

Capítulo 13

Transferência de calor pelo MEF

Nesse capítulo o método de elementos finitos é aplicado a problemas de transmissão de calor em regiões bi e tridimensionais, envolvendo condução e convecção em problemas estacionários. São deduzidas as expressões para a Lei de Fourier e a primeira lei da termodinâmica de forma a se obter a equação diferencial do problema com as devidas condições de contorno. Em seguida são apresentadas as formas integrais, através do uso do método dos resíduos ponderados. A discretização do problema é feita e as etapas do método de elementos finitos para problemas de transmissão de calor em corpos bidimensionais é vista em detalhes.

O problema de transferência de calor por condução, como será descrito a seguir, é definido por uma única equação diferencial, em termos de uma única função incógnita, o campo de temperatura no corpo. Uma vez que a geometria do corpo pode ser tomada como sendo unidimensional, bi- ou tridimensional, o problema é algo mais complexo que os casos de tração em barras ou flexão de vigas. Ao mesmo tempo, é bastante mais simples que o de elasticidade, por envolver uma única incógnita, a temperatura no ponto, em vez de duas ou três (os deslocamentos u , v e w) como ocorre em elasticidade. Assim, a aplicação do MEF a problemas de transferência de calor é frequentemente usada como uma introdução à compreensão de detalhes do método, de forma a melhor preparar o estudante às situações que envolvem mais incógnitas, como problemas de placas, cascas e de elasticidade. Como consequência, o material é apresentado aqui pressupondo que este seja o primeiro contato do leitor com o MEF em situações bidimensionais. O leitor que já tiver passado pelo Capítulo 8, verá aqui uma certa repetição de conteúdo, mostrado de forma diferente, o que o ajudará a compreender o método de forma mais abrangente. De forma reversa, esse capítulo pode ser usado como uma primeira leitura para gerar uma visão geral do MEF, sem a prévia leitura dos capítulos de vigas e de elasticidade. Nesse caso o leitor terá uma visão resumida porém panorâmica dos diversos aspectos do método.

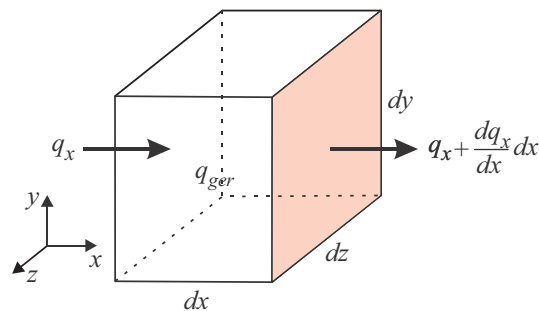


Figura 13.1: Balanço de fluxo de calor unidimensional num elemento diferencial de volume.

13.1 Definição do problema

Num problema uniaxial, a **primeira lei da termodinâmica** pode ser deduzida segundo um procedimento ilustrativo como segue, para a conservação de energia num elemento diferencial de material como aquela ilustrado na Figura 13.1. Considera-se um elemento diferencial de volume, de dimensões $dx dy dz$. Para simplificar a apresentação, inicialmente considera-se apenas o balanço de energia numa direção, x , numa situação em que não há aplicação de trabalho de forças externas:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Calor introduzido} \\ \text{através da face} \\ \text{esquerda} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{Calor gerado} \\ \text{internamente} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{Variação da} \\ \text{energia interna} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{Calor conduzido} \\ \text{para fora pela} \\ \text{face direita.} \end{array}}$$

Em termos simbólicos tem-se:

$$q_x dy dz + q_{\text{ger}} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy dz. \quad (13.1)$$

onde q_x é o **fluxo de calor por unidade de área**, (Watts/m²) na direção x , U é a energia interna contida no material e $dy dz$ é a área diferencial normal ao fluxo. A variação da energia interna U é proporcional à taxa de variação de temperatura segundo a lei:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \rho c \frac{dT}{dt} dx dy dz, \quad (13.2)$$

onde $T(x)$ é o campo de temperatura, ρ é a **densidade** do material, em kg/m³, e c é o **calor específico** do material, em Joules/kg °C. O calor gerado internamente, q_{ger} , geralmente é calculado como

$$q_{\text{ger}} = b(x) dx dy dz.$$

A função $b(x)$ é a **taxa de calor gerado por unidade de volume** de material, em W/m³ e, em situações simples, é considerada como dado no problema. Então, de (13.1)-(13.2), a primeira lei da termodinâmica, num problema uniaxial fica:

$$\boxed{\rho c \frac{dT}{dt} + \frac{\partial q_x}{\partial x} = b} \quad (13.3)$$

Para uma situação **triaxial** de transferência de calor, sem aplicação de trabalho, [67], a mesma dedução pode ser feita incluindo os fluxos nas direções y e z , de forma que a primeira lei toma a forma:

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = b} \quad \text{ou} \quad \boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = b} \quad (13.4)$$

onde \mathbf{q} é o vetor fluxo de calor por unidade de área, sendo T , \mathbf{q} e b , e possivelmente as propriedades ρ e c , dependem de (x, y, z, t) .

13.1.1 Relação constitutiva - Lei de Fourier

Observações experimentais mostram que o calor se transfere naturalmente no interior de um corpo de uma região de mais alta temperatura para uma região de mais baixa temperatura, i. e., se um gradiente de temperatura existe, a condução ocorre. Em **processos lineares** de condução, o fenômeno é quantificado pela chamada **lei de Fourier**, que tem o seguinte enunciado numa situação uniaxial:

$$q_x(x) = -k(x) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (13.5)$$

vários outros fenômenos nas ciências físicas. Em grande parte do desenvolvimento que se segue, consideramos apenas o caso particular de transmissão de calor descrito pela eq.(13.18), e ignoraremos a parcela de convecção no contorno. Estas restrições visam à conseguir uma simplicidade de exposição e a maior facilidade de compreensão da aplicação do método de elementos finitos.

13.2 Formas forte e fraca do problema de Poisson

A **Forma Forte** de um problema de valor no contorno é o conjunto formado por uma equação ou sistema de equações diferenciais aplicadas sobre cada ponto do domínio, e um conjunto de condições de contorno. Considera-se um problema definido em um corpo que ocupa uma região Ω no espaço euclidiano R , R^2 ou R^3 , delimitado pelo contorno Γ . A **forma forte do problema estacionário de condução de calor** é o seguinte enunciado:

$$\begin{array}{ll} \text{Dados:} & b : \Omega \rightarrow R, \\ & g : \Gamma_u \rightarrow R, \\ & h : \Gamma_q \rightarrow R, \\ & h_c : \Gamma_c \rightarrow R, \\ \text{Encontrar } \mathcal{T} & : \bar{\Omega} \rightarrow R \quad \text{tal que} \\ & k\nabla^2\mathcal{T}(\mathbf{x}) = -b(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{array} \quad (13.19)$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathcal{T}}, \quad (13.20)$$

$$-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q, \text{ com } \mathbf{q} = -k\nabla\mathcal{T}, \quad (13.21)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h_c(\mathbf{x})(\mathcal{T} - \mathcal{T}_{\infty}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c. \quad (13.22)$$

Isto pode ser lido da seguinte forma. Dadas as funções b , g e h , definidas no domínio Ω e no contorno Γ , deseja-se encontrar a função \mathcal{T} (a solução do problema, que é a temperatura em cada ponto do corpo), tal que esta função \mathcal{T} satisfaça a equação diferencial do problema, no caso $k\nabla^2\mathcal{T}(\mathbf{x}) = -b(\mathbf{x})$, em todos os pontos do domínio, e que também satisfaça às condições em cada ponto do contorno do corpo. As funções g e h são a temperatura e o fluxo de calor fornecido na superfície do corpo, respectivamente sendo o fluxo normal ao contorno. g e h devem ser conhecidas para permitir a solução do problema. $\Gamma_{\mathcal{T}}$ e Γ_q são as partes do contorno onde a temperatura e o fluxo de calor normal ao contorno são conhecidos, respectivamente. Γ_c é a região do contorno onde ocorre **convecção** com o meio circundante ao corpo. $h_c(\mathbf{x})$ é o **coeficiente de película** do fluido próximo à superfície do corpo. $(\mathcal{T} - \mathcal{T}_{\infty})$ é a diferença entre a temperatura na superfície do corpo e a temperatura do fluido localizado a uma distância suficientemente grande da superfície do corpo. Nota-se que na parte Γ_c do contorno não se conhece, **a-priori**, nem a temperatura nem o fluxo de calor.

Para que se possa resolver o problema, deve-se conhecer alguma informação em cada ponto do contorno, seja temperatura ou fluxo, isto é, $\Gamma_{\mathcal{T}} \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c = \Gamma$. Além disso, $\Gamma_{\mathcal{T}} \cap \Gamma_q \cap \Gamma_c = \emptyset$.¹

A forma forte mostrada acima é uma expressão em forma diferencial. Em oposição a isto existe a chamada **forma fraca**, também chamada **forma variacional** do problema, que é uma expressão integral que será mostrada a seguir para o problema de Poisson. Antes de se chegar à forma fraca é necessário definir dois tipos de funções e alguns tipos de **conjuntos de funções** que tem as características de **espaços vetoriais de funções**.

O **primeiro conjunto de funções** é composto por funções candidatas à solução, chamadas **funções teste**. As funções deste conjunto possuem algumas características que permitem mostrar

¹Na literatura, a condição de contorno do tipo (13.20) é conhecida como **condição de contorno de Dirichlet**, enquanto que quando certas derivadas são incluídas, como em (13.21), tem-se uma **condição de contorno de Neumann**.

A condição de contorno do tipo envolvendo **convecção**, como em (13.21), é uma **condição de contorno mista**, por apresentarem tanto temperatura como fluxo desconhecidos no contorno.

que a função solução do problema pertence a este conjunto. Uma dada função é função teste se satisfaz as seguintes condições:

- A função teste satisfaz as condições de contorno de Dirichlet do problema, i. e., no problema potencial, as condições (13.20), de temperatura prescrita.
- Para que certas expressões obtidas a seguir durante a dedução tenham significado, é requerido que as primeiras derivadas da função teste sejam integráveis ao quadrado, isto é:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 d\Omega < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 d\Omega < \infty, \text{ etc.} \quad (13.23)$$

De forma compacta, somando os termos, estas expressões podem ser postas na forma:

$$\int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla T d\Omega < \infty. \quad (13.24)$$

Funções que satisfazem (13.24) são chamadas **funções** H_{Ω}^1 , e o conjunto de todas as funções que satisfazem (13.24) é uma base para o **espaço linear de funções de Hilbert**, denotado por H_{Ω}^1 .

O **conjunto de funções teste**, denotado por Kin , consiste de todas as funções cujas primeiras derivadas são integráveis ao quadrado em Ω e satisfazem a condição de contorno de Dirichlet (13.20). De forma simbólica isto é escrito como:

$$Kin = \{ T \mid T \in H_{\Omega}^1, T(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathcal{T}} \}. \quad (13.25)$$

O **segundo conjunto de funções** é composto por funções chamadas **funções peso** ou **variações**. Este conjunto é base para um espaço linear chamado **espaço das funções peso**, denotado por:

$$Var = \{ \hat{u} \mid \hat{u} \in H_{\Omega}^1, \hat{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathcal{T}} \}. \quad (13.26)$$

13.2.1 Forma integral - Método de resíduos ponderados

O objetivo nesse ponto consiste em obter uma expressão integral que seja equivalente à forma forte do problema. Nessa seção o problema de Poisson é utilizado como ilustração, mas o mecanismo mostrado pode ser usado para obter a forma fraca para uma grande variedade de problemas a partir das suas equações diferenciais.

Tomemos primeiramente a equação diferencial do problema de transferência de calor, neste caso a eq.(13.19). Para facilitar a exposição, usaremos momentaneamente um **problema bidimensional** com k **constante para um material isotrópico**. A igualdade não é alterada se multiplicarmos ambos os lados por uma função peso arbitrária $\hat{u} \in Var$. Também pode-se integrar ambos os lados em todo o corpo, obtendo:

$$\int_{\Omega} k\hat{u} \nabla^2 T d\Omega = - \int_{\Omega} \hat{u} b d\Omega. \quad (13.27)$$

A seguir realizam-se integrações por partes de forma a “transferir” algumas ordens de diferenciação de T para \hat{u} . Como ∇^2 é de segunda ordem, isto é, tem segundas derivadas em x e y , “transfere-se” apenas uma ordem, realizando apenas uma integração. Cada uma das parcela do termo à esquerda de (13.27) é integrado por partes usando (1.65):

Dados: $b : \Omega \rightarrow R$, $g : \Gamma_{\mathcal{T}} \rightarrow R$, $h : \Gamma_q \rightarrow R$,

obter $\mathcal{T} \in Kin$ tal que:

$$\int_{\Omega} k \nabla \hat{u} \cdot \nabla \mathcal{T} \, d\Omega \int_{\Gamma_c} \hat{u} h_c(\mathbf{x}) \mathcal{T} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_q} \hat{u} h \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \hat{u} h_c(\mathbf{x}) \mathcal{T}_{\infty} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{u} b \, d\Omega \quad \forall \hat{u} \in Var. \quad (13.33)$$

Como visto, a solução do problema diferencial, a formulação forte, pode ser obtida, dentro de certas restrições, resolvendo o problema integral, a formulação fraca. De forma geral não é possível ou econômico obter soluções exatas de nenhuma das duas formas. Em vez disso, buscam-se na engenharia soluções aproximadas. Enquanto a forma forte é bastante adequada a métodos como o método de diferenças finitas, a forma fraca é a base para o método de elementos finitos, como será visto na próxima seção.

Nota-se na integral à esquerda da igualdade em (13.33), uma simetria entre as derivadas da função peso \hat{u} e da temperatura que não aparecia na expressão integral original, eq.(13.27). Essa simetria foi resultante do processo de integração por partes feita nas eqs.(13.28), e é diretamente responsável pela simetria da matriz de rigidez de elementos finitos que será obtido no processo de discretização de (13.32) na próxima seção. De fato, um dos principais motivos da realização da integração por partes é exatamente conseguir essa simetria. Do contrário, a forma (13.27) poderia ser utilizada, gerando um método distinto do MEF.

13.3 Solução aproximada via formulação de Galerkin

Considere-se que a função temperatura $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ possa ser decomposta da seguinte forma:

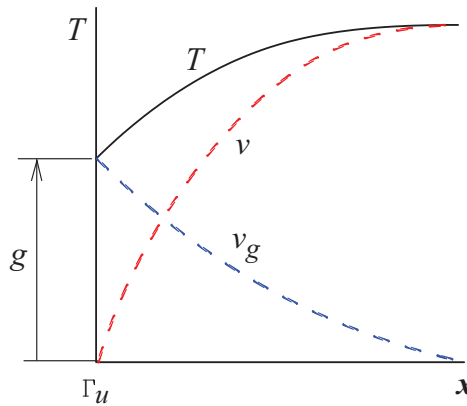


Figura 13.2: Visualização da decomposição da função da temperatura no domínio em região próxima ao contorno de Dirichlet.

$$\underbrace{\mathcal{T}(\mathbf{x})}_{\in Kin} = \underbrace{v(\mathbf{x})}_{\in Var} + \underbrace{v_g(\mathbf{x})}_{\in Kin}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (13.34)$$

em que a função $v(\mathbf{x})$ que seja nula em $\Gamma_{\mathcal{T}}$, isto é, $v(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathcal{T}}$, e uma função $v_g(\mathbf{x})$ que satisfaz à condição no contorno $v_g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathcal{T}}$. Isso significa que \mathcal{T} e $v_g \in Kin$ e $v \in Var$. Essa decomposição é ilustrada na Figura 13.2 numa região próxima ao contorno de Dirichlet. A decomposição acima é arbitrária, pois v_g pode ser arbitrado. Isso ocorre porque seus valores no contorno, g , são pré-definidos porém seus valores internos ao domínio podem ser arbitrários. Então pode-se considerar $v_g(\mathbf{x})$ como uma função conhecida, a ser escolhida entre uma infinidade de funções que valem g em $\Gamma_{\mathcal{T}}$. Desta forma, a função incógnita do problema agora é apenas $v(\mathbf{x})$, que satisfaz $v = 0$ na parte $\Gamma_{\mathcal{T}}$ do contorno. Pode-se reescrever a forma fraca (13.33) substituindo (13.34) e separando no lado esquerdo os termos que contém a função incógnita v :

qualquer. Na Figura 13.3b esta dimensão é 3, enquanto que o espaço Euclidiano é de dimensão 1, a dimensão do domínio. Cada segmento de curva é um polinômio de grau 1, como poderia ser de outro grau, ou mesmo não ser um polinômio, mas uma função trigonométrica ou de outro tipo.

Aproximações

Feitas estas definições passaremos ao procedimento de definir uma aproximação para a formulação fraca, eq.(13.35). Essa equação é exata, entretanto buscamos obter uma representação aproximada dela através do uso de funções de dimensão finita em vez de infinitas. Isto significa buscar soluções dentro de espaços de dimensão finitas, denotados por $Kin^h(\Omega_h)$ e $Var^h(\Omega_h)$, que aproximarão os espaços $Kin(\Omega)$ e $Var(\Omega)$. Uma vez que, em geral, a solução exata é uma função de dimensão infinita, e buscamos entre as funções de dimensão finita a que fornece o menor erro, o método fornecerá apenas aproximações da solução exata. Também, em geral, não se usa o domínio real Ω , que pode ser demasiado intrincado, mas é usada uma aproximação Ω_h dele, de mais simples representação. Essa aproximação do domínio é ilustrada na Figura 13.4, em que na figura (b) se tem uma representação do domínio através de regiões, elementos quadrilaterais, de lados retos. Então, regiões curvas do contorno original não podem ser descritas exatamente. (Claramente, mudando o tipo de representação, é possível descrever sem erro qualquer tipo de contorno.) Para simplificar a notação, frequentemente usaremos no resto do texto simplesmente Ω para o domínio discretizado em lugar de Ω^h .

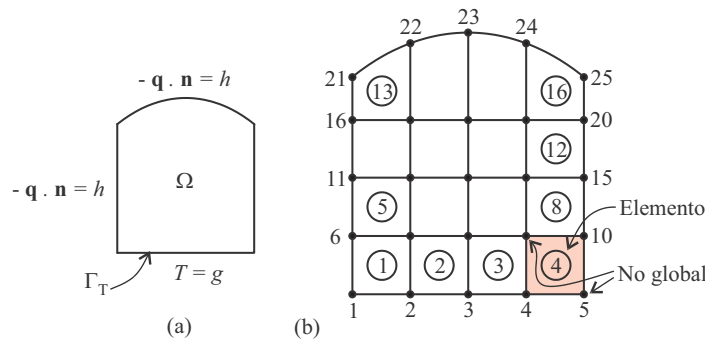


Figura 13.4: Domínios físico Ω e aproximado Ω^h .

Para cada função na forma fraca (13.35) considera-se uma aproximação de dimensão finita correspondente. Desta forma obtém-se a **formulação de Galerkin** para o problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } b, g \text{ e } h \text{ como em (13.24),} \\ \text{Obter: } \mathcal{T}^h = v^h + v_g^h \in Kin^h, \text{ com } v^h \in Var^h, \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega^h} k \nabla \hat{u}^h \cdot \nabla v^h d\Omega^h = \int_{\Gamma_q^h} \hat{u}^h h d\Gamma^h - \int_{\Gamma_c^h} \hat{u}^h h_c (v^h - T_\infty) d\Gamma^h + \int_{\Omega^h} \hat{u}^h b d\Omega^h \\ \qquad \qquad \qquad - \int_{\Omega^h} k \nabla \hat{u}^h \cdot \nabla v_g^h d\Omega^h \quad \forall \hat{u}^h \in Var^h. \end{array} \right. \quad (13.36)$$

A maneira mais conveniente de especificar estas funções é pela discretização do domínio em regiões, denominadas **elementos finitos**, representadas por Ω^e , onde “e” é o número do elemento, sendo $e = 1, 2, \dots, N_{el}$. Por exemplo, um domínio bidimensional pode ser discretizado em elementos triangulares ou quadrangulares, como na Figura 13.4. Ali se tem $N_{el} = 16$ elementos quadrangulares de lados retos, cada um definidos por quatro nós. Estão indicados também os **nós globais** com sua numeração própria. Definem-se os seguintes conjuntos de nós:

1. O conjunto dos números globais dos nós: $\boldsymbol{\eta} = \{1, 2, \dots, N_{nos}\}$, onde N_{nos} é o número total de nós do modelo. No exemplo da figura, $N_{nos} = 25$. Associado a cada nó, existe apenas

6. O conjunto de funções base pode ter uma propriedade de formar o que se denomina uma **Partição da Unidade**. Um conjunto de funções forma uma Partição da Unidade num certo domínio, se satisfaz a uma série de propriedades, sendo que a principal delas é que, em qualquer ponto do domínio, a soma dos valores de todas as funções é igual à unidade, isto é,

$$\sum_{no=1}^{N_{nos}} \varphi_{no}(x, y) = 1 \quad (13.40)$$

Caso a função seja linear em cada elemento, ela é chamada **função tenda**, ou **função linear por partes**, (*piecewise continuous*) e pode ser visualizada na Figura 13.5 nos casos unidimensional e bidimensional. São também definidas em domínios tridimensionais, porém, obviamente, sua representação gráfica é impossível. Figura 13.5a representa a função $\varphi_3(\mathbf{x})$, isto é, a função de interpolação associada ao nó 3. Claramente, ela vale 1 no nó 3 e zero nos demais nós. Entre os nós 2 e 4, ela tem variação **linear por partes**, isto é, é linear entre os nós 2 e 3, e entre os nós 3 e 4. A Figura 13.5b mostra a função de interpolação linear num domínio bidimensional, associada ao nó 13. Novamente, ela vale 1 no nó 13 e zero nos demais nós.

Observação - Note-se que, embora a ilustração nesse ponto do texto tenha sido com funções lineares definidas em elementos de 4 nós, o método de elementos finitos usa, mais frequentemente, funções quadráticas definidas em elementos quadrangulares de 8 ou 9 nós, triangulares de 3 e 6 nós, e funções lineares e quadráticas em elementos tridimensionais de tipos hexaédricos e tetraédricos adequados, além de funções de graus mais elevados.

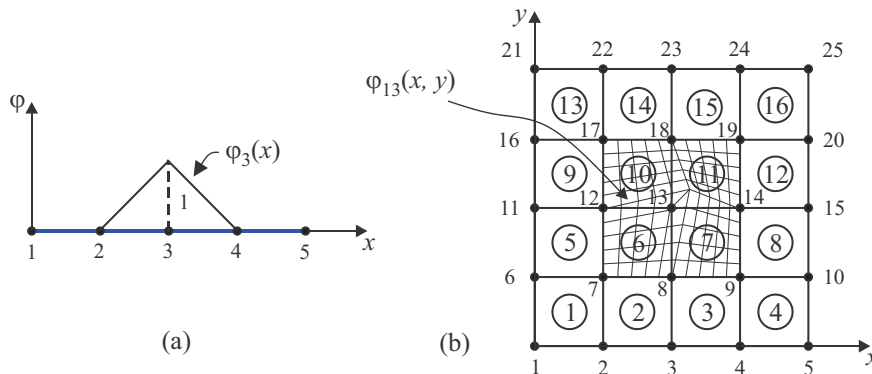


Figura 13.5: Ilustração de funções globais tipo tenda em domínios uni- e bidimensionais.

Observe que existe uma função associada a cada nó. Por exemplo, a Figura 13.6 mostra como uma função global arbitrária pode ser “montada” como uma combinação de funções de interpolação. Na Figura 13.6b uma função unidimensional $f(x)$ foi obtida combinando as funções de interpolação φ_i , fazendo: $f(x) = 0\varphi_1 + 1,5\varphi_2 + 2,0\varphi_3 + 0\varphi_4$. A situação bidimensional é análoga, usando-se as funções esboçadas na figura 13.5b.

Além das equações (13.37) e (13.38), define-se a aproximação para a função da condição de temperatura prescrita no contorno, $v_g^h(x, y)$, definida em (13.34), também usando as mesmas funções de aproximação:

$$v_g^h(x, y) = \sum_{no \in \eta_T} \varphi_{no}(x, y) g_{no} \quad (13.41)$$

Isto significa que $v_g^h(x, y)$ foi escolhida de forma que ele é não nula somente nos elementos em contato com a parte Γ_T do contorno, aquela onde a temperatura T é conhecida. g_{no} são os valores de temperatura conhecidas nos nós do contorno, isto é, $g_{no} = g(x_{no}, y_{no})$ para o nó no .

Tem-se agora todas as funções da forma fraca discreta, eq.(13.36), expandidas em termo das funções de interpolação escolhidas. Mas observemos a expressão da forma de Galerkin (13.36). Ela

é válida para qualquer função peso \hat{u}^h , desde que ela pertença a Var^h . Então, como a função peso pode ser qualquer, em (13.37) pode-se fazer, por exemplo, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ e apenas $c_1 = 1$, o que nos produz como função peso $\hat{u}(x) = \varphi_1(x)$. Para a função da temperatura v^h , usamos a expansão (13.38), tal que (13.36) fica agora toda escrita em termos das funções de interpolação φ_i e das temperaturas nodais incógnitas d_i . Para o caso em que $\hat{u}^h = \varphi_1$, isto é, apenas $c_1 = 1$ e os demais $c_i's = 0$,

$$\left\{ \sum_{j \in \eta_i} \int_{\Omega} k \nabla \underbrace{\varphi_1}_{\hat{u}^h} \cdot \nabla \varphi_j d\Omega \right\} d_j = \int_{\Gamma_q} \underbrace{\varphi_1}_{\hat{u}^h} h d\Gamma - \left\{ \sum_{j \in \eta_c} \int_{\Gamma_c} \underbrace{\varphi_1}_{\hat{u}^h} h_c \varphi_j d\Gamma \right\} d_j + \int_{\Gamma_c} \underbrace{\varphi_1}_{\hat{u}^h} h_c \mathcal{T}_{\infty} d\Gamma + \int_{\Omega} \underbrace{\varphi_1}_{\hat{u}^h} b d\Omega - \left\{ \sum_{j \in \eta_T} \int_{\Omega} k \nabla \underbrace{\varphi_1}_{\hat{u}^h} \cdot \nabla \underbrace{\varphi_j}_{v_g^h} d\Omega \right\} \quad (13.42)$$

Esta é uma equação algébrica, que foi obtida fazendo a função peso ser $\hat{u}(x) = \varphi_1(x)$. As integrais podem ser todas calculadas e o lado direito é também um escalar conhecido. O problema ainda não pode ser resolvido por que não há ainda um número suficiente de equações para determinar todas as temperaturas incógnitas d_j , isto é, tem-se uma equação e N_i incógnitas. Mas pode-se em seguida tomar a função peso como $\hat{u}^h(x, y) = \varphi_2(x, y)$ e substituindo-a na forma fraca (13.36) obtém-se uma outra equação algébrica similar à (13.42), mas com os índices 1 trocados por 2. Pode-se repetir o processo sucessivamente, fazendo $\hat{u}^h(x)$ igual a cada uma das funções $\varphi_i(x)$, desde φ_1 até φ_{N_i} , obtendo então N_i equações algébricas, onde as incógnitas são os N_i valores nodais $d_j, j = 1, \dots, N_i$. Cada equação i pode ser escrita em notação indicial como (no caso em que $\hat{u}^h = \varphi_i$, isto é, apenas $c_i = 1$ e os demais $c's = 0$):

$$\left\{ \sum_{j \in \eta_i} \int_{\Omega} k \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega \right\} d_j + \left\{ \sum_{k \in \eta_c} \int_{\Gamma_c} \varphi_i h_c \varphi_k d\Gamma \right\} d_k = \underbrace{\int_{\Gamma_q} \varphi_i h d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \varphi_i h_c \mathcal{T}_{\infty} d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi_i b d\Omega - \sum_{j \in \eta_T} \left[\int_{\Omega} k \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega \right] g_j}_{F_i} \quad (13.43)$$

Em geral esta equação é escrita com mais clareza usando notação matricial:

$$\mathbf{K}^G \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (13.44)$$

onde

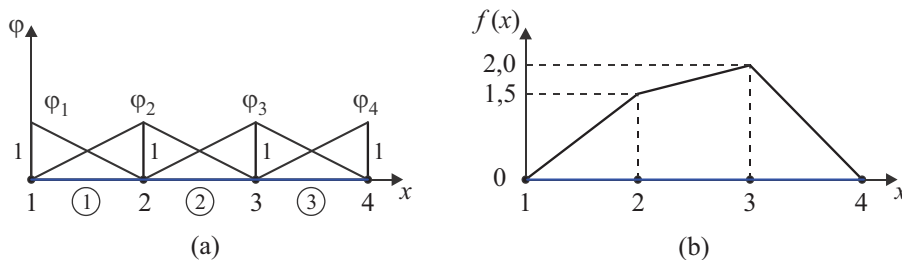


Figura 13.6: (a) Funções φ_i ; (b) Construção de uma função $f(x)$ como uma “montagem” a partir de uma combinação linear entre as funções de interpolação lineares: $f(x) = \sum_i \varphi_i(x) d_i$.

se usar algoritmos especialmente desenvolvidos que tomam uma numeração arbitraria e geram uma renumeração automática que reduza ou minimize b .

Em geral uma malha de elementos finitos é “grande”, isto é, pode envolver desde algumas centenas de nós até alguns milhões. Qualquer programa de EF então utiliza algum tipo de esquema especial de armazenamento que implique em não armazenar todos os $N_i \times N_i$ elementos de \mathbf{K} em sua forma quadrada. Uma vez que a matriz é simétrica, pode-se armazenar apenas um “triângulo”, inferior ou superior, a partir da diagonal principal. Se a matriz é bandeda, torna-se necessário armazenar apenas os elementos sob a banda. Existem ainda muitos outros esquemas que envolvem apenas o armazenamento dos termos dos elementos ou de blocos de elementos não nulos, levando a uma maior economia de área de armazenamento e no processamento. Mais aspectos sobre o armazenamento e o processamento de matrizes no MEF são sumarizados no Capítulo 12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
1	x	x				x	x																		
2		x	x			x	x	x																	
3			x	x				x	x	x															
4				x	x				x	x	x														
5					x	x				x	x														
6						x	x				x	x													
7							6	6			x	6	6												
8								6+7	7			6	6+7	7											
9									7	x			7	7	x										
0										x	x			x	x										
1											x	x				x	x								
2												6	6			x	x	x							
3													6+7	7			x	x	x						
4														7+	x			x	x	x					
5															x	x			x	x					
6																x	x				x	x			
7																	x	x			x	x	x		
8																		x	x			x	x	x	
9																			x	x			x	x	x
0																				x	x			x	x
1																					x	x			
2																						x	x		
3																							x	x	
4																								x	x
5																									x

(13.46)

13.3.2 Condições de contorno de temperatura prescrita

A imposição das condições de contorno de temperatura prescrita, nos nós $\eta_{\mathcal{T}}$, frequentemente é feita numa etapa posterior à de geração das matrizes do problema algébrico, diferentemente da forma descrita, partindo da decomposição (13.34) e usando o funcional discretizado na forma (13.45). Em vez disso, a construção é feita em duas etapas. Na primeira etapa, (13.43) é usado para gerar a matriz e vetor força como se não houvessem temperaturas prescritas. A eq. (13.43) fica simplificada como se $\eta_{\mathcal{T}}$ fosse um conjunto nulo na equação do vetor F_i , o que significa que o número de temperaturas nodais incógnitas passa a ser igual ao número de nós da malha, isto é, tem-se, nesse ponto, N incógnitas. Apenas numa segunda etapa, quando a matrizes global já tenham sido montada é que as temperaturas prescritas são impostas através de manipulações no sistema algébrico. Os detalhes são vistos a seguir.

Considere-se a decomposição $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + v_g(\mathbf{x})$, em que o campo de temperaturas $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ tinha

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^G &= \mathbf{K} + \mathbf{M}^c, \\
\mathbf{K} &= [K_{ij}], & \text{onde } K_{ij} &= \int_{\Omega} k \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\Omega, \\
\mathbf{M}^c &= [M_{ij}^c], & \text{onde } M_{ij}^c &= \int_{\Gamma_c} \varphi_i \, h_c \varphi_j \, d\Gamma, \\
\mathbf{T} &= \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \dots, \mathcal{T}_N\}^T, \\
\mathbf{F} &= \{F_i\}, & \text{onde } F_i &= \int_{\Gamma_q} \varphi_i h \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \varphi_i \, h_c \mathcal{T}_{\infty} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi_i b \, d\Omega.
\end{aligned} \tag{13.56}$$

Observação - O processo de imposição de condições de contorno após a sobreposição é bem detalhado nos exemplos do Capítulo 5 e principalmente na seção 6.4, página 121.

13.4 Matriz de rigidez e vetor força do elemento

Consideremos a definição de um termo genérico de matriz de rigidez em (13.56):

$$K_{ij}^G = \int_{\Omega} k \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\Omega + \oint_{\Gamma_c} \varphi_i \, h_c \varphi_j \, d\Gamma.$$

O particionamento do domínio em elementos finitos significa que Ω é representado pela união dos domínios de todos os elementos, isto é, $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$. A forma mais simples de realizar a integração é a de particionar a integral em cada um dos elementos Ω_e :

$$\underbrace{K_{ij}^G}_{\text{global}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \underbrace{K_{ij}^e}_{\text{elemento}} \quad \text{onde} \quad K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} k \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\Omega_e + \oint_{\Gamma^e \cap \Gamma_c} \varphi_i \, h_c \varphi_j \, d\Gamma. \tag{13.57}$$

$\Gamma^e \cap \Gamma_c$ é a região do contorno do elemento sob convecção. Isto significa que a matriz global de rigidez é a soma das matrizes dos elementos:

$$\mathbf{K}^G = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{K}^e. \tag{13.58}$$

Até esse ponto, a matriz do elemento tem ordem N , como a matriz global, é nula exceto nos termos relacionados aos nós i, j, k, \dots, N_{ne} contidos naquele elemento e . (N_{ne} é o número de nós do elemento e .) Por exemplo, a matriz do elemento 6 da malha da Figura 13.5b pode ser visualizada fazendo nula a matriz da Eq.(13.46), com exceção dos termos dos nós 7, 8, 12 e 13 assinalados ali pelo número do elemento 6. Para evitar ocupar uma área de memória tão grande para cada elemento, é feito o cálculo de K^e na menor área possível, que neste exemplo exige apenas uma matriz elementar de 4×4 termos. Notamos a seguir que a matriz do elemento 7 na Figura 13.5b envolve os nós 8, 9, 13 e 14. Como temos que somar as contribuições de cada elemento conforme (13.57), somamos os termos de \mathbf{K}^7 presentes na matriz 4×4 , indicados pelos números 7 na matriz da Eq.(13.46), com os termos de \mathbf{K}^6 cujos nós são comuns, isto é, os nós 8 e 13. Este processo é chamado de **processo de sobreposição das matrizes** dos elementos na matriz global.³

A determinação do vetor força nodal é feita de forma semelhante, particionando as integrais em (13.56) sobre os elementos e realizando a sobreposição:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{F}_i^e, \quad \text{onde} \quad \mathbf{F}_i^e = \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_q} \varphi_i \, h \, d\Gamma + \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_c} \varphi_i \, h_c \mathcal{T}_{\infty} \, d\Gamma + \int_{\Omega_e} \varphi_i \, b \, d\Omega. \tag{13.59}$$

³Esse processo é bem detalhado no âmbito de elementos finitos de barras, no Exemplo 5.3.

$\Gamma^e \cap \Gamma_q$ é a região do contorno do elemento e que esteja sob condições de contorno de fluxo normal imposto.

13.4.1 Funções de aproximação global e local do elemento

Uma vez que o processo de integração é realizado elemento por elemento, o uso direto de funções de interpolação globais torna-se incomodo. Mas observa-se que na própria definição dessas funções elas são definidas localmente, em cada elemento, como mostrado nas Figuras 13.5a e b, onde estão ilustrados os casos uni e bidimensionais para as funções globais φ_3 e φ_{13} respectivamente. Observe que podemos identificar e tratar com **funções de aproximação locais**, em cada elemento.

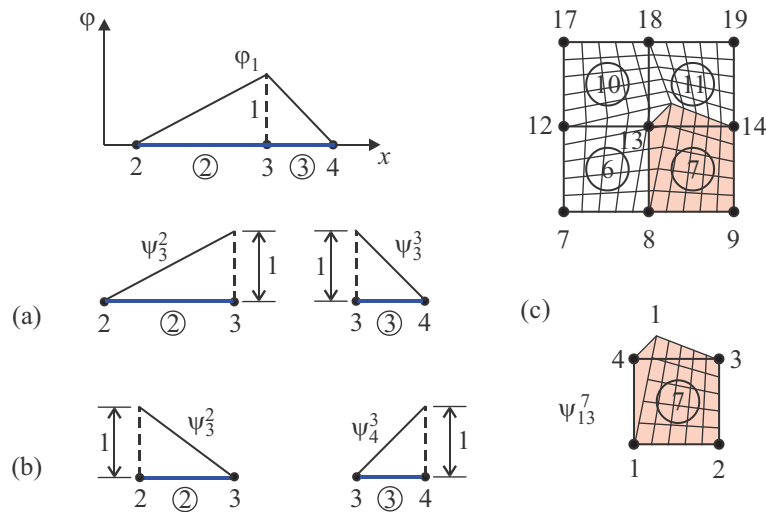


Figura 13.7: Funções de interpolação globais e locais, em problemas uni- e bidimensionais.

A função global uniaxial φ_3 na Figura 13.5a é decomposta nas duas funções ψ_3^2 e ψ_3^3 mostradas na Figura 13.7a. A Figura 13.7b mostra as duas funções lineares possíveis de serem definidas no elemento 3, as funções locais ψ_3^3 e ψ_4^3 , a primeira associada ao nó 2 e a segunda ao nó 3. De forma geral se usa a notação ψ_{no}^e , isto é, o sobrescrito indica o número do elemento e o subscrito indica o número do nó.

Para o caso 2-D, a Figura 13.7c mostra a função global φ_{13} , decomposta em quatro funções, ψ_{13}^6 , ψ_{13}^7 , ψ_{13}^{10} e ψ_{13}^{11} , uma em cada um dos quatro elementos circundantes ao nó 13. A função local ψ_{13}^7 correspondente ao elemento 7 aparece também na Figura 13.7c. Observando ambos os tipos de elemento, vemos que o elemento unidimensional número 3, de dois nós, tem associado duas funções locais, mostradas na Figura 13.7a e 13.7b. O elemento quadrilateral tem então quatro funções, uma associada a cada nó do elemento, e uma delas é mostrada na Figura 13.7c.

Para facilitar as manipulações ao nível do elemento, é costumeiro definir-se uma **numeração local nos nós do elemento**, única, definida sobre um elemento genérico, como os números de 1, 2, 3 e 4 indicados sobre o elemento quadrilateral na Figura 13.7c. Frequentemente, em vez de usar números, os nós locais são identificados por letras, I, J, K e L, por exemplo. Define-se também N_{ne} , o **número de nós do elemento**, neste caso 4. Nota-se que a numeração 1, 2, 3, 4 do elemento 7 mostrada na Figura 13.7c é local, enquanto na malha os nós globais do mesmo elemento são 8, 9, 14 e 13, respectivamente. Cada elemento tem sua numeração global e local de seus nós (sendo a local sempre 1, 2, 3, 4).

Pode-se agora adaptar as definições da matriz de rigidez e do vetor força nodal para um elemento genérico, análoga às definições das equações (13.54)-(13.56) para funções globais. Neste caso,

enquanto que em elasticidade 3-D, por exemplo, tem-se as componentes de deslocamento u , v e w , portanto $N_{gln0} = 3$).

As informações da malha é fornecida ao programa pelos dados introduzidos pelo usuário (ou gerados por outro processador). Esses dados são as coordenadas nodais e a conectividade dos elementos. Num problema tridimensional, as **coordenadas** são fornecidas em forma de tabela no formato

Nó	x	y	z
1	x	x	x
2	x	x	x
⋮			
N_{no}	x	x	x

onde N_{no} é o número de nós do modelo, a coluna “Nó” indica os números globais dos nós, e as colunas x, y, z contém as coordenadas globais do nó.

Os dados de **conectividade dos elementos** são armazenados na forma

Elemento	Nós locais				
	1	2	3	⋯	N_{ne}
1	x	x	x		x
2	4	7			x
⋮					
N_{el}	x	x	x		x

onde N_{el} é o número total de elementos do modelo. Cada linha produz a lista com os números globais de cada nó local do elemento associado àquela linha.

A matriz de um elemento de $N_{ne} = 2$ nós e $N_{gln0} = 3$ graus de liberdade por nó, é organizada da seguinte forma:

		nolj = 1 nogj = Igj			nolj = 2 nogj = Jgj		
		igj = 1	igj = 2	igj = 3	igj = 1	igj = 2	igj = 3
noli = 1	nogi = Igi	K_{11}^e	K_{12}^e	K_{13}^e	K_{14}^e	K_{15}^e	K_{16}^e
		K_{21}^e	K_{22}^e	K_{23}^e	K_{24}^e	K_{25}^e	K_{26}^e
		K_{31}^e	K_{32}^e	K_{33}^e	K_{34}^e	K_{35}^e	K_{36}^e
noli = 2	nogi = Jgi	K_{41}^e	K_{42}^e	K_{43}^e	K_{44}^e	K_{45}^e	K_{46}^e
		K_{51}^e	K_{52}^e	K_{53}^e	K_{54}^e	K_{55}^e	K_{56}^e
		K_{61}^e	K_{62}^e	K_{63}^e	K_{64}^e	K_{65}^e	K_{66}^e

Os nós definem submatrizes de dimensões $N_{gln0} \times N_{gln0}$, que são associadas a um par de nós locais e a um par de nós globais. Por exemplo, se os dados de conectividade do elemento 2 diz que seus nós locais 1 e 2 correspondem aos nós globais 4 e 7, por exemplo, a matriz terá 2 x 2 submatrizes, que corresponderão aos nós locais (1,1), (1,2), (2,1) e (2,2), respectivamente. Simultaneamente, essas submatrizes correspondem aos nós globais (4,4), (4,7), (7,4) e (7,7) respectivamente.

O processo de sobrepor a matriz elementar na matriz global pode ser detalhado no seguinte fragmento de programa. Esse programa prevê que tanto a matriz do elemento quanto a matriz global são armazenadas completas, em sua forma quadrada. Nota-se que isso é feito aqui apenas a bem da clareza da notação, uma vez que em elementos finitos as matrizes raramente são calculadas e armazenadas dessa forma.

Após inicializar a área para a matriz global, $\mathbf{K} = \mathbf{0}$, o fragmento de programa para sobreposição da matriz KEL do elemento número NULE é o seguinte:

```

nogi = conec(nule,NOLi) ! numero global do nó NOLi
inli = (NOLi-1)*nglno ! linha anterior à inicial do nó NOLi na matriz do elemento
ingi = (nogi-1)*nglno ! linha anterior à inicial do nó nogi na matriz global
DO NOLj = 1,Nne ! Corre as colunas de blocos de nós locais do elemento
  nogj = conec(NULE,NOLj) ! numero global do nó NOLj
  inlj = (NOLj-1)*nglno ! linha anterior à inicial do nó NOLj na matriz do elemento
  ingj = (nogj-1)*nglno ! linha anterior à inicial do nó nogj na matriz global
  DO Igi = 1,nglno ! corre os graus de liberdade do nó NOLi do elemento
  DO Igj = 1,nglno ! corre os graus de liberdade do nó NOLj do elemento
    K(ingi + Igi,ingj + Igj
      = K(ingi + Igi,ingj + Igj) + KEL(inli + Igi,inlj + Igj)
  EndDO
EndDO
EndDO
EndDO

```

13.5 Elemento triangular linear

Normalmente os elementos triangulares mais confiáveis possuem seis ou mais nós, e permitem a definição de funções de interpolação quadráticas, ou mais ricas, cujos elementos podem ser visualizados nas Figuras 8.20 e 8.16. O mesmo se aplica aos elementos tridimensionais, em que os mais utilizados são tetraedros de 10 nós e hexaedros de 20 nós ou mais, que também apresentam melhor capacidade de interpolação. Os elementos lineares apresentam diversas limitações e baixa precisão, principalmente no cálculo das variáveis secundárias (aquelas que dependem das derivadas do campo principal, como os fluxos de temperatura, deformações e tensões). Isso significa que, enquanto os deslocamentos ou a temperatura podem ser obtidos com um nível aceitável de erro para uma certa malha, as tensões e os fluxos apresentam erros bastante superiores. Geralmente as formulações básicas, usando elementos lineares retangulares, se constituem na “versão elementos finitos” do método de diferenças finitas básico. Entretanto, para a compreensão do método, os elementos lineares são os mais adequados devido à simplicidade de sua formulação. Em problemas simples como o de transferência de calor bidimensional, até mesmo a integração das matrizes elementares torna-se possível de ser feitas analiticamente, eliminando a necessidade da integração numérica. Por isso fazemos a seguir a descrição do elemento triangular linear sem o uso de coordenadas intrínsecas de triângulo. Para elementos de mais alta ordem, o leitor é encaminhado à seção 8.8 e o Capítulo 9.

Consideremos que o elemento seja definido pelas temperaturas em três nós, denominados nós intrínsecos ou locais, numerados localmente no elemento. Essa numeração geralmente é feita de forma anti-horária como na Figura 13.8. Esta foi uma das primeiras formulações de elementos a serem desenvolvidas. Procuramos uma expansão linear para a distribuição de temperatura $T^h(x, y)$ dentro do elemento, isto é:

$$T^h(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y. \quad (13.69)$$

Para conseguir expressar as constantes a_i em termos dos valores nodais de temperatura do elemento, aplica-se (13.69) a cada um dos nós:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= T^h(x_1, y_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1, \\
 T_2 &= T^h(x_2, y_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2, \\
 \underbrace{T_3}_{\text{temp.no nó}} &= T^h(x_3, y_3) = a_0 + a_1 \underbrace{x_3}_{\text{coord. do nó}} + a_2 \underbrace{y_3}_{\text{coord. do nó}},
 \end{aligned} \quad (13.70)$$

que pode ser representada em forma matricial por:

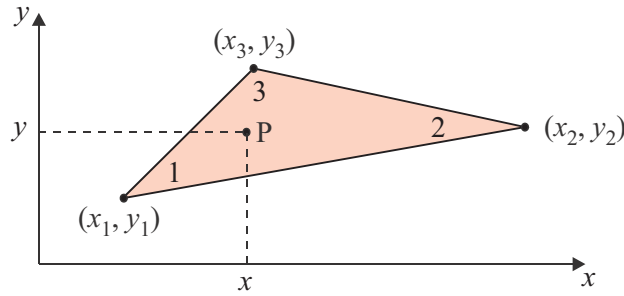


Figura 13.8: Geometria do elemento triangular linear, os números intrínsecos dos nós e suas coordenadas.

$$\mathbf{T}^e = \mathbf{G} \mathbf{A} \quad \text{onde} \quad \mathbf{T}^e = \begin{Bmatrix} \mathcal{T}_1^e \\ \mathcal{T}_2^e \\ \mathcal{T}_3^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}. \quad (13.71)$$

Se a área do triângulo for não nula (que ocorre apenas se os três nós forem colineares), \mathbf{G} pode ser invertida, de forma que os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{G}^{-1} \mathbf{T}^e, \\ &= \mathbf{C} \mathbf{T}^e, \quad \text{onde } \mathbf{C} = \mathbf{G}^{-1}. \end{aligned} \quad (13.72)$$

Uma vez que \mathbf{G} é uma matriz bastante simples, sua inversa pode ser obtida de forma analítica, da mesma maneira que as constantes. Então a interpolação (13.69) pode ser colocada em termos dos valores nodais de temperatura no elemento:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^h(x, y) &= \{1, x, y\} \mathbf{C} \mathbf{T}^e, \quad \text{ou} \\ &= [\psi_1(x, y); \psi_2(x, y); \psi_3(x, y)] \mathbf{T}^e, \quad \text{ou ainda} \\ &= \psi_1(x, y) \mathcal{T}_1^e + \psi_2(x, y) \mathcal{T}_2^e + \psi_3(x, y) \mathcal{T}_3^e = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{T}^e. \end{aligned}$$

onde definimos as funções de aproximação lineares no elemento, $\psi_i(x, y)$, tais que:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= C_{11} + C_{21}x + C_{31}y, \\ \psi_2(x, y) &= C_{12} + C_{22}x + C_{32}y, \\ \psi_3(x, y) &= C_{13} + C_{23}x + C_{33}y, \end{aligned} \quad (13.73)$$

onde as constantes são obtidas de

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\det \mathbf{G}} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}. \quad (13.74)$$

O denominador dessa equação é o determinante de \mathbf{G} , dado por:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{G} &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \\ &= 2 \cdot \text{Área do elemento} = 2A. \end{aligned} \quad (13.75)$$

De (13.74), as matrizes \mathbf{C} nos dois tipos de elemento da Figura 13.9 são, respectivamente, as seguintes:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ -\frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 & -\frac{1}{h} \end{bmatrix}. \quad (13.80)$$

Substituindo \mathbf{C} em (13.77) e as coordenadas nodais em (13.79) obtemos, para ambas as configurações da Figura 13.9, a matriz de rigidez e para o vetor força em uma forma bastante simplificada, que termina sendo as mesmas para ambas as configurações:

$$\mathbf{K}^e = k \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}^e = \frac{bh^2}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (13.81)$$

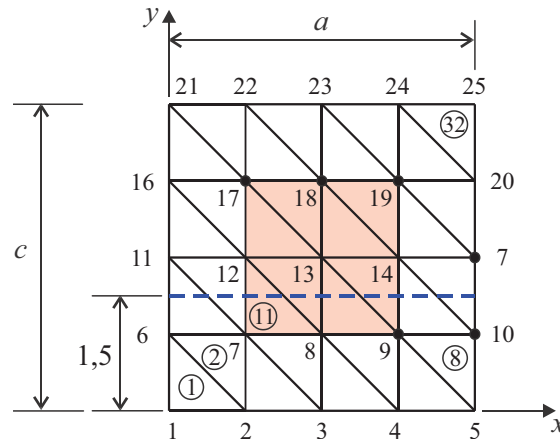


Figura 13.10: Malha regular num domínio de dimensões $a \times b$.

13.5.1 Exemplo 13.1- Malha triangular em domínio 2-D

Considere a malha regular mostrada na Figura 13.10, formada por blocos de 2×2 elementos triangulares dispostos num domínio de dimensões $4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$. A malha tem, portanto, 4×4 blocos, com $N_{el} = 32$ elementos, formados por $N_{nos} = 5 \times 5$ nós. O lado de cada elemento é $h = 1 \text{ m}$. Consideremos o problema de transmissão de calor definido por

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{T} &= -1 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{T} &= 0 & \text{em } \Gamma. \end{aligned} \quad (13.82)$$

isto é, a fonte de calor é $b = 1 \text{ W/m}^3$. O material é isotrópico homogêneo com constante de condutividade térmica $k = 1 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. A temperatura é prescrita nula em todo o contorno da placa.

Solução:

Observemos que os graus de liberdade correspondentes aos nós do contorno, onde a temperatura é conhecida, $\mathcal{T} = 0$, não precisam ser sobrepostos na matriz global.

A **conectividade dos elementos** é mostrada numa matriz de dados que indica, para cada elemento, o número global do nó que corresponde a cada um dos três nós intrínsecos do elemento.

No presente exemplo, a conectividade dos 12 primeiros elementos é:

Elemento	Nó I	Nó J	Nó K
1	1	2	6
2	7	6	2
3	2	3	7
4	8	7	3
5	3	4	8
6	9	8	4
7	4	5	9
8	10	9	5
9	6	7	11
10	12	11	7
11	7	8	12
12	13	12	8
⋮	⋮	⋮	⋮

Nota-se que foi utilizada uma conectividade nos elementos de forma que o nó local I é sempre o do vértice do ângulo reto do elemento, para coincidir com a dedução na eq.(13.81). Pelo mesmo motivo, a numeração local foi feita sempre anti-horária.

Pode-se demonstrar o **processo de sobreposição** observando a sobreposição da matriz do elemento 11. No presente exemplo, devido à sua simplicidade, as matrizes de todos os elementos são iguais, dadas por (13.81), que no caso se torna:

$$\mathbf{K}^{11} = k \begin{array}{l} \text{Nós} \\ 7 \rightarrow \\ 8 \rightarrow \\ 12 \rightarrow \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 \downarrow & 8 \downarrow & 12 \downarrow \\ \hline 1 & -0,5 & -0,5 \\ \hline -0,5 & 0,5 & 0 \\ \hline -0,5 & 0 & 0,5 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{F}^{11} = \frac{bA^e}{3} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow 7 \\ \leftarrow 8 \\ \leftarrow 12 \end{array} \Bigg|$$

onde $A^e = h^2/2$ é a área e h é o lado do elemento e . Da matriz de conectividade, sabe-se que os nós globais do elemento 11 são $\{7, 8, 12\}$. Isso significa que cada coluna e linha de sua matriz elementar \mathbf{K}^{11} corresponde a um dos nós globais, 7, 8 e 12, respectivamente. Por exemplo, o termo (1,1) da matriz elementar, de valor k , deve ser sobreposto na matriz global na posição (7,7). “Sobrepor” significa que esse valor deve ser somado a qualquer outro valor que já possa estar presente na matriz global devido a outros elementos anteriormente sobrepostos. Se esse for o primeiro elemento a ser sobreposto, a matriz de rigidez global ainda é uma matriz nula. Então, se o elemento 11 for o primeiro a ser sobreposto, a matriz global tem a forma:

$$\mathbf{K} = k \begin{array}{l} \text{nós} \rightarrow \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 & 12 & 13 & 14 & 17 & 18 & 19 \\ \hline 1 & -0,5 & & -0,5 & & & & & \\ \hline -0,5 & 0,5 & & 0 & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ \hline -0,5 & 0 & & 0,5 & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Após a sobreposição dos termos associados aos nós internos de todos os elementos, a matriz global fica:

$$\mathbf{q}^2 = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = -\frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,6875 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 0,6875 \\ 0,6875 \end{Bmatrix} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (13.87)$$

Essa é uma estimativa do fluxo, que pode ser considerada uma aproximação (grosseira, nesse problema), do fluxo no centróide do elemento, como ilustrado na Figura 13.11.

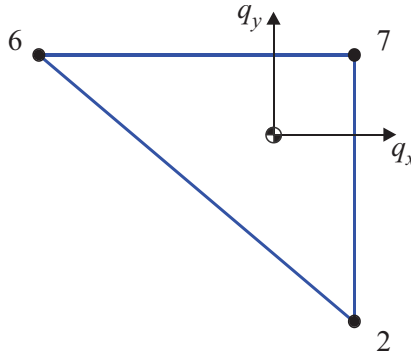


Figura 13.11: Fluxo de calor aproximado no centróide do elemento 2.

13.5.2 Exemplo 13.2 - Curvas de convergência

Considere o problema do Exemplo 13.1, de uma placa quadrada de lados $a = c = 4$ m, como na Figura 13.10. A **solução analítica** do problema $\nabla^2 u = -b$ em Ω , com $u = 0$ no contorno, para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq c$, é:⁴

$$\mathcal{T}(x, y) = \frac{bx}{2}(a-x) - \frac{2b}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{a} \right)}{\operatorname{senh} \left(\frac{k\pi c}{a} \right)} \left[\operatorname{senh} \left(\frac{k\pi y}{a} \right) + \operatorname{senh} \left(\frac{k\pi (c-y)}{a} \right) \right],$$

$$R_k = \left(\frac{a}{k\pi} \right)^3 [1 - \cos(k\pi)]. \quad (13.88)$$

Para o caso da placa quadrada de lados $a = c = 4$ m, modelada pela malha de $M = 4$ blocos de elementos lineares, como na Figura 13.10, (4×4 blocos de elementos), a distribuição de temperatura \mathcal{T} e de fluxo, $q_x = -k\partial\mathcal{T}/\partial x$, foi obtida pelo MEF, para elementos lineares de 3 nós, resolvendo o sistema linear formado pelas eqs.(13.83) e (13.84). A Figura 13.12 mostra a variação da temperatura e do fluxo ao longo da linha $y = 1,5$ m, junto aos valores analíticos. Observa-se nos resultados as seguintes características típicas do MEF:

1. a variável principal, (a temperatura, no presente caso), é contínua através das interfaces dos elementos, porém as **variáveis secundárias**, (no presente caso, o fluxo), **são descontínuas**.
2. A segunda característica comum que pode ser vista nesse gráfico, é que, como regra, a precisão das aproximações das variáveis secundárias é bastante pior que da principal.

A Figura 13.13 mostra os mapas de fluxo q_x para a placa do Exemplo 13.2, para malha de 4×4 blocos. Na figura (a), resultados são obtidos diretamente dos elementos, usando a matriz B , como detalhado no Exemplo 13.1. Como o elemento usado é triangular linear, seu gradiente é constante, de forma que o fluxo estimado é constante em cada elemento, e, portanto, descontínuo

⁴Essa solução pode ser obtida de teoria padrão de solução de equações diferenciais parciais pelo método de separação de variáveis. Consultar textos como [60].

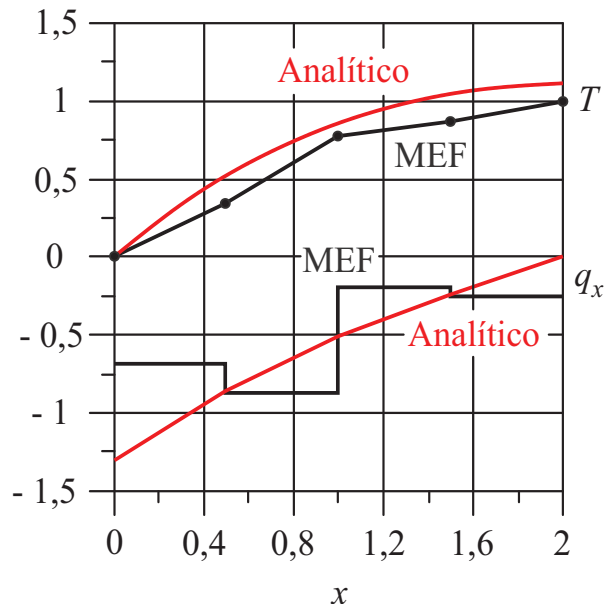


Figura 13.12: Variação da temperatura (em $^{\circ}\text{C}$) e do fluxo (em W/m^2) ao longo da linha $y = 1,5$ m, para o problema do Exemplo 13.1.

nas interfaces. Um procedimento bastante usual em MEF é o de obter uma aproximação suavizada da variável secundária (o fluxo, no presente caso), através de uma média nodal entre os valores de fluxo dos elementos que contém cada nó. Para o problema do exemplo, os resultados obtidos por média nodal são mostrados na Figura 13.13b.⁵

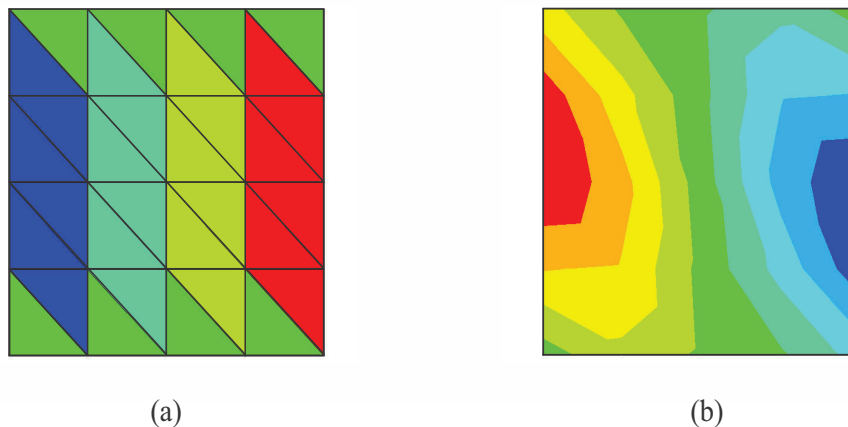


Figura 13.13: Mapas de fluxo q_x para a placa do Exemplo 13.2, para malha de 4×4 blocos. À esquerda, resultados obtidos diretamente dos elementos, e à direita, resultados obtidos fazendo média nodal.

A Figura 13.14 apresenta as curvas de convergência para o problema, usando elementos triangulares lineares (3 nós) e quadráticos (6 nós, com nós no meio dos lados). Os valores numéricos aparecem na Tabela 13.1. Tem-se os valores absolutos do erro relativo da temperatura no centro da placa, em $(x; y) = (2; 2)$ e do fluxo no centro do lado da placa, em $(x; y) = (0; 2)$, obtido por média nodal. Na abscissa, tem-se N_i , o número de graus de liberdade de cada malha. N_i é calculado tomando o número total de nós da malha, menos os nós de temperatura prescrita, isto é, N_i indica a

⁵O processo de fazer média nodal é apenas o mais simples para estimar uma distribuição suave de fluxos (ou de tensões nos problemas mecânicos). Existe na literatura diversos métodos mais sofisticados, como os de Zienkiewicz e Zhu ZZ1 [116] e o ZZ2 [117] (esse conhecido por “patch recovery method”), baseados em mínimos quadrados, e outros.

ordem da matriz de rigidez, e portanto, indica o esforço computacional realizado na solução. Todas as malhas foram do tipo daquela mostrada na Figura 13.10, variando o número M de blocos de elementos. O erro relativo é calculado usando a solução analítica, que no caso são os seguintes valores: $T^o = 1,1787417$ C° e $q_x^o = 1,350629$ W/m². Os **erros relativos** são calculados por

$$E_T = \left| \frac{T^o - T^{\text{MEF}}}{T^o} \right| \quad \text{e} \quad E_q = \left| \frac{q_x^o - q_x^{\text{MEF}}}{q_x^o} \right| \quad (13.89)$$

Os resultados mostrados na Figura 13.14 e na Tabela 13.1 são típicos do MEF:

1. Para um dado número de graus de liberdade no modelo, os resultados obtidos com elementos de maior ordem (quadráticos, no presente caso), são mais precisos que os resultados com elementos de menor ordem (lineares, no caso presente).
2. Mais importante, a **taxa de convergência** é maior quanto maior for a ordem do elemento. A taxa de convergência é definida como a inclinação da curva de convergência num diagrama log-log como o da Figura 13.14. Como característica geral do MEF, aumentando-se o número de graus de liberdade de um modelo, consegue-se muito maior incremento de precisão dos elementos de alta ordem que nos de baixa. Isso significa que os elementos de alta ordem são mais eficientes que os de baixa, uma vez que podem gerar resultados com a mesma precisão com matrizes de rigidez menores. Isso significa economia de área de memória para armazenamento, e principalmente, economia de tempo de processamento.

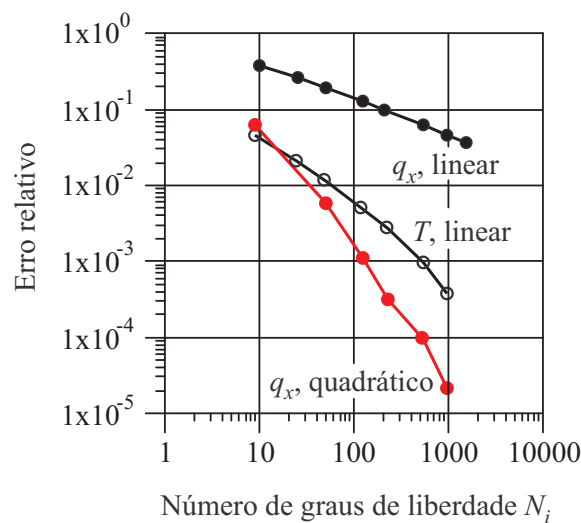


Figura 13.14: Curvas de convergência para elementos lineares e quadráticos. Valor absoluto do erro relativo da temperatura no centro da placa, em $(x; y) = (2; 2)$ e do fluxo no centro do lado da placa, em $(x; y) = (0; 2)$.

13.6 Elemento quadrilateral bilinear

Consideremos que o elemento seja definido pelas temperaturas em 4 nós, denominados nós intrínsecos ou locais, numerados localmente no elemento geralmente de forma anti-horária como na Figura 13.15a.

Na definição das funções de interpolação feitas a seguir serão usadas não as **coordenadas físicas** x e y ,⁶ mas um conjunto auxiliar de coordenadas chamadas **coordenadas intrínsecas**, ou também

⁶Note que o desenvolvimento mostrado nessa seção é bidimensional apenas por comodidade de notação, e pode facilmente ser (e de fato é) estendido a problemas tridimensionais.

Tabela 13.1: Curvas de convergência para elementos lineares e quadráticos. Valor absoluto do erro relativo da temperatura no centro da placa, em $(x;y)=(2;2)$ e do fluxo no centro do lado da placa, em $(x;y)=(0;2)$.

Malha M	Ndof	MEF - elementos 3 nós				MEF - elementos 6 nós	
		\mathcal{T} [C°]	q_x [W/m ²]	Erro E_T $\times 10^{-3}$	Erro E_q $\times 10^{-3}$	N_i	Erro E_q $\times 10^{-3}$
2						9	62,14
4	9	1,1250	0,81250	45,592	398,4	49	5,945
6	25	1,1543	0,99573	20,74	262,8	121	1,132
8	49	1,1650	1,0876	11,66	194,7	225	0,3176
12	121	1,1729	1,1780	4,956	127,8	529	0,09551
16	225	1,1756	1,2222	2,665	95,09	961	0,02147
24	529	1,1776	1,2658	0,9686	62,81		
32	961	1,1783	1,2873	0,3747	46,89		
40	1521	1,1787	1,3001	0,03538	37,41		

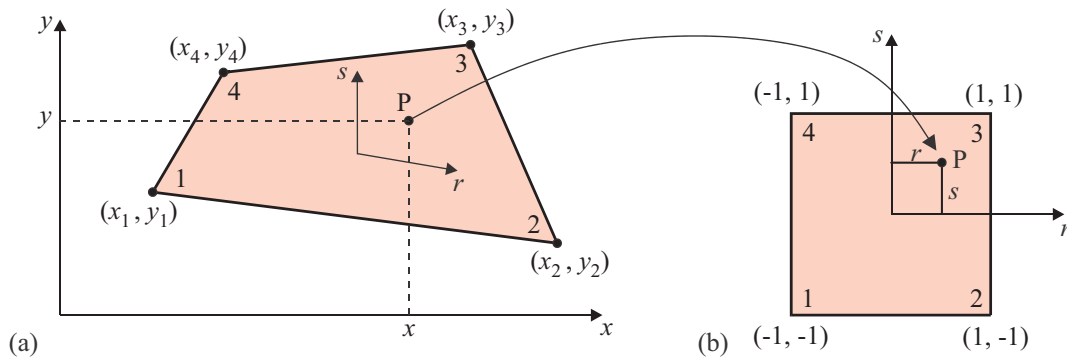


Figura 13.15: (a) Domínio físico do elemento bilinear; (b) domínio padrão para mapeamento em coordenadas intrínsecas.

coordenadas naturais. As coordenadas $\mathbf{x} = (x, y)$ de um ponto A podem ser **mapeadas** em um **domínio auxiliar** (também chamado **padrão**) definido por um quadrado de lados 2×2 como na Figura 13.15b. No domínio auxiliar o ponto A é mapeado nas coordenadas intrínsecas $\boldsymbol{\xi} = (r, s)$. O mapeamento é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x(r; s) &= \sum_{a=1}^4 \psi_a(r; s) x_a = \psi_1(r; s) x_1 + \psi_2(r; s) x_2 + \psi_3(r; s) x_3 + \psi_4(r; s) x_4, \\
 y(r; s) &= \sum_{a=1}^4 \psi_a(r; s) y_a = \psi_1(r; s) y_1 + \psi_2(r; s) y_2 + \psi_3(r; s) y_3 + \psi_4(r; s) y_4. \quad (13.90)
 \end{aligned}$$

onde $\psi_a(r; s)$ são as quatro funções de aproximação do elemento, definidas no domínio padrão. De forma compacta estas relações podem ser postas na forma:

$$\mathbf{x}(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^{N_{ne}} \psi_a(r; s) \mathbf{x}_a. \quad (13.91)$$

onde

- $\mathbf{x} = (x, y)$, e x_a e y_a são as coordenadas dos nós do elemento, onde o contador a pode tomar valores de 1 a N_{ne} .

forma bilineares do elemento:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_1(r; s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s), & \psi_3(r; s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s), \\ \psi_2(r; s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s), & \psi_4(r; s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s). \end{aligned}} \quad (13.96)$$

Essas expressões podem ser postas em forma compacta como

$$\psi_a(r; s) = \frac{1}{4}(1 + r_a r)(1 + s_a s), \quad \text{para } a = 1, 2, 3 \text{ e } 4. \quad (13.97)$$

Observações:

1. Deve-se notar que a matriz e o vetor força do elemento, são definidos em (13.68) como integrais de funções definidas sobre o domínio físico do elemento, de coordenadas $\mathbf{x} = (x, y)$, e o gradiente de temperatura é definido nessas coordenadas. Se definimos as funções de interpolação em coordenadas intrínsecas $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$, deve-se considerar a mudança de variáveis na determinação das derivadas do gradiente e no domínio de integração.
2. Quando as funções de interpolação elementares são descritas em coordenadas intrínsecas, o processo de integração torna-se mais fácil. A integração é sempre realizada usando **regras de quadraturas de integração numéricas**, que são facilmente automatizáveis no âmbito de programas de elementos finitos. Esse processo é descrito na seção 9, página 237.
3. Funções de interpolação para elementos quadrangulares de maior número de nós e maior grau, são listadas na seção 8.8, página 214, tanto quanto para elementos triangulares de diversos tipos.

13.7 Exercícios

- 13.1 Considere o problema similar ao do Exemplo 13.1, de achar uma solução aproximada para o problema de transferência de calor numa região plana de dimensões 4×4 . A fonte interna é uniforme, dada por $b = 43 \text{ W/m}^3$. A placa é de aço com constante de condutividade térmica do material é $k = 43 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. Considere que as bordas da placa são mantidas sob controle de temperatura de tal forma que $\mathcal{T} = 0$ em toda a borda. Resolva os seguintes itens.
- (a) Use as funções de interpolação bilineares num elemento de quatro nós. Calcule analiticamente a matriz de rigidez e o vetor força do elemento quadrado. (Dica: use o auxílio do Mathematica, Maple ou Matlab.)
 - (b) Defina uma malha com 3×3 elementos, isto é, $M = 3$. Sobreponha manualmente a matriz e o vetor global. Verifique se há uma estrutura na matriz. Qual é o valor da largura de banda?
 - (c) Resolva o problema algébrico $\mathbf{KT} = \mathbf{F}$ da malha $M = 3$.
 - (d) Use o Ansys para rodar as malhas $M = 2, 4, 8$ e 16 .
 - (e) Faça uma plotagem da temperatura \mathcal{T} e do fluxo q_x ao longo de uma linha $y = 2$, junto com os valores exatos obtidos da eq.(13.88). É possível observar alguma tendência na resposta conforme a malha é refinada?
 - (f) Compare a solução com os elementos quadriláteros com os elementos triangulares através de curvas de convergência. O que se observa? (Solução: como regra do MEF, elementos quadriláteros são mais precisos que os triangulares, para um mesmo número de graus de liberdade do modelo. Por que isso?)
- 13.2 Considere dois elementos triangulares de três nós como na Figura 13.9, porém com lados L_x e L_y ao longo das direções globais x e y .