

# Capítulo 5

## Viga delgada isotrópica

Neste capítulo são apresentadas as diversas definições e relações diferenciais aplicáveis à flexão de vigas elásticas. Consideram-se apenas as vigas isotrópico-homogêneas, de forma a estabelecer as bases conceituais ao estudo de flexão de placas laminadas, vistas a partir do Capítulo 6. Esta seção pode ser considerada como uma revisão de conteúdo, de tal forma que, sentindo-se seguro, o leitor pode ir diretamente ao próximo capítulo.

### 5.1 Teoria de Timoshenko para flexão de viga

Considere uma viga de comprimento  $l$  e seção transversal  $b \times H$ , como vista na Figura 5.1. As equações que serão desenvolvidas terão por base uma série de hipóteses, como se segue:

- Hipótese 1:** o carregamento é tal que há apenas cargas concentradas ou distribuídas na direção  $z$  e/ou momentos na direção  $y$ .
- Hipótese 2:** as deflexões são pequenas quando comparadas com a espessura  $H$ .
- Hipótese 3:** as condições de contorno da viga, isto é, a forma como as vigas estão vinculadas é tal que não ocorrem reações axiais (na direção  $x$ ), nos apoios.

Considere um ponto genérico  $P$  na viga, nas coordenadas  $(x, y, z)$ , para o qual os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  são designados, respectivamente, por  $u$ ,  $v$  e  $w$ . Em geral,  $u$  será uma função de ponto e pode ser representado por uma função  $u(x, y, z)$ . Da mesma forma temos  $v(x, y, z)$  e  $w(x, y, z)$ . Num problema qualquer esses três campos são incógnitos e representam a solução do problema. No problema particular da viga mencionada, as três hipóteses permitem considerar que cada ponto desloca-se apenas no plano  $x$ - $z$ , isto é,  $v(x, y, z) \equiv 0$  para qualquer  $(x, y, z) \in \Omega$ , onde  $\Omega$  representa o domínio sob consideração, isto é, o conjunto de pontos  $P(x, y, z)$  que a viga ocupa no espaço euclidiano. Além disso, as hipóteses permitem aproximar os deslocamentos  $w$  como uniformes na seção, ou seja, independentemente de  $z$ .

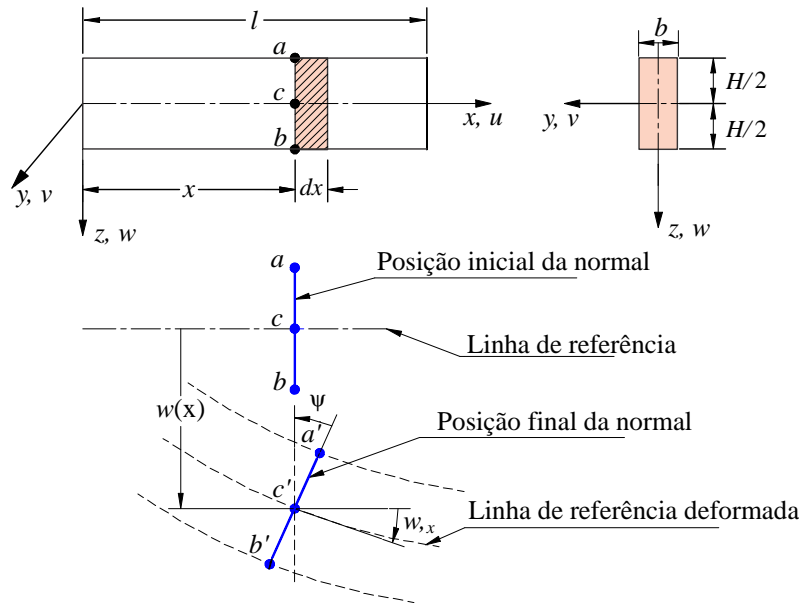
Essas simplificações podem ser expressas em uma forma matemática simples como:

$$u = u(x, z), \quad v \equiv 0, \quad w = w(x). \quad (5.1)$$

Usando as definições apresentadas no Capítulo 2, as deformações específicas normais  $\varepsilon$  e cisalhantes  $\gamma$  são expressas em termos dos deslocamentos (5.1) como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, z) &= \frac{\partial u(x, z)}{\partial x}, & \gamma_{xy}(x, z) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_y(x, z) &= \frac{\partial v(x, z)}{\partial y} = 0, & \gamma_{yz}(x, z) &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon_z(x, z) &= \frac{\partial w(x, z)}{\partial z}, & \gamma_{xz}(x, z) &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Neste ponto apresentam-se mais quatro hipóteses:



**Figura 5.1:** Rotação da normal numa viga.

- d) **Hipótese 4:** superfícies tomadas na configuração indeformada como sendo planas e perpendiculares à linha de referência centroidal da viga, após a deformação permanecem planas, sofrendo apenas uma rotação, representada na Figura 5.1 pelo ângulo  $\psi(x)$ ;
- e) **Hipótese 5:** a viga é razoavelmente longa, isto é,  $l \gg H$ .
- f) **Hipótese 6:** uma fibra inicialmente normal à superfície de referência, como a linha  $\overline{abc}$  na Figura 5.1, não sofre extensão.
- g) **Hipótese 7:** sabe-se que se a altura da viga não for muito grande em relação ao seu comprimento, (hipótese 5), as tensões  $\sigma_z$  serão comparativamente pequenas. Considera-se então que  $\sigma_z(x, z) = 0$ , para qualquer  $(x, y, z) \in \Omega$ .

Finalmente se adicionará, opcionalmente, uma última hipótese:

- h) **Hipótese 8:** conforme a viga se torna longa, i.e.,  $H/l \rightarrow 0$ , se tem que  $\psi \rightarrow -w_{,x}$ . Para casos reais em que  $H \ll l$ , tem-se que  $\psi \approx -w_{,x}$ , de forma que a rotação da normal pode ser considerada igual ao ângulo tangente de deflexão da superfície neutra da viga.

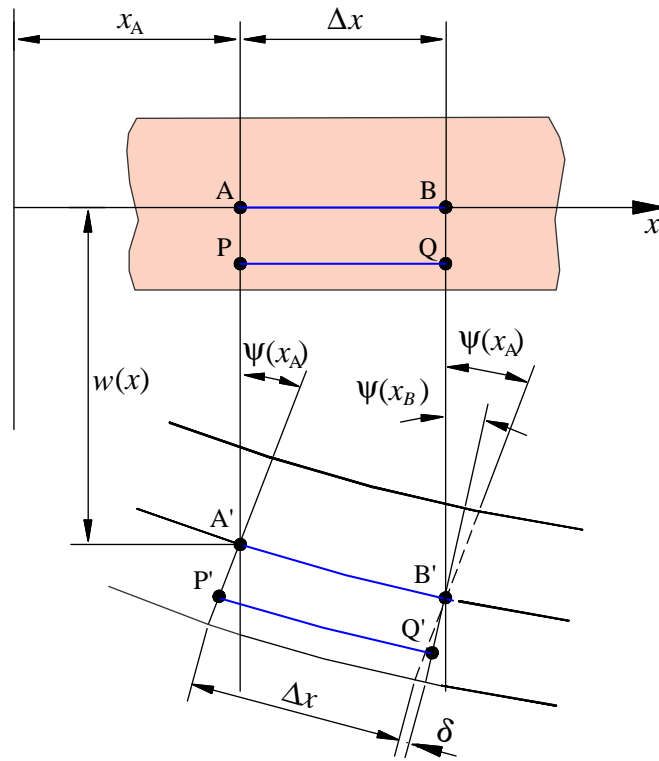
As hipóteses 4 a 7, juntamente com a hipótese 2, permitem que se simplifique ainda mais o campo de deslocamentos (5.1) para:

$$u(x, z) = \psi(x) z, \quad w(x, z) = w(x).$$

Observa-se que os **deslocamentos transversais**  $w$  são os mesmos para qualquer valor de coordenadas  $z$  da seção. Considere que se a seção sofre apenas uma rotação de corpo rígido, i.e., ela permanece inextensível, isto é, não sofre variação de comprimento. Essa condição é satisfeita pelo campo assumido em (5.3), o qual resulta em deformação extensional nula, i.e.,  $\varepsilon_z(x, z) = 0$ . Numa dada seção de coordenadas  $x$  os deslocamentos axiais se resumem à forma da equação de uma reta com o coeficiente angular  $\psi$  variando de seção a seção.

Das equações (5.2) e (5.3) verifica-se que permanecem apenas duas deformações não nulas:

$$\varepsilon_x = \psi_{,x}(x) z \quad \gamma_{xz}(x) = \psi(x) + w_{,x}(x), \quad (5.3)$$



**Figura 5.2:** Deformação extensiva de uma fibra longitudinal.

onde a notação  $(\cdot)_{,x}$  indica diferenciação em relação à coordenada  $x$ , isto é,

$$(\cdot)_{,x} := \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}. \quad (5.4)$$

As duas notações serão usadas alternadamente em todo o livro para indicar diferenciação ou derivação.

As relações (5.3) são as chamadas **relações deformações-deslocamentos** (ou relações cinemáticas) da teoria de vigas, onde  $\psi(x)$  pode ser considerado uma forma especial de deslocamento generalizado, a **rotação na seção transversal**.

Com o auxílio da Figura 5.2, pode-se compreender mais claramente o significado das eqs.(5.3). Considere um segmento da viga  $\overline{PQ}$  tomado longitudinalmente, inicialmente com um comprimento  $\Delta x$ . Sua configuração deformada é representada pelo segmento  $\overline{P'Q'}$ , e tem comprimento diferente do inicial na quantidade  $\delta$ . A deformação específica média sofrida pelo segmento é:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{medio}} &= \frac{\text{Variação de comprimento}}{\text{Comprimento inicial}} = \frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\delta}{\Delta x}, \\ \varepsilon_{\text{medio}} &= \frac{u(Q) - u(P)}{\Delta x} = \left( \frac{\psi(x_B) - \psi(x_A)}{\Delta x} \right) z. \end{aligned} \quad (5.5)$$

O fator entre parênteses pode ser visto como a diferença de rotação no ponto B' que dá origem à variação de comprimento da fibra. Nesse ponto, toma-se a definição de derivada, isto é,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\psi(x_B) - \psi(x_A)}{\Delta x} z = \frac{d\psi(x)}{dx} z = \varepsilon_x, \quad (5.6)$$

que é precisamente a eq.(5.3).

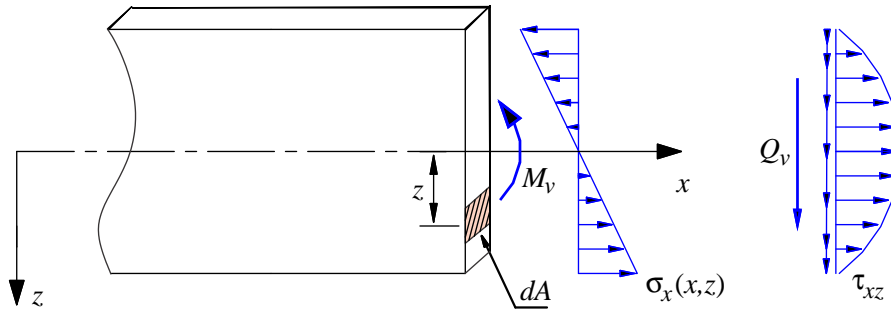
A partir de (5.2) e (5.3) observamos que, como  $w$  é função apenas de  $x$ ,  $\varepsilon_z = 0$ , isto é, um segmento vertical, normal à linha central, como o segmento  $\overline{AP}$  na Figura 5.2, sofrerá apenas uma rotação  $\psi$ , como estabelecido na *hipótese 4*, e não sofrerá nenhuma extensão.

### 5.1.1 Estática

Definimos as seguintes *forças generalizadas*:

$$M_v(x) = \int_A \sigma_x(x, z) z \, dA \quad \text{e} \quad Q_v(x) = \int_A \tau_{xz}(x, z) \, dA. \quad (5.7)$$

Estas forças generalizadas, também chamadas de esforços internos na teoria de vigas, assumem os significados de momento fletor  $M_v$  e esforço cortante  $Q_v$  na seção definida pela coordenada  $x$ . Como visto na Figura 5.3,  $dA$  define um elemento diferencial de área sobre uma seção transversal;  $(\sigma_x z \, dA)$  é um elemento diferencial de momento, integrado como na eq.(5.7). As variações de  $\sigma_x$  e  $\tau_{xz}$  ao longo de  $z$  são mostradas na Figura 5.3 como se fossem lineares e parabólicas, respectivamente. De fato, elas se apresentam dessa maneira em seções retangulares, embora as definições dos esforços em (5.7) independam das particulares distribuições das tensões sendo integradas.



**Figura 5.3:** Distribuições de tensões e esforços internos numa seção de viga.

As **equações de equilíbrio** em termos das forças generalizadas  $M_v$  e  $Q_v$  podem ser obtidas por duas diferentes maneiras, que são descritas a seguir, além de uma terceira forma, por meio do princípio dos trabalhos virtuais, que não será descrito aqui. As formas de dedução são as seguintes:

#### a) Por inspeção:

Considerando-se a Figura 5.4a, fazendo o somatório dos momentos na direção  $y$  e das forças na direção  $z$  obtêm-se:

$$dM_v - Q_v \, dx = 0 \quad \text{e} \quad dQ_v + p \, dx = 0. \quad (5.8)$$

Dessa forma, as duas equações de equilíbrio de um elemento diferencial de viga são:

$$\boxed{\frac{dM_v(x)}{dx} = Q_v(x), \quad \frac{dQ_v(x)}{dx} = -p(x)} \quad (5.9)$$

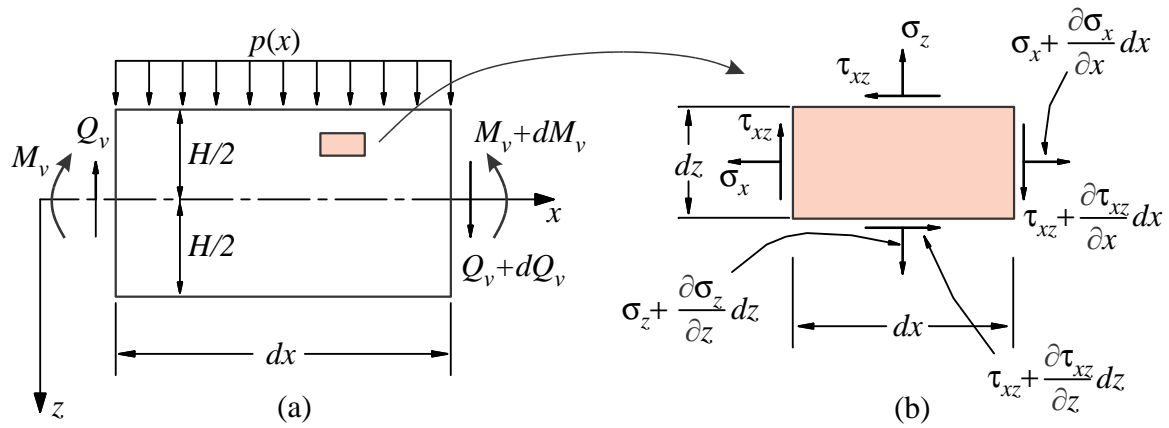
onde  $p(x)$  é a carga distribuída por unidade de comprimento.

#### b) Usando as equações diferenciais triaxiais de equilíbrio

Partindo-se de um elemento diferencial de volume de dimensões  $(b \, dx \, dz)$  submetido às tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xz}$ , como ilustrado na Figura 5.4b. Foram tomadas as equações de movimento, (2.16), e aplicadas as simplificações necessárias, isto é, impôs-se que as forças de inércia e de corpo sejam nulas juntamente com as demais componentes de tensão que não  $\sigma_x$  e  $\tau_{xz}$ . Dessa forma, as equações se tornam:

$$\left\| \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (5.10)$$

Multiplica-se em seguida a primeira equação por  $(z \, dA = z \, b \, dz)$  e a segunda por  $(dA = b \, dz)$ , integra-se sobre  $z$  e obtêm-se:



**Figura 5.4:** Equilíbrio de dois elementos diferenciais de viga.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_v(x)}{dx} + \int_z \left[ \frac{\partial \tau_{xz}(x, z)}{\partial z} \right] z b dz = 0, \\ \frac{dQ_v(x)}{dx} + \int_z \left[ \frac{\partial \sigma_z(x, z)}{\partial z} \right] b dz = 0, \end{array} \right. \quad (5.11)$$

onde no primeiro termo de cada equação foi usada uma das definições de esforços de momento e cortante obtidas de (5.7). A seguir, considerando que a espessura  $b$  da seção é constante, integram-se os segundos termos de (5.11), (na primeira expressão a integração é por partes). Com isso, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_v(x)}{dx} + [\tau_{xz}(x, z) z b]_{-H/2}^{H/2} - Q_v = 0, \\ \frac{dQ_v(x)}{dx} + [\sigma_z(x, z) b]_{-H/2}^{H/2} = 0. \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Observe as condições de contorno na viga na Figura 5.4a. A superfície inferior é livre de tensões, isto é,

$$\sigma_z(x, z = \frac{H}{2}) = 0 \quad \text{e} \quad \tau_{xz}(x, z = \frac{H}{2}) = 0, \quad (5.13)$$

enquanto na superfície superior existe apenas a carga distribuída, normal à superfície, de forma que se tem ali:

$$\sigma_z(x, z = -\frac{H}{2}) = -\frac{p(x)}{b} \quad \text{e} \quad \tau_{xz}(x, z = -\frac{H}{2}) = 0. \quad (5.14)$$

Usando essas condições de contorno, as equações de equilíbrio (5.12) revertem-se exatamente àquelas mostradas em (5.9).

### 5.1.2 Lei de Hooke

A hipótese 7 faz que a lei de Hooke para a viga fique na forma:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad \text{e} \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}. \quad (5.15)$$

Usando as relações cinemáticas de viga, (5.3), essas tensões serão:

$$\sigma_x(x, z) = E \frac{d\psi}{dx}(x) z \quad \text{e} \quad \tau(x)_{xz} = G \left[ \psi(x) + \frac{dw}{dx}(x) \right]. \quad (5.16)$$

Essas relações podem ser usadas para eliminar as tensões nas definições dos esforços em (5.7). O momento será:

$$M_v = \int_A E \varepsilon_x z \, dA = \int_A E \frac{d\psi}{dx} z^2 \, dA.$$

Os termos independentes de  $z$  podem ser postos fora da integral, resultando em:

$$\boxed{M_v = E I_{yy} \frac{\partial \psi}{\partial x}} \quad (5.17)$$

onde  $I_{yy}$  é o segundo momento de área da seção em relação ao eixo principal  $y$ . Para o esforço cortante, seguimos o mesmo procedimento, obtendo:

$$Q_v(x) = \int_A G \left[ \psi(x) + \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right] dA.$$

Observa-se que o integrando independe de  $z$ , o que resulta em:

$$\boxed{Q_v(x) = G A \left[ \psi(x) + \frac{\partial w}{\partial x} \right]} \quad (5.18)$$

Essas equações foram obtidas a partir das hipóteses cinemáticas mostradas e, dessa forma, elas não são compatíveis com as **equações diferenciais de equilíbrio triaxiais** (5.10), que são relações precisas da **mecânica do contínuo**. Essa incompatibilidade é visível considerando-se que, pelas relações (5.16), a deformação cisalhante  $\gamma_{xz}$  é constante para um dado  $x$ , ou seja, possui o mesmo valor em qualquer ponto de uma dada seção. Substituindo  $\partial \tau_{xz} / \partial z = 0$  e  $\partial \sigma_x / \partial z = 0$  nas equações de equilíbrio (5.10) obtêm-se:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0,$$

o que indica que  $\sigma_x$  e  $\tau_{xz}$  seriam constantes ao longo de  $x$ , o que não se verifica, como pode ser visto em (5.16), isto é, essas tensões, na verdade, variam em  $x$ . As hipóteses cinemáticas são então incompatíveis com as equações de equilíbrio.

Usam-se, portanto, considerações de energia para tentar obter um valor constante para  $\tau_{xz}$  que melhor represente o efeito da distribuição verdadeira, parabólica, como visto a seguir. Comparando-se (5.17) com (5.16), obtêm-se:

$$\sigma_x(x, z) = \frac{M_v(x) z}{I_{yy}(x)}, \quad (5.19)$$

que é a chamada **fórmula de flexão** da resistência dos materiais. A seguir, integra-se a primeira das equações de equilíbrio (5.10) ao longo da espessura da seção:

$$\int_{z=-H/2}^z d\tau_{xz}(z) = - \int_{z=-H/2}^z \frac{\partial \sigma_x(x, \bar{z})}{\partial x} d\bar{z}. \quad (5.20)$$

Usando-se (5.19) juntamente com a equação de equilíbrio de viga  $M_v = Q_v$ , a eq.(5.9), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(z) - \tau_{xz}(-H/2) &= - \int_{-H/2}^z \left( \frac{\partial \sigma_x(x, \bar{z})}{\partial x} \right) d\bar{z} = - \int_{-H/2}^z \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M_v(x) \bar{z}}{I_{yy}(x)} \right) d\bar{z}, \text{ e} \\ \tau_{xz}(z) - \tau_{xz}(-H/2) &= \frac{Q_v}{2 I_{yy}} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 - z^2 \right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde  $\tau_{xz}(-H/2) = 0$  em virtude das condições de contorno. Isso mostra uma distribuição quadrática para a tensão cisalhante.

Considera-se em seguida a energia de deformação elástica da viga:

$$U = \int_0^l \int_A (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \, dA \, dx.$$

Substituindo a lei de Hooke em termos de deslocamentos de (5.16), essa variação pode ser representada da seguinte forma:

$$U = \int_A \int_0^l \left[ \sigma_x \left( \frac{d\psi}{dx}(x) \right) z + \tau_{xz} \left( \frac{\tau_{xz}}{G} \right) \right] dx dA. \quad (5.22)$$

Tomando a tensão cisalhante de (5.21) e observando que  $\delta\tau_{xz} = -\delta Q_v \left( \left( \frac{H}{2} \right)^2 - z^2 \right) / 2I_{yy}(x)$  e  $dA = b dz$ , obtém-se:

$$U = \int_0^l \left[ M_v \frac{d\psi}{dx} + Q_v^2 \frac{b}{4G I_{yy}^2} \int_{-H/2}^{H/2} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 - z^2 \right]^2 dz \right] dx. \quad (5.23)$$

Para uma seção retangular, o momento de inércia é  $I_{yy}(x) = bH^3/12$ . Considerando-se que a integral interna em (5.23) vale  $H^5/30$ , obtém-se, finalmente,

$$U = \int_0^l \left[ M_v \psi_{,x}(x) + \frac{Q_v^2}{kGA} \right] dx, \quad (5.24)$$

onde  $A = bH$  é a área da seção transversa da viga e  $k = 5/6$  é o chamado **fator de correção ao cisalhamento**. Observa-se que essa expressão de trabalho foi obtida usando-se a expressão mais precisa da tensão cisalhante, (5.22), que, por sua vez, veio das equações locais de equilíbrio. Pode-se obter uma expressão análoga a (5.24) usando as expressões da teoria desenvolvida, menos precisa. Assim, tem-se que:

$$U = \int_0^l \left[ M_v \frac{d\psi}{dx}(x) + Q_v \gamma_{xz} \right] dx. \quad (5.25)$$

A partir de (5.18),  $\gamma_{xz} = Q_v(x)/GA$ . Então,

$$U = \int_0^l \left[ M_v \frac{d\psi}{dx}(x) + \frac{Q_v^2(x)}{GA} \right] dx. \quad (5.26)$$

Nota-se que essa expressão é idêntica a (5.24), exceto pela presença do fator de correção ao cisalhamento  $k$ . Conclui-se que a teoria de viga desenvolvida pode ser aproximadamente corrigida pela aplicação desse fator. Então, as equações (5.17) e (5.18) são alteradas para:

$$\boxed{M_v = E \frac{d\psi}{dx} I_{yy} \quad \text{e} \quad Q_v(x) = kGA \left( \psi + \frac{dw}{dx} \right)} \quad (5.27)$$

Nas seções 13.4 e 13.5, página 364, é apresentada uma descrição mais detalhada da obtenção do fator de cisalhamento  $k$  para placas isotrópicas e compostas.

### 5.1.3 Síntese das equações diferenciais de viga

As equações (5.9) junto com (5.27) formam um conjunto de quatro equações diferenciais de primeira ordem,

$$\Rightarrow \frac{dM_v}{dx} - Q_v = 0, \quad (5.28)$$

$$\Rightarrow \frac{dQ_v}{dx} + p(x) = 0, \quad (5.29)$$

$$\Rightarrow M_v - E I_{yy} \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad (5.30)$$

$$\Rightarrow Q_v - kGA \left( \psi + \frac{dw}{dx} \right) = 0, \quad (5.31)$$

em termos de quatro campos incógnitos:  $Q_v$ ,  $M_v$ ,  $\psi$  e  $w$ . Esse sistema de equações, junto com as condições de contorno, pode ser solucionado numericamente em geral, e, em alguns casos, analiticamente. Porém, às vezes, uma maneira mais conveniente de obter a solução consiste em reduzir o número de equações pela substituição de uma na outra. Isso é feito usando-se as eqs.(5.30) e (5.31) para eliminar  $Q_v$  e  $M_v$  de (5.28) e de (5.29), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left( E \frac{d\psi}{dx} I_{yy} \right) + p(x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left( E \frac{d\psi}{dx} I_{yy} \right) - kG A \left( \psi + \frac{dw}{dx} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

O equacionamento mostrado nessa seção, até as eqs. (5.32), consiste na **teoria de Timoshenko de flexão de viga**.

### Teoria de Euler-Bernoulli

A **Hipótese 8** é frequentemente usada para vigas longas, (também chamadas vigas delgadas), aquelas em que  $H \ll l$ . Neste caso, prova-se que, no limite,

$$\frac{dw}{dx} + \psi = 0, \quad (5.33)$$

ou seja, a rotação do segmento normal é idêntica à inclinação  $w_{,x}$  da linha de referência (Figura 5.1). Nesse caso, precisa-se de apenas uma equação diferencial de quarta ordem em termos de deslocamentos, que é obtida substituindo-se  $\psi$  de (5.33) em (5.32)<sub>1</sub>, considerando  $E$  uniforme:

$$E I_{yy} \frac{d^4 w}{dx^4} - p(x) = 0. \quad (5.34)$$

Essa é a equação diferencial clássica que descreve o comportamento de uma viga longa. A introdução da simplificação de vigas longas leva a uma expressão diferencial simples, mas implica algumas incoerências. Por exemplo, o esforço cortante  $Q_v$  não é relacionado a nenhuma deformação, já que  $\gamma_{xz} = w_{,x} + \psi = 0$ , isto é, se  $\gamma_{xz} = 0$ , deve-se ter que  $\tau_{xz} = 0$  e  $Q_v = 0$ . Porém  $Q_v$  não pode, de fato, ser zero. Após a solução, pode-se estimar  $Q_v$  a partir de (5.28) ou (5.29), mas (5.31) perde o significado. Teorias que usam a hipótese (5.33) e, portanto, desprezam o cisalhamento transversal, são conhecidas como **teorias de viga de Euler-Bernoulli** ou simplesmente **teorias de Bernoulli**.

#### 5.1.4 Solução de casos de vigas de Bernoulli

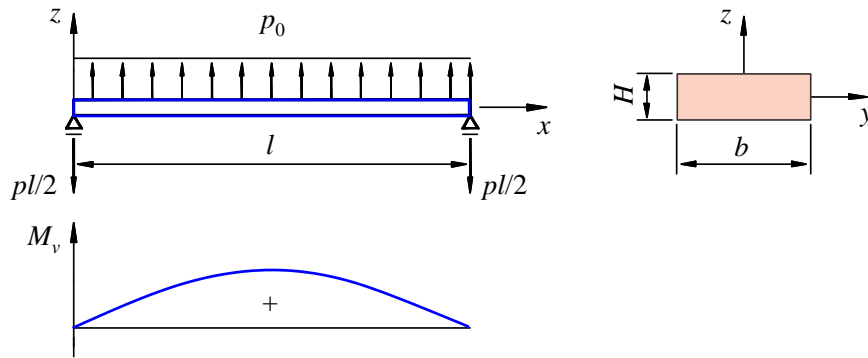
Nesta seção considera-se a solução do problema de vigas de Euler-Bernoulli para uma viga biapoiada sob carga distribuída uniforme. Na seção 8.8 temos o processo de solução pela teoria de Timoshenko. Um sumário de soluções para outros tipos de apoios e carregamentos é listado na Seção 5.2.

Este tipo de problema é característico de disciplinas de Resistência dos Materiais em cursos de graduação. Inclui-se aqui apenas porque as fórmulas apresentadas serão usadas posteriormente na solução de problemas de vigas e de alguns tipos de placas de material composto, depois de as constantes envolvidas terem sido reinterpretadas.

Considere, por exemplo, o problema ilustrado na Figura 5.5. O *problema de valor no contorno* associado a ser resolvido é composto pela equação diferencial de equilíbrio (5.34) e pelas condições de contorno:

$$\left\| \begin{aligned} \frac{d^4 w}{dx^4} &= \frac{p(x)}{EI_{yy}}, & \forall 0 < x < l, \\ w(x) &= 0 & \text{em } x = 0, l, \\ M_v(x) &= 0 & \text{em } x = 0, l. \end{aligned} \right. \quad (5.35)$$





**Figura 5.5:** Viga biapoiada sob carga distribuída uniforme  $p_0$  (em N/m, por exemplo), e diagrama de momentos fletores.

Nesse problema, a distribuição de momentos pode ser facilmente determinada, uma vez que o problema é isostático. A distribuição de momentos é dada por:

$$M_v(x) = \frac{p_0 x}{2} (l - x). \quad (5.36)$$

Isso permite usar diretamente a relação constitutiva (5.27) com  $\psi_{,x} = -w_{,xx}$ , em vez da equação de equilíbrio em (5.35):

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_v}{EI_{yy}} = -\frac{p_0 x}{2EI_{yy}} (l - x). \quad (5.37)$$

Assim, é preciso fazer apenas duas integrações, em lugar das quatro necessárias em (5.35). Isto resulta em:

$$w(x) = -\frac{p_0 x}{2E I_{yy}} \left[ \frac{l x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 \right]. \quad (5.38)$$

Aplicando as condições de contorno  $w(x) = 0$  para  $x = 0$  e  $l$  obtém-se a solução:

$$w(x) = \frac{p_0}{24E I_{yy}} (x^4 - 2lx^3 + l^3x) \quad (5.39)$$

Essa solução é listada como  $w_f(x)$  no caso 14 da Seção 5.2. Na Seção 8.8 e na eq.(8.165), página 235, é apresentada a solução do mesmo problema pela **teoria de Timoshenko**, que considera o efeito do cisalhamento transversal. Esse efeito resulta num acréscimo nas deflexões em relação aos valores obtidos em (5.39) pela teoria de Euler-Bernoulli.

## 5.2 Fórmulas para vigas

A seguir há uma pequena coletânea de casos de deflexão de vigas. Na maioria dos casos, a solução é dividida em duas partes,  $w(x) = w_f(x) + w_c(x)$ , onde  $w_f$  é a parcela obtida pela teoria de Euler-Bernoulli.  $w_c(x)$  é a parcela da solução devido ao cisalhamento transversal, obtido pela teoria de Timoshenko, a serem deduzidos na seção 8.8 a seguir. Note que, embora as soluções apresentadas sejam para vigas homogêneo-isotrópicas, elas **são também usadas para vigas não-homogêneas e anisotrópicas de diversos tipos**. Essa aplicação é possível pelo simples uso dos valores equivalentes dos módulos de elasticidade da viga composta, determinados pelas formulações mostradas nas seções anteriores.

Nos casos apresentados usa-se a seguinte notação:

$w = w_f + w_c$ , onde  $w_f$  e  $w_c$  são as parcelas das teorias de Bernoulli e de Timoshenko.

Nos casos em que  $w_c$  não é indicado não significa que essa parcela seja nula.

Os casos em que apenas a solução de Bernoulli é mostrada estão assinalados.

$l$  = comprimento da viga, exceto onde indicado na figura correspondente.

$p_o$  = força por unidade de comprimento.

$\theta = \partial w(x)/\partial x$ , inclinação da superfície de referência.

$\psi$  = rotação da normal.

$k$  = fator de correção ao cisalhamento. (Cf. Seções 5.2.1 ou 13.4.)

$A = b \times H$  = área, largura e altura da seção, conforme a Figura 8.1.

$w_{\max} = w_{f\max} + w_{c\max}$ , onde todas as parcelas são calculadas na mesma seção.

$\alpha_c = k G_{xzf} A$ . A solução de Bernoulli é recuperada fazendo  $\alpha_c \rightarrow \infty$  nas equações.

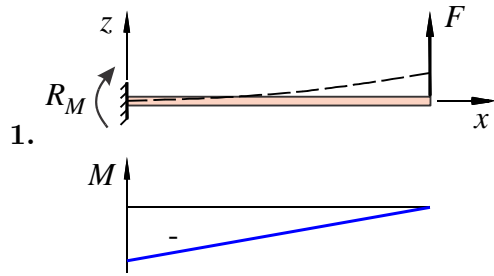
$G_{xzf}$  = módulo de elasticidade cisalhante do material no plano  $xz$ .

$E_{xf}$  = módulo de elasticidade do material na direção longitudinal  $x$ .

$\bar{x}$  = posição do deslocamento máximo.

$M = M_v$ , o esforço de momento fletor na viga, e  $Q$  é o esforço cortante.

A convenção de sinais de esforços é aquela vista na Figura 5.4.

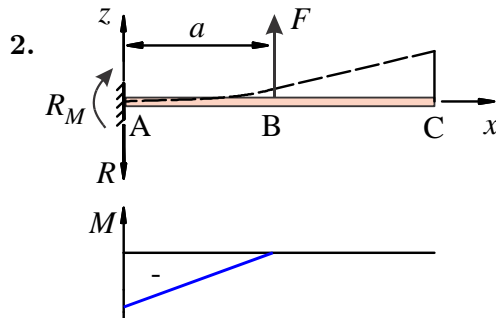


$$M(x) = F(x - l), \quad Q_{\max} = F;$$

$$M_{\max} = -Fl, \quad R_M = Fl,$$

$$w_f(x) = \frac{F x^2}{6E_{xf}I}(3l - x), \quad w_c(x) = \frac{F x}{\alpha_c};$$

$$w_{f\max} = \frac{Fl^3}{3E_{xf}I}, \quad w_{c\max} = \frac{Fl}{\alpha_c}, \quad \theta_{\max} = \frac{Fl^2}{2E_{xf}I} + \frac{F}{\alpha_c}.$$

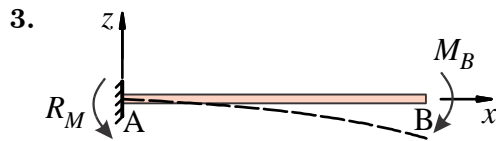


$$M_{AB}(x) = F(x - a), \quad R = F; \quad R_M = Fa,$$

$$w_{fAB}(x) = \frac{F x^2}{6E_{xf}I}(3a - x), \quad w_{cAB}(x) = \frac{F x}{\alpha_c},$$

$$w_{fBC}(x) = \frac{F a^2}{6E_{xf}I}(3x - a), \quad w_{cBC} = \frac{F a}{\alpha_c},$$

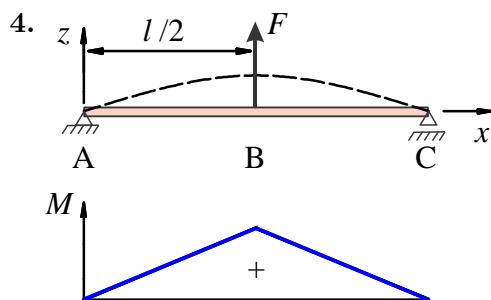
$$w_{\max} = \frac{F a^2}{6E_{xf}I}(3l - a) + \frac{F a}{\alpha_c}.$$



$$M(x) = M_B = R_M,$$

$$w_f(x) = -\frac{M_B x^2}{2E_{xf}I}, \quad w_c(x) = 0,$$

$$w_{\max} = \frac{-M_B l^2}{2E_{xf}I}.$$

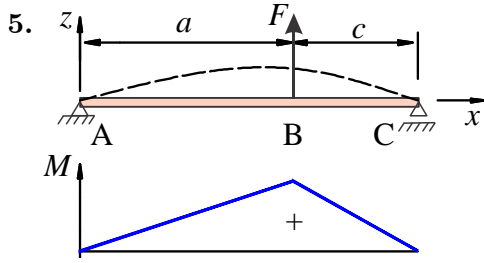


$$M_{AB}(x) = \frac{F x}{2}, \quad M_{BC}(x) = \frac{F}{2}(l - x),$$

$$Q_{\max} = \frac{F}{2}, \quad M_{\max} = \frac{Fl}{4}, \quad \theta_{\max} = \frac{Fl^2}{16E_{xf}I} + \frac{F}{2\alpha_c}.$$

$$w_{fAB}(x) = \frac{F x (3l^2 - 4x^2)}{48E_{xf}I}, \quad w_{cAB}(x) = \frac{F x}{2\alpha_c},$$

$$w_{\max} = \frac{Fl^3}{48E_{xf}I} + \frac{Fl}{4\alpha_c}, \quad \psi_{AB}(x) = \frac{F}{16EI}(4x^2 - l^2).$$



(Solução desenvolvida na Seção 8.8.)

$$M_{AB}(x) = \frac{F c x}{l}, \quad M_{BC}(x) = \frac{F a}{l} (l - x),$$

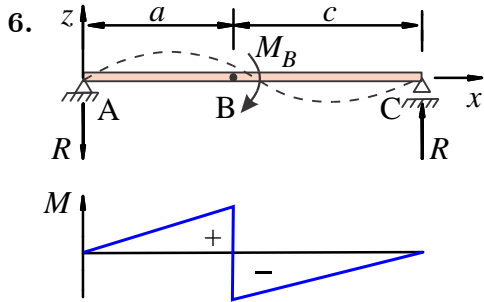
$$w_{fAB}(x) = \frac{F c x (l^2 - c^2 - x^2)}{6E_{xf} I l}, \quad w_{cAB}(x) = \frac{F c x}{l \alpha_c},$$

$$w_{fBC}(x) = \frac{F a (x - l)}{6E_{xf} I l} (x^2 + a^2 - 2l x),$$

$$w_{cBC}(x) = \frac{F a (l - x)}{l \alpha_c}. \quad \text{Caso } a < c, w_{\max},$$

ocorre em BC, em  $\bar{x} = l - \sqrt{(l^2 - a^2 - 6E_{xf} I / \alpha_c) / 3}$ .

Caso contrário,  $\bar{x}^2 = \frac{2E_{xf} I}{\alpha_c} + \frac{(l^2 - c^2)}{3}$ .



$$R = \frac{M_B}{l}, \quad M_{AB}(x) = \frac{M_B x}{l}, \quad \theta_B = \frac{-M_B(l^2 - 6ac)}{3E_{xf} I l}.$$

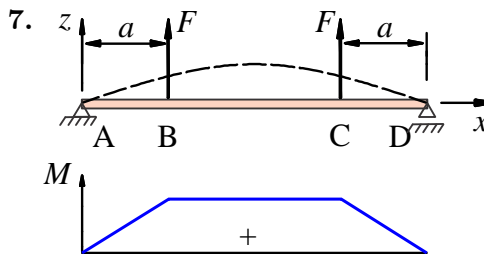
$$M_{BC}(x) = \frac{M_B}{l} (x - l). \quad \text{Se } a \geq c,$$

$$w_{\max} = \frac{M_B [(3a(2l - a) - 2l^2)]^{3/2}}{9\sqrt{3}E_{xf} I} \quad \text{em } 3\bar{x}^2 = (l^2 - 3c^2).$$

$$w_{fAB}(x) = \frac{M_B x (6al - 2l^2 - 3a^2 - x^2)}{6E_{xf} I l},$$

$$w_{cAB}(x) = w_{cBC}(x) = 0, \quad w_B = \frac{M_B a c}{3E_{xf} I l} (a - c),$$

$$w_{fBC}(x) = \frac{M_B (3l x^2 - x(2l^2 + 3a^2) + 3a^2 l - x^3)}{6E_{xf} I l}.$$



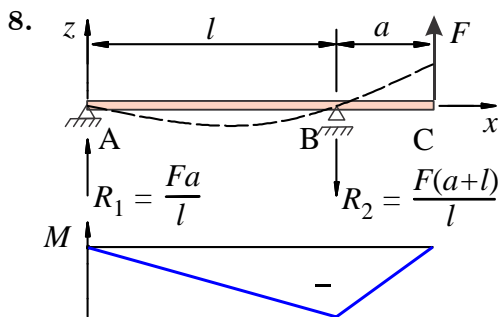
$$M_{AB}(x) = F x, \quad M_{BC}(x) = F a,$$

$$M_{CD}(x) = F (l - x),$$

$$w_{fAB}(x) = \frac{F x (3al - 3a^2 - x^2)}{6E_{xf} I}, \quad w_{cAB}(x) = \frac{F x}{\alpha_c},$$

$$w_{fBC}(x) = \frac{F a (3lx - a^2 - 3x^2)}{6E_{xf} I}, \quad w_{cBC}(x) = \frac{F a}{\alpha_c},$$

$$w_{\max} = \frac{F a (3l^2 - 4a^2)}{24E_{xf} I} + \frac{F a}{\alpha_c}. \quad \theta_{\max} = \frac{F a l}{2E_{xf} I}.$$



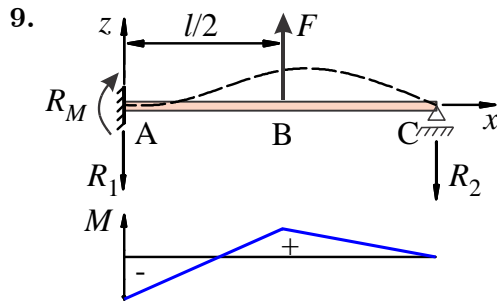
Solução de Bernoulli.

$$M_{AB}(x) = -\frac{F a x}{l}, \quad M_{BC}(x) = F (x - L), \quad \frac{w_C}{L} = \frac{\theta_B}{l/a},$$

$$w_{fAB}(x) = \frac{F x (x^2 - l^2)}{6E_{xf} I l}, \quad \theta_B = -2\theta_A = \frac{F a l}{3E_{xf} I},$$

$$w_{fBC}(x) = \frac{F (l - x)}{6E_{xf} I} [(x - l)^2 - a(3x - l)]. \quad L = l + a.$$

Se  $\frac{l}{a} > 6,05$ ,  $w_{\max} = -\frac{F a l^2}{9\sqrt{3}E_{xf} I}$  em  $\bar{x}^2 = \frac{l^2}{3}$ .



Solução de Bernoulli.

(Ver a solução de Timoshenko na Seção 8.8.3.)

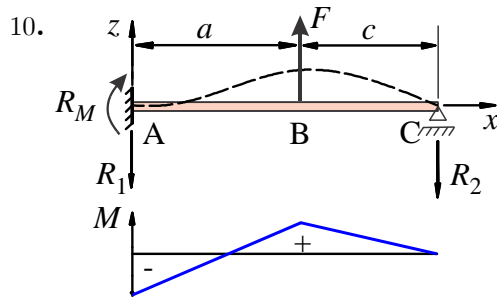
$$R_1 = \frac{11F}{16}, \quad R_2 = \frac{5F}{16}, \quad R_M = \frac{3Fl}{16}, \quad \frac{M_{BC}(x)}{R_2} = (l-x),$$

$$M_{AB}(x) = \frac{F(11x-3l)}{16}, \quad w_{fAB}(x) = \frac{Fx^2(9l-11x)}{96E_{xf}I},$$

$$\psi_{BC}(x) = \frac{F(10lx-4l^2-5x^2)}{32E_{xf}I}, \quad w_B = \frac{7Fl^3}{768E_{xf}I},$$

$$w_{fBC}(x) = \frac{F(x-l)}{96E_{xf}I}[5x^2+2l^2-10lx].$$

$$w_{\max} = \frac{Fl^3}{48\sqrt{5}E_{xf}I} \quad \text{em } \bar{x} = (1-\sqrt{5}/5)l.$$



Solução de Bernoulli.

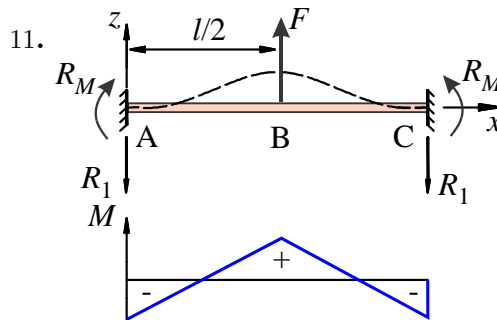
$$\frac{R_1}{Fc} = \frac{3l^2-c^2}{2l^3}, \quad \frac{R_2}{Fa^2} = \frac{3l-a}{2l^3}, \quad \frac{R_M}{Fc} = \frac{l^2-c^2}{2l^2},$$

$$\frac{M_B}{Fca^2} = \frac{2a+3c}{2l^3}, \quad \frac{M_{BC}}{Fa^2} = \frac{(l-x)(3l-a)}{2l^3},$$

$$M_{AB}(x) = \frac{Fc[c^2l-l^3+x(3l^2-c^2)]}{2l^3}. \quad \text{Se } a > \sqrt{2}c,$$

$$|M_B| > |M_A|. \quad w_{fBC}(x) = w_{fAB}(x) + \frac{F(x-a)^3}{6E_{xf}I},$$

$$w_{fAB}(x) = \frac{Fcx^2[3l(l^2-c^2)+x(c^2-3l^2)]}{12E_{xf}Il^3}.$$

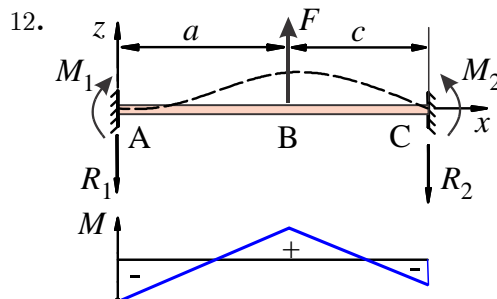


$$R_1 = \frac{F}{2}, \quad R_M = -M_A = M_B = \frac{Fl}{8}, \quad w_{cAB}(x) = \frac{Fx}{2\alpha_c},$$

$$M_{AB}(x) = \frac{F(4x-l)}{8}, \quad M_{BC}(x) = \frac{F(3l-4x)}{8},$$

$$w_{fAB}(x) = \frac{Fx^2(3l-4x)}{48E_{xf}I}, \quad w_{\max} = \frac{Fl^3}{192E_{xf}I} + \frac{Fl}{4\alpha_c},$$

$$\theta_{\max} = \frac{Fl^2}{64E_{xf}I} + \frac{F}{2\alpha_c} \quad \text{em } \bar{x} = \frac{l}{4}.$$



Solução de Bernoulli.

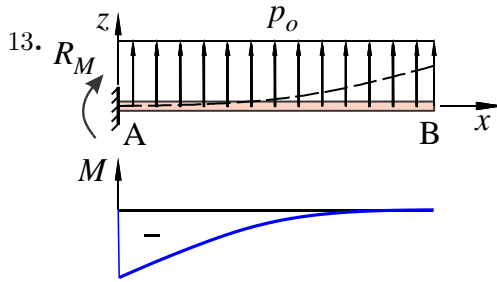
$$R_1 = \frac{F c^2(3a+c)}{l^3}, \quad R_2 = \frac{F a^2(3c+a)}{l^3}, \quad M_1 = \frac{F a c^2}{l^2},$$

$$M_2 = \frac{F a^2 c}{l^2}, \quad M_{AB}(x) = \frac{F c^2}{l^3}[x(3a+c)-la],$$

$$M_B = \frac{2M_2 c}{l}, \quad M_{BC}(x) = \frac{F a^2}{l^3}[x(2a-3l)+l(2l-a)].$$

$$\frac{w_{fAB}(x)}{F c^2} = \frac{x^2[3al-x(3a+c)]}{6E_{xf}Il^3}, \quad \frac{w_B}{F} = \frac{(ac)^3}{l^3},$$

$$w_{fBC}(x) = \frac{F a^2 (l-x)^2}{6E_{xf}Il^3}[x(3l-2a)-al].$$

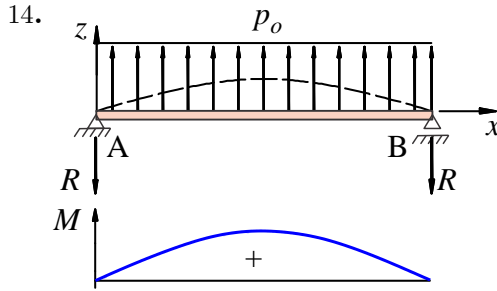


$$R_M = \frac{p_o l^2}{2} = -M_{\max}, \quad R = p_o l, \quad Q_{\max} = p_o l,$$

$$M(x) = -\frac{p_o(l-x)^2}{2}, \quad \psi(x) = \frac{p_o x}{2E_{xf}I} \left( \frac{x^2}{3} + lx - l^2 \right).$$

$$w_f(x) = \frac{p_o x^2}{24E_{xf}I} (6l^2 - x^2 - 4lx), \quad \frac{w_c(x)}{p_o} = \frac{x}{\alpha_c} \left( l - \frac{x}{2} \right),$$

$$w_{\max} = \frac{p_o l^4}{8E_{xf}I} + \frac{p_o l^2}{2\alpha_c}, \quad \theta_{\max} = \frac{p_o l^3}{6E_{xf}I}.$$



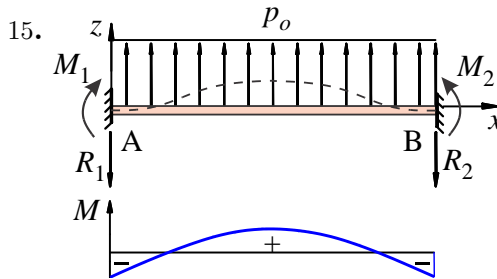
Ver solução na Seção 5.1.4.

$$R = Q_{\max} = \frac{p_o l}{2}, \quad M_{\max} = \frac{p_o l^2}{8},$$

$$M(x) = \frac{p_o x(l-x)}{2}, \quad \theta_A = \frac{p_o l^3}{24E_{xf}I} + \frac{p_o l}{2\alpha_c}.$$

$$w_f(x) = \frac{p_o x}{24E_{xf}I} (x^3 - 2lx^2 + l^3),$$

$$w_c(x) = \frac{p_o x(l-x)}{2\alpha_c}, \quad w_{\max} = \frac{5p_o l^4}{384E_{xf}I} + \frac{p_o l^2}{8\alpha_c}.$$



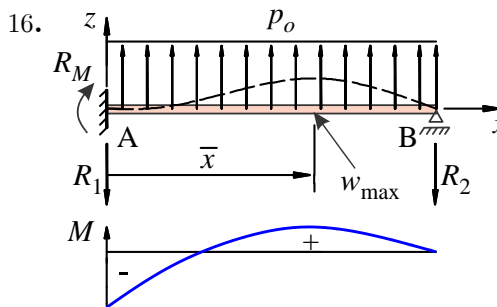
Ver solução na Seção 8.8.3.

$$R_1 = Q_{\max} = \frac{p_o l}{2}, \quad M_{\max} = -M_1 = -\frac{p_o l^2}{12},$$

$$M(x) = \frac{p_o}{12} (6lx - 6x^2 - l^2), \quad Q(x) = \frac{p_o(l-2x)}{2},$$

$$w_f(x) = \frac{p_o x^2}{24E_{xf}I} (l-x)^2, \quad w_c(x) = \frac{p_o x(l-x)}{2\alpha_c},$$

$$w_{\max} = \frac{p_o l^4}{384E_{xf}I} + \frac{p_o l^2}{8\alpha_c}.$$



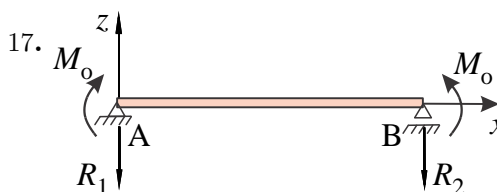
Solução de Bernoulli.

$$Q_{\max} = R_A = 5p_o l/8, \quad R_B = 3p_o l/8, \quad R_M = p_o l^2/8,$$

$$M = \frac{9p_o l^2}{8 \cdot 16} \text{ em } x = \frac{5l}{8}. \quad M(x) = \frac{p_o(5lx - 4x^2 - l^2)}{8},$$

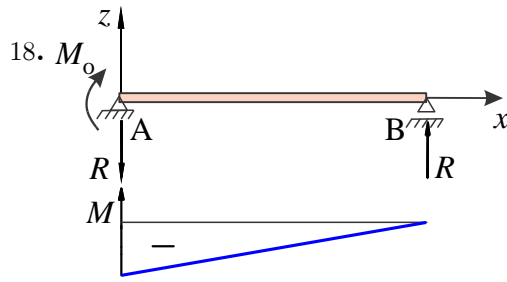
$$w_f(x) = \frac{p_o x^2}{48E_{xf}I} (x-l)(2x-3l). \quad \theta_{f \max} = \frac{-p_o l^3}{48E_{xf}I}.$$

$$w_{f \max} = \frac{p_o l^4}{185E_{xf}I} \text{ em } \bar{x} = \frac{1}{16} (15 - \sqrt{33}) l.$$



$$Q(x) = R_1 = R_2 = 0, \quad M(x) = -M_o, \quad w_c(x) = 0,$$

$$w_f(x) = \frac{M_o x}{2E_{xf}I} (x-l), \quad w_{\max} = -\frac{M_o l^2}{8E_{xf}I}. \quad \theta_{\max} = \frac{\pm M_o l}{2E_{xf}I}.$$



$$R = Q(x) = \frac{M_o}{l}, \quad M(x) = \frac{M_o(x-l)}{l}, \quad w_c(x) = 0,$$

$$w(x) = \frac{M_o x}{6E_{xf} I l} (3lx - x^2 - 2l^2), \quad \theta_{\max} = \theta(0) = \frac{-M_o l}{3E_{xf} I}.$$

$$\psi(x) = \frac{M_o}{6E_{xf} I l} (3x^2 - 6lx + 2l^2) + \frac{M_o}{\alpha_c l},$$

$$w_{\max} = \frac{-M_o l^2}{9\sqrt{3}E_{xf} I} \text{ em } \bar{x} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)l \cong 0,4226l.$$

### 5.2.1 Fatores de cisalhamento $k$ para vigas isotrópicas

Como será visto em detalhes na Seção 8.8, uma das formas de inclusão do efeito do cisalhamento transversal no cálculo da deflexão de vigas sob flexão se faz pela teoria de Timoshenko, através do uso do fator de cisalhamento. As equações de deflexão já apresentadas são decompostas na forma  $w = w_f + w_c$ , onde  $w_f$  é a parcela da teoria de Bernoulli, e  $w_c$  a parcela do cisalhamento transversal. Esta última é dependente do fator  $k$ , que, para vigas de material homogêneo-isotrópico, tem sido estimado por diversos métodos. Mindlin [137] obteve  $k = \pi^2/12 = 0,82247$  para a seção retangular e  $k = 0,847$  para a seção circular, enquanto Timoshenko [192] obteve  $k = 2/3 = 0,6667$  para retângulo e  $k = 3/4 = 0,750$  para o círculo. (Algumas dessas soluções são apresentadas na Seção 13.4.) Cowper [63], [70] apresenta um modelo que permite a estimativa de  $k$  para diversas outras formas de seção transversal. Algumas das soluções são sumarizadas a seguir. A flexão é tal que a linha neutra é horizontal em relação às figuras mostradas.

1. Retângulo sólido:

$$k = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}, \quad \text{para } \nu = 0,3 \text{ e } k = 0,8497.$$

2. Círculo sólido:

$$k = \frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu}, \quad \text{para } \nu = 0,3 \text{ e } k = 0,8864.$$

3. Seção caixão retangular de paredes finas:

$$k = \frac{10(1 + \nu)(1 + 3p)^2}{c_1 + \nu c_2 + 10n^2 c_3}, \quad \text{onde } n = \frac{b}{H}, p = \frac{nt}{h},$$

$$c_1 = 12 + 72p + 150p^2 + 90p^3, \quad c_3 = (3 + \nu)p + 3p^2,$$

$$c_2 = 12 + 66p + 135p^2 + 90p^3.$$

Caso de tubo quadrado de espessura uniforme ( $H = b$ ,  $t = h$ ),

$$k = \frac{20(1 + \nu)}{48 + 39\nu}, \quad \text{para } \nu = 0,3 \text{ e } k = 0,4355.$$

4. Tubo circular de parede espessa:

$$k = \frac{6(1 + \nu)(1 + p^2)^2}{(7 + 6\nu)(1 + p^2)^2 + (20 + 12\nu)p^2}, \quad \text{onde } p = \frac{d}{D}.$$

$$\text{Para parede fina, } k = \frac{2(1 + \nu)}{4 + 3\nu}, \quad \text{onde } \nu = 0,3 \text{ e } k = 0,5306.$$

