

Capítulo 16

Elementos finitos para vigas

A viga, tanto quanto a barra, é um dos elementos estruturais de formulação mais simples e mais utilizados em mecânica estrutural. O presente capítulo visa complementar alguns dos conceitos gerais do método de elementos finitos que não são vistos com clareza no âmbito da formulação de barras, como o conceito de funções de forma e carregamento distribuído. Utilizaremos ainda aqui o primeiro teorema de Castigliano para a dedução da equação de equilíbrio do elemento viga baseado no modelo cinemático de Euler-Bernoulli de vigas delgadas.

16.1 Funções de forma

Consideramos inicialmente uma viga reta de comprimento L , módulo de elasticidade E e de seção transversal prismática uniforme ao longo da extensão do elemento, representada pelo momento de inércia $I_{zz} = cte$, como mostrada na Figura 16.1. Consideramos o elemento definido por dois nós, 1 e 2 (ou I e J), **localizados nos centroides** das seções extremas. Definimos um sistema local de coordenadas $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ definido com origem no nó 1, com o eixo \bar{x} orientado no sentido do nó 2, e os eixos transversais \bar{y} e \bar{z} nas **direções principais de inércia** da seção (ver seção 10.4.4, página 360 para detalhes sobre direções principais).

Consideramos que a única sollicitação aplicada seja por esforços concentrados aplicados nas seções extremas, designadas como nós locais 1 e 2. Esses esforços são de momento fletor, \bar{M}_{1z} e \bar{M}_{2z} , em cada nó, na direção \bar{z} , e esforços cortantes transversais \bar{P}_{1y} e \bar{P}_{2y} . O sentido positivo desses esforços é como indicado na Figura 16.1, i.e., são positivos quando orientados no sentido positivo dos respectivos eixos, i.e., eixos \bar{z} e \bar{y} para momento e cortante, respectivamente. Isso se aplica para ambos os nós do elemento.

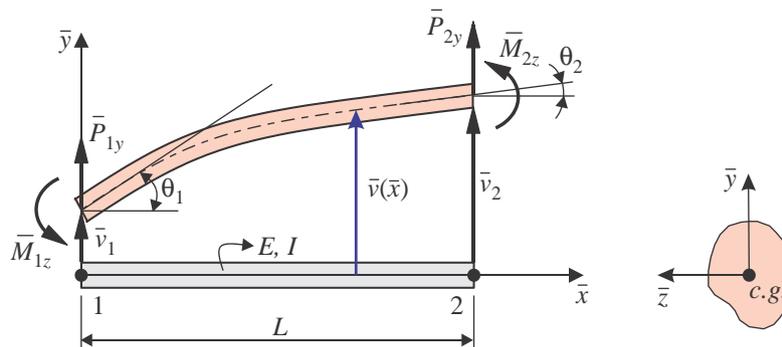


Figura 16.1: Elemento finito de viga, com deslocamentos e esforços nodais.

Como efeito desses esforços, o elemento sofre uma deflexão transversal descrita por uma função $\bar{v} = \bar{v}(\bar{x})$, i.e., o deslocamento transversal na seção de coordenada axial \bar{x} é o valor $\bar{v}(\bar{x})$. Nesse ponto é necessário escolher um modelo cinemático de viga. Tomamos aqui o mesmo modelo usado nos Capítulos 8 e 12, o modelo de Euler-Bernoulli, adequado a vigas longas (delgadas). Dessa forma,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \bar{v}_1, \\
a_1 &= \bar{\theta}_1, \\
a_2 &= \frac{1}{L^2} (-2L\bar{\theta}_1 - L\bar{\theta}_2 - 3\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2), \\
a_3 &= \frac{1}{L^3} (L\bar{\theta}_1 + L\bar{\theta}_2 + 2\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2).
\end{aligned} \tag{16.6}$$

Levando essas constantes a (16.2) se tem:

$$\bar{v}(\bar{x}) = \bar{v}_1 + \bar{\theta}_1 \bar{x} + \left(-\frac{2}{L}\bar{\theta}_1 - \frac{1}{L}\bar{\theta}_2 - \frac{3}{L^2}\bar{v}_1 + \frac{3}{L^2}\bar{v}_2 \right) \bar{x}^2 + \left(\frac{1}{L^2}\bar{\theta}_1 + \frac{1}{L^2}\bar{\theta}_2 + \frac{2}{L^3}\bar{v}_1 - \frac{2}{L^3}\bar{v}_2 \right) \bar{x}^3. \tag{16.7}$$

Em seguida reordenamos a equação, agrupando os termos para cada deslocamento nodal:

$$\bar{v}(\bar{x}) = \underbrace{\left(1 - 3\frac{\bar{x}^2}{L^2} + 2\frac{\bar{x}^3}{L^3} \right)}_{\phi_1(\bar{x})} \bar{v}_1 + \underbrace{\frac{\bar{x}}{L} \left(L - 2\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{L} \right)}_{\phi_2(\bar{x})} \bar{\theta}_1 + \underbrace{\left(3\frac{\bar{x}^2}{L^2} - 2\frac{\bar{x}^3}{L^3} \right)}_{\phi_3(\bar{x})} \bar{v}_2 + \underbrace{\left(-\frac{\bar{x}^2}{L} + \frac{\bar{x}^3}{L^2} \right)}_{\phi_4(\bar{x})} \bar{\theta}_2, \tag{16.8}$$

ou, em forma compacta,

$$\boxed{\bar{v}(\bar{x}) = \phi_1(\bar{x})\bar{v}_1 + \phi_2(\bar{x})\bar{\theta}_1 + \phi_3(\bar{x})\bar{v}_2 + \phi_4(\bar{x})\bar{\theta}_2} \tag{16.9}$$

Observa-se que cada deslocamento nodal \bar{v}_1 , $\bar{\theta}_1$, \bar{v}_2 e $\bar{\theta}_2$, é multiplicado por um polinômio cúbico, definidos por:

$$\boxed{
\begin{aligned}
\phi_1(\bar{x}) &= 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^3, & \phi_3(\bar{x}) &= 3\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^3, \\
\phi_2(\bar{x}) &= \frac{\bar{x}}{L} \left(L - 2\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{L} \right), & \phi_4(\bar{x}) &= -\frac{\bar{x}^2}{L} + \frac{\bar{x}^3}{L^2}.
\end{aligned}
} \tag{16.10}$$

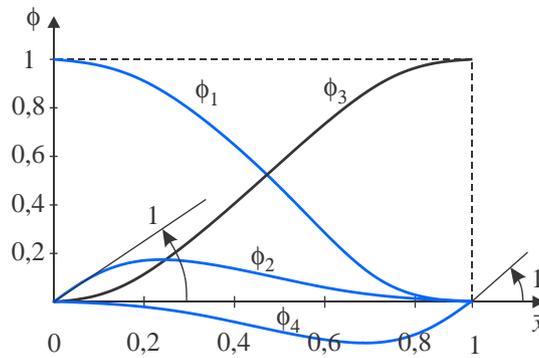


Figura 16.2: Funções de interpolação de viga no intervalo $[0;1]$ para $L = 1$.

Essas são as chamadas **funções de interpolação** (ou **de forma**), **do elemento finito de viga**. São funções polinomiais cúbicas, definidas no intervalo $\bar{x} \in [0;L]$. **Uma combinação linear dessas quatro funções, na forma (16.9), tem a propriedade de poder representar qualquer polinômio cúbico nesse intervalo.** Os coeficientes da combinação linear são os valores dos deslocamentos transversais nos nós extremos, \bar{v}_1 e \bar{v}_2 , e dos ângulos de rotação nesses nós, $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$, como ilustrados na Figura 16.1.

Observe que as funções de interpolação são tais que satisfazem as seguintes **propriedades**:

Deslocamentos unitários

Uma vez entendido o procedimento visto na seção anterior 16.2.1 para determinação da matriz de rigidez do elemento via Teorema de Castigliano, o leitor pode ir diretamente para a próxima seção, 16.3. A presente seção faz a determinação da rigidez do elemento usando um método mais intuitivo, baseado principalmente em conceitos de equilíbrio e cinemática, sem um teorema de energia.

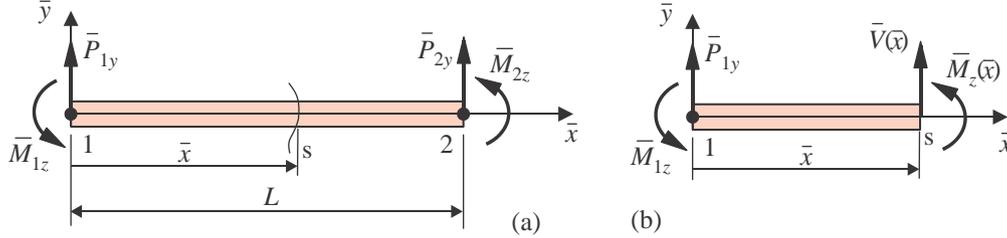


Figura 16.3: Esforços nodais e esforços numa seção arbitrária.

Consideremos a viga sob a ação apenas dos esforços nodais, como na Figura 16.3a, i.e., \bar{P}_{1y} , \bar{M}_{1z} , \bar{P}_{2y} e \bar{M}_{2z} . O esforço numa seção arbitrária s de coordenada \bar{x} pode ser obtido em termos dos esforços no nó 1, como na Figura 16.3b:

$$\bar{M}_z(\bar{x}) = \bar{P}_{1y}\bar{x} - \bar{M}_{1z} \quad (16.26)$$

Tomando esse esforço como conhecido, pode-se integrar a equação diferencial de equilíbrio da curva elástica de segunda ordem:

$$\begin{aligned} EI_{zz} \frac{d^2\bar{v}}{d\bar{x}^2} &= M_z(\bar{x}) = \bar{P}_{1y}\bar{x} - \bar{M}_{1z}, \\ EI_{zz} \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} &= EI_{zz}\theta = \frac{\bar{P}_{1y}}{2}\bar{x}^2 - \bar{M}_{1z}\bar{x} + C_1, \\ EI_{zz}\bar{v}(\bar{x}) &= \frac{\bar{P}_{1y}}{6}\bar{x}^3 - \frac{\bar{M}_{1z}}{2}\bar{x}^2 + C_1\bar{x} + C_2. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Temos então quatro constantes incógnitas: \bar{P}_{1y} , \bar{M}_{1z} , C_1 e C_2 . Para sua determinação, consideremos inicialmente um problema com as seguintes condições de contorno definidas por um **deslocamento unitário** aplicado no nó 1, e todos os demais deslocamentos nodais nulos:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \bar{v}(0) = 1, & \bar{\theta}_1 &= \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}}(0) = 0, \\ \bar{v}_2 &= \bar{v}(L) = 0, & \bar{\theta}_2 &= \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}}(L) = 0. \end{aligned} \quad (16.28)$$

Usando (16.28)₂ para $d\bar{v}/d\bar{x} = 0$ em $\bar{x} = 0$ obtemos $C_1 = 0$ e $d\bar{v}/d\bar{x} = 0$ em $\bar{x} = L$ temos $\bar{M}_{z1} = \bar{P}_{y1}L/2$, de forma que (16.27)₃ se torna

$$EI \bar{v}(\bar{x}) = \bar{P}_{y1} \frac{\bar{x}^3}{6} - \bar{P}_{y1} \frac{\bar{x}^2}{4} L + C_2. \quad (16.29)$$

Incorporando as condições $\bar{v}(0) = 1$ e $\bar{v}(L) = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} EI1 &= C_2, \text{ e} \\ EI0 &= -\bar{P}_{y1} \frac{L^3}{12} + C_2, \implies \bar{P}_{y1} = 12 \frac{EI}{L^3}. \end{aligned} \quad (16.30)$$

Em seguida podemos obter os esforços no nó 2, \bar{P}_{y2} e \bar{M}_{z2} , aos do nó 1, usando a condição de

equilíbrio global do elemento de viga usando a Figura 16.3a:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{y1} + \bar{P}_{y2} &= 0, \\ \bar{M}_{z2} + \bar{M}_{z1} - \bar{P}_{y1}L &= 0.\end{aligned}\quad (16.31)$$

Podemos assim concluir que os esforços nodais para o caso de aplicação de um deslocamento unitário no nó 1, mantendo os demais deslocamentos nodais nulos são:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{y1} &= 12\frac{EI}{L^3}, & \bar{M}_{z1} &= 6\frac{EI}{L^2}, & C_1 &= 0, \\ \bar{P}_{y2} &= -12\frac{EI}{L^3}, & \bar{M}_{z2} &= 6\frac{EI}{L^2}, & C_2 &= EI.\end{aligned}\quad (16.32)$$

Note que esses são as forças nodais necessárias para gerar o conjunto de deslocamentos nodais mostrados em (16.28).

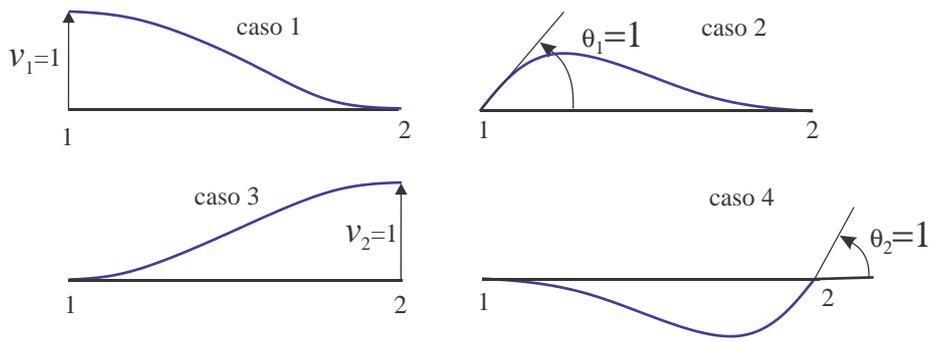


Figura 16.4: Curvas elásticas correspondentes aos quatro casos de deslocamento unitário.

A dedução entre as eqs.(16.28) e (16.32) podem ser repetidas para outros três casos de deslocamento unitário, i.e., um deslocamento unitário aplicado em um dos quatro graus de liberdade do elemento, mantendo os demais nulos. Os esforços nodais necessários para gerar esses deslocamentos são os seguintes:

$$\begin{aligned}\text{Caso 1} & \begin{cases} \bar{v}_1 = 1, & \bar{\theta}_1 = 0, \\ \bar{v}_2 = 0, & \bar{\theta}_2 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{P}_{y1} = 12\frac{EI}{L^3}, & \bar{M}_{z1} = 6\frac{EI}{L^2}, \\ \bar{P}_{y2} = -12\frac{EI}{L^3}, & \bar{M}_{z2} = 6\frac{EI}{L^2}. \end{cases} \\ \text{Caso 2} & \begin{cases} \bar{v}_1 = 0, & \bar{\theta}_1 = 1, \\ \bar{v}_2 = 0, & \bar{\theta}_2 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{P}_{y1} = 6\frac{EI}{L^2}, & \bar{M}_{z1} = 4\frac{EI}{L}, \\ \bar{P}_{y2} = -6\frac{EI}{L^2}, & \bar{M}_{z2} = 2\frac{EI}{L}. \end{cases} \\ \text{Caso 3} & \begin{cases} \bar{v}_1 = 0, & \bar{\theta}_1 = 0, \\ \bar{v}_2 = 1, & \bar{\theta}_2 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{P}_{y1} = -12\frac{EI}{L^3}, & \bar{M}_{z1} = -6\frac{EI}{L^2}, \\ \bar{P}_{y2} = 12\frac{EI}{L^3}, & \bar{M}_{z2} = -6\frac{EI}{L^2}. \end{cases} \\ \text{Caso 4} & \begin{cases} \bar{v}_1 = 0, & \bar{\theta}_1 = 0, \\ \bar{v}_2 = 0, & \bar{\theta}_2 = 1, \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{P}_{y1} = 6\frac{EI}{L^2}, & \bar{M}_{z1} = 2\frac{EI}{L}, \\ \bar{P}_{y2} = -6\frac{EI}{L^2}, & \bar{M}_{z2} = 4\frac{EI}{L}. \end{cases}\end{aligned}\quad (16.33)$$

A Figura 16.4 ilustra as configurações assumidas pela viga para cada um dos quatro casos de deslocamento unitário definidos.

Matriz de rigidez do elemento de viga

Buscamos construir uma matriz que relacione os esforços no elemento finito de viga, $(\bar{P}_{1y}, \bar{M}_{1z}, \bar{P}_{2y}$ e $\bar{M}_{2z})$, com deslocamentos nodais $(\bar{v}_1, \bar{\theta}_1, \bar{v}_2$ e $\bar{\theta}_2)$. O relacionamento linear mais geral tem a forma:

o modelo de **flexão plana**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} & -12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} \\ 6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} & -6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} \\ -12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} & 12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} \\ 6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} & -6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (16.36)$$

Observemos que a matriz é simétrica, da mesma forma que a matriz de rigidez do modelo de viga já obtida pelo primeiro Teorema de Castigliano em (16.25).

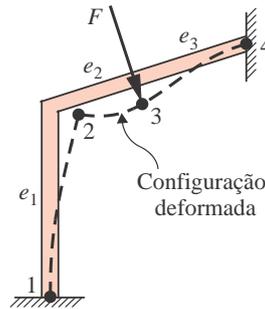


Figura 16.5: Ilustração de estrutura plana, em que cada segmento de viga possui uma orientação própria.

16.3 Análise de vigas no plano

Numa estrutura plana, em que cada segmento de viga possui uma orientação própria, como aquela ilustrada na Figura 16.5, torna-se necessário definir um elemento finito que incorpore tanto os graus de liberdade axiais, característicos de elementos de barra, quanto os graus de liberdade de flexão de viga. Para entender isso, basta observar que o deslocamento do nó 2 transversal à viga e_1 é parcialmente igual ao deslocamento axial nos elementos e_2 e e_3 , e todos os elementos contribuem com a rigidez do conjunto.

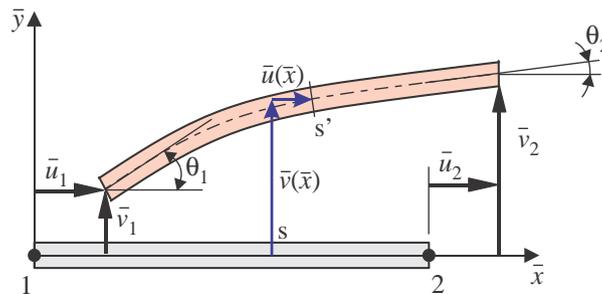


Figura 16.6: Deslocamentos axial e transversal num elemento de viga.

A Figura 16.6 ilustra um elemento finito com seu sistema local de coordenadas, incorporando simultaneamente os deslocamentos axial e de flexão. Os deslocamentos nodais são \bar{u}_1 e \bar{u}_2 axiais, característicos de comportamento de barra, e \bar{v}_1 , θ_1 , \bar{v}_2 e θ_2 transversais, de comportamento de flexão. Uma seção arbitrária s , de coordenada \bar{x} , sofre componentes de deslocamento axial $\bar{u}(\bar{x})$ e transversal $\bar{v}(\bar{x})$. Quanto aos esforços nodais associados, eles são vistos na figura 16.7. As equações de equilíbrio de seu comportamento de barra e de viga no sistema local, que são, respectivamente:

rigidez de ambas as formulações, resultando:

$$\begin{Bmatrix} P_{1\bar{x}} \\ P_{1\bar{y}} \\ \bar{M}_{1z} \\ P_{2\bar{x}} \\ P_{2\bar{y}} \\ \bar{M}_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}. \quad (16.39)$$

Essa é a equação de equilíbrio de um elemento finito orientado na direção local \bar{x} , envolvendo ambos os efeitos simultaneamente, axial e flexão plana. Como forma de compactar a notação, definimos os vetores e a matriz de rigidez de (16.39) como

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{u}}, \quad \text{onde} \quad \bar{\mathbf{P}} = \begin{Bmatrix} P_{1\bar{x}} \\ P_{1\bar{y}} \\ \bar{M}_1 \\ P_{2\bar{x}} \\ P_{2\bar{y}} \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}. \quad (16.40)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{P}}$ são os deslocamentos e os esforços associados aos nós 1 e 2, em relação ao sistema local de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) , e $\bar{\mathbf{K}}^e$ é a matriz de rigidez local do elemento e .

Considere-se agora um **sistema global de coordenadas**, (x, y, z) e o **sistema local de coordenadas**, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Considere-se que ambos os sistemas tenham eixos z coincidentes, isto é, $z = \bar{z}$. Então, o sistema local orienta-se em relação ao global por uma rotação dos eixos (x, y) em torno do eixo z por um ângulo θ , medido de forma anti-horária a partir do eixo x , como mostrado na Figura 15.8.

A Figura 16.8 ilustra como as componentes dos deslocamentos e dos esforços no sistema de coordenadas local (\bar{x}, \bar{y}) se decompõem no sistema de coordenadas global (x, y) . As relações entre as componentes nos dois sistemas de coordenadas podem ser colocadas na forma matricial como:

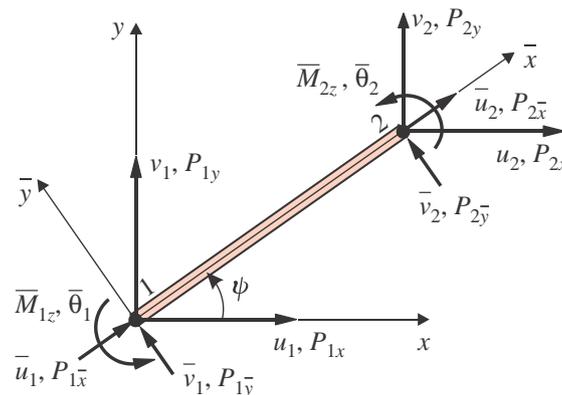


Figura 16.9: Graus de liberdade de um elemento de viga rotacionado no plano xy .

Observação - Todo o desenvolvimento dessa seção segue linhas completamente similares àquela do elemento de barra orientado no plano. É recomendado que o leitor revise a seção 15.2, página 552.

16.3.1 Exemplo 16.1 - Pórtico plano

Calcular as deflexões, reações, solicitações internas em cada uma das vigas do pórtico plano mostrado na Figura 16.9. Os dados são: $E = 210.000$ MPa, a seção transversal de dimensões $b \times h = 100 \text{ mm} \times 120 \text{ mm}$, tal que a área é $A = 12.000 \text{ mm}^2$ e o momento de inércia é $I_{zz} = 14,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$. A carga aplicada é $P = 700 \text{ kN}$. Os comprimentos das barras são: $L_1 = 1.000 \text{ mm}$ e $L_2 = 60 \text{ mm}$.

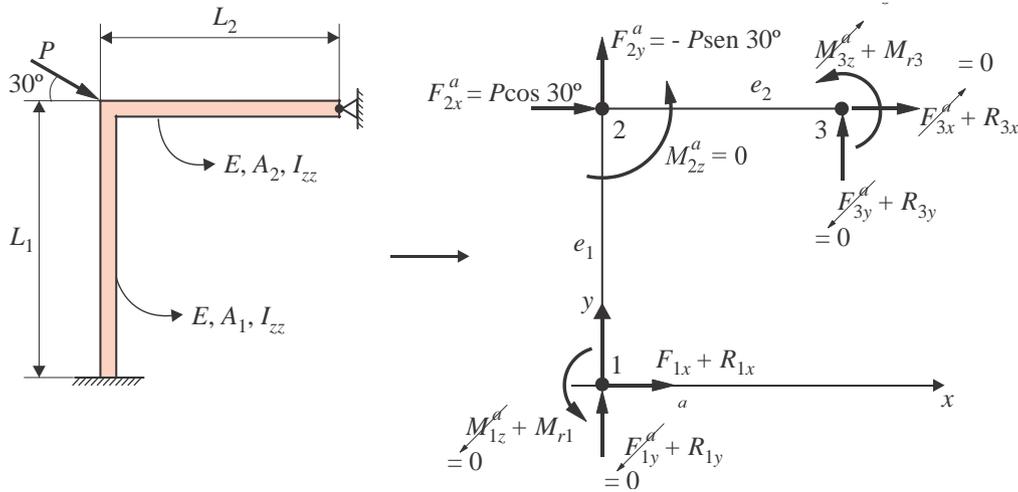


Figura 16.10: Estrutura plana do Exemplo 1 e modelo de elementos finitos, com as forças aplicadas.

As forças e deslocamentos prescritos são:

Nó	direção x	direção y	rotação z
1	$u_1 = 0$	$v_1 = 0$	$\theta_1 = 0$
2	$F_{2x}^a = 606.220$	$F_{2y}^a = -350.000$	$M_{2z}^a = 0$
3	$u_3 = 0$	$v_3 = 0$	$M_3 = 0$

E os dados de **conectividade** dos elementos são:

Elemento	nó I	nó J
1	1	2
2	2	3

Na **Etapa 1**, as matrizes dos elementos são calculadas usando (16.47).

- Matriz de **rigidez do elemento 1**. $\psi = 90^\circ$: (lembrar da notação $E6 = \cdot 10^6$)

$$\begin{bmatrix} 36,288 & 0 & -1,81E7 & -36,288 & 0,0 & -1,81E7 \\ & 2,52E6 & 0 & 0 & -2,52E6 & 0 \\ & & 1,21E10 & 1,81E7 & 0 & 6,05E9 \\ & & & 36,288 & 0,0 & 1,81E7 \\ \text{sim.} & & & & 2,52E6 & 0 \\ & & & & & 1,21E10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix}. \quad (16.48)$$

- Matriz de **rigidez do elemento 2**. $\psi = 0^\circ$:

$$\begin{bmatrix} 4,2 & 0 & 0 & -4,2 & 0 & 0 \\ & 16,8 & 504 & 0 & -16,8 & 504 \\ & & 2,02E4 & 0 & -504 & 1,01E4 \\ & & & 4,2 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 16,8 & -504 \\ & & & & & 2,02E4 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2z} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix}. \quad (16.49)$$

do problema axial e do problema de flexão, atuando nas fibras extremas de cada nó, isto é, nas coordenadas \bar{y}_{\max} e \bar{y}_{\min} (em caso de seção simétrica, tem-se $\bar{y}_{\max} = h/2$ e $\bar{y}_{\min} = -h/2$, onde h é a altura da seção transversal da barra, ao longo da direção y). Observe que nesses dois pontos, as parcelas de tensão associadas a N_x são idênticas, mas as parcelas associadas a momento M_z são de mesmo módulo e sinais contrários. As **tensões normais** nos dois nós do elemento, nas fibras extremas de cada nó são visualizadas na Figura 16.11, e calculadas por:

$$\begin{array}{l} \text{Nó local 1} \\ \text{Nó local 2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{fibra superior:} \\ \text{fibra inferior:} \\ \text{fibra superior:} \\ \text{fibra inferior:} \end{array} \right. \begin{array}{l} \sigma_{xx}^s(0) = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z(0)}{I_{zz}} \bar{y}_{\max}, \\ \sigma_{xx}^i(0) = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z(0)}{I_{zz}} \bar{y}_{\min}, \\ \sigma_{xx}^s(L_e) = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z(L_e)}{I_{zz}} \bar{y}_{\max}, \\ \sigma_{xx}^i(L_e) = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z(L_e)}{I_{zz}} \bar{y}_{\min}, \end{array} \quad (16.60)$$

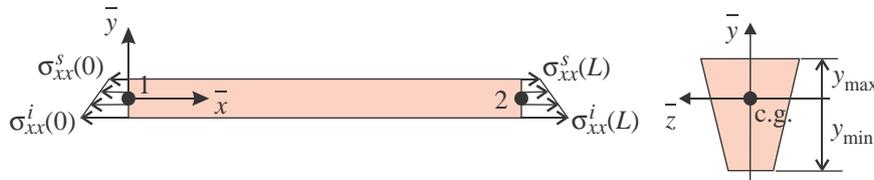


Figura 16.11: Tensões extremas num elemento devidas ao esforço normal e momento fletor.

16.4.1 Exemplo 16.2 - Esforços e tensões

Determine os deslocamentos, esforços e tensões nos elementos do Exemplo 1.

Solução:

(a) Elemento 1

Os deslocamentos nas direções locais são obtidos por (16.55) com orientação do elemento dada por $\psi = 90^\circ$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccc} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,401 \cdot 10^{-2} \\ -6,146 \cdot 10^{-2} \\ 9,469 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\},$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6,146 \cdot 10^{-2} \\ -1,401 \cdot 10^{-2} \\ 9,469 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\}. \quad (16.61)$$

Esses valores nodais podem ser levados à aproximação da curva elástica de flexão, eq.(16.9):

$$\begin{aligned}\bar{v}(\bar{x}) &= \bar{v}_1\phi_1(\bar{x}) + \bar{\theta}_1\phi_2(\bar{x}) + \bar{v}_2\phi_3(\bar{x}) + \bar{\theta}_2\phi_4(\bar{x}), \\ &= 0\phi_1(\bar{x}) + 0\phi_2(\bar{x}) + (-1,401 \cdot 10^{-2})\phi_3(\bar{x}) + (9,469 \cdot 10^{-4})\phi_4(\bar{x}).\end{aligned}\quad (16.62)$$

Trazendo as expressões de $\phi_3(\bar{x})$ e $\phi_4(\bar{x})$ de (16.10) e simplificando para $L_1 = 1.000$ mm, se obtém para o deslocamento e a rotação no elemento 1:

$$\begin{aligned}\bar{v}(\bar{x}) &= 9,742 \cdot 10^{-10}\bar{x}^3 - 9,8893 \cdot 10^{-7}\bar{x}^2, \\ \theta(\bar{x}) &= 2,9248 \cdot 10^{-9}\bar{x}^2 - 1,9779 \cdot 10^{-6}\bar{x}, \quad \forall \bar{x} \in (0; L_1).\end{aligned}\quad (16.63)$$

Dessas equações de pode determinar que em $\bar{x}_a = 676,3$ mm, o deslocamento transversal é máximo, com valor $\bar{v}_{\max} = -0,1508$ mm, onde $\theta = 0$, e em $\bar{x}_b = 338,1$ mm, o ângulo de rotação da normal é máximo, de valor $\theta_{\max} = -3,344 \cdot 10^{-4}$. A Figura 16.12a ilustra a configuração deformada do elemento 1, com indicações dos valores nodais e dos máximos de deslocamento transversal e rotações da normal. Note que a figura é sem escala, pois a escala tornaria invisível os deslocamentos em comparação com o comprimento da viga.

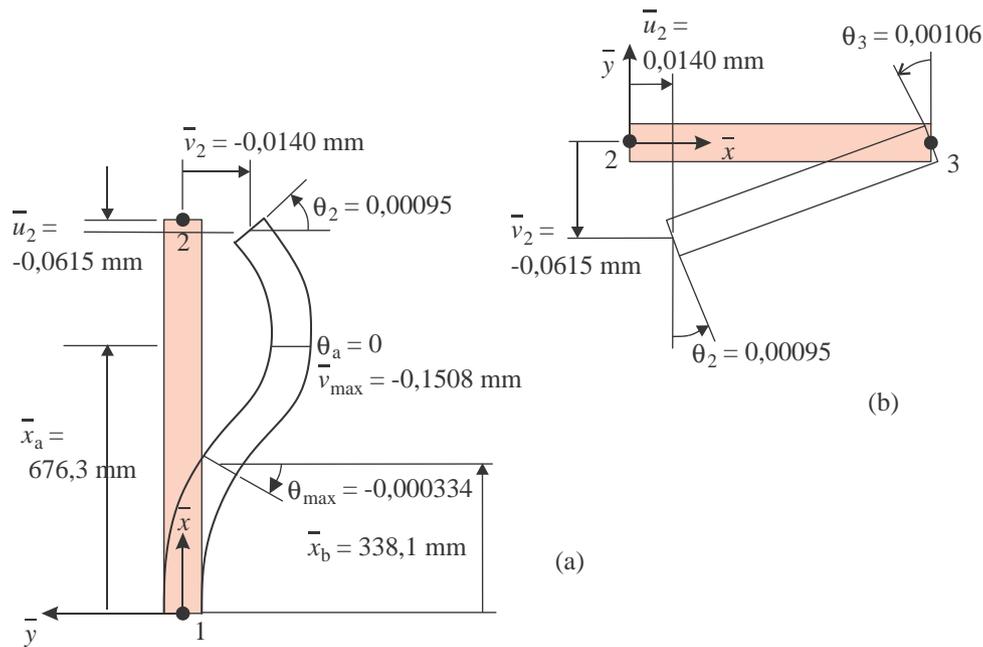


Figura 16.12: Configuração deformada do elemento 1, com indicações dos valores nodais e dos máximos de deslocamento transversal e rotações da normal. (Sem escala.)

Os esforços normais e de momento fletor vêm de (16.57) e de (16.59):

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{EA}{L_1} [-\bar{u}_1 + \bar{u}_2] = \frac{EA}{L_1} [0 - 6,146] \cdot 10^{-2} = -155 \text{ kN}, \\ M_z(0) &= -\frac{2EI_{zz}}{L_1^2} [3\bar{v}_1 + 2L_1\bar{\theta}_1 - 3\bar{v}_2 + L_1\bar{\theta}_2] \\ &= -\frac{2EI_{zz}}{L_1^2} [3 \times 1,401 \cdot 10^{-2} + 1000 \times 9,469 \cdot 10^{-4}] = -5,98 \cdot 10^6 \text{ Nmm},\end{aligned}$$

são, em valor absoluto, são 24,9 MPa e 48,8 MPa, respectivamente. Os valores extremos de tensão normal em cada nó do elemento são ilustradas diagramaticamente na Figura 16.11.

(b) Elemento 2

Os deslocamentos nas direções locais do elemento 2 são obtidos por (16.55), usando os deslocamentos dos nós 2 e 3 obtidos de (16.52), com orientação do elemento dada por $\psi = 0^\circ$. Isso resulta na matriz de rotação \mathbf{T} igual a uma matriz identidade de ordem 6. Assim, os deslocamentos nodais no sistema local são:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,401 \cdot 10^{-2} \\ -6,146 \cdot 10^{-2} \\ 9,469 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 1,063 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}. \quad (16.66)$$

Esses valores nodais podem ser levados à aproximação da curva elástica de flexão, eq.(16.9):

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{x}) &= \bar{v}_1\phi_1(\bar{x}) + \bar{\theta}_1\phi_2(\bar{x}) + \bar{v}_2\phi_3(\bar{x}) + \bar{\theta}_2\phi_4(\bar{x}), \\ &= (-6,146 \cdot 10^{-2})\phi_1(\bar{x}) + (9,469 \cdot 10^{-4})\phi_2(\bar{x}) + (0)\phi_3(\bar{x}) + (1,063 \cdot 10^{-3})\phi_4(\bar{x}) \end{aligned} \quad (16.67)$$

Trazendo as expressões das funções de forma $\phi_1(\bar{x})$ - $\phi_4(\bar{x})$ de (16.10) e simplificando para $L_2 = 60$ mm, se obtém para o deslocamento e a rotação da normal no elemento 2:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{x}) &= -1,077 \cdot 10^{-8}(\bar{x} - 374,1)(\bar{x} - 60)(\bar{x} + 254,3), \\ \theta(\bar{x}) &= -3,231 \cdot 10^{-8}(\bar{x} - 241,4)(\bar{x} + 121,5), \quad \forall \bar{x} \in (0;60)\text{mm}. \end{aligned} \quad (16.68)$$

Nota-se que nenhuma das raízes dessas equações encontra-se no intervalo (0;60)mm. Apesar que o deslocamento é um polinômio cúbico, sua plotagem no intervalo é visualmente quase uma reta, como visto na Figura 16.12b.

16.4.2 Exemplo 16.3 - Viga escalonada

Determinar os deslocamentos e as reações vinculares e para a estrutura mostrada nas Figuras 16.14.

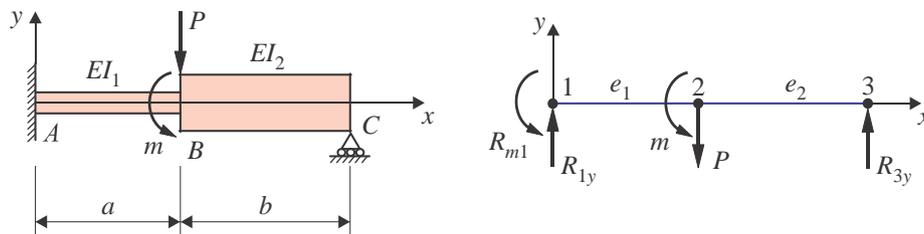


Figura 16.14: Dados do Exemplo 3 e modelo de elementos finitos de viga.

Solução:

Inicialmente, fazemos a discretização do problema, usando dois elementos de viga, como mostrado na Figura 16.14 a direita. Os dados são:

$$\begin{aligned}
 \text{Nó 1} &\rightarrow M_z^{e1}(\bar{x} = 0) = \frac{-21Pa}{46} = \frac{-21 \times 100 \times 1000}{276} = -45.652 \text{ Nmm}, \\
 \text{Nó 2} &\rightarrow M_z^{e1}(\bar{x} = a) = \frac{32Pa}{46} = \frac{32 \times 100 \times 1000}{46} = 69.565 \text{ Nmm}
 \end{aligned} \quad (16.86)$$

E as tensões normais de flexão nos nós do elemento 1, no ponto $y = y_{\min} = -D/2$, são:

$$\begin{aligned}
 \text{Nó 1} &\rightarrow \sigma_x(0) = -\frac{M_z^{e1}(0)}{I_1} \bar{y}_{\min} = -\frac{(-45.652)}{10^5} (-50/2) = -11,41 \text{ MPa}, \\
 \text{Nó 2} &\rightarrow \sigma_x(a) = -\frac{M_z^{e1}(a)}{I_1} \bar{y}_{\min} = -\frac{69.565}{10^5} (-50/2) = 17,4 \text{ MPa}.
 \end{aligned} \quad (16.87)$$

No **elemento 2** os esforços nos dois nós locais do elemento, isto é, o nó local 1 (que está logo à direita do nó global 2), e no nó local 2 (que está logo à esquerda do nó global 3), são:

$$\begin{aligned}
 \text{Nó 2} &\rightarrow M_z^{e2}(\bar{x} = 0) = \frac{-14Pa}{46} = \frac{-14 \times 100 \times 1000}{276} = -30.435 \text{ Nmm}, \\
 \text{Nó 3} &\rightarrow M_z^{e2}(\bar{x} = b) = 0.
 \end{aligned} \quad (16.88)$$

As tensões normais de flexão nos nós do elemento 2, no ponto $\bar{y} = \bar{y}_{\min} = -D/2$, são:

$$\begin{aligned}
 \text{Nó 2} &\rightarrow \sigma_x(0) = -\frac{M_z^{e2}(0)}{I_2} y_{\min} = -\frac{(-30.435)}{2 \cdot 10^5} (-59,46/2) = -4,52 \text{ MPa}, \\
 \text{Nó 2} &\rightarrow \sigma_x(b) = -\frac{M_z^{e2}(b)}{I_2} y_{\min} = 0.
 \end{aligned} \quad (16.89)$$

Observação - Os esforços de momento e cortantes e as tensões normais na cota \bar{y}_{\min} em cada elemento são visualizados na Figura 16.16. Nota-se que os esforços mostrados seguem a convenção de esforços de teoria de vigas, mostrados na Figura 16.16a e são distintos dos esforços nodais de elementos finitos vistos na Figura 16.1. A convenção usada na teoria de vigas é aquela associada à equação diferencial da curva elástica, eq. (16.1) e às expressões de momento fletor e cortante, eqs. (16.13) e (16.82). Já a convenção de **esforços nodais** do MEF, vista na Figura 16.1 é associada às definições das matrizes de rigidez dos elementos.

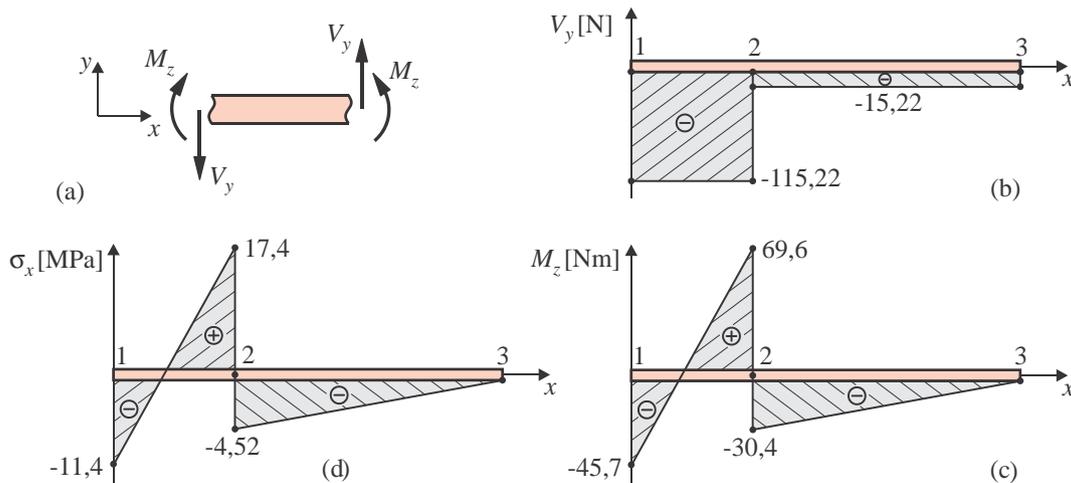


Figura 16.16: Esforços e tensões na viga escalonada do Exemplo 3.

Os **esforços cortantes** em ambos os elementos são obtidos derivando as expressões dos mo-

mentos fletores, o que produz a eq.(16.82)₃. Para o elemento 1, (16.83) produz o cortante $V_y(\bar{x}) = -53P/46 = -115,22$ N. No elemento 2, o cortante é $V_y(\bar{x}) = -7P/46 = -15,22$ N.

16.4.3 Exemplo 16.4 - Viga com seção uniforme

Determine a solução para o problema de flexão mostrado na Figura 16.17, usando elementos finitos, $P = 100$ N, $m = 0$, $E = 200$ GPa, $a = b = 500$ mm, seção tubular uniforme com $I_1 = 10^4$ mm⁴,

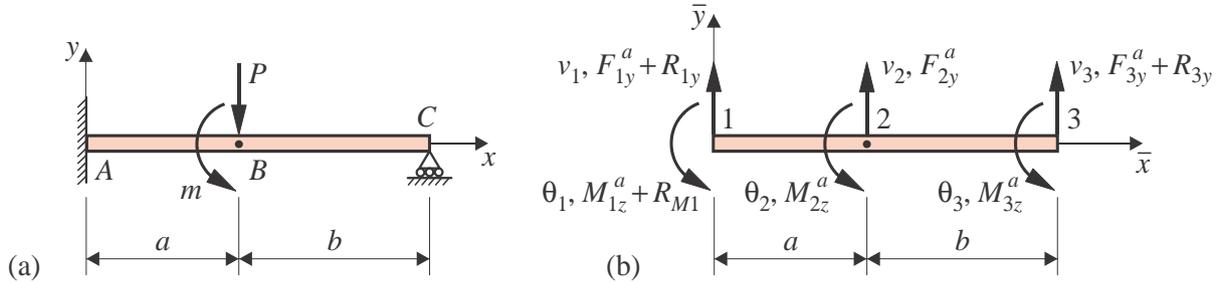


Figura 16.17: Dados do Exemplo 4 e modelo de elementos finitos de viga.

Solução

A Figura 16.17b mostra o modelo de elementos finitos utilizado, com dois elementos e três nós, e o carregamento e condições de contorno. Repetindo as operações do Exemplo 3, obtém-se o sistema algébrico de equações de equilíbrio da viga:

$$\mathbf{F} = \frac{EI_{zz}}{a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a & 0 & 0 \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6a & 24 & 0 & -12 & 6a \\ 6a & 2a^2 & 0 & 8a^2 & -6a & 2a^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6a & 12 & -6a \\ 0 & 0 & 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}. \quad (16.90)$$

O vetor força é o mesmo do Exemplo 3, eq. (16.73). As condições de contorno de deslocamentos são as mesmas do Exemplo 3: $v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$, e são aplicadas da mesma forma, anulando as linhas e colunas correspondentes a esses graus de liberdade. A aplicação dessas condições gera o sistema auxiliar modificado $\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{F}}$, onde $\tilde{\mathbf{F}}$ é obtido aplicando os dados de carregamento:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \{ 0 \ 0 \ -P \ m \ 0 \ 0 \}^T. \quad (16.91)$$

A solução é

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{a}{96EI_{zz}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3ma - 7Pa^2 \\ 3(5m - Pa) \\ 0 \\ 12(Pa - m) \end{Bmatrix}. \quad (16.92)$$

Substituindo os valores numéricos do problema se obtém os deslocamentos nodais

$$\begin{Bmatrix} R_{1y} \\ R_{M1} \\ 0 \\ 0 \\ R_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 62,75 \text{ N} \\ 12.750 \text{ Nmm} \\ -100 \text{ N} \\ 0 \\ 37,37 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 62,75 \text{ N} \\ 12.750 \text{ Nmm} \\ -100 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 62,75 \text{ N} \\ 12.750 \text{ Nmm} \\ 0 \\ 0 \\ 37,37 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (16.99)$$

Nota-se que a força necessária de ser aplicada na seção C para gerar o deslocamento $v_3 = \bar{v} = 1$ mm é $R_{3y} = 37,37$ N, em conjunto com a força $P = -100$ N no nó 2.

16.5 Carga distribuída no elemento

Quando se tem apenas cargas concentradas, sua incorporação às equações de equilíbrio é feita por simples adição aos graus de liberdade adequados no vetor força aplicada conhecida \mathbf{F}^a . No caso de cargas transversais distribuídas aplicadas sobre o elemento, o procedimento consiste em determinar um conjunto de valores nodais de forças concentradas a serem incorporados a \mathbf{F}^a . Essas forças concentradas são determinadas de forma a produzirem na viga um efeito similar àquele da carga distribuída. Apresentaremos aqui apenas os resultados, e deixamos sua dedução, que é baseada no princípio dos trabalhos virtuais, para literatura adequada, por exemplo, Mendonça e Fancello [7].

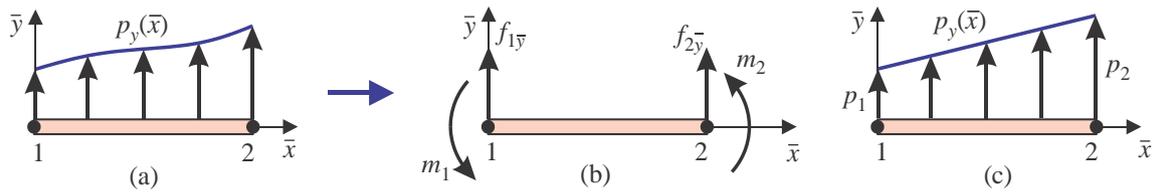


Figura 16.18: (a) Carga transversal distribuída arbitrária sobre um elemento de viga; (b) forças nodais equivalentes; (c) carga com variação linear.

Considere um elemento de viga submetido a uma **carga transversal arbitrária** $p_y(\bar{x})$ como na Figura 16.18a, definido em termos do sistema local de coordenadas do elemento. O vetor de cargas nodais equivalentes a essa carga distribuída é obtida a partir das funções de forma $\phi(\bar{x})$ (dadas em (16.10)), por

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \int_{\bar{x}=0}^{L_e} p_y(\bar{x}) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} d\bar{x} \quad (16.100)$$

onde f_{y1} , m_1 , f_{y2} e m_2 são as forças nodais equivalentes, como ilustradas na Figura 16.18b. Esse vetor deve ser sobreposto aos vetores força equivalentes de carga distribuída nos demais elementos e às forças concentradas aplicadas sobre a estrutura, somando todas as forças aplicadas a cada nó global.

Consideremos o caso particular de uma **carga** $p_y(\bar{x})$ **variando linearmente** ao longo do elemento, como na Figura 16.18c, definida pelos valores p_1 e p_2 , de forma que a carga é definida pelo polinômio linear $p_y(\bar{x}) = p_1(L_e - \bar{x})/L_e + p_2(\bar{x}/L_e)$. As forças concentradas equivalentes são obtidas efetuando as operações (16.100):

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \begin{Bmatrix} f_{1\bar{y}} \\ m_1 \\ f_{2\bar{y}} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{L_e}{60} \begin{Bmatrix} 3(7p_1 + 3p_2) \\ L(3p_1 + 2p_2) \\ 3(3p_1 + 7p_2) \\ -L(2p_1 + 3p_2) \end{Bmatrix} \quad (16.101)$$

No caso final de **carga uniforme**, $p_y(x) = p_o$, se tem

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \begin{Bmatrix} f_{1\bar{y}} \\ m_1 \\ f_{2\bar{y}} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{p_o L_e}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} \quad (16.102)$$

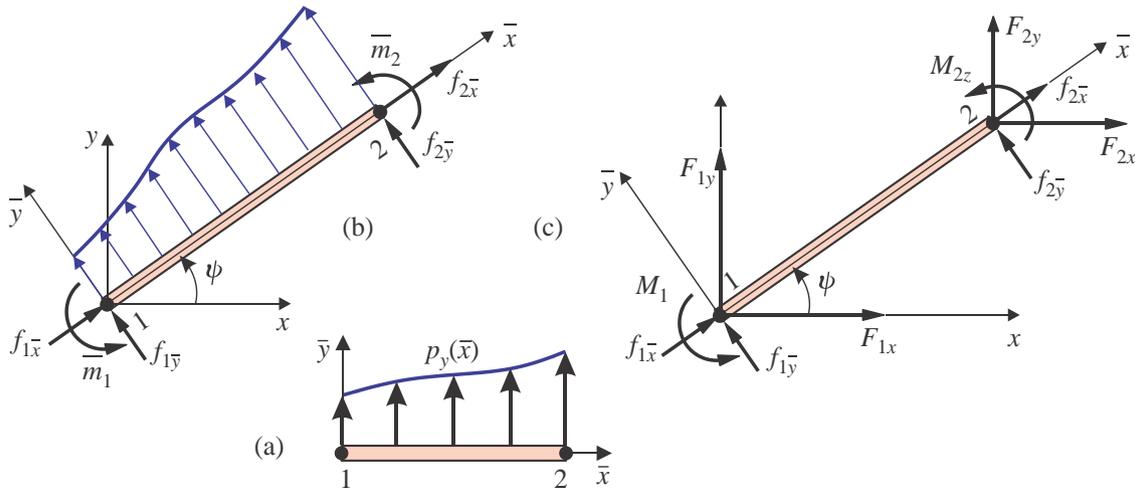


Figura 16.19: (a) Carga distribuída no sistema local de coordenadas, (b) carga com forças equivalentes no sistema local, (c) forças equivalentes no sistema global de coordenadas.

16.5.1 Rotação do vetor força para uso em elementos inclinados

Todo o desenvolvimento acima é restrito ao sistema local de coordenadas do elemento, como na Figura 16.19a. Se o elemento estiver rotacionado em relação ao sistema global, como na Figura 16.19b, o vetor força equivalente no sistema local do elemento, eqs. (16.100)-(16.102), precisa ser rotacionados ao sistema global. Isso é feito usando a eq. (16.41). Primeiro, o vetor (16.100) precisa ser expandido de forma a incluir as forças axiais. No caso de ausência de forças axiais distribuídas, tem-se o vetor local como:

$$\bar{\mathbf{F}}^e \equiv \begin{Bmatrix} f_{1\bar{x}} \\ f_{1\bar{y}} \\ m_{1z} \\ f_{2\bar{x}} \\ f_{2\bar{y}} \\ m_{2z} \end{Bmatrix}^e = \int_{x=0}^L p_y(\bar{x}) \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_1 \\ \phi_1 \\ 0 \\ \phi_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} d\bar{x}. \quad (16.103)$$

Em seguida, o sistema local é rotacionado às direções globais por $\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{F}}^e$ usando a matriz de rotação plana (16.41). Em forma aberta, no **caso particular de rotação plana**, essa relação fica

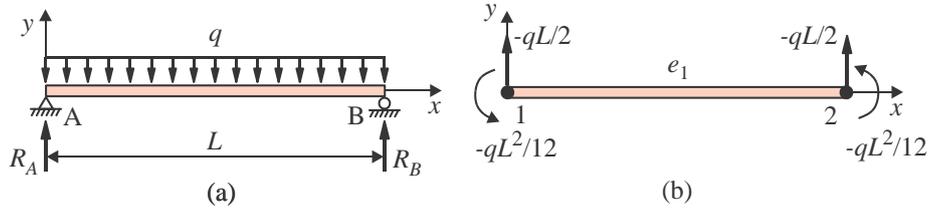


Figura 16.20: (a) Viga bi-apoiada do Exemplo 16.6; (b) modelo de um EF de viga com as cargas equivalentes.

Para um único elemento, a eq.(16.47) produz a matriz de rigidez no sistema global de coordenadas, que coincide com o sistema local do elemento, com $\psi = 0^\circ$. O vetor força nodal equivalente ao carregamento distribuído uniforme é obtido de (16.106), e são visualizados na Figura 16.20b. Logo, a equação de equilíbrio é

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = -\frac{qL}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ L \\ 0 \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ 0 \\ 0 \\ R_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16.107)$$

As condições de contorno de deslocamento são: $u_1 = v_1 = v_2 = 0$, de forma que se tem as reações R_{1x} , R_{1y} e R_{2y} . Impondo as condições de contorno no sistema, se obtém o sistema modificado

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = -\frac{qL^2}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad (16.108)$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{24EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (16.109)$$

A deflexão transversal no elemento é dada pelas funções de forma conforme (16.9):

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{x}) &= \phi_1(\bar{x})\bar{v}_1 + \phi_2(\bar{x})\bar{\theta}_1 + \phi_3(\bar{x})\bar{v}_2 + \phi_4(\bar{x})\bar{\theta}_2, \\ &= \phi_2(\bar{x})\bar{\theta}_1 + \phi_4(\bar{x})\bar{\theta}_2, \\ &= \frac{qL^3}{24EI} \left[-\frac{\bar{x}}{L} \left(L - 2\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{L} \right) + \left(\frac{\bar{x}^3}{L^2} - \frac{\bar{x}^2}{L} \right) \right] = -\frac{qL^3}{24EI} \bar{x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{L} \right). \end{aligned} \quad (16.110)$$

Em $\bar{x} = L/2$ e em $\bar{x} = L/4$ se tem:

$$\bar{v}(L/2) = -\frac{qL^4}{96EI}, \quad \text{e} \quad \bar{v}(L/4) = -\frac{qL^4}{384EI}, \quad (16.111)$$

A **solução exata** obtida pela integração da equação diferencial da curva elástica foi obtida em

Por exemplo, no meio do elemento 1, isto é, em $\bar{x} = L_e/2$, (i.e., em $L/4$), se tem

$$\bar{v}(\bar{x}) = -\frac{9qL_e^4}{32EI} = -\frac{9qL^4}{512EI} \quad \text{em } \bar{x} = L_e/2, \quad (16.121)$$

A tabela mostra um resumo dos resultados exatos e de EF para o deslocamento no centro da viga e a 1/4 do apoio. Os valores entre parênteses são os valores de erro relativo. Nota-se que em $x = L/4$, o erro cai de 72 % para um EF para 1,75 % com dois elementos. As propriedades matemáticas do MEF fazem com que esse erro tenda a zero conforme se aumente o número de elementos no modelo.

EIv/qL^4	$x = L/2$	$x = L/4$
Exato	$5/384 = 0,01302$	$19/2.048 = 0,009277$
MEF 1 elemento	$1/96 = 0,0104$ (-20%)	$1/384 = 0,002604$ (-72%)
MEF 2 elementos	$5/384 = 0,01302$ (0%)	$7/768 = 0,009115$ (-1,75%)

16.5.3 Exemplo 16.7 - Pórtico sob carga distribuída

Considere o problema do pórtico ilustrado na Figura 16.22, em que o elemento 1 esteja sujeito a uma carga distribuída normal q , e que seja aplicada uma força concentrada F no nó 2. Determine os deslocamentos nodais. Use os dados: $B = 1$ m, $H = 2$ m, $q = 0,2$ N/mm, $F = 50$ N, $I = 10^4$ mm⁴, $E = 200$ GPa.

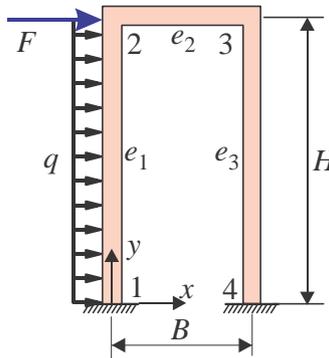


Figura 16.22: Pórtico do Exermplo 7.

Solução:

Os dados de conectividade dos elementos são:

Elemento	nó I	nó J
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Os comprimentos dos elementos 1 e 3 são $L_1 = L_3 = H = 2.000$ mm e do elemento 2 é $L_2 = 1.000$ mm. Os ângulos de orientação dos sistemas locais de coordenada em relação ao sistema global são $\psi_1 = 90^\circ$, $\psi_2 = 0^\circ$, $\psi_3 = -90^\circ$, respectivamente. As matrizes de rigidez de cada elemento são obtidas substituindo esses valores na eq. (16.47), o que produz as seguintes equações de equilíbrio dos elementos:

- Matriz de rigidez do elemento 1. $\psi_1 = 90^\circ$: (lembrar da notação $D6 = \cdot 10^6$)

$$\begin{bmatrix} 8,29 & 0,0 & -8,29D3 & -8,29 & 0,0 & -8,29D3 \\ & 5,76D4 & 0,0 & 0,0 & -5,76D4 & 0,0 \\ & & 1,11D7 & 8,29D3 & 0,0 & 5,53D6 \\ & & & 8,29 & 0,0 & 8,29D3 \\ & & & & 5,76D4 & 0,0 \\ sim. & & & & & 1,11D7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix}, \quad (16.122)$$

Capítulo 17

Apêndices

17.1 Fórmulas para vigas

A seguir há uma pequena coletânea de casos de vigas, resolvidos pela teoria de Euler-Bernoulli, denotados por $v(x)$.

Nos casos apresentados usa-se a seguinte notação:

$v(x)$ = deslocamento transversal pela teoria de Euler-Bernoulli.

v_{\max} = deslocamento máximo.

L = comprimento total da viga.

q = força distribuída por unidade de comprimento.

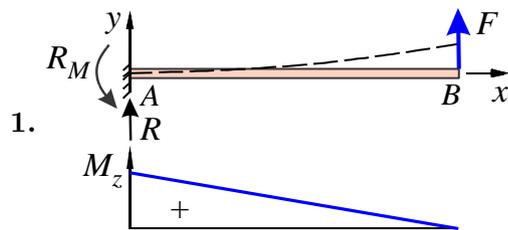
θ = $dv(x)/dx$, inclinação da superfície de referência.

E = módulo de elasticidade do material.

\bar{x} = posição do deslocamento máximo.

M_z, V_y = esforços de momento fletor e cortante na viga.

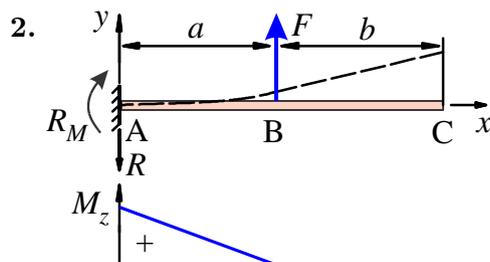
A convenção de sinais de esforços é aquela vista na Figura 2.16, pg. 23.



$$M_z(x) = -F(x - L), \quad V_{\max} = -R = F.$$

$$M_{\max} = FL, \quad R_M = -FL.$$

$$v(x) = \frac{Fx^2}{6EI}(3L - x), \quad v_{\max} = \frac{FL^3}{3EI}, \quad \theta_{\max} = \frac{FL^2}{2EI}.$$

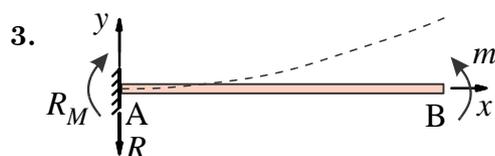


$$M_{AB}(x) = F(a - x), \quad R = F; \quad R_M = Fa,$$

$$v_{AB}(x) = \frac{Fx^2}{6EI}(3a - x),$$

$$v_{BC}(x) = \frac{Fa^2}{6EI}(3x - a),$$

$$v_{\max} = \frac{Fa^2}{6EI}(3L - a).$$



$$M_z(x) = m = R_M, \quad R = 0.$$

$$v(x) = \frac{mx^2}{2EI}, \quad v_{\max} = \frac{mL^2}{2EI}, \quad \theta_{\max} = \frac{mL}{EI}.$$

17.3 Fatores de concentração de tensões de tensões

Exceto onde indicado, a tensão nominal σ_o é baseada na seção mínima. $\sigma_{\max} = K_t \sigma_o$. Nas barras de seção retangular, h é a espessura.

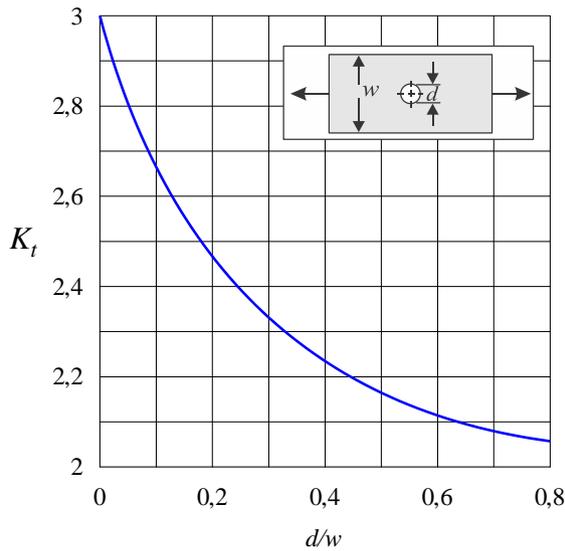


Figura Kt1. Tensão nominal $\sigma_o = F/(D - d)h$.

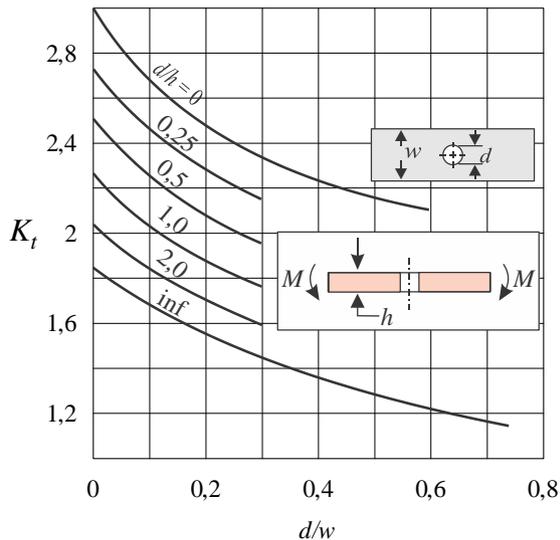


Figura Kt2. Tensão nominal $\sigma_o = M/I$, onde $I = (D - d)h^3/12$.

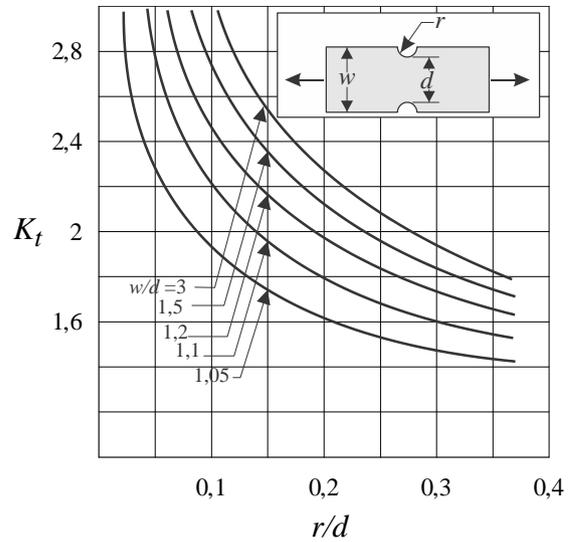


Figura Kt3

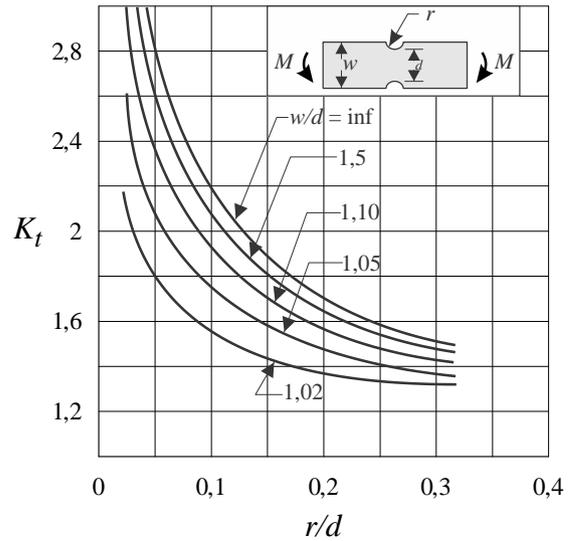


Figura Kt4

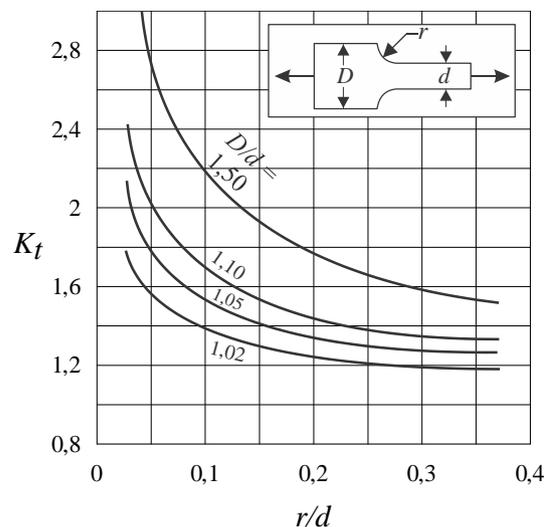


Figura Kt5