

## Capítulo 18

# Elementos finitos em dinâmica

A quase totalidade dos sistemas físicos na engenharia podem ser considerados apenas de forma aproximativa como sendo de um grau de liberdade como descrito nas seções acima, composto um bloco rígido de massa  $m$  (sem rigidez ou dissipação), ligado a uma base por uma mola (sem massa ou amortecimento) e um amortecedor (sem massa ou rigidez). Estamos interessados principalmente em determinar o comportamento dinâmico dos **sistemas contínuos**, isto é, corpos e estruturas sólidas, tridimensionais, com sua forma própria, sua massa e sua capacidade de amortecimento interno. Entretanto, o modelo discreto de um grau de liberdade visto no Capítulo 17 é útil, tanto pelo entendimento físico que proporcionam, quanto pelo fato de sua formulação ser usada como parte de vários métodos de análise de corpos tridimensionais, como será visto no presente capítulo.

Considere o corpo com forma arbitrária ilustrado na Figura 18.1a submetido a um conjunto de forças variáveis ao longo do tempo. Caso sua forma, apoios e carregamento sejam simples, regulares, é possível uma análise analítica que resulta na solução exata de sua resposta. Alguns problemas em que o corpo tenha forma de barra, vigas, placas circulares ou retangulares, dependendo do carregamento, podem ser tratadas desta forma. Uma série de livros clássicos tratam destas soluções, como por exemplo Langhaar [64], Meirovitch [68], Clough [22] dentre outros. Frequentemente porém, os componentes e sistemas usados em engenharia mecânica são de formato e carregamento complexos e não podem ser tratados por fórmulas analíticas. Da mesma forma que em problemas estáticos, a maneira padrão de se tratar destes problemas consiste em abrir mão do desejo de obter uma solução exata e buscar uma solução aproximada do problema.

Para tratar do **problema contínuo** como o do corpo tridimensional da Figura 18.1a, num primeiro momento pode-se considerar um modelo discretizado como aquele ilustrado na Figura 18.1b, onde o corpo é simulado por uma coleção de massas discretas unidas entre si por molas e amortecedores, fazendo uma hipótese temporária bastante forte de que tenham uma disposição em série. A forma de realizar este processo de discretização de forma consistente não é óbvia, e existem diversos métodos de fazê-lo, dentre os quais o próprio método que estamos tratando, o de elementos finitos. No momento consideramos que, de alguma forma, esta discretização já tenha sido realizada e temos disponível um modelo como o da Figura 18.1b, com  $N$  massas discretas. Cada uma dessas massas pode ser considerada um corpo rígido, de forma que podemos aplicar a ela a *Segunda Lei de Newton*. A Figura 18.1c representa um diagrama de corpo livre de uma massa arbitrária  $m_i$ . Sobre ela atuam uma força externa  $F_i(t)$  e as forças internas devidas aos deslocamentos relativos às outras massas. Estas forças internas são as **forças elásticas**  $f_e$ , relacionadas à rigidez das molas  $k_i$  e  $k_{i+1}$ , e as **forças de amortecimento**  $f_a$  relacionadas às constante  $C_i$  e  $C_{i+1}$  dos amortecedores. Pela segunda lei de Newton, a resultante de todas estas forças deve ser igual à **força de inércia**  $m_i\ddot{x}_i$ . Então a **equação do movimento** para uma massa  $m_i$  interna qualquer é a seguinte:

$$F_i + C_{i+1}(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) + k_{i+1}(u_{i+1} - u_i) - C_i(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) - k_i(u_i - u_{i-1}) = m_i\ddot{u}_i, \quad (18.1)$$

onde os deslocamentos, velocidades e acelerações são função do tempo. Podemos rearranjar os termos colocando a parte conhecida, a força externa  $F_i(t)$ , do lado direito:

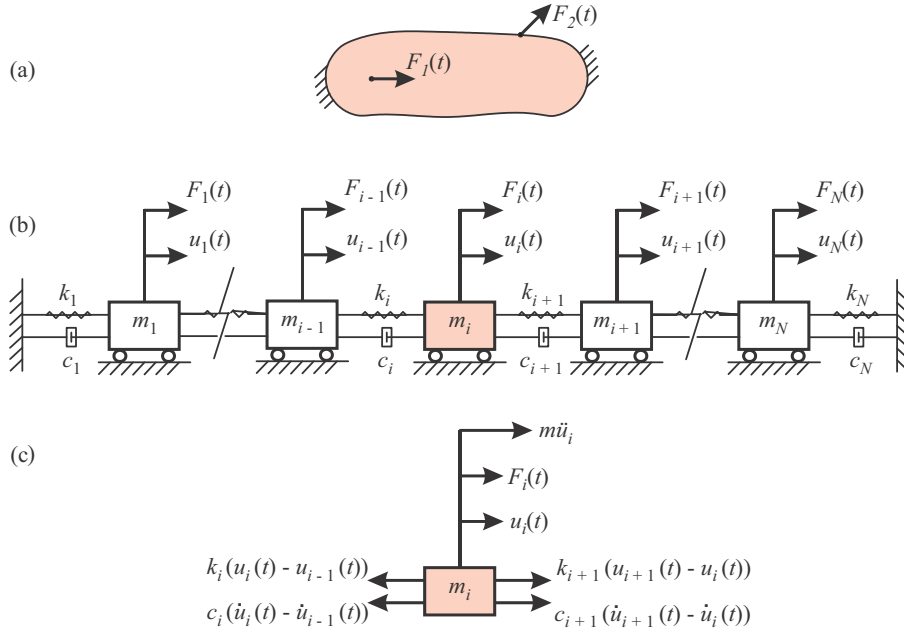


Figura 18.1: a) Corpo sólido tri-dimensional arbitrário; b) modelo discretizado; c) diagrama de corpo livre da massa  $m_i$ .

$$\underbrace{m_i \ddot{u}_i}_{\text{inércia}} - \underbrace{C_{i+1} \dot{u}_{i+1} + (C_i + C_{i+1}) \dot{u}_i - C_i \dot{u}_{i-1}}_{\text{amortecimento}} - \underbrace{k_{i+1} u_{i+1} + (k_i + k_{i+1}) u_i - k_i u_{i-1}}_{\text{deformação}} = F_i(t). \quad (18.2)$$

Podemos expandir estas equações incluindo as massas vinculadas aos apoios e coloca-las numa forma matricial para o conjunto de massas:

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & m_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & m_N & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (C_1 + C_2) & -C_2 & & & \\ -C_2 & (C_2 + C_3) & -C_3 & & \\ & -C_3 & (C_3 + C_4) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & & & \\ -K_2 & (K_2 + K_3) & -K_3 & & \\ & -K_3 & (K_3 + K_4) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ \vdots \\ F_N(t) \end{Bmatrix}. \quad (18.3)$$

Este sistema pode então ser escrito de forma compacta como

$$\boxed{\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)} \quad (18.4)$$

que é o conjunto de **equação do movimento** do sistema discreto da Figura 18.1b. São equações diferenciais ordinárias, com coeficientes constantes. É um sistema discreto no espaço e contínuo no tempo. As matrizes são as chamadas **matriz massa** ou **de inércia**  $\mathbf{M}$ , matriz de **amortecimento**  $\mathbf{C}$  e a matriz de **rigidez**  $\mathbf{K}$ , todas reais e simétricas. Embora neste exemplo  $\mathbf{M}$  seja diagonal, de forma geral isto não é assim.

Nas próximas seções trataremos dos métodos para a determinação da solução do problema

semidiscreto (18.4). Antes disso daremos uma amostra do processo geral de como aquelas matrizes são determinadas para um corpo sólido, isto é, um sistema contínuo, pelo método de elementos finitos.

Basicamente o processo de determinação por elementos finitos da equação matricial de movimento num caso dinâmico é o mesmo procedimento usado nos capítulos anteriores na determinação da equação matricial de equilíbrio. Em ambos os casos usaremos o Princípio dos Trabalhos Virtuais, onde no caso dinâmico fazemos uma alteração em seu enunciado pelo uso do **Princípio de D'Alembert**, descrito a seguir. Um outro procedimento a ser apresentado, além do PTV, é a obtenção das equações de matriciais de movimento pelo uso das **equações de movimento de Lagrange**. Estas equações são uma forma derivada do mesmo PTV aplicado à dinâmica, porém apresentam uma versatilidade muito grande em várias classes de problemas não lineares.

## 18.1 Princípio de D'Alembert

Julgando-se apenas pelo seu enunciado, este princípio é de uma simplicidade enorme. Sua utilidade é também enorme na engenharia. Considere a **equação do movimento** de uma partícula de massa  $m$ , dada pela segunda lei de Newton:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + m\mathbf{b} = m\mathbf{a}, \quad (18.5)$$

isto é, a resultante de todas as  $n$  forças externas aplicadas,  $F_i$ , e da força do corpo  $m\mathbf{b}$ , deve ser igual à força da inércia, dada pela massa vezes a aceleração  $\mathbf{a}$  desenvolvida pela massa. Aqui,  $\mathbf{b}$  é uma força de corpo por unidade de massa. Quando as forças são tais que a aceleração é nula, as forças estão em equilíbrio e esta equação é chamada equação de equilíbrio. Obviamente, o tratamento de problemas de equilíbrio é mais simples que o de problemas dinâmicos. D'Alembert, de certa forma, realizou uma operação bastante simples. Ele transferiu a força de inércia do lado direito de (18.5) para o lado esquerdo obtendo

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + m(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}. \quad (18.6)$$

Agora a forma da equação é exatamente a mesma de uma equação de equilíbrio estático e, dentro de certos limites, parte do que foi desenvolvido para os problemas estáticos pode ser adaptado aos problemas dinâmicos. O Princípio de D'Alembert então afirma que as forças de inércia podem ser incorporadas às forças de corpo e o problema pode ser tratado como uma equação estática.<sup>1</sup>

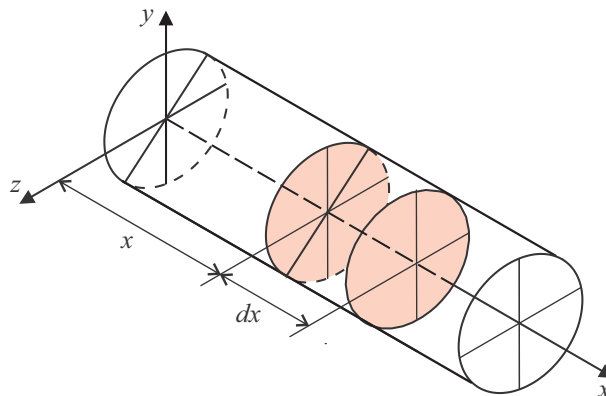


Figura 18.2: Elemento diferencial de volume de barra.

<sup>1</sup>Note que o problema é estático apenas de forma fictícia, uma vez que agora as forças de corpo incorporam a aceleração, que é desconhecida, diferentemente de  $\mathbf{b}$  que é *a-priori* conhecida.

onde  $x_1^e$  e  $x_2^e$  são as coordenadas globais dos nós 1 e 2 do elemento. A matriz de rigidez e o vetor força do elemento são os mesmos já integrados nas equações (5.7)-(5.8), de forma que agora tem-se o conjunto completo:

$$\mathbf{K}^e = \frac{AE}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^e = \frac{\rho AL_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^e = Af \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (18.22)$$

**Observe** que  $\rho AL_e$  é a massa total do elemento. Como no caso estático, estas são apenas as matrizes de um elemento, e devem ser **sobrepostas** nas matrizes globais para gerar as **equações semidiscretas de movimento** que representam o sistema sendo modelado:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (18.23)$$

**Observe** que este é um sistema de  $N$  equações diferenciais, ordinárias, de coeficientes constantes, em termos do tempo, não homogêneo ( $F(t) \neq 0$ ), com  $N$  funções incógnitas  $u_1(t), \dots, u_N(t)$ . Diferentemente do caso estático, esta não é uma equação algébrica, portanto não pode ser simplesmente resolvida por semi-inversão de matriz. É um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares e deve ser integrado para dar a resposta do sistema, após a aplicação das condições de contorno e condições iniciais.

### 18.3 Equações do movimento de Lagrange

As equações do movimento (18.23), que foram obtidas pelo PTV, podem ser também obtidas com o uso das equações de Lagrange. Considere que podemos expressar a **energia de deformação**  $U$  e a **energia cinética**  $T$  de um corpo elástico ou sistema, em termos de valores nodais de deslocamento  $u_i(t)$  e  $\dot{u}_i(t)$ , isto é, se temos as funções

$$\begin{aligned} U &= W(u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)), \\ T &= T(u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t), \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_N(t)). \end{aligned} \quad (18.24)$$

Partindo do princípio dos trabalhos virtuais, é possível deduzir as chamadas equações de Lagrange. Não apresentaremos aqui sua dedução, que pode ser achada em textos clássicos de dinâmica [64]. Estas equações são as equações do movimento do sistema, em termos dos valores nodais  $u_i(t)$  e  $\dot{u}_i(t)$ . Frequentemente é mais fácil obter as equações do movimento pelas equações de Lagrange que tentando aplicar diretamente a segunda lei de Newton. As **equações de Lagrange** são

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial W}{\partial u_i} = F_i \quad (18.25)$$

Para uma barra, por exemplo, a energia de deformação interna é dada por:

$$W = \frac{AE}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (18.26)$$

A **energia cinética** pode ser obtida da seguinte forma. Lembre que a energia cinética de uma massa pontual  $m$  é, por definição,  $E_c = mv^2/2$ . Agora considere o elemento diferencial de barra de comprimento  $dx$  das Figuras 18.2 e 18.3. Este elemento tem massa diferencial  $dm = \rho A dx$  e velocidade axial  $\dot{u}(x,t)$ . Logo sua energia cinética é  $\dot{u}(x,t)^2 dm/2$ , isto é,  $\rho A \dot{u}(x,t)^2 dx/2$ . A energia cinética da barra completa é então

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^L (\dot{u}(x,t))^2 dx. \quad (18.27)$$

Tendo  $W$  e  $T$ , cabe agora fazer a **discretização** de elementos finitos. Dividimos a barra em elementos, o que significa simplesmente particionar o intervalo de integração nas equações acima em uma soma de integrais realizadas em cada elemento. Em cada elemento interpolamos o deslocamento e velocidade usando (18.12). Então as energias em cada elemento se tornam:

$$W^e = \frac{AE}{2} \int_e (u_1(x, t)\psi_{1,x}^e + u_2(x, t)\psi_{2,x}^e)^2 dx, \quad T^e = \frac{\rho A}{2} \int_e (\dot{u}_1(x, t)\psi_{1,x}^e + \dot{u}_2(x, t)\psi_{2,x}^e)^2 dx. \quad (18.28)$$

Se usarmos as equações de interpolação da lineares (7.69) no elemento as energias acima ficam

$$W^e = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}^T \mathbf{K}^e \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad T^e = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix}^T \mathbf{M}^e \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix}. \quad (18.29)$$

Se compararmos estas expressões a (18.22) vemos que as energias acima são proporcionais à rigidez e massa do elemento, respectivamente. Definindo o vetor de deslocamentos nodais, do elemento como  $\mathbf{u}^e(t) = \{u_1(t); u_2(t)\}^T$ , a equação acima pode ser posta na forma

$$\boxed{W^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT}(t) \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e(t), \quad T^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^{eT}(t) \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{u}}^e(t)} \quad (18.30)$$

Essas são as expressões discretizadas para as energias interna e cinemática e podemos passar ao uso das equações de Lagrange. Para um dado elemento a equação de Lagrange em (18.25) reduz-se a duas equações, para  $i = 1$  e  $i = 2$ , correspondentes aos dois graus de liberdade do elemento. As equações ficam:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^e}{\partial \dot{u}_1} \right) + \frac{\partial W^e}{\partial u_1} = F_1^e, \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^e}{\partial \dot{u}_2} \right) + \frac{\partial W^e}{\partial u_2} = F_2^e. \quad (18.31)$$

Observe que cada uma das equações (18.30) é uma **forma quadrática**, que se expandem em

$$W^e \frac{1}{2} [K_{11}^e u_1^2 + K_{12}^e u_1 u_2 + K_{21}^e u_1 u_2 + K_{22}^e u_2^2], \\ T^e \frac{1}{2} [M_{11}^e \dot{u}_1^2 + M_{11}^e \dot{u}_1 \dot{u}_2 + M_{21}^e \dot{u}_1 \dot{u}_2 + M_{22}^e \dot{u}_2^2].$$

Fazendo as derivações indicadas em (18.31) e recolocando o resultado em forma matricial obtemos

$$\begin{bmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^e(t) \\ F_2^e(t) \end{Bmatrix}, \quad (18.32)$$

que é exatamente a equação do movimento (18.19) obtida anteriormente usando o PTV e o Princípio de D'Alembert.

### 18.3.1 Exemplo 18.1 - Matrizes para modelos de 2 e 3 elementos

Determine a equação do movimento discreta para uma barra de comprimento  $L$ , área de seção transversal  $A$ , densidade  $\rho$  e módulo de elasticidade  $E$ . Obtenha as matrizes para dois e três elementos finitos iguais.

*Solução:*

A Figura 18.4 ilustra os nós e graus de liberdade do modelo de três elementos. Para dois elementos a equação do movimento é obtida sobrepondo as matrizes em (18.22):

$$\frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \end{Bmatrix} + \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix},$$

e, mesma forma, para três elementos,

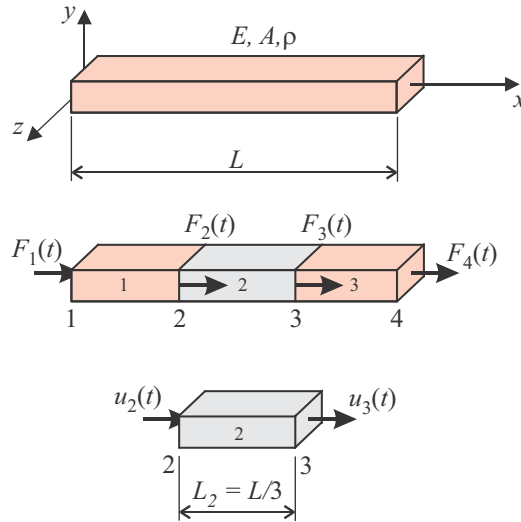


Figura 18.4: Modelo de barra com três elementos do Exemplo 2.

$$\frac{\rho AL}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{Bmatrix} + \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ F_4(t) \end{Bmatrix}. \quad (18.33)$$

## 18.4 Matriz massa em elementos sólidos elásticos

O procedimento detalhado na seção 18.2.1 para a determinação da matriz massa e das equações de movimento do modelo de barra, é estendido aqui para elementos sólidos. De fato, será visto que o procedimento é padrão para a matriz massa de quase todo tipo de elemento finito.

O **princípio dos trabalhos virtuais** (8.12), adaptada aos **materiais elástico lineares**, em problemas estáticos, tem sua expressão dada por (8.15): Determinar  $\mathbf{u} \in Kin$  tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} \, d\Omega = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in Var. \quad (18.34)$$

Aqui os tensores de segunda ordem como  $\boldsymbol{\varepsilon}$  já foram convertidos em vetores como em (8.104). Os conjuntos de funções cinematicamente admissíveis,  $Kin$  e  $Var$  são definidos em (8.2) e (8.3).

Aplica-se o **princípio de D'Alembert**, substituindo a forças de corpo  $\mathbf{b}$  por  $\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ , onde  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$  é a força de inércia por unidade de volume, associado a um elemento diferencial de massa  $dm = \rho dV$ . As aproximações do campo de deslocamentos e de deformações num elemento vem de (8.103) e (8.106). A mesma interpolação dos deslocamentos é usada para as acelerações e para os deslocamentos virtuais:

$$\begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cong \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{U}(t), \quad \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{U}}, \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cong \mathbf{N}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{U}}(t), \\ \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cong \mathbf{N}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{U}}(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}(t) \end{array} \quad (18.35)$$

$\mathbf{N} = \mathbf{N}(x, y, z)$  é a matriz de funções de forma,  $\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = \{\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}\}^t$  são as acelerações no ponto do corpo.  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}(t)$  e  $\ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{U}}(t)$  são o vetor de deslocamentos, de velocidades e de acelerações nodais do elemento. Diferentemente do caso estático, os deslocamentos nodais são dependentes do tempo.

A expressão do PTV com as forças de inércia fica

## 18.5 Matriz massa em elementos de viga

O procedimento detalhado na seção 18.4 para a determinação da matriz massa e das equações de movimento do elemento sólido é estendido aqui para elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli. De fato, é mostrado que o procedimento é padrão para a matriz massa de quase todo tipo de elemento finito.

O **princípio dos trabalhos virtuais** para flexão de vigas delgadas (modelo de Euler-Bernoulli), adaptado aos **materiais elástico-lineares**, em problemas estáticos, já incorporando as forças de aceleração através do Princípio de D'Alembert, tem sua expressão dada por:

Dado  $q(x)$ , determinar  $u(x) \in Kin$  que satisfaz a condição

$$\int_0^L EI \hat{v}'' v'' dx = \int_0^L \hat{v}(x) q(x, t) dx - \int_0^L \rho A \hat{v}(x) \ddot{v}(x, t) dx \quad \forall \hat{v}(x) \in Var. \quad (18.41)$$

onde  $q(x, t)$  é a carga distribuída transversal por unidade de comprimento,  $\rho$  é a densidade do material por unidade de volume,  $A$  é a área da seção transversal, que é considerada uniforme,  $v'' = d^2v/dx^2$ , e  $\ddot{v} = d^2v/dt^2$  é a aceleração transversal da seção. Os espaços de funções são:

$$\begin{aligned} Var &= \{ \hat{v}(x) : v, \hat{v}' \text{ contínuas; } \hat{v}(x) = 0 \text{ e } \hat{v}'(x) = 0 \} \text{ em } \forall x \in \Gamma_u, \\ Kin &= \{ v(x, t) : v, v' \text{ contínuas; } v(x, t) = \bar{v} \text{ e } v'(x, t) = \bar{\theta} \} \text{ em } \forall x \in \Gamma_u. \end{aligned} \quad (18.42)$$

$\Gamma_u$  é o conjunto de seções de contorno  $x$  em que existem deslocamentos e rotações prescritas.

Seguindo o procedimento de elementos finitos visto na seção 18.4, os campos de deslocamento, aceleração, de deformações e de deslocamentos virtuais  $\hat{v}$  num elemento são aproximados por funções de interpolação:

$$v(x, t) \cong \mathbf{N}\mathbf{U}, \quad \hat{v} \cong \mathbf{N}\hat{\mathbf{U}}, \quad \ddot{u} \cong \mathbf{N}\ddot{\mathbf{U}}, \quad \varepsilon(x, t) = \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \hat{\varepsilon}(x) = \mathbf{B}\hat{\mathbf{U}}. \quad (18.43)$$

$\mathbf{N} = \mathbf{N}(x)$  é a matriz de funções de forma e  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$  e  $\ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{U}}(t)$  são o vetor de deslocamentos e de acelerações nodais do elemento. As funções de aproximação elementares usadas para o modelo dinâmico são as mesmas da análise estática do modelo de Euler-Bernoulli, eq. (6.28), página 114. Então, as aproximações num elemento são representadas por:

$$\begin{aligned} v(x, t) = \mathbf{N}\mathbf{U}^e &\longrightarrow v(x, t) = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ \theta_1(t) \\ v_2(t) \\ \theta_2(t) \end{Bmatrix} \\ \ddot{v}(x, t) = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{U}}^e &\longrightarrow \ddot{v}(x, t) = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1(t) \\ \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{v}_2(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{Bmatrix} \\ \varepsilon(x, t) = \mathbf{B}\mathbf{U}^e &\longrightarrow \varepsilon(x, t) = \{ \phi_1'', \phi_2'', \phi_3'', \phi_4'' \} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ \theta_1(t) \\ v_2(t) \\ \theta_2(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18.44)$$

A expressão do PTV é aproximada por:

$\hat{u}_i = 0$ . Isso significa que, de fato, a linha  $i$  do sistema (18.49) é multiplicada por zero, como pode ser visto, por exemplo em (18.45) no caso do modelo de vigas, mas que, de fato, é uma característica do MEF em geral. Tal como no problema estático, essa linha poderia não ter sido sobreposta no sistema, ou pode ser sobreposta e, em seguida, na etapa de aplicação de condições de contorno, ser anulada.

Primeiramente considerar que, se  $u_i(t) = 0$  em todo  $t > 0$ , segue-se que  $\dot{u}_i(t) = \ddot{u}_i(t) = 0$ . Entendido esses aspectos, as etapas do procedimento de aplicação da condição  $u_i = 0$  para um grau de liberdade  $i$ , são as seguintes:

**Etapa 1** - Multiplicar a linha  $i$  de todas as matrizes ( $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{F}$ ) por zero, isto é, fazer  $K_{ij} = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, N$ . Isso satisfaz ao princípio dos trabalhos virtuais.

**Etapa 2** - Multiplicar a coluna  $i$  de todas as matrizes ( $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{F}$ ) por zero, isto é, fazer  $K_{ji} = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, N$ . Isso impõe as condições  $u_i = \dot{u}_i = \ddot{u}_i = 0$  em  $\forall t \geq 0$ .

**Etapa 3** - Fazer  $K_{ii} = 1$ ,  $C_{ii} = 0$  e  $M_{ii} = 10^c$ , onde  $c$  é um inteiro a ser arbitrado conforme o problema. Com isso, o sistema toma sua forma final

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \hat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{U}}(t) + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{U}(t) = \hat{\mathbf{F}}(t). \quad (18.51)$$

Em forma aberta, para  $i = 1$ , esse sistema pode ser ilustrado por

$$\begin{bmatrix} 10^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 0 & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (18.52)$$

Os valores 1 e  $10^c$  incluídos na rigidez e na massa são valores arbitrários, utilizados apenas para evitar que essas matrizes fiquem singulares. O importante é que o grau de liberdade  $i$  foi tornado desacoplado dos demais. Num processo de solução temporal, como nos métodos diretos (Capítulo 21), os resultados produzidos para esse grau de liberdade, em deslocamento, velocidade e aceleração, serão irrelevantes: após a computação eles devem ser corrigidos para  $u_i = \dot{u}_i = \ddot{u}_i = 0$  em  $\forall t \geq 0$ . Entretanto, para a solução do **problema de autovalor**, para vibrações livres (próximo capítulo e Capítulo 23), esses valores 1 e  $10^c$  geram algumas vantagens. Para isso observemos o sistema associado,  $[\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}]\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , agora com a condição de contorno imposta,  $[\hat{\mathbf{K}} - \lambda\hat{\mathbf{M}}]\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Para o exemplo das matrizes da eq. (18.52), tem-se

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 0 & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 10^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (18.53)$$

A solução desse sistema produzirá quatro autovalores  $\lambda$ , sendo que um deles terá valor  $\lambda = 10^{-c}$ . Então, se o valor escolhido para  $c$  for algo como  $c = -20$ , esse autovalor será  $\lambda = 10^{20}$  e será, provavelmente, o maior dos  $N$  autovalores do sistema. Como será visto, em problemas dinâmicos, os  $\lambda$ 's são as frequências naturais do sistema. Por diversos motivos, as frequências mais importantes para caracterizar o comportamento da estrutura são as menores. Assim, existem diversos métodos