica. O domínio padrão bidimensional é um quadrado de lados 2×2 , como na Figura 8.23d, definido como $D^2 = \{(r, s) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } -1 \leq r, s \leq 1\}$. A numeração dos nós é como indicada na figura, anti-horária, sendo o nó 1 na coordenadas intrínsecas $(r, s) = (-1, -1)$. A numeração dos nós para todas as funções (bilineares, biquadráticas, bicúbicas, etc.), é a mesma das funções para os quatro nós dos vértices, que são numerados de 1 a 4.

As **funções bilineares** são as seguintes:

$$\begin{array}{ll}
 \psi_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s), & \psi_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s), \\
 \psi_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s), & \psi_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s).
 \end{array} \quad (8.161)$$

As **funções biquadráticas** são as seguintes:

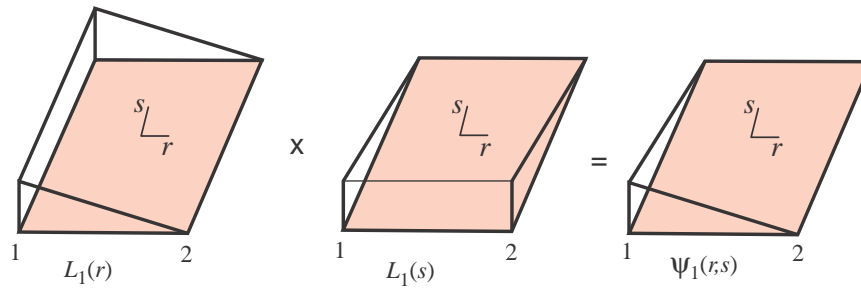


Figura 8.24: Ilustração da formação de $\psi_1(r, s)$ através de produto tensorial.

Tabela 8.2: Monômios presentes no campo de deslocamentos de elementos quadrangulares comuns.

Tipo de elemento	Monômios
bilineares	$1, r, s, rs,$
biquadráticos Lagrangiano	$1, r, s, r^2, s^2, rs, r^2s, rs^2, r^2s^2,$
biquadráticos serendipity	$1, r, s, r^2, s^2, rs, r^2s, rs^2).$

- De forma geral, para qualquer grau, o método padrão de elementos finitos requer que as funções de aproximação satisfaçam à condição

$$\psi_i(r_j, s_j) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N_{ne}} \psi_i(r, s) = 1, \quad \text{para } -1 \leq r, s \leq 1. \quad (8.164)$$

- O **mapeamento** e o cálculo do **jacobiano** é feito como detalhado para os elementos triangulares na seção 8.7.2, particularmente o quadro da eq. (8.135), apenas substituindo as coordenadas intrínsecas de triângulo $(s; t)$ por pelas coordenadas $(r; s)$.

Os elementos finitos quadriláteros podem conter diferentes conjuntos de monômios. A Tabela 8.2 mostra os monômios presentes no campo de deslocamento de algumas das formulações de elementos quadrangulares.

Esses conjuntos podem ser visualizados no triângulo de Pascal de monômios na Figura 8.25. Nota-se que como a base de funções é gerada por produto tensorial das bases unidimensionais, o conjunto inclui sempre monômios de grau superior aos a p . Por exemplo o elemento bilinear ($p = 1$) contém três monômios lineares e um quadrático, rs . Entretanto, em cada direção a quadratura de integração associada é para grau $p = 1$. Os monômios presentes em cada grau de polinômio Lagrangeano são vistos acima de cada linha em V no triângulo de Pascal. Nos polinômios serendipity o V é truncado na base conforme as linhas tracejadas na figura.

8.8.5 Elementos tridimensionais

O domínio padrão dos elementos hexaédricos é o cubo de lados $2 \times 2 \times 2$ definido por $D^3 = \{(r, s, t) : r, s, t \in R, -1 \leq r, s, t \leq 1\}$. Geralmente a numeração intrínseca dos nós é anti-horária em torno do eixo t , da mesma forma que para o elemento quadrilateral. A Figura 8.26 mostra o elemento de funções tri-lineares (linear em cada direção), que requer 8 nós, e o elemento triquadrático (quadrático em cada direção), que requer 27 nós.

As **funções de aproximação trilineares** do elemento hexaédrico são (Figura 8.27a):

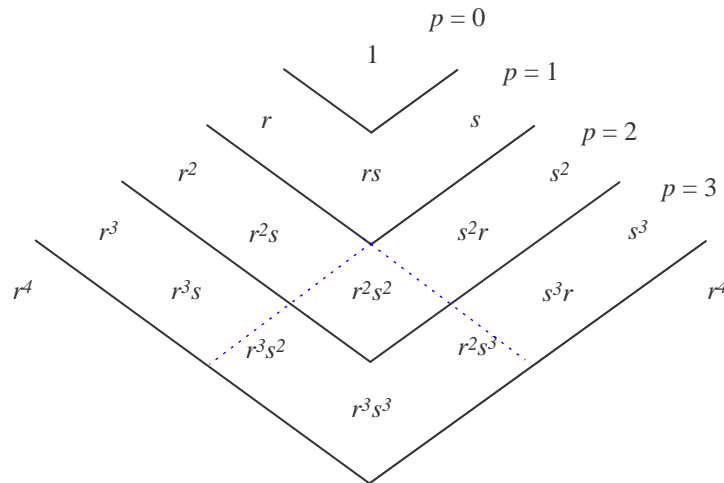


Figura 8.25: Monômios no triângulo de Pascal correspondentes às funções Lagrangeanas e serendipity.

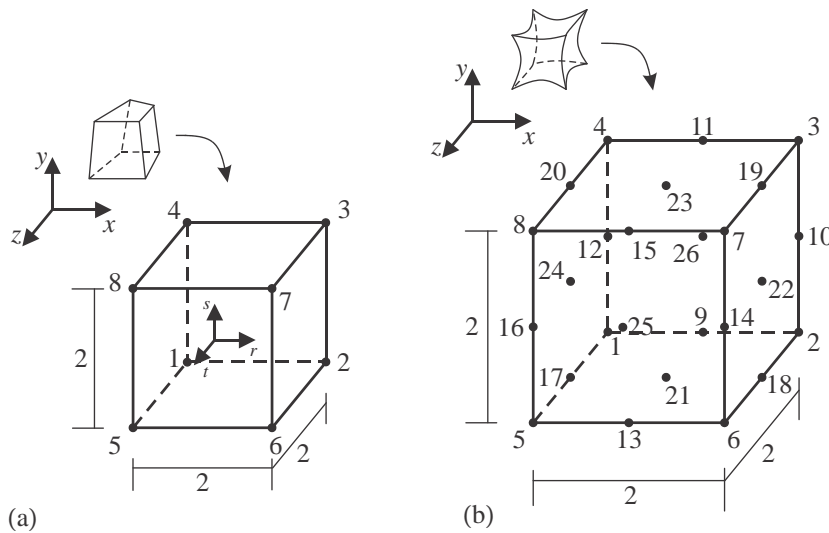


Figura 8.26: (a) Elemento de funções trilineares (linear em cada direção), com 8 nós, e (b) elemento triquadrático lagrangeano, com 27 nós.

$\psi_1 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t),$	$\psi_5 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t),$	(8.165)
$\psi_2 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t),$	$\psi_6 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t),$	
$\psi_3 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t),$	$\psi_7 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t),$	
$\psi_4 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t),$	$\psi_8 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t).$	

Note que essas funções são geradas usando o mesmo procedimento usado para gerar as funções bidimensionais Lagrangeanas - através do produto das funções lineares unidimensionais, como ilustrado em (8.163). Por exemplo, considere a função ψ_5 é o produto de $L_1(r)L_1(s)L_2(t)$. O mesmo procedimento pode ser usado para gerar o conjunto de **funções para o elemento hexaédrico triquadráticos**, (Figura 8.26b), associadas aos 27 nós, a partir de produtos das funções unidimensionais quadráticas das eqs. (8.147), o que gera o conjunto:

$\psi_1 = L_1(r)L_1(s)L_1(t)$	$\psi_{10} = L_3(r)L_2(s)L_1(t)$	$\psi_{19} = L_3(r)L_3(s)L_2(t)$	(8.166)
$\psi_2 = L_3(r)L_1(s)L_1(t)$	$\psi_{11} = L_2(r)L_3(s)L_1(t)$	$\psi_{20} = L_1(r)L_3(s)L_2(t)$	
$\psi_3 = L_3(r)L_3(s)L_1(t)$	$\psi_{12} = L_1(r)L_2(s)L_1(t)$	$\psi_{21} = L_2(r)L_1(s)L_2(t)$	
$\psi_4 = L_1(r)L_3(s)L_1(t)$	$\psi_{13} = L_2(r)L_1(s)L_3(t)$	$\psi_{22} = L_3(r)L_2(s)L_2(t)$	
$\psi_5 = L_1(r)L_1(s)L_3(t)$	$\psi_{14} = L_3(r)L_2(s)L_3(t)$	$\psi_{23} = L_2(r)L_3(s)L_2(t)$	

$\psi_6 = L_3(r)L_1(s)L_3(t)$	$\psi_{15} = L_2(r)L_3(s)L_3(t)$	$\psi_{24} = L_1(r)L_2(s)L_2(t)$
$\psi_7 = L_3(r)L_3(s)L_3(t)$	$\psi_{16} = L_1(r)L_2(s)L_3(t)$	$\psi_{25} = L_2(r)L_2(s)L_3(t)$
$\psi_8 = L_1(r)L_3(s)L_3(t)$	$\psi_{17} = L_1(r)L_1(s)L_2(t)$	$\psi_{26} = L_2(r)L_2(s)L_1(t)$
$\psi_9 = L_2(r)L_1(s)L_1(t)$	$\psi_{18} = L_3(r)L_1(s)L_2(t)$	$\psi_{27} = L_2(r)L_2(s)L_2(t)$

Deve-se lembrar que sempre o conjunto de funções deve satisfazer a condições.

$\psi_i(r_j, s_j, t_j) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N_{ne}} \psi_i(r, s, t) = 1, \quad \text{para } -1 \leq r, s, t \leq 1.$	(8.167)
--	---------

O **mapeamento** e o cálculo do **jacobiano** são feitos como detalhado para os elementos triangulares na seção 8.7.2, particularmente o quadro da eq. (8.135), apenas substituindo as coordenadas intrínsecas de triângulo (s, t) por pelas coordenadas (r, s, t) . A ordem da matriz jacobiana passam a ser 3×3 .

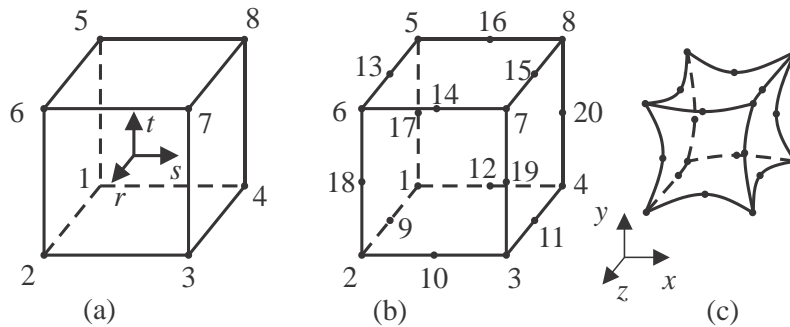


Figura 8.27: Elementos Lagrangeanos (a) trilinear (8 nós), (b) e (c) triquadrático no domínio padrão (r, s, t) e no domínio físico.

8.8.6 Mapeamento em elementos quadriláteros e hexaédricos arbitrários

A formulação descrita nessa seção é para um elemento hexaédricos arbitrário, não necessariamente de faces planas, porém sua simplificação a elementos planos quadriláteros é bastante simples. Os conceitos de mapeamento e cálculo da matriz jacobiana segue os mesmos passos do caso de elementos planos, que foi detalhado na seção 8.7.2. Entretanto essa seção repete o material de forma resumida, fazendo os ajustes necessários na quantidade de coordenadas e de variáveis do problema.

O mapeamento envolve N_{ne} nós e N_{ne} funções de aproximação da seguinte forma

$x = \sum_{i=1}^{N_{ne}} \psi_i(r, s, t)x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{N_{ne}} \psi_i(r, s, t)y_i \quad \text{e} \quad z = \sum_{i=1}^{N_{ne}} \psi_i(r, s, t)z_i$	(8.168)
--	---------

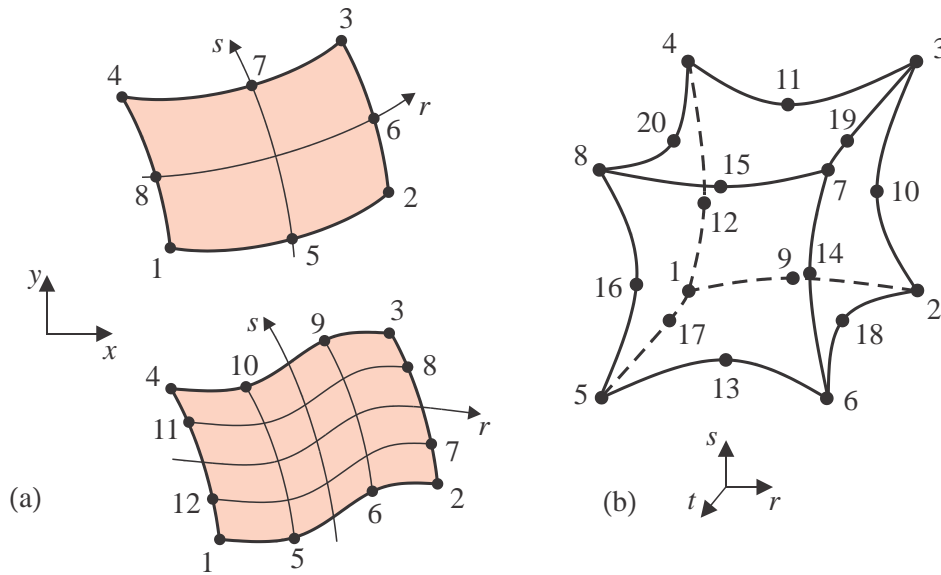


Figura 8.31: Elementos serendipity: (a) 2-D biquadrático (8 nós) e 2-D bicúbico (12 nós); (b) triquadrático (20 nós) no domínio padrão (r, s, t) .

$$\begin{aligned}
 \psi_1(r, s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) - \psi_{58}, & \psi_5(r, s) &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s), \\
 \psi_2(r, s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) - \psi_{56}, & \psi_6(r, s) &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r), \\
 \psi_3(r, s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) - \psi_{67}, & \psi_7(r, s) &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s), \\
 \psi_4(r, s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s) - \psi_{78}, & \psi_8(r, s) &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r),
 \end{aligned} \tag{8.187}$$

onde $\psi_{pq} = (\psi_p + \psi_q) / 2$.

O processo de gerar essas funções é descrito a seguir e, uma vez compreendido, pode ser utilizado para gerar conjuntos de funções para elementos planos e hexaédricos de graus maiores. Como exemplo, considere-se a geração das funções biquadráticas. O procedimento consiste em, primeiramente, partir das quatro funções bilineares, que são associadas aos nós 1 a 4, de vértices. Esses termos aparecem como o primeiro termo à direita da igualdade nas funções ψ_1 a ψ_4 em (8.187). Entretanto, o conjunto de funções deve satisfazer as condições (8.167): particularmente, cada função deve se anular em todos os demais nós do elemento. No **processo de construção de ψ_1** , por exemplo, se se parte das funções bilineares tem-se, em primeira aproximação, $\psi_1 = (1-r)(1-s)/4$. Nota-se que essa função é nula nas bordas que não contém o nó 1, isto é, nos nós 2, 3, 4, 6 e 7. Porém, essa função não é nula nos nós das bordas que contém o nó 1, isto é, nos nós 5 e 8, a função vale $1/2$. O que se faz é corrigir a função, adicionando outra que seja quadrática, e seja nula em todos os nós, exceto no nó 5, onde ela deve valer exatamente $-1/2$. Essa função é $\psi_5/2$. A Figura 8.32 mostra as funções ψ_1 , ψ_5 e ψ_8 . Com isso, a forma $\psi_1 = (1-r)(1-s)/4$, corrigida com $(\psi_5 + \psi_8)/2$, satisfaz a nulidade em todos os nós do elemento, exceto no nó 1, e é unitária ali. Esse processo de geração é seguido para as funções ψ_2 a ψ_4 , tomando as funções bilineares correspondentes e fazendo a correção com as funções quadráticas associadas aos nós internos às bordas que contém o nó da função sendo corrigida (nós 5 e 6 para corrigir ψ_2 , nós 6 e 7 para corrigir ψ_3 , e nós 7 e 8 para corrigir ψ_4).

O processo de gerar as funções internas às bordas, nos nós 5 a 8, é ilustrado na Figura 8.33 para ψ_5 . Num domínio 1-D, $-1 \leq r \leq 1$, uma função quadrática que se anule nas extremidades e seja unitária no centro, é simplesmente $(1-r^2)$ mostrado na figura 8.33a. Na Figura 8.33b se tem a extensão dessa função para o domínio padrão, de forma uniforme na direção s . Essa função não é nula na borda $s = 1$. Considera-se, em seguida, a função linear 1-D no domínio $-1 \leq s \leq 1$,

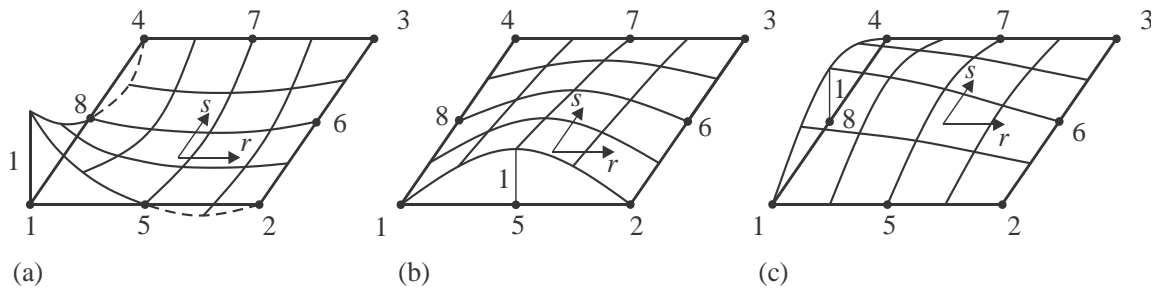


Figura 8.32: Funções serendipity 2-D: (a) ψ_1 , (b) ψ_5 e (c) ψ_8 .

$(1 - s)$, mostrada na Figura 8.33c, e sua extensão uniforme na direção r na Figura 8.33d. Para a etapa final, observa-se que o produto das duas funções, $(1 - r^2)$ e $(1 - s)$, nas direções r e s , gera a função ψ_5 , mostrada na Figura 8.32, que possui todas as propriedades necessárias. O processo de geração das demais funções, nos nós 6 a 8, é análogo.

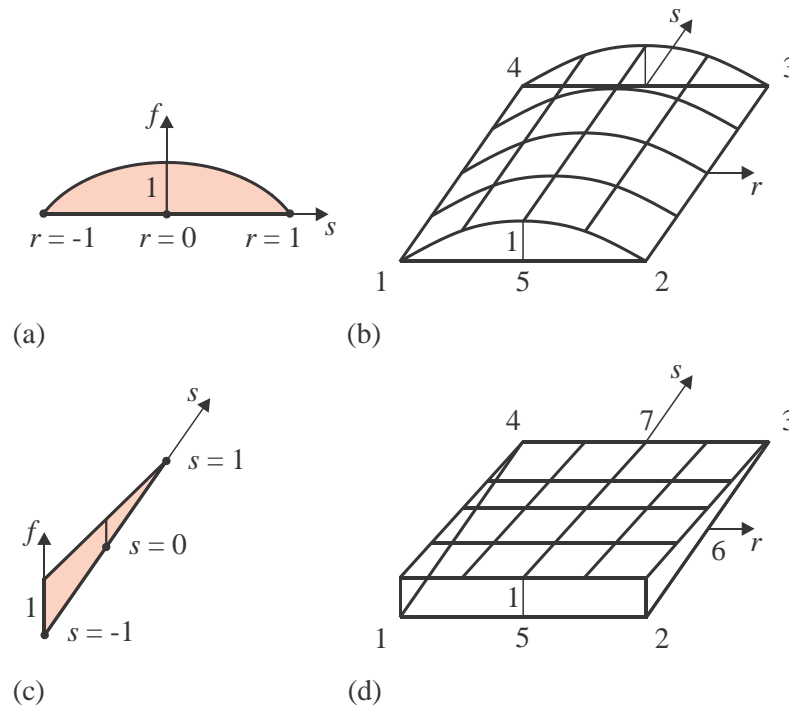


Figura 8.33: Ilustração do processo de geração da função serendipity ψ_5 .

Observação 1: Funções serendipity geram os elementos chamados **isoparamétricos**. Essa nomenclatura é associada ao seguinte fato. Se consideramos um elemento biquadrático, por exemplo, o número de parâmetros nodais necessários para descrever um certo campo de deslocamentos, $u(x, y)$, por exemplo, é igual ao número de nós. Usando as funções serendipity, são 8 valores nodais e com funções lagrangeanas são 9. Entretanto, para descrever a geometria, apenas os 8 nós na borda do elemento são necessários, para descrever a curvatura da borda da peça, por exemplo, quer se use o elemento de 8 nós ou o de 9 nós. Assim, o elemento com funções serendipity descreve os campos incógnitos com a mesma quantidade de parâmetros que usa para descrever a geometria. Quando se utilizam as funções Lagrangeanas, são utilizados 9 parâmetros para descrever o deslocamento numa direção, e apenas 8 parâmetros para descrever a geometria. A aproximação de \mathbf{x} faz uso das 9 funções, porém a função associada ao nó central não contribui para a identificação da geometria, que necessita apenas a identificação da borda do elemento.

Adicionalmente, existem as nomenclaturas **subparamétrico** e **superparamétrico**, para designar formulações em que o número de parâmetros na definição da geometria é inferior/superior ao

número de parâmetros para os deslocamentos. Por exemplo, um elemento triangular pode ter sua geometria definida com apenas 3 nós, com lados retos, e ter seus deslocamentos modelados por 4 ou mais funções. É o caso subparamétrico.

Observação 2: O nome “serendipity” utilizado para essa família de funções se deve à sensação de admiração pelos desenvolvedores do método quando se depararam com as características desses elementos. O termo é uma palavra pré-existente no inglês, artificialmente criada no século 18, de uso raro, que significa algo com “sorte inesperada, maravilhoso, espantoso”. Durante todos os anos a partir de 1970 até muito recentemente, essa família de funções tornou-se de uso quase universal em todas as aplicações, em detrimento das funções Lagrangeanas e outras. Parte dessa atração surgiu pela economia de área de memória e de tempo de processamento, uma vez que, dentro de certas limitações, pode-se ter um elemento biquadrático com 8 nós em vez de 9, ou bicúbico de 12 nós em vez de 16, um sólido triquadrático de 20 nós em vez de 27, etc. Deve-se lembrar que até os anos 1970, computadores considerados de grande porte, (denominados então “main-frames”), possuíam memória e velocidade de processamento inferiores ao das calculadoras de bolso utilizadas atualmente. Assim, mesmo hoje, virtualmente todos os programas comerciais utilizam os elementos serendipity, embora incorporem também os Lagrangeanos, ambos até funções quadráticas.

Observação 3: Entretanto, essa família de elementos possui uma série de limitações, de “patologias”, as quais foram objeto de estudo massivo para gerar entendimento e procedimentos de “cura”. No Capítulo 11 fazemos algumas indicações de diversas dessas patologias dos elementos serendipity. **Deve-se notar que a maioria dessas patologias são, ou eliminadas, ou grandemente atenuadas, com o uso de elementos lagrangeanos, preferencialmente de graus mais elevados (acima de grau3).**

Expansão de funções serendipity para Lagrangeanas

As funções serendipity biquadráticas (8.187) podem ser suplementadas para gerar um conjunto de funções associadas a um elemento de 9 nós, com o nono nó central ao elemento, como na Figura 8.23. Uma função de aproximação associada ao nó 9 deve ser unitária ali, nula em toda a borda do elemento, e quadrática em r e s . Essa função é $\psi_9(r, s) = (1 - r^2)(1 - s^2)$. Além disso, é necessário aplicar uma nova correção a cada uma das 8 funções de borda em (8.187). Essa correção deve se anular na borda, e, no centro, ter o valor igual ao valor da função que ela visa corrigir. Assim, para as Funções 1 a 4, deve-se somar $-\psi_9/4$. Para as funções 5 a 9, deve-se somar $-\psi_9/2$.

Deve-se observar que, se as funções serendipity forem expandidas da forma acima para incluir nós internos, o resultado é um conjunto de funções que, de fato, são idênticas às funções Lagrangeanas vistas nas seções 8.8.4 e 8.8.5.

8.9 Técnicas de recuperação de tensões e fluxos e estimativa de erro

Um fenômeno conhecido no MEF é que as aproximações obtidas para a variável primária (deslocamentos, temperatura, potencial elétrico...) apresenta precisão e taxas de convergência melhores que as variáveis secundárias (aquelas obtidas por diferenciação das principais, como deformações, tensões, fluxos de calor, etc). Entretanto, observações ainda nos anos 1970 [9][118] indicaram que em elementos serendipity de baixa ordem, nas vizinhanças dos pontos de subintegração de Gauss-Legendre, as tensões apresentam precisão similar àquela dos deslocamentos. Isso gerou a pesquisa de busca de localizações dos chamados pontos de superconvergência em outras formulações. Esses pontos não são facilmente identificáveis a priori em formulações com enriquecimentos locais de alta ordem não nodais. Entretanto, nos elementos de baixa ordem mais comuns, algumas técnicas tem sido desenvolvidas para identificar uma função para cada componente do tensor tensão (ou qualquer outra componente de variável secundária), que designaremos aqui simplesmente por $\sigma^r(\mathbf{x})$, a partir do cálculo da componente em um conjunto pré selecionado de pontos de amostragem em cada elemento.

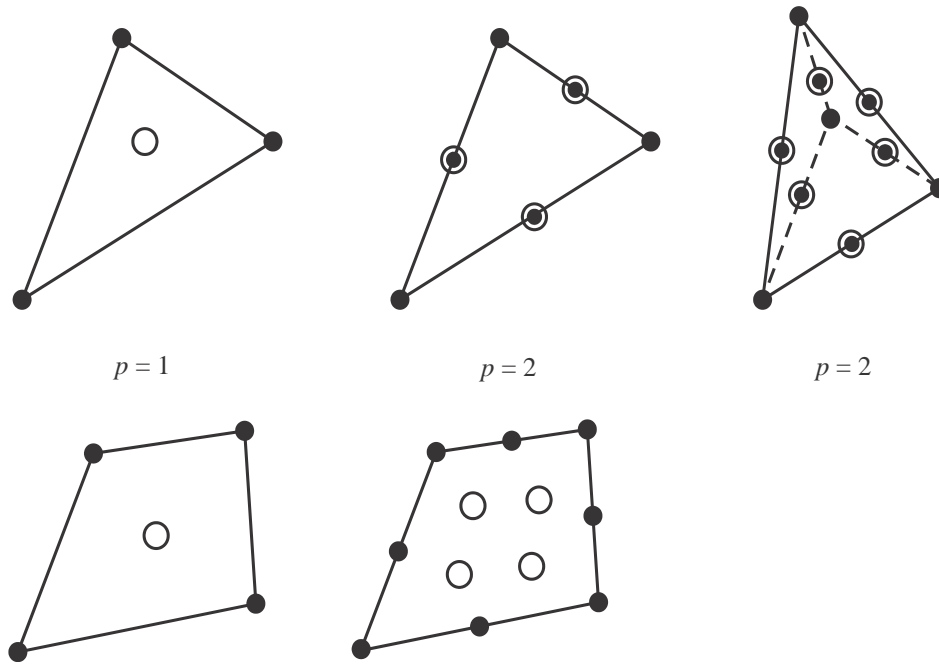


Figura 8.34: Pontos de amostragem de elementos triangulares, quadrangulares e tetraédricos, lineares e quadráticos.

A Figura 8.34 mostra ilustra as posições dos pontos de amostragem de elementos triangulares, quadrangulares e tetraédricos, lineares e quadráticos. Os círculos cheios são os nós e os vazados os pontos amostrais. Nos elementos quadrangulares e hexaédricos os pontos amostrais são os pontos de subintegração de Gauss-Legendre. Nos triângulos e no tetraédros lineares o ponto é no centróide, e nos triângulos e tetraédros quadráticos os pontos são nos meios dos lados.

A meta das técnicas de recuperação é usar os valores de tensão σ_{mef} nos pontos amostrais e obter valores σ_p^r nos nós p da malha. Isso permite em seguida definir uma função para a tensão reconstruída $\sigma^r(\mathbf{x})$ sobre toda a malha, usando as próprias funções de forma $\phi_p(\mathbf{x})$ já usadas no MEF:

$$\sigma^r(\mathbf{x}) = \sum_p^{Nnos} \phi_p(\mathbf{x}) \sigma_p^r, \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (8.188)$$

Normalmente essa função recuperada $\sigma^r(\mathbf{x})$ apresenta uma precisão surpreendentemente boa nas situações práticas. Isso faz com que seja a base de uma técnica bastante usada para a estimativa a posteriori do erro na solução do MEF, quando é usada em lugar da solução exata. Se a técnica de recuperação for usada para obter uma representação do tipo (8.188) para cada componente de tensão (ou do vetor fluxo, etc), se tem o tensor recuperado $\sigma^r(\mathbf{x})$ em cada ponto de um elemento arbitrário e :

$$\sigma^r(\mathbf{x}) = \sum_p^{Nnos} \varphi_p(\mathbf{x}) \sigma_p^r, \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega_e. \quad (8.189)$$

onde φ_p é a função de forma elementar. Então o erro pode ser estimado no elemento por uma norma de energia complementar

$$\begin{aligned} \eta_e &= \|\sigma_{mef}(\mathbf{x}) - \sigma^r(\mathbf{x})\|_{E(\Omega_e)}, \\ &= \sqrt{\int_{\Omega_e} (\sigma_{mef} - \sigma^r)^T \mathbf{C}^{-1} (\sigma_{mef} - \sigma^r) d\Omega}. \end{aligned} \quad (8.190)$$

$$\sigma_{xk}^r = \frac{1}{A_k} \sum_e^{N_{ek}} A_e \sigma_{xme f}^e(\mathbf{x}_k). \quad (8.194)$$

onde A_e e A_k são a área do elemento e e a área total da nuvem. No caso de elementos tridimensionais, as áreas devem ser entendidas como volumes. Uma vez calculado o valor médio para todos os nós do modelo, uma função recuperada $\sigma_x^r(\mathbf{x})$ pode ser definida sobre Ω usando (8.188).

8.9.2 Técnica de recuperação de tensão de Zienkiewicz-Zhu

Para uma grandeza escalar, σ_x por exemplo, busca-se uma representação

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{S} \quad \text{em } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_k, \quad (8.195)$$

onde $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ é um vetor de monômios e \mathbf{S} um vetor de coeficientes a serem determinados de forma a minimizar a diferença em relação aos valores de σ_x calculados diretamente do modelo de MEF nos pontos amostrais da nuvem k . \mathbf{S} é obtido pela minimização do erro quadrático definido de forma discreta por

$$E(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbf{A}^k} \left[\sigma_x(\mathbf{x}_j) - \mathbf{p}(\mathbf{x}_j)^T \mathbf{S} \right]^2. \quad (8.196)$$

Se o número de termos na base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ for menor ou igual ao número de pontos amostrais na nuvem, o mínimo é dado pela solução \mathbf{S} do problema algébrico

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{S} &= \mathbf{F}, \quad \text{onde} \\ \mathbf{A} &= \sum_{j \in \mathbf{A}^k} \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j)^T \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \sum_{j \in \mathbf{A}^k} \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \sigma_x(\mathbf{x}_j). \end{aligned} \quad (8.197)$$

Tendo \mathbf{S} , a eq. (8.195) é usada para calcular o valor recuperado de σ_x no nó k :

$$\sigma_x^r = \mathbf{p}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{S}. \quad (8.198)$$

O processo (8.195)- (8.198) é repetido para todos os nós da malha, gerando valores nodais recuperados em todos os nós. Então, (8.188) permite a representação da tensão recuperada em todo o domínio.

As bases polinomiais usadas podem ser, por exemplo:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x})^T = \begin{cases} \{1, x, y\} & \text{para elementos 2D lineares,} \\ \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} & \text{para elementos 2D quadráticos,} \\ \{1, x, y, z\} & \text{para elementos 3D lineares,} \end{cases} \quad (8.199)$$

8.10 Exercícios

- 8.1 Explique qual a diferença entre o conjunto Kin e Kin_h .
- 8.2 Exemplifique funções $C^0(\Omega)$, $C^1(\Omega)$ e $C^2(\Omega)$.
- 8.3 Porque o produto interno de um tensor simétrico \mathbf{S} por um anti-simétrico \mathbf{A} é nulo ($\mathbf{S} : \mathbf{A} = \mathbf{0}$)?
- 8.4 Qual a parte simétrica do gradiente de deslocamento $\nabla \mathbf{u}$, e qual seu significado físico?
- 8.5 Porque o PTV, apesar de envolver um “trabalho”, não é uma relação termodinâmica?
- 8.6 Porque, na dedução do PTV, a função peso é requerida ser nula em Γ_u ?

