

## Capítulo 8

# Teoria de vigas

A solução do sistema formado pelas equações de equilíbrio, relações deformação-deslocamento e equações constitutivas para um dado sólido, é, via de regra, complicada, mesmo para o sistema linearizado do Capítulo 5. Os avanços computacionais e a presença de métodos numéricos robustos, como o dos elementos finitos, têm sido cruciais nesse sentido, mas ainda assim continua inviável tratar qualquer sólido como um contínuo tridimensional nas coordenadas independentes  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ .

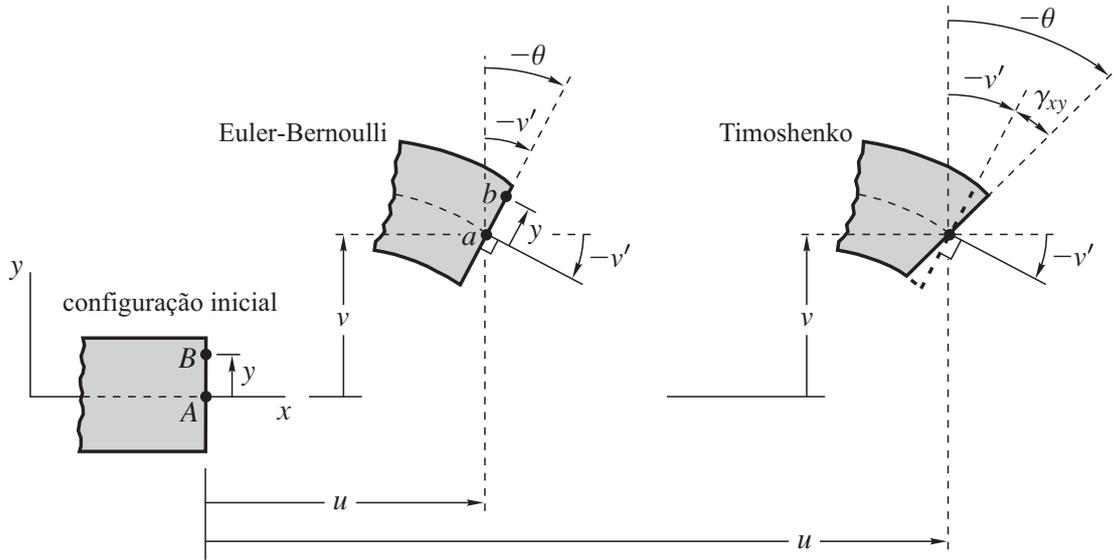
Dependendo da forma geométrica do sólido, simplificações adicionais permitem que ele seja analisado como um contínuo unidimensional ou bidimensional, passando a ser chamado de viga (unidimensional), placa (bidimensional plano; veja Capítulo 11) ou casca (bidimensional curvo; veja Capítulo 13). O cerne da mecânica das estruturas consiste desses modelos simplificados, não só por uma questão de simplicidade mas também de eficiência computacional. Dentre todos, as teorias de vigas representam os modelos mais simples. São teorias que unidimensionalizam o sistema de equações em relação às coordenadas  $X_i$ , reescrevendo o sistema em função de variáveis que dependem exclusivamente de uma única coordenada ( $X_1$ , digamos), e que servem para descrever sólidos de comprimento bem maior do que as demais dimensões. Resolver problemas numa teoria de vigas é o que há de mais comum na mecânica das estruturas.

Duas teorias de vigas são apresentadas neste capítulo. Uma delas, a mais simples de todas, é a *teoria clássica de vigas* ou, simplesmente, *teoria de vigas de Euler-Bernoulli*.<sup>1</sup> A outra, menos restritiva, é a *teoria de vigas de Timoshenko*<sup>2</sup> (veja um relato histórico sobre essa teoria em Elishakoff (2020)). As teorias são apresentadas em três grupos. No primeiro, elas aparecem linearizadas para vigas com movimento num mesmo plano. O segundo grupo estende o que é apresentado no primeiro grupo para vigas com movimento no espaço, inclusive sob torção não uniforme. Finalmente, no terceiro grupo, modificamos as teorias apresentadas no primeiro grupo de modo a incluir vigas sob grandes deslocamentos e rotações, mas ainda restritas a pequenas deformações.

---

<sup>1</sup>Daniel Bernoulli, matemático suíço nascido em Groningen em 1700, falecido em Basileia em 1782.

<sup>2</sup>Stephen Prokofyevich Timoshenko, engenheiro ucraniano nascido em Shpotovka em 1878, falecido em Wuppertal (Alemanha) em 1972.



**Figura 8.1** Viga na configuração inicial e na configuração atual, após deformar-se sob pequenas rotações e sob a hipótese de Euler-Bernoulli ou de Timoshenko.

## 8.1 Vigas no plano

Considere um sólido alongado na direção do eixo  $x = X_1$ , esboçado na Figura 8.1 em sua configuração inicial. A interseção do sólido com um plano ortogonal ao eixo  $x$  define uma *seção transversal*. Portanto, as seções transversais são paralelas ao plano descrito por  $y = X_2$  e  $z = X_3$ . Esse sólido, que passaremos a chamar de *viga*, é suposto aqui mover-se apenas no plano  $xy$  ao se deformar. Denominaremos  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$  os vetores unitários do sistema  $xyz$ .

### Relações deformação-deslocamento

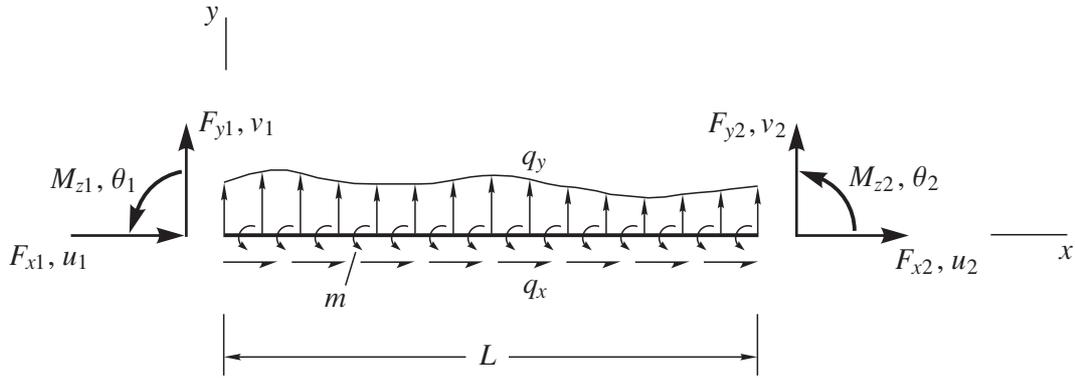
Sejam  $u_x, u_y, u_z$  as componentes do campo de deslocamento no sistema  $xyz$  e  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}/2, \gamma_{xz}/2, \gamma_{yz}/2$  as componentes independentes do tensor deformação. Para o tensor pequena deformação dado em (2.25), para o qual os gradientes  $|u_{x,x}|, |u_{x,y}|, \dots, \ll 1$ , temos que

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (8.1)$$

Particularizemos (8.1) para vigas sob a hipótese de Euler-Bernoulli ou de Timoshenko.

**Euler-Bernoulli** Considerando que a viga da Figura 8.1 move-se apenas no plano  $xy$  ao se deformar,  $u_x$  e  $u_y$  independem de  $z$  e  $u_z = 0$ . A hipótese de Euler-Bernoulli admite que uma seção transversal plana e normal ao eixo da viga antes da deformação permanece, após a deformação:

- (a) plana;
- (b) normal ao eixo deformado;
- (c) indeformada (seção infinitamente rígida).



**Figura 8.2** Diagrama de corpo livre de uma viga sob movimento no plano  $xy$ , mostrando todas as forças e momentos aplicados além dos deslocamentos e rotações nas extremidades.

### Equações de equilíbrio e condições de contorno

Usaremos a seguir o princípio dos deslocamentos virtuais na dedução das equações de equilíbrio e na identificação das possíveis condições de contorno porque, assim procedendo, teremos certeza que as equações de equilíbrio e as condições de contorno obtidas serão consistentes com o campo (8.4) ou (8.7) admitido para o deslocamento. Lembramos que o princípio equivale matematicamente às equações de equilíbrio e às condições de contorno mecânicas (veja Seção 7.4).

**Timoshenko** A Figura 8.2 mostra uma viga restrita a movimentos no plano  $xy$ . Como um sólido, a viga está sujeita a forças externas de volume e de superfície representadas na figura por um carregamento estaticamente equivalente aplicado no seu eixo: a força axial  $q_x$ , a força transversal  $q_y$  e o momento  $m$  distribuídos ao longo do comprimento  $L$  da viga, além das forças  $F_{xi}$ ,  $F_{yi}$  e dos momentos  $M_{\theta_i}$  nas extremidades. Deixaremos para a próxima seção os detalhes sobre a identificação desse carregamento a partir das forças originais de volume e de superfície. A figura mostra também os deslocamentos  $u_i$ ,  $v_i$  e as rotações  $\theta_i$  nas extremidades. Conforme (7.63), o trabalho virtual realizado pelo carregamento é

$$\delta W_e = \int_0^L (q_x \delta u + q_y \delta v + m \delta \theta) dx + F_{x1} \delta u_1 + F_{x2} \delta u_2 + F_{y1} \delta v_1 + F_{y2} \delta v_2 + M_{z1} \delta \theta_1 + M_{z2} \delta \theta_2. \quad (8.11)$$

O trabalho virtual realizado pelas forças internas escreve-se

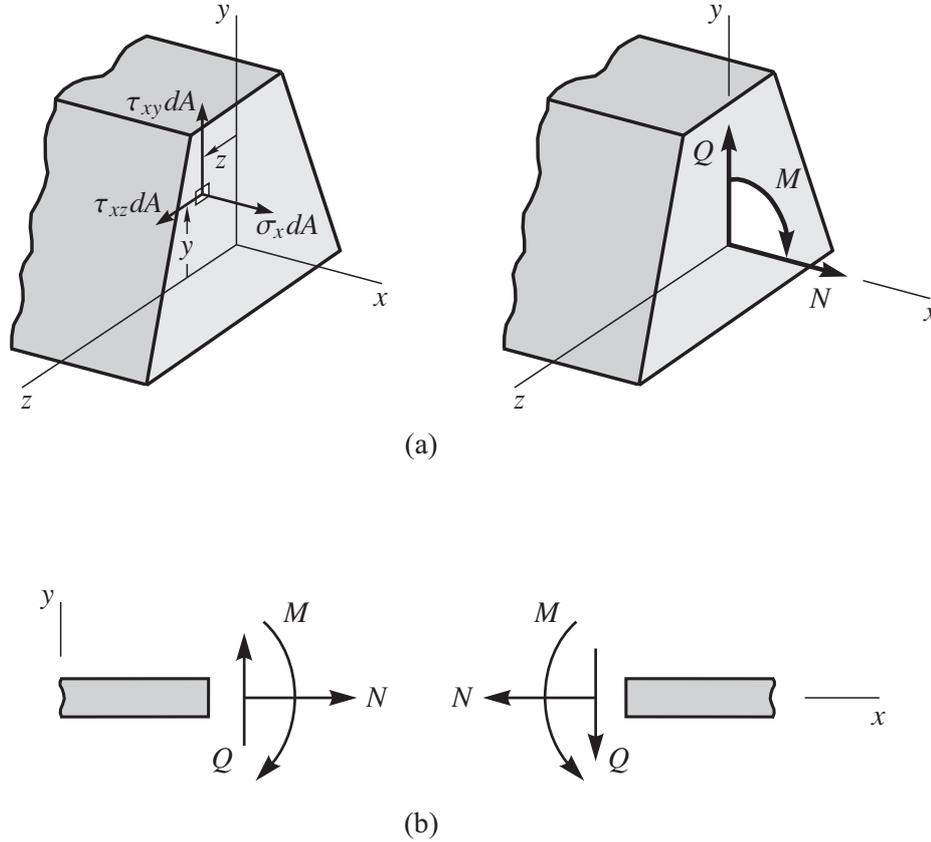
$$\delta W_i = - \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dx dy dz. \quad (8.12)$$

Mostremos em detalhes a unidimensionalização de (8.12). Como o campo de deformação numa viga de Timoshenko é dado por (8.8), então o campo de deformação virtual (compatível) será

$$\delta \epsilon_x = \delta \epsilon_m + y \delta \kappa \quad \delta \gamma_{xy} = \delta \gamma \quad \delta \epsilon_y = \delta \epsilon_z = \delta \gamma_{xz} = \delta \gamma_{yz} = 0 \quad (8.13)$$

e, portanto,

$$\delta W_i = - \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz = - \int_0^L \int_A [\sigma_x (\delta \epsilon_m + y \delta \kappa) + \tau_{xy} \delta \gamma] dA dx. \quad (8.14)$$



**Figura 8.3** (a) Seção transversal com as três componentes  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  do vetor tensão e com os três esforços  $N$ ,  $Q$  e  $M$  não nulos que atuam sobre ela; (b) sentido positivo dos esforços  $N$ ,  $Q$  e  $M$  nas duas faces de uma seção transversal.

A integração na seção transversal de área  $A$  resulta em

$$\delta W_i = - \int_0^L (N \delta \epsilon_m + M \delta \kappa + Q \delta \gamma) dx \quad (8.15)$$

sob a definição

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad Q = \int_A \tau_{xy} dA \quad M = \int_A \sigma_x y dA. \quad (8.16)$$

A *força normal*  $N$ , a *força cortante*  $Q$  e o *momento fletor*  $M$  são chamados de *tensões generalizadas* por realizarem trabalho com as *deformações generalizadas*  $\epsilon_m$ ,  $\gamma$  e  $\kappa$  da mesma forma que as tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  realizam trabalho com as deformações  $\epsilon_x$  e  $\gamma_{xy}$ . Dizemos que  $N$ ,  $Q$  e  $M$  formam com  $\epsilon_m$ ,  $\gamma$  e  $\kappa$ , respectivamente, pares conjugados no trabalho. As tensões generalizadas identificadas por  $\delta W_i$  é uma consequência direta do campo de deslocamento admitido pela teoria e correspondem a valores médios da distribuição do vetor tensão na seção transversal da viga (veja Figura 8.3). Elas são em número igual ao das deformações generalizadas. Aliás, o fato de ser o número de tensões igual ao de deformações é uma propriedade de todas as teorias na mecânica das estruturas. Ela é percebida naturalmente quando se emprega o conceito de trabalho virtual por sempre envolver tensão e deformação aos pares. Assim, o princípio dos deslocamentos virtuais escreve-se

$$\begin{aligned} \delta W_e + \delta W_i = & - \int_0^L (N \delta \epsilon_m + M \delta \kappa + Q \delta \gamma) dx + \int_0^L (q_x \delta u + q_y \delta v + m \delta \theta) dx \\ & + F_{x1} \delta u_1 + F_{x2} \delta u_2 + F_{y1} \delta v_1 + F_{y2} \delta v_2 + M_{z1} \delta \theta_1 + M_{z2} \delta \theta_2 = 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$



**Figura 8.4** A extremidade da viga é simplesmente apoiada nos dois primeiros casos, engastada no terceiro caso e livre no último.

Em  $0 < x < L$  as quantidades  $\delta u$ ,  $\delta v$  e  $\delta \theta$  são arbitrárias e independentes. Em  $x = 0, L$  um deslocamento virtual ( $\delta u_1, \delta v_1$ , etc.) é nulo se o correspondente deslocamento real for conhecido; caso contrário, é arbitrário e independente dos demais deslocamentos. Portanto, do lema fundamental do cálculo variacional

$$N' + q_x = 0 \quad Q' + q_y = 0 \quad M' - Q - m = 0, \quad (8.23)$$

que são as equações de equilíbrio, na forma local, que devem ser satisfeitas em cada ponto do domínio  $0 < x < L$ . Identificamos a primeira equação como sendo de equilíbrio de translação na direção de  $x$ , por aparecer no integrando multiplicada pelo deslocamento  $\delta u$ ; por razões análogas, identificamos a segunda equação como sendo de equilíbrio de translação na direção de  $y$  e a terceira equação como sendo de equilíbrio de rotação em torno do eixo  $z$  (veja Problemas 8.1 e 8.2). A primeira equação é desacoplada das demais. O acoplamento pode até ainda ocorrer dependendo das equações constitutivas.

Se  $\delta u_1$  for arbitrário então  $N = -F_{x1}$  em  $x = 0$ ; se não for, é porque  $\delta u_1 = 0$  ( $u_1$  é igual a um certo valor  $\bar{u}_1$  conhecido:  $u_1 = \bar{u}_1$ ). Estendendo esse procedimento aos demais termos do contorno, identificamos todas as possíveis condições de contorno geométricas e mecânicas:

$$\begin{array}{llll}
 u_1 = \bar{u}_1 & \text{ou} & N = -F_{x1} & \\
 v_1 = \bar{v}_1 & \text{ou} & Q = -F_{y1} & \\
 \theta_1 = \bar{\theta}_1 & \text{ou} & M = M_{z1} & \text{em } x = 0 \\
 \\
 u_2 = \bar{u}_2 & \text{ou} & N = F_{x2} & \\
 v_2 = \bar{v}_2 & \text{ou} & Q = F_{y2} & \\
 \theta_2 = \bar{\theta}_2 & \text{ou} & M = -M_{z2} & \text{em } x = L. \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} & & \underbrace{\hspace{2cm}} & \\
 \text{cond. cont. geométricas} & & \text{cond. cont. mecânicas} & 
 \end{array} \quad (8.24)$$

A Figura 8.4 mostra a extremidade de uma viga sob alguns tipos comuns de apoio. Se  $v = M = 0$  é o que caracteriza uma extremidade *simplesmente apoiada*, então os dois primeiros apoios indicados na figura são “simples”; se  $v = \theta = 0$  é o que caracteriza uma extremidade *engastada*, então o terceiro apoio é um “engaste”; dizemos que a extremidade é *livre* no último caso.

Além de identificar as tensões generalizadas  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  e conduzir às equações de equilíbrio (8.23), tudo de maneira consistente com o campo de deslocamento admitido pela teoria, o uso do princípio

dos deslocamentos virtuais tem também a vantagem de identificar corretamente todas as possíveis condições de contorno. Nesse princípio, as condições de contorno essenciais são as condições de contorno geométricas e correspondem à especificação das variáveis primárias  $(u, v, \theta)$ ; as condições de contorno naturais, que já se acham inseridas em  $\delta W_e + \delta W_i = 0$ , são as condições de contorno mecânicas e correspondem à especificação das variáveis secundárias  $(N, Q, M)$ . Um, e somente um, elemento de cada par  $(u, N)$ ,  $(v, Q)$  e  $(\theta, M)$  deve ser especificado em cada extremidade (veja o último dos Comentários 6.1).

**Euler-Bernoulli** Vamos denominar por  $E_u = 0$ ,  $E_v = 0$  e  $E_\theta = 0$  a primeira, segunda e terceira equações de equilíbrio (8.23), para reescrever a expressão (8.22) simbolicamente na forma

$$\int_0^L (E_u \delta u + E_v \delta v - E_\theta \delta \theta) dx + \text{termos de contorno} = 0. \quad (8.25)$$

Por simplicidade, a contribuição oriunda das extremidades da viga é indicada por “termos de contorno”.

Com a hipótese de Euler-Bernoulli, a rotação  $\theta$  deixa de ser variável independente para tornar-se função da componente  $v$  do deslocamento:

$$\gamma = v' - \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = v' \quad \Rightarrow \quad \delta \theta = \delta v'. \quad (8.26)$$

Portanto,

$$\int_0^L (E_u \delta u + E_v \delta v - E_\theta \delta v') dx + \text{termos de contorno} = 0. \quad (8.27)$$

Sob essa hipótese, aparece derivada de  $\delta v$  no domínio cuja remoção por integração por partes,

$$\int_0^L E_\theta \delta v' dx = \int_0^L (E_\theta \delta v)' dx - \int_0^L E_\theta' \delta v dx = E_\theta \delta v|_0^L - \int_0^L E_\theta' \delta v dx, \quad (8.28)$$

resulta em

$$\int_0^L [E_u \delta u + (E_v + E_\theta') \delta v] dx + \text{termos de contorno} - E_\theta \delta v|_0^L = 0. \quad (8.29)$$

As equações de equilíbrio que devem ser satisfeitas em cada ponto do domínio  $0 < x < L$ , segundo o lema fundamental do cálculo variacional, são agora dadas por  $E_u = 0$  e  $E_v + E_\theta' = 0$ . Ou seja,

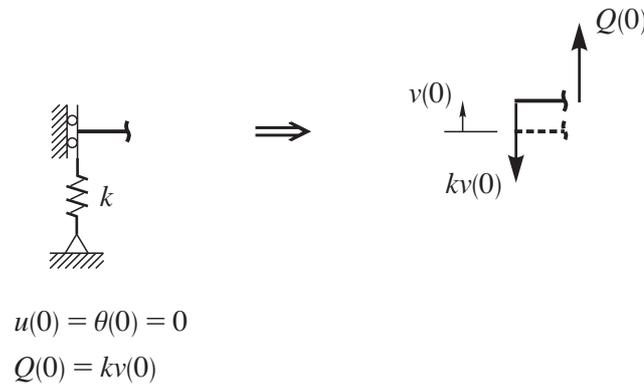
$$N' + q_x = 0 \quad M'' + q_y - m' = 0. \quad (8.30)$$

Identificamos a primeira equação como sendo de equilíbrio de translação na direção de  $x$  e a segunda equação como sendo de equilíbrio de translação na direção de  $y$ , por aparecerem no integrando multiplicadas por  $\delta u$  e  $\delta v$ , respectivamente.

A imposição da dependência entre  $\theta$  e  $v$  ( $\theta = v'$ ) não elimina a rotação do campo de deslocamento,

$$u_x(x, y) = u(x) - y\theta(x) \quad \Rightarrow \quad u_x(x, y) = u(x) - yv', \quad (8.31)$$

mas a equação  $E_\theta = 0$  do equilíbrio de rotação da teoria de Timoshenko não é mais explicitada, passando a incorporar-se à segunda equação  $E_v = 0$ . A força cortante é cancelada na operação



**Figura 8.5** Engaste parcialmente liberado de mover-se verticalmente sob a restrição de uma mola linear de rigidez  $k$ .

A primeira equação em (8.40), que descreve o comportamento da viga sob deformação puramente axial, é desacoplada das demais equações que descrevem o comportamento à flexão. Perceba que a mudança de teoria só interfere na descrição do comportamento da viga à flexão.

#### Comentários 8.2:

- Quando no contorno o elemento especificado do par  $(u, N)$ ,  $(v, Q)$  ou  $(\theta, M)$  é o deslocamento, então o conhecemos; quando é o esforço, não necessariamente o conhecemos. Para exemplificar, observe na Figura 8.5 as condições de contorno em  $x = 0$  de um engaste parcialmente liberado de mover-se verticalmente sob a restrição de uma mola linear de rigidez  $k$ . Conhecemos  $u(0) = 0$  e  $\theta(0) = 0$ . Como não conhecemos  $v(0)$ , devemos especificar  $Q(0)$  sabendo-se que é proporcional ao deslocamento  $v(0)$  desconhecido. Se um deslocamento  $v(0)$  positivo for dado ao apoio, o equilíbrio de translação vertical na vizinhança mostra que  $Q(0) = kv(0)$ . Se não houvesse a mola ( $k = 0$ ), conheceríamos literalmente a força cortante  $Q(0) = 0$ .
- A Tabela 8.1 traz um resumo das equações obtidas para a viga no plano. Note que uma teoria de vigas reduz o problema tridimensional a um conjunto de variáveis que só dependem da coordenada axial  $x$ . A Figura 8.6 sintetiza as inter-relações entre as quantidades incógnitas e as quantidades especificadas numa viga de Euler-Bernoulli ou de Timoshenko.

### Pós-processamento

Resolvidas as equações, levando-se em conta as condições de contorno, as informações da viga como um sólido tridimensional podem ser recuperadas como explicado a seguir.

**Euler-Bernoulli** O deslocamento e a deformação num ponto qualquer da viga são dados por (8.4) e (8.5), respectivamente. As componentes relevantes da tensão são  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$ . Usando as equações constitutivas,

$$\sigma_x = E\epsilon_x = E(\epsilon_m + y\kappa) = E\left(\frac{N}{EA} + y\frac{M}{EI}\right) = \frac{N}{A} + y\frac{M}{I}. \quad (8.41)$$

Observe que os efeitos de  $N$  e  $M$  sobre  $\sigma_x$  podem ser atenuados com o aumento de  $A$  e com o aumento

**Tabela 8.1** Equações das teorias apresentadas para a viga no plano.

<b>Euler-Bernoulli</b>	
2 relações deformação-deslocamento	(8.6)
2 equações de equilíbrio	(8.30)
2 equações constitutivas	(8.38)
total: 6	
incógnitas: $u, v, \epsilon_m, \kappa, N, M$ ( $Q = M' - m$ não é uma quantidade independente)	
↓	
2 equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos	(8.39)
incógnitas: $u, v$	
<b>Timoshenko</b>	
3 relações deformação-deslocamento	(8.9)
3 equações de equilíbrio	(8.23)
3 equações constitutivas	(8.37)
total: 9	
incógnitas: $u, v, \theta, \epsilon_m, \kappa, \gamma, N, Q, M$	
↓	
3 equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos	(8.40)
incógnitas: $u, v, \theta$	

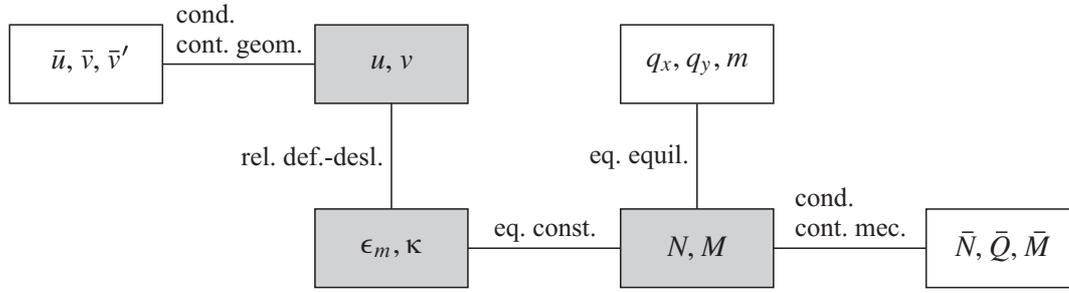
de  $I$ , respectivamente. Não podemos avaliar a tensão de cisalhamento pelas equações constitutivas numa viga de Euler-Bernoulli. Podemos, no entanto, recorrer ao equilíbrio para determinar a força cortante,

$$Q = M' - m, \quad (8.42)$$

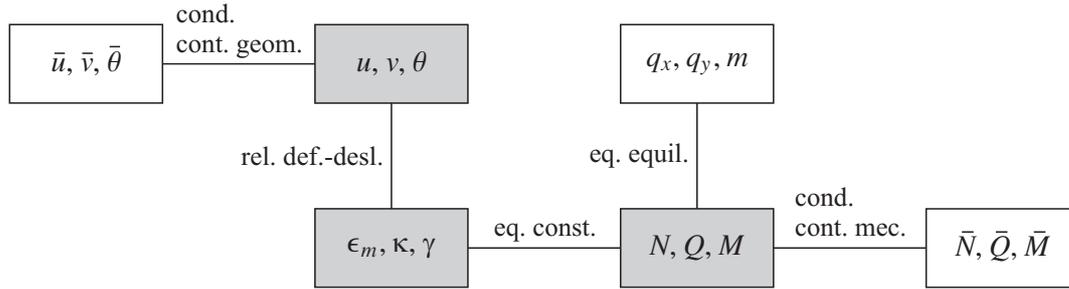
e, com base no teorema do valor médio  $\tau_{xy}^* A = \int_A \tau_{xy} dA = Q$ , adotar

$$\tau_{xy} \approx \frac{Q}{A}. \quad (8.43)$$

Uma forma de melhorar a precisão de  $\tau_{xy}$ , ainda que usando o resultado de  $\sigma_x$  dado em (8.41), é impor a condição de equilíbrio para a viga tratando-a como um sólido tridimensional. Para isso, destaquemos dela um trecho de comprimento  $\Delta x$ , não necessariamente pequeno, indicado na Figura 8.7. Mediante um plano de corte paralelo ao plano  $xz$ , a uma distância  $y_1$  na qual desejamos determinar  $\tau_{xy}$ , separemos a parte superior da viga indicada na figura à direita. Sabendo-se que a distribuição de  $\tau_{xy}$  no plano de corte produz a força resultante  $\tau_{xy}^* b \Delta x$ , onde  $\tau_{xy}^*$  representa um valor de  $\tau_{xy}$  em algum ponto na região retangular de largura  $b$  e comprimento  $\Delta x$  (teorema do valor



Viga de Euler-Bernoulli



Viga de Timoshenko

**Figura 8.6** Inter-relações entre as quantidades incógnitas (em cinza) e as quantidades especificadas numa viga de Euler-Bernoulli ou de Timoshenko.

médio), a condição de equilíbrio de translação na direção axial escreve-se

$$\int_{A_1} (\sigma_x + \Delta\sigma_x) dA - \int_{A_1} \sigma_x dA - \tau_{xy}^* b \Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{A_1} \Delta\sigma_x dA - \tau_{xy}^* b \Delta x = 0 \quad (8.44)$$

onde  $A_1$  é a área da seção acima da ordenada  $y_1$ . Dividindo a equação por  $\Delta x$ ,

$$\int_{A_1} \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x} dA - \tau_{xy}^* b = 0, \quad (8.45)$$

no limite  $\Delta x \rightarrow 0$  obtemos para uma seção transversal

$$\int_{A_1} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dA - \tau_{xy} b = 0. \quad (8.46)$$

A tensão  $\tau_{xy}$  é suposta uniformemente distribuída na direção de  $z$  ( $\tau_{xy}$  independe de  $z$ ).

Substituindo (8.41) em (8.46), a expressão resultante

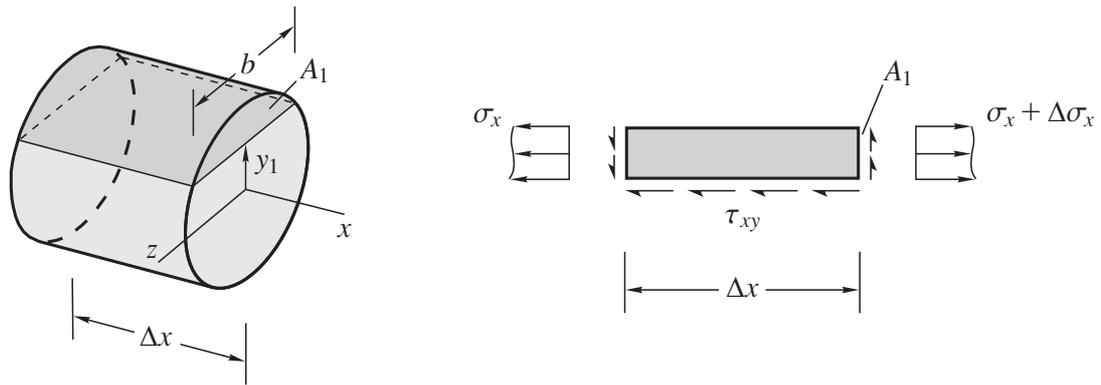
$$\int_{A_1} \frac{d}{dx} \left( \frac{N}{A} + y \frac{M}{I} \right) dA - \tau_{xy} b = 0 \quad (8.47)$$

simplifica-se para

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b} \int_{A_1} \frac{d}{dx} \left( \frac{N}{A} + y \frac{M}{I} \right) dA = \frac{1}{b} \left( \frac{A_1}{A} \frac{dN}{dx} + \frac{\bar{I}}{I} \frac{dM}{dx} \right) \quad (8.48)$$

em vigas cilíndricas ( $A$  e  $I$  constantes). A quantidade

$$\bar{I} = \int_{A_1} y dA \quad (8.49)$$



**Figura 8.7** Trecho da viga com o diagrama de corpo livre da porção acima de  $y = y_1$ .

é o momento de primeira ordem da área  $A_1$  em relação ao eixo  $z$ . Aplicando (8.23),

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b} \left[ -\frac{A_1}{A} q_x + \frac{\bar{I}}{I} (Q + m) \right]. \quad (8.50)$$

Na ausência de  $q_x$  e  $m$ , o que é usual,

$$\tau_{xy} = \frac{\bar{I}}{bI} Q. \quad (8.51)$$

**Timoshenko** O deslocamento e a deformação num ponto qualquer são dados por (8.7) e (8.8), respectivamente. A tensão  $\sigma_x$  é avaliada pela expressão (8.41) e a tensão  $\tau_{xy}$  por (8.51) ou, alternativamente, usando a equação constitutiva (8.37):

$$\tau_{xy} = KG\gamma_{xy} = KG\gamma = \frac{Q}{A}. \quad (8.52)$$

A avaliação por meio de (8.51) é mais precisa.

O efeito do cisalhamento na direção longitudinal pode ser observado na viga formada por lâminas justapostas da Figura 8.8, carregada transversalmente. Se não houver uma boa colagem entre as lâminas, ocorrerá deslizamento entre elas tornando a viga menos rígida. Não é difícil imaginar por que os estribos nas vigas de concreto armado são importantes na resistência ao cisalhamento.

**Exemplo 8.1** Considere uma viga de seção transversal retangular, indicada na Figura 8.9, de largura  $b$  e altura  $h$ .

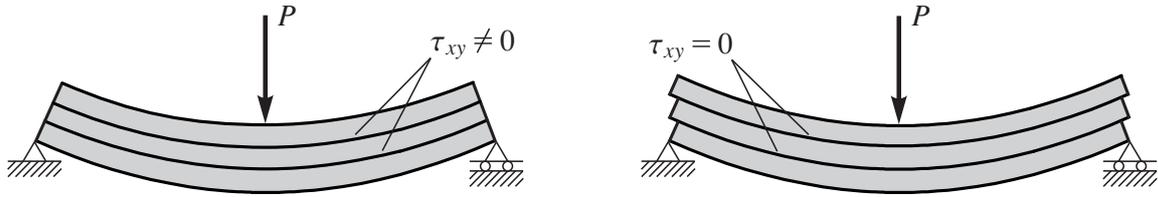
Nesta seção,

$$\bar{I} = \int_{A_1} \bar{y} dA = \int_y^{h/2} \bar{y} b d\bar{y} = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad I = \int_A \bar{y}^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{y}^2 b d\bar{y} = \frac{bh^3}{12}.$$

Por conveniência, a Figura 8.9 usa  $y$  em vez da ordenada  $y_1$  adotada na Figura 8.7. A expressão (8.51) reduz a

$$\tau_{xy} = \frac{3Q}{2A} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

A tensão de cisalhamento se distribui parabolicamente, é nula em  $y = \pm h/2$  e tem valor máximo  $1,5Q/A$  em  $y = 0$ . Vigas de madeira, por exemplo, são suscetíveis à ruptura por cisalhamento, apresentando trincas longitudinais em torno de  $y = 0$  nas seções com força cortante mais elevada. ■



**Figura 8.8** Efeito do cisalhamento numa viga formada por lâminas justapostas com e sem ligação entre elas.

**Exemplo 8.2** Existem várias propostas para o fator  $K$  na literatura (Kaneko, 1975; Gruttmann e Wagner, 2001; Hutchinson, 2001; Puchegger *et al.*, 2003). Um procedimento usual consiste em avaliar o trabalho virtual

$$\delta W = - \iiint \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dx dy dz$$

realizado por  $\tau_{xy}$  em duas situações: quando a tensão é dada pela expressão menos precisa

$$\tau_{xy} = KG\gamma_{xy} = \frac{Q}{A}$$

e quando a tensão é dada pela expressão mais precisa

$$\tau_{xy} = \frac{\bar{I}}{bI} Q,$$

igualando em seguida os dois resultados.

No primeiro caso, o trabalho é

$$\delta W = - \iiint \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dx dy dz = - \int \left( \int_A \frac{Q \delta Q}{KGA^2} dA \right) dx = - \frac{1}{K} \int \frac{Q \delta Q}{GA} dx.$$

No segundo caso, e especificamente para seções transversais retangulares em que

$$\tau_{xy} = \frac{3Q}{2A} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right),$$

o trabalho passa a ser

$$\begin{aligned} \delta W &= - \iiint \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dx dy dz = - \int \left( \int_A \tau_{xy} \frac{\delta \tau_{xy}}{G} dA \right) dx \\ &= - \int \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Q \delta Q}{G} \left[ \frac{3}{2A} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) \right]^2 b dy \right] dx = - \frac{6}{5} \int \frac{Q \delta Q}{GA} dx. \end{aligned}$$

Se  $K$  for escolhido de maneira que os trabalhos avaliados pelas duas expressões sejam iguais, então

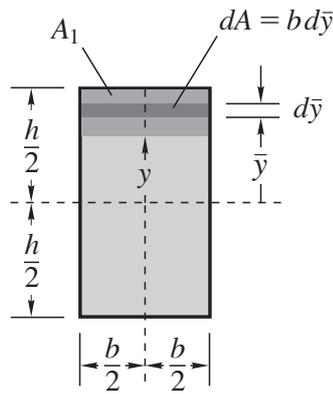
$$\frac{1}{K} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{5}{6}.$$

Esse valor muda para  $K = 9/10$  em seções transversais circulares (veja problema 8.9). ■

**Exemplo 8.3** Use as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko para determinar a deflexão na extremidade da viga da Figura 8.10a, sabendo-se que  $A$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $I$  e  $K$  são constantes.

As condições de contorno são

$$u = v = v' \text{ (ou } \theta) = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad N = M = 0 \quad Q = -P \quad \text{em } x = L.$$



**Figura 8.9** Exemplo 8.1: seção transversal retangular.

Visualize as condições de contorno mecânicas impondo o equilíbrio na vizinhança de  $x = L$  (veja Figura 8.10b).

Na primeira das equações (8.39) ou (8.40)  $q_x = 0$ :

$$EAu'' = 0.$$

Integrando,

$$EAu' = C_1 \quad EAu = C_1x + C_2.$$

Das condições de contorno

$$u = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad N = EAu' = 0 \quad \text{em } x = L,$$

determinamos as constantes de integração

$$C_1 = 0 \quad C_2 = 0.$$

Portanto,

$$u(x) = 0.$$

É um resultado comum às duas teorias.

**Euler-Bernoulli** Na segunda das equações (8.39)  $q_y = m' = 0$ :

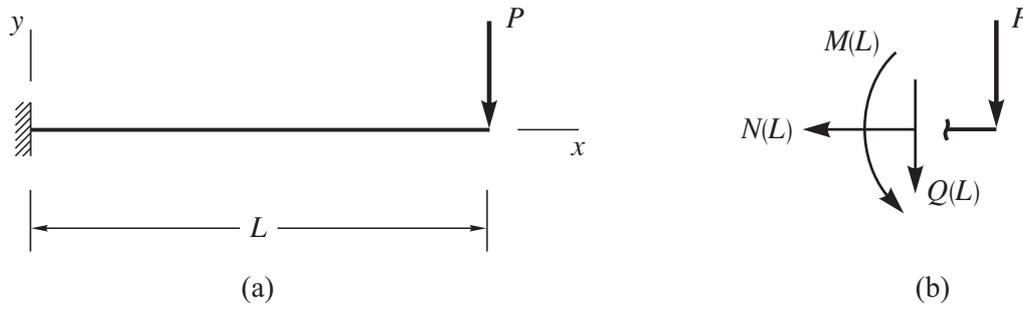
$$EIv'''' = 0.$$

Integrando,

$$\begin{aligned} EIv'''' = C_1 & \quad EIv''' = C_1x + C_2 & \quad EIv'' = C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \\ EIv' = C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4. \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno

$$v = v' = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad Q = M' = -EIv'''' = -P \quad M = -EIv''' = 0 \quad \text{em } x = L,$$



**Figura 8.10** Exemplo 8.3: (a) viga com uma extremidade engastada e a outra livre; (b) sentido positivo dos esforços na extremidade livre.

obtemos

$$C_1 = P \quad C_2 = -PL \quad C_3 = 0 \quad C_4 = 0.$$

Portanto,

$$v(x) = \frac{Px^2}{6EI} (x - 3L) \quad \Rightarrow \quad v(L) = -\frac{PL^3}{3EI}.$$

Conhecidos  $u(x)$  e  $v(x)$ , podemos determinar qualquer outra quantidade. Por exemplo,

$$N = EAu' = 0 \quad M = -EIv'' = P(L - x) \quad Q = M' = -P.$$

**Timoshenko** A segunda e terceira das equações (8.40) reduzem-se a

$$KGA(v' - \theta)' = 0 \quad EI\theta'' + KGA(v' - \theta) = 0.$$

Integrando a primeira equação,

$$KGA(v' - \theta) = C_1,$$

e substituindo o resultado na segunda,

$$EI\theta'' = -C_1 \quad EI\theta' = -C_1x + C_2 \quad EI\theta = -C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

A substituição de  $\theta$  em

$$KGA(v' - \theta) = C_1$$

conduz a

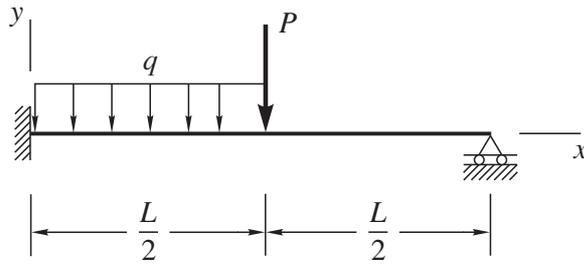
$$KGA v' = C_1 + \frac{KGA}{EI} \left( -C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right) \quad KGA v = C_1 x + \frac{KGA}{EI} \left( -C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x \right) + C_4.$$

A aplicação das condições de contorno

$$v = \theta = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad Q = KGA(v' - \theta) = -P \quad M = -EI\theta' = 0 \quad \text{em } x = L$$

resulta em

$$C_1 = -P \quad C_2 = -PL \quad C_3 = 0 \quad C_4 = 0.$$



**Figura 8.11** Exemplo 8.4: viga com uma extremidade engastada e a outra simplesmente apoiada.

Portanto,

$$v(x) = \frac{Px^2}{6EI}(x - 3L) - \frac{P}{KGA}x \quad \Rightarrow \quad v(L) = -\frac{PL^3}{3EI} \left( 1 + \frac{3EI}{KGA L^2} \right).$$

Se a viga for de seção transversal retangular de largura  $b$  e altura  $h$ ,

$$A = bh \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad K = \frac{5}{6}.$$

Vamos denominar  $v_{EB} = -PL^3/3EI$  a deflexão na extremidade da viga de Euler-Bernoulli e admitir  $\nu = 0,3$ , ou seja,  $G = E/2(1 + \nu) = E/2,6$ , para escrever

$$\frac{v(L)}{v_{EB}} = 1 + 0,78 \left( \frac{h}{L} \right)^2.$$

A contribuição da deformação de cisalhamento, que diminui com o aumento da esbeltez  $L/h$ , é geralmente desprezível para vigas isotrópicas com dimensões dentro dos padrões (realistas) usuais, como ilustrado a seguir.

$L/h$	1	2	5	10	20	$\infty$
$v(L)/v_{EB}$	1,780	1,195	1,031	1,008	1,002	1,000

A contribuição é menor do que 1% para  $L/h \geq 10$ . No entanto, essa contribuição pode ser significativa para materiais com baixa relação  $G/E$  (Kapania e Raciti, 1989), como é o caso de certos materiais compósitos. Isso será exemplificado no Capítulo 11. ■

**Exemplo 8.4** Suponha que a extremidade livre da viga do exemplo anterior seja agora simplesmente apoiada e o carregamento modificado como indicado na Figura 8.11. Use a teoria de Euler-Bernoulli para determinar a deflexão no meio da viga e as reações de apoio.

As condições de contorno são

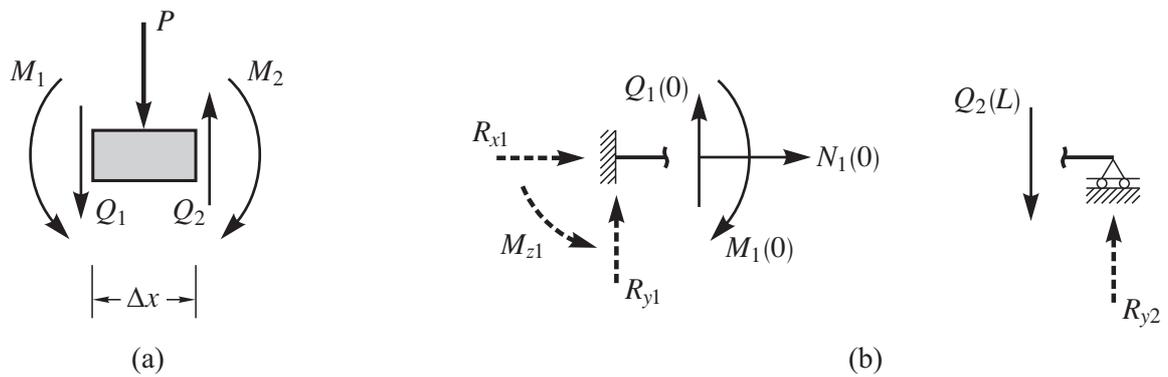
$$u = v = v' = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad N = v = M = 0 \quad \text{em } x = L.$$

Como antes,

$$u(x) = 0.$$

Precisamos resolver a segunda das equações (8.39) com  $m' = 0$ ,

$$EIv'''' = q_y,$$



**Figura 8.12** Exemplo 8.4: (a) trecho pontual num diagrama de corpo livre; (b) reações de apoio  $R_{x1}$ ,  $R_{y1}$ ,  $M_{z1}$  e  $R_{y2}$ .

Se expressarmos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $Q_1$  e  $Q_2$  em termos de  $v_1$  e  $v_2$ , obtemos em  $x = L/2$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 & v'_1 &= v'_2 \\ M_1 &= M_2 & \Rightarrow -EIV''_1 &= -EIV''_2 & \Rightarrow v''_1 &= v''_2 \\ Q_1 + P &= Q_2 & \Rightarrow M'_1 + P &= M'_2 & \Rightarrow -EIV'''_1 + P &= -EIV'''_2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{88P + 57qL}{128} & C_2 &= -\frac{3L(8P + 3qL)}{128} & C_3 &= 0 & C_4 &= 0 \\ C_5 &= -\frac{40P + 7qL}{128} & C_6 &= \frac{L(40P + 7qL)}{128} & C_7 &= -\frac{L^2(6P + qL)}{48} \\ C_8 &= \frac{L^3(8P + qL)}{384}. \end{aligned}$$

A deflexão no meio da viga é

$$v_1\left(\frac{L}{2}\right) = v_2\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{L^3}{768EI} \left(7P + \frac{13}{8}qL\right).$$

Considerando a convenção de sinal adotada para os esforços na Figura 8.3b e as reações de apoio indicadas na Figura 8.12b, obtemos

$$\begin{aligned} R_{x1} &= -N_1(0) = -EAu'(0) = 0 & R_{y1} &= -Q_1(0) = EIV'''_1(0) = \frac{88P + 57qL}{128} \\ M_{z1} &= M_1(0) = -EIV''_1(0) = \frac{3L(8P + 3qL)}{128} & R_{y2} &= Q_2(L) = -EIV'''_2(L) = \frac{40P + 7qL}{128}. \end{aligned}$$

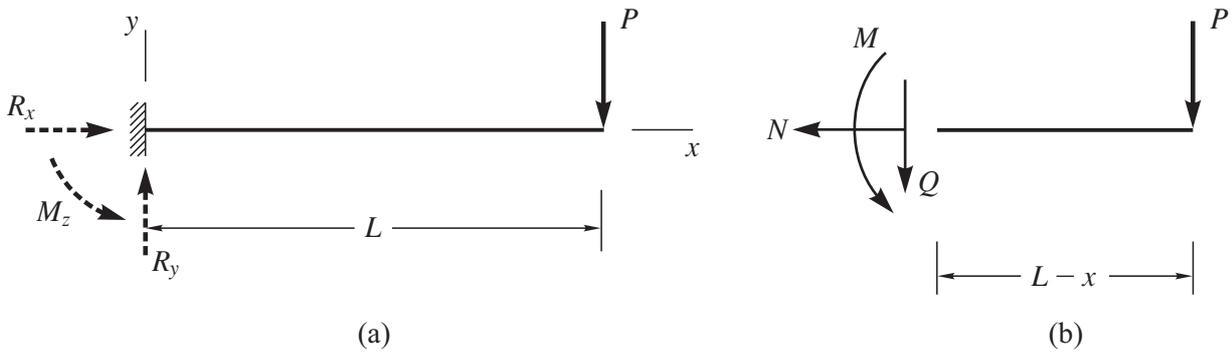
É fácil verificar o equilíbrio global da estrutura sob as cargas externas aplicadas e as reações de apoio avaliadas.

A teoria de Timoshenko empregaria neste exemplo as condições de contorno

$$u = v = \theta = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad N = v = M = 0 \quad \text{em } x = L,$$

além das condições

$$v_1 = v_2 \quad \theta_1 = \theta_2 \quad M_1 = M_2 \quad Q_1 + P = Q_2 \quad \text{em } x = \frac{L}{2}.$$



**Figura 8.13** (a) Viga do Exemplo 8.3 com as reações de apoio indicadas; (b) diagrama de corpo livre de um trecho da viga.

É possível evitar o tratamento por trechos, recorrendo-se a funções especiais (Crandall *et al.*, 2012) para representar as cargas parcialmente distribuída e concentrada. ■

*Comentários 8.3:*

- A solução geral das três equações de equilíbrio (8.23) em  $N$ ,  $Q$  e  $M$  é sempre possível. No entanto, a determinação desses esforços (e reações de apoio) para uma viga específica vai depender se há condições de contorno mecânicas em número suficiente para a avaliação das constantes de integração. Estruturas onde essas condições existem, ou seja, onde os esforços (e reações de apoio) podem ser determinados usando apenas as equações de equilíbrio, são chamadas de *isostáticas*. É claro que devemos recorrer às demais equações (deformação-deslocamento e constitutivas) e condições de contorno geométricas para uma completa solução do problema. No que diz respeito aos esforços (e reações de apoio), as duas teorias de vigas apresentadas conduzirão sempre aos mesmos resultados em estruturas isostáticas porque possuem equações de equilíbrio idênticas.
- Considere a viga do Exemplo 8.3, com as reações de apoio indicadas na Figura 8.13a. Podemos determinar os esforços  $N$ ,  $Q$  e  $M$  diretamente da integração das equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} N' = 0 &\Rightarrow N = C_1 & Q' = 0 &\Rightarrow Q = C_2 \\ M' - Q = 0 &\Rightarrow M = C_2x + C_3. \end{aligned} \quad (8.53)$$

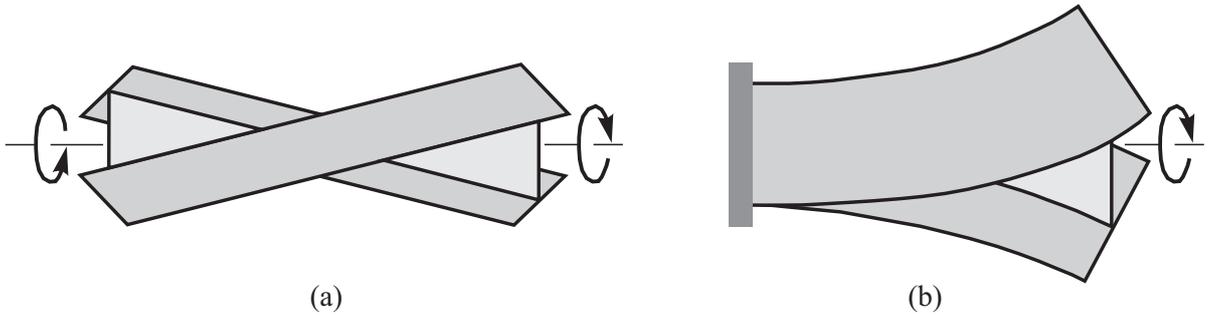
Das condições de contorno,

$$N(L) = M(L) = 0 \quad Q(L) = -P \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad C_2 = -P \quad C_3 = PL. \quad (8.54)$$

Assim,

$$N = 0 \quad Q = -P \quad M = P(L - x). \quad (8.55)$$

As condições de contorno mecânicas são, nesse exemplo, em quantidade suficiente para a avaliação das constantes de integração. Perceba que os esforços poderiam ter sido identificados



**Figura 8.15** Viga com seção transversal I sob torção: (a) uniforme (todas as seções sofrem o mesmo empenamento); (b) não uniforme (seções com empenamentos diferentes).

serão identificadas pelo princípio dos deslocamentos virtuais como sendo as deformações generalizadas.

A Figura 8.15a mostra uma viga com seção transversal I sujeita à torção uniforme (todas as seções transversais sofrem o mesmo empenamento), enquanto a Figura 8.15b mostra a mesma viga sob torção não uniforme. Neste último caso, percebe-se que o empenamento varia desde a seção na extremidade direita, onde o empenamento se dá livremente, até a seção na extremidade esquerda, na qual o empenamento é completamente impedido de ocorrer.

**Euler-Bernoulli** Com a hipótese de Euler-Bernoulli, devemos substituir  $\gamma_y = \gamma_z = 0$  ( $\theta_z = v'$  e  $\theta_y = -w'$ ) em (8.61) para obter

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_m - y\kappa_z + z\kappa_y + \omega\kappa_\omega & \gamma_{xy} &= -z\gamma_t + \omega_{,y}\gamma_\omega & \gamma_{xz} &= y\gamma_t + \omega_{,z}\gamma_\omega \\ \epsilon_y &= \epsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (8.63)$$

onde as deformações generalizadas a serem identificadas pelo princípio dos deslocamentos virtuais reduzem-se a

$$\epsilon_m = u' \quad \kappa_y = -w'' \quad \kappa_z = v'' \quad \kappa_\omega = \Psi' \quad \gamma_t = \theta'_x \quad \gamma_\omega = \Psi. \quad (8.64)$$

### Equações de equilíbrio e condições de contorno

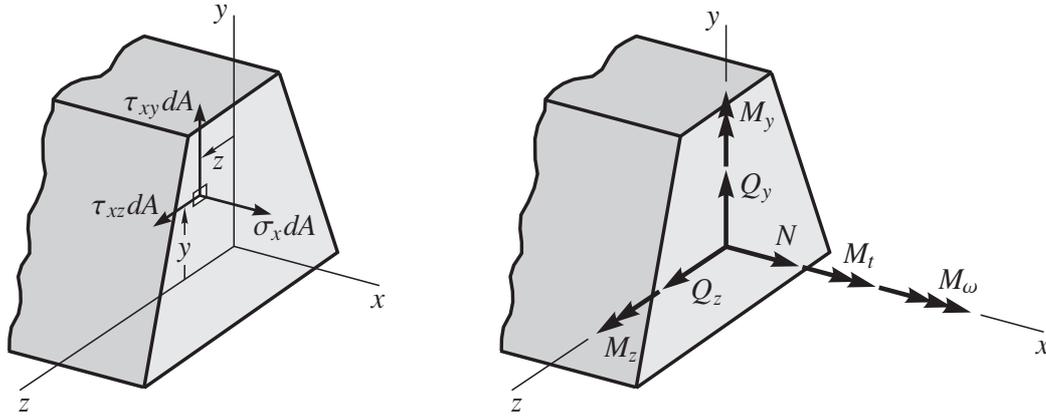
Usaremos o princípio dos deslocamentos virtuais na dedução das equações de equilíbrio e na identificação das possíveis condições de contorno pelo mesmo motivo que nos fez usá-lo em vigas planas.

**Timoshenko** De (8.61), escrevemos

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_x &= \delta\epsilon_m - y\delta\kappa_z + z\delta\kappa_y + \omega\delta\kappa_\omega & \delta\gamma_{xy} &= \delta\gamma_y - z\delta\gamma_t + \omega_{,y}\delta\gamma_\omega \\ \delta\gamma_{xz} &= \delta\gamma_z + y\delta\gamma_t + \omega_{,z}\delta\gamma_\omega & \delta\epsilon_y &= \delta\epsilon_z = \delta\gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (8.65)$$

cuja substituição em (8.12) resulta em

$$\delta W_i = - \iiint (\sigma_x \delta\epsilon_x + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz}) dx dy dz$$



**Figura 8.16** Seção transversal com as três componentes  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  do vetor tensão e com sete dos oito esforços que atuam sobre ela ( $Q_\omega$  não está representado).

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^L \int_A [\sigma_x (\delta\epsilon_m - y \delta\kappa_z + z \delta\kappa_y + \omega \delta\kappa_\omega) + \tau_{xy} (\delta\gamma_y - z \delta\gamma_t + \omega_{,y} \delta\gamma_\omega) \\
 &\quad + \tau_{xz} (\delta\gamma_z + y \delta\gamma_t + \omega_{,z} \delta\gamma_\omega)] dA dx \\
 &= - \int_0^L (N \delta\epsilon_m + M_y \delta\kappa_y + M_z \delta\kappa_z + Q_y \delta\gamma_y + Q_z \delta\gamma_z + M_t \delta\gamma_t + M_\omega \delta\kappa_\omega + Q_\omega \delta\gamma_\omega) dx. \quad (8.66)
 \end{aligned}$$

As tensões generalizadas são identificadas por

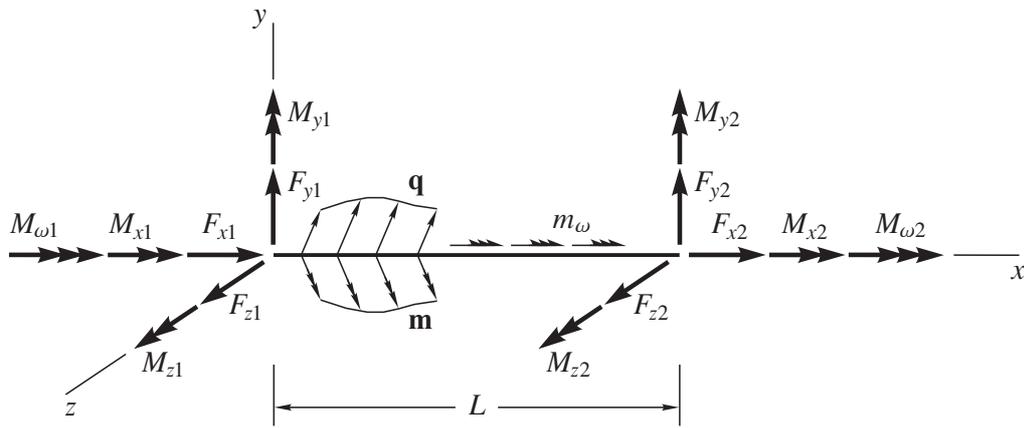
$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_x dA & Q_y &= \int_A \tau_{xy} dA & Q_z &= \int_A \tau_{xz} dA \\
 M_y &= \int_A \sigma_x z dA & M_z &= - \int_A \sigma_x y dA & M_\omega &= \int_A \sigma_x \omega dA \\
 M_t &= \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA & Q_\omega &= \int_A (\tau_{xy} \omega_{,y} + \tau_{xz} \omega_{,z}) dA. \quad (8.67)
 \end{aligned}$$

Diferentemente da viga no plano, a força cortante aparece com suas duas componentes  $Q_y$  e  $Q_z$ , o momento fletor com suas duas componentes  $M_y$  e  $M_z$ , além da presença do momento torçor  $M_t$ , do *bimomento*  $M_\omega$  (unidade de momento vezes comprimento) e do *bicortante*  $Q_\omega$  (unidade de força vezes comprimento). Tanto  $M_t$  como  $M_\omega$  e  $Q_\omega$  estão associados à torção e são conjugados no trabalho de  $\gamma_t$ ,  $\kappa_\omega$  e  $\gamma_\omega$ , respectivamente. No entanto, o bimomento deriva-se da tensão normal  $\sigma_x$  e não das tensões de cisalhamento  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , como é o caso do momento torçor e bicortante. A Figura 8.16 mostra uma seção transversal com sete dos oito esforços que atuam sobre ela ( $Q_\omega$  não está representado).

Vamos supor que externamente a viga esteja sujeita à força de volume  $[ b_x \ b_y \ b_z ]$  e à força  $[ t_x \ t_y \ t_z ]$  que se distribui por toda a sua superfície. O trabalho virtual realizado por esse carregamento é dado por

$$\begin{aligned}
 \delta W_e &= \iiint (b_x \delta u_x + b_y \delta u_y + b_z \delta u_z) dx dy dz + \iint (t_x \delta u_x + t_y \delta u_y + t_z \delta u_z) dx ds \\
 &\quad + \iint (t_x \delta u_x + t_y \delta u_y + t_z \delta u_z)_{x=0} dy dz + \iint (t_x \delta u_x + t_y \delta u_y + t_z \delta u_z)_{x=L} dy dz, \quad (8.68)
 \end{aligned}$$

onde  $s$  representa a coordenada curvilínea que percorre o contorno  $\Gamma$  da seção transversal de área  $A$ . A substituição de



**Figura 8.17** Diagrama de corpo livre de uma viga no espaço. A força  $\mathbf{q}(x) = q_x(x)\mathbf{e}_x + q_y(x)\mathbf{e}_y + q_z(x)\mathbf{e}_z$ , o momento  $\mathbf{m}(x) = m_x(x)\mathbf{e}_x + m_y(x)\mathbf{e}_y + m_z(x)\mathbf{e}_z$  e o bimomento  $m_\omega(x)$  estão aplicados de forma distribuída ao longo do comprimento da viga.

$$\delta u_x = \delta u - y \delta \theta_z + z \delta \theta_y + \omega \delta \Psi \quad \delta u_y = \delta v - z \delta \theta_x \quad \delta u_z = \delta w + y \delta \theta_x \quad (8.69)$$

resulta em

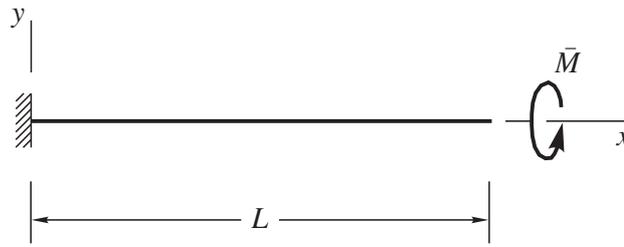
$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_0^L (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w + m_x \delta \theta_x + m_y \delta \theta_y + m_z \delta \theta_z + m_\omega \delta \Psi) dx \\ & + \sum_{i=1}^2 (F_{xi} \delta u_i + F_{yi} \delta v_i + F_{zi} \delta w_i + M_{xi} \delta \theta_{xi} + M_{yi} \delta \theta_{yi} + M_{zi} \delta \theta_{zi} + M_{\omega i} \delta \Psi_i) \end{aligned} \quad (8.70)$$

com

$$\begin{aligned} q_x &= \int_A b_x dA + \int_\Gamma t_x ds & q_y &= \int_A b_y dA + \int_\Gamma t_y ds & q_z &= \int_A b_z dA + \int_\Gamma t_z ds \\ m_x &= \int_A (b_z y - b_y z) dA + \int_\Gamma (t_z y - t_y z) ds & m_y &= \int_A b_x z dA + \int_\Gamma t_x z ds \\ m_z &= - \int_A b_x y dA - \int_\Gamma t_x y ds & m_\omega &= \int_A b_x \omega dA + \int_\Gamma t_x \omega ds \\ F_{xi} &= \int_A t_x dA & F_{yi} &= \int_A t_y dA & F_{zi} &= \int_A t_z dA & M_{xi} &= \int_A (t_z y - t_y z) dA \\ M_{yi} &= \int_A t_x z dA & M_{zi} &= - \int_A t_x y dA & M_{\omega i} &= \int_A t_x \omega dA. \end{aligned} \quad (8.71)$$

Da mesma forma como ocorre na identificação das tensões generalizadas por  $\delta W_i$ , a substituição das forças de volume e de superfície por quantidades estaticamente equivalentes aplicadas no eixo da viga é feita por  $\delta W_e$  com base no campo de deslocamento admitido na teoria. Essas quantidades estão mostradas na Figura 8.17: a força  $\mathbf{q}(x) = q_x(x)\mathbf{e}_x + q_y(x)\mathbf{e}_y + q_z(x)\mathbf{e}_z$ , o momento  $\mathbf{m}(x) = m_x(x)\mathbf{e}_x + m_y(x)\mathbf{e}_y + m_z(x)\mathbf{e}_z$  e o bimomento  $m_\omega(x)$  distribuídos ao longo do comprimento  $L$  da viga, além das forças  $\mathbf{F}_i = F_{xi}\mathbf{e}_x + F_{yi}\mathbf{e}_y + F_{zi}\mathbf{e}_z$ , momentos  $\mathbf{M}_i = M_{xi}\mathbf{e}_x + M_{yi}\mathbf{e}_y + M_{zi}\mathbf{e}_z$  e bimomentos  $M_{\omega i}$  aplicados nas suas extremidades ( $i = 1, 2$ ).

Para encontrar as equações de equilíbrio e identificar as possíveis condições de contorno, vamos substituir



**Figura 8.18** Exemplo 8.5: viga com uma extremidade engastada e a outra sob um momento aplicado  $\bar{M}$ .

(8.59) durante a expansão em série polinomial em  $y$  e  $z$ . São teorias que envolvem esforço computacional significativo, mas têm a vantagem de incluir naturalmente todos os efeitos não clássicos relacionados à seção transversal, tornando desnecessários entes tais como fator de correção do cisalhamento transversal e função de empenamento.

**Exemplo 8.5** A viga indicada na Figura 8.18 é externamente solicitada por um momento  $\bar{M}$  aplicado na sua extremidade livre. Determine as expressões da rotação  $\theta_x$ , da amplitude do empenamento  $\Psi$  e do bimomento  $M_\omega$ .

Substituindo  $\gamma_t = \theta'_x$ ,  $\gamma_\omega = \Psi$  e  $\kappa_\omega = \Psi'$  nas equações constitutivas (8.96), obtemos

$$M_t = GJ_0\theta'_x - G(J_0 - J)\Psi \quad Q_\omega = G(J_0 - J)(\Psi - \theta'_x) \quad M_\omega = E\Gamma\Psi'$$

Como  $m_x = m_\omega = 0$ , a quarta e sétima equações de equilíbrio (8.76) escrevem-se

$$M'_t = 0 \quad M'_\omega - Q_\omega = 0$$

ou

$$GJ_0\theta''_x - G(J_0 - J)\Psi' = 0 \quad E\Gamma\Psi'' - G(J_0 - J)(\Psi - \theta'_x) = 0$$

onde  $E$ ,  $G$ ,  $J_0$ ,  $J$  e  $\Gamma$  são supostamente constantes. Aqui, é indiferente tratar a viga como sendo de Timoshenko ou de Euler-Bernoulli.

Integrando a primeira equação,

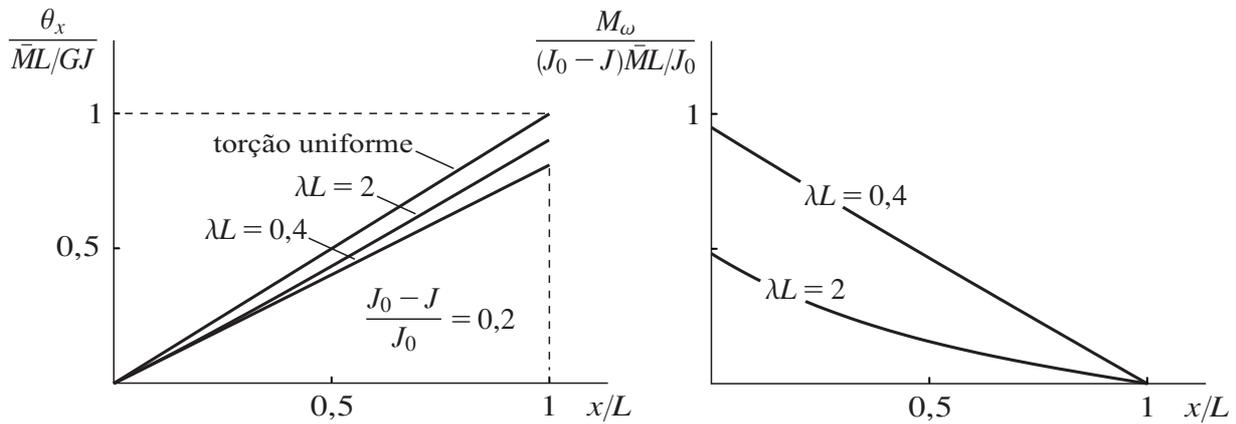
$$GJ_0\theta'_x - G(J_0 - J)\Psi = C_1,$$

e substituindo o resultado na segunda,

$$\Psi'' - \lambda^2\Psi + \frac{\lambda^2 C_1}{GJ} = 0 \quad \lambda^2 = \frac{GJ(J_0 - J)}{EJ_0\Gamma}.$$

A solução geral dessa equação é a soma da solução geral  $\Psi_h$  da equação homogênea (equação sem a última parcela em  $C_1$ ) com uma solução particular  $\Psi_p$  da equação propriamente dita (equação não homogênea). Ou seja,

$$\Psi = \Psi_h + \Psi_p.$$



**Figura 8.19** Exemplo 8.5: (a) distribuição da rotação  $\theta_x$ ; (b) distribuição do bimomento  $M_\omega$ .

Enquanto a primeira parcela de  $\theta_x$  e a primeira parcela de  $\Psi$  vêm claramente da torção uniforme, as parcelas hiperbólicas seguintes vêm da restrição ao empenamento. A distribuição da primeira parcela de  $\theta_x$ , assim como a distribuição de toda a rotação, são mostradas na Figura 8.19a para  $\lambda L = 0,4$  e  $\lambda L = 2$  adotando  $(J_0 - J)/J_0 = 0,2$ . É notório o enrijecimento da viga devido a restrição ao empenamento, cuja importância é mais significativa à medida que se reduz  $\lambda L$ . Ao analisar os fatores que afetam a magnitude de  $\lambda L$ , concluímos que a restrição ao empenamento tende a ser mais significativa em: (a) vigas mais curtas; (b) materiais com baixa relação  $G/E$ , como é o caso de certos materiais compósitos; (c) seções transversais com baixa relação  $J/\Gamma$ , como é o caso de seções transversais abertas de paredes finas.

A distribuição do bimomento

$$M_\omega = E\Gamma\Psi' = \frac{(J_0 - J)\bar{M}}{J_0} \frac{\sinh \lambda(L - x)}{\lambda \cosh \lambda L}$$

na Figura 8.19b indica que a restrição ao empenamento é mais significativa nas proximidades do engaste. Ela também indica, como já antecipado pela rotação  $\theta_x$ , que essa restrição é mais significativa para vigas com valores reduzidos de  $\lambda L$ .

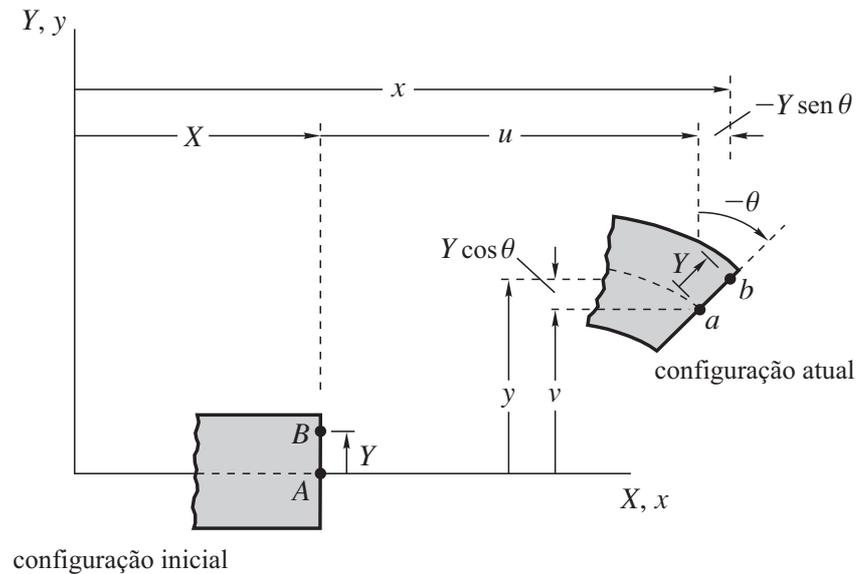
Note que as tensões de cisalhamento induzidas no engaste pela torção uniforme não são nulas, mas dadas por

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}(0) = -zG\theta'_x(0) = -z\frac{\bar{M}}{J_0} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}(0) = yG\theta'_x(0) = y\frac{\bar{M}}{J_0}.$$

É um resultado coerente que deixa de ser observado quando se introduz a hipótese de Wagner  $\Psi = \theta'_x$  (veja Problema 8.19). ■

### 8.3 Vigas sob pequenas deformações mas grandes deslocamentos e rotações

As teorias apresentadas na Seção 8.1 serão aqui reformuladas de maneira a liberar a magnitude dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  do eixo da viga e da rotação  $\theta$  da seção transversal de qualquer restrição. Daí o termo “grandes deslocamentos e rotações”. A hipótese de pequenas deformações será ainda mantida.



**Figura 8.20** Viga na configuração inicial e na configuração atual, após deformar-se sob a hipótese de Timoshenko.

### Relações deformação-deslocamento

Mostraremos a seguir como incorporar a hipótese de pequenas deformações de maneira consistente nas relações deformação-deslocamento de uma viga sob grandes deslocamentos e rotações.

**Timoshenko** Como indicado na Figura 8.20, as coordenadas lagrangianas  $X = X_1$ ,  $Y = X_2$ ,  $Z = X_3$  do ponto  $B$  e as coordenadas eulerianas  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $z = x_3$  do ponto  $b$  relacionam-se por meio de

$$x = X + u - Y \operatorname{sen} \theta \quad y = v + Y \cos \theta \quad z = Z \quad (8.105)$$

para movimentos da viga no plano  $XY$  (ou  $xy$ ). Não fizemos na Seção 8.1 nenhuma distinção entre as coordenadas lagrangianas e eulerianas porque lá os gradientes do deslocamento eram pequenos (veja Seção 5.1).

O teorema da decomposição polar (veja Seção 2.9) nos assegura que o gradiente da transformação

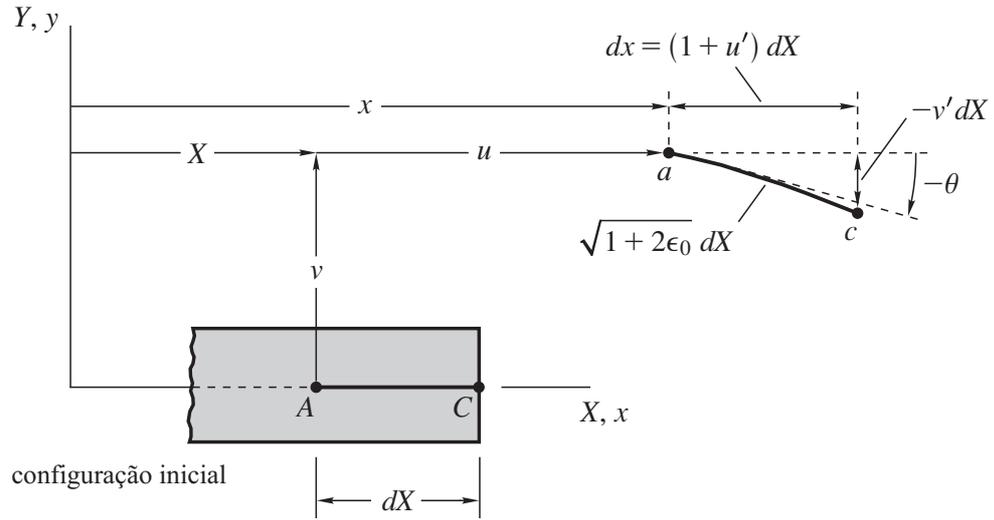
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u' - Y\theta' \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ v' - Y\theta' \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.106)$$

pode ser decomposto na forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (8.107)$$

de maneira única, onde  $\mathbf{R}$  é ortogonal e completamente responsável pela rotação de corpo rígido, e  $\mathbf{U}$  é simétrica e completamente responsável pela deformação. Redefinimos aqui  $(\prime) = d(\prime)/dX$ .

Se  $\theta_R$  é o ângulo de rotação de corpo rígido em torno do eixo  $Z$ , então (veja Exemplo 2.6)



**Figura 8.21** O segmento  $AC$  do eixo da viga na configuração inicial transforma-se em  $ac$  na configuração atual, após deformar-se sob a hipótese de Euler-Bernoulli.

**Euler-Bernoulli** Na teoria de Euler-Bernoulli a rotação  $\theta$  da seção transversal deixa de ser independente dos deslocamentos  $u$  e  $v$  do eixo da viga. Essa dependência pode ser identificada impondo  $\gamma = 0$  em (8.114):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v'}{1 + u'}. \quad (8.115)$$

Geometricamente, podemos visualizar (8.115) na Figura 8.21 onde um segmento  $AC$  do eixo da viga experimenta mudança de comprimento e de orientação após deformar-se sob a hipótese de Euler-Bernoulli. Note que o eixo da viga tem a mesma rotação  $\theta$  da seção transversal e

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{v'}{\sqrt{1 + 2\epsilon_0}} \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{1 + u'}{\sqrt{1 + 2\epsilon_0}} \quad (8.116)$$

onde

$$\epsilon_0 = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2). \quad (8.117)$$

A derivação de ambos os lados de (8.115) em relação a  $X$  conduz a

$$\frac{\theta'}{\cos^2 \theta} = \frac{u''v' - (1 + u')v''}{(1 + u')^2} \Rightarrow \theta' = \frac{u''v' - (1 + u')v''}{1 + 2\epsilon_0}. \quad (8.118)$$

Substituindo (8.116) e (8.118) em (8.114),

$$\epsilon_m = \sqrt{1 + 2\epsilon_0} - 1 \quad \kappa = -\frac{u''v' - (1 + u')v''}{1 + 2\epsilon_0}. \quad (8.119)$$

A consideração de que  $|\epsilon_0| \ll 1$  para pequenas deformações e  $\sqrt{1 + 2\epsilon_0} \approx 1 + \epsilon_0$  em torno de  $\epsilon_0 = 0$  segundo a série de Taylor,

$$\epsilon_m \approx \epsilon_0 \quad \kappa \approx (1 + u')v'' - u''v' \quad (8.120)$$

cuja forma linearizada é dada em (8.6). Novozhilov (1953) e Garcia e Villaça (1999) identificam essas mesmas relações (8.120) por um procedimento diferente.

### Equações de equilíbrio e condições de contorno

Na expressão (8.17) do princípio dos deslocamentos virtuais devemos trocar  $x \rightarrow X$ ,  $y \rightarrow Y$  e  $z \rightarrow Z$ ,

$$\begin{aligned} \delta W_e + \delta W_i = & - \int_0^L (N \delta \epsilon_m + M \delta \kappa + Q \delta \gamma) dX + \int_0^L (q_X \delta u + q_Y \delta v + m \delta \theta) dX \\ & + F_{X1} \delta u_1 + F_{X2} \delta u_2 + F_{Y1} \delta v_1 + F_{Y2} \delta v_2 + M_{Z1} \delta \theta_1 + M_{Z2} \delta \theta_2 = 0, \end{aligned} \quad (8.121)$$

enfatizando que as forças  $q_X$  e  $q_Y$  são por unidade de comprimento da viga na configuração inicial.

Na definição dos esforços

$$N = \int_A \sigma_X dA \quad Q = \int_A \tau_{XY} dA \quad M = \int_A \sigma_X Y dA, \quad (8.122)$$

as componentes  $\sigma_X$  e  $\tau_{XY}$  referem-se ao segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff e a área  $A$  da seção transversal refere-se à configuração inicial.

**Timoshenko** A substituição de

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_m = \cos \theta \delta u' + \sin \theta \delta v' - [(1 + u') \sin \theta - v' \cos \theta] \delta \theta & \quad \delta \kappa = -\delta \theta' \\ \delta \gamma = -\sin \theta \delta u' + \cos \theta \delta v' - [(1 + u') \cos \theta + v' \sin \theta] \delta \theta & \end{aligned} \quad (8.123)$$

em (8.121), seguida de integração por partes para remover as derivações de  $\delta u$ ,  $\delta v$  e  $\delta \theta$ , resulta em

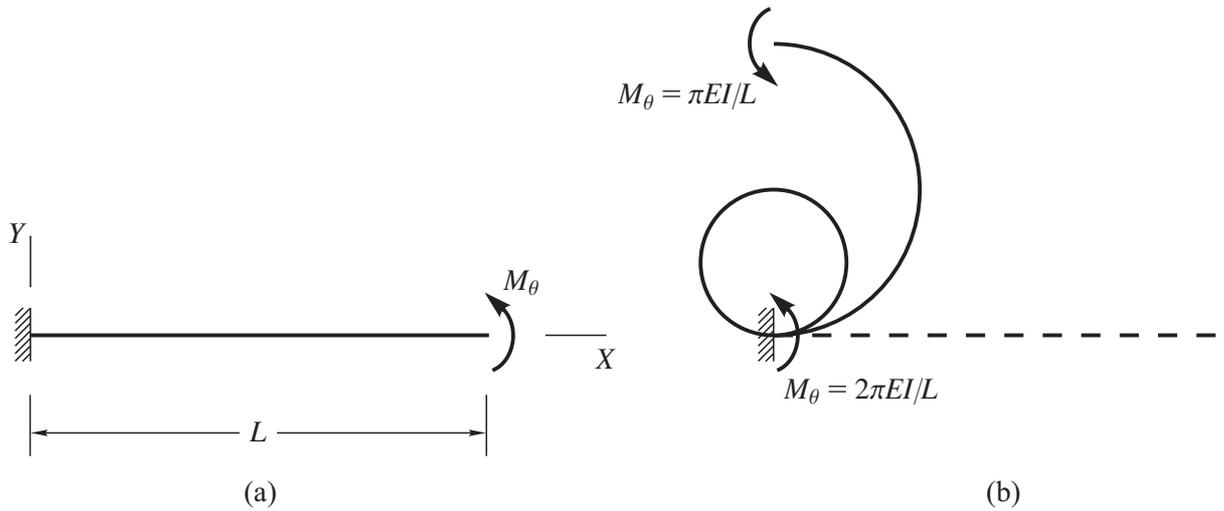
$$\begin{aligned} & \int_0^L \{ [(N \cos \theta - Q \sin \theta)' + q_X] \delta u + [(N \sin \theta + Q \cos \theta)' + q_Y] \delta v \\ & \quad - \{ M' - N [(1 + u') \sin \theta - v' \cos \theta] \\ & \quad \quad - Q [(1 + u') \cos \theta + v' \sin \theta] - m \} \delta \theta \} dX \\ & + (N \cos \theta - Q \sin \theta + F_{X1}) \delta u_1 - (N \cos \theta - Q \sin \theta - F_{X2}) \delta u_2 \\ & + (N \sin \theta + Q \cos \theta + F_{Y1}) \delta v_1 - (N \sin \theta + Q \cos \theta - F_{Y2}) \delta v_2 \\ & - (M - M_{Z1}) \delta \theta_1 + (M + M_{Z2}) \delta \theta_2 = 0. \end{aligned} \quad (8.124)$$

Identificamos pelo lema fundamental do cálculo variacional as equações de equilíbrio

$$\begin{aligned} (N \cos \theta - Q \sin \theta)' + q_X = 0 & \quad (N \sin \theta + Q \cos \theta)' + q_Y = 0 \\ M' - N [(1 + u') \sin \theta - v' \cos \theta] - Q [(1 + u') \cos \theta + v' \sin \theta] - m = 0 & \end{aligned} \quad (8.125)$$

que devem ser satisfeitas em cada ponto do domínio  $0 < X < L$ . Identificamos também todas as possíveis condições de contorno geométricas e mecânicas:

$$\begin{aligned} u_1 = \bar{u}_1 & \quad \text{ou} & \quad N \cos \theta - Q \sin \theta = -F_{X1} \\ v_1 = \bar{v}_1 & \quad \text{ou} & \quad N \sin \theta + Q \cos \theta = -F_{Y1} \\ \theta_1 = \bar{\theta}_1 & \quad \text{ou} & \quad M = M_{Z1} & \quad \text{em } X = 0 \\ \\ u_2 = \bar{u}_2 & \quad \text{ou} & \quad N \cos \theta - Q \sin \theta = F_{X2} \\ v_2 = \bar{v}_2 & \quad \text{ou} & \quad N \sin \theta + Q \cos \theta = F_{Y2} \\ \theta_2 = \bar{\theta}_2 & \quad \text{ou} & \quad M = -M_{Z2} & \quad \text{em } X = L. \end{aligned} \quad (8.126)$$



**Figura 8.23** Exemplo 8.7: (a) viga com uma extremidade engastada e a outra livre, sob um momento externo  $M_\theta$ ; (b) viga deformada numa semicircunferência ( $M_\theta = \pi EI/L$ ) e numa circunferência ( $M_\theta = 2\pi EI/L$ ).

Para eliminar  $Q$  de (8.138), multipliquemos a primeira dessas equações por  $\cos \theta$  e a segunda por  $\sin \theta$ ,

$$N \cos^2 \theta - Q \sin \theta \cos \theta = -P_u \cos \theta \quad N \sin^2 \theta + Q \sin \theta \cos \theta = -P_v \sin \theta, \quad (8.141)$$

adicionando em seguida as equações resultantes dessa operação:

$$N = -P_u \cos \theta - P_v \sin \theta. \quad (8.142)$$

Da mesma forma, para eliminar  $N$  de (8.138), multipliquemos a primeira dessas equações por  $\sin \theta$  e a segunda por  $\cos \theta$ ,

$$N \sin \theta \cos \theta - Q \sin^2 \theta = -P_u \sin \theta \quad N \sin \theta \cos \theta + Q \cos^2 \theta = -P_v \cos \theta, \quad (8.143)$$

subtraindo em seguida a primeira equação resultante dessa operação da segunda:

$$Q = P_u \sin \theta - P_v \cos \theta. \quad (8.144)$$

Em suma, usando apenas as equações de equilíbrio e as condições de contorno mecânicas dadas na extremidade livre identificamos

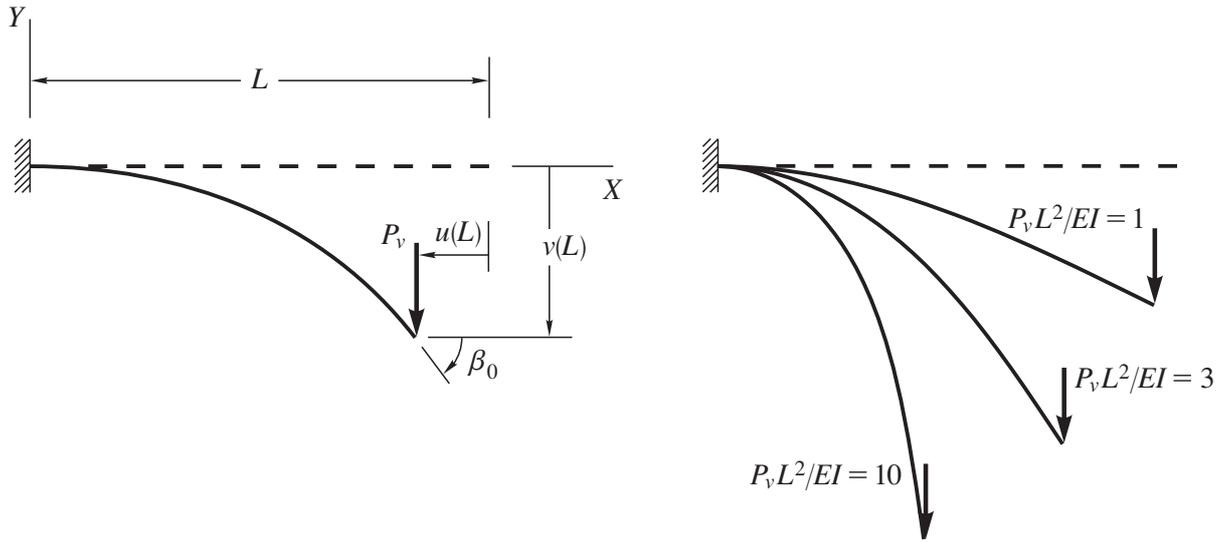
$$N = -P_u \cos \theta - P_v \sin \theta \quad Q = P_u \sin \theta - P_v \cos \theta \quad M' = P_u v' - P_v (1 + u'). \quad (8.145)$$

Note que é fácil verificar geometricamente as duas primeiras dessas equações. ■

**Exemplo 8.7** Suponha que a viga do Exemplo 8.6 esteja apenas sob o momento externo  $M_\theta$  (veja Figura 8.23a).

Como  $P_u = P_v = 0$ , as equações (8.145) reduzem-se a

$$N = 0 \quad Q = 0 \quad M' = 0.$$



**Figura 8.24** Exemplo 8.8: (a) viga com uma extremidade engastada e a outra livre, sob uma força vertical externa  $P_v$ ; (b) viga deformada para alguns valores de  $P_v L^2 / EI$ .

A viga deformada pode também ser traçada usando essa solução em  $u$  e  $v$ , sabendo-se que as coordenadas do eixo da viga deformada, segundo (8.105), são dadas por  $(x, y) = (X + u, v)$ . Verifique, por exemplo, que os pontos  $X = L/2$  e  $X = L$  na configuração inicial passam a ter coordenadas  $(x, y) = (0, L/\pi)$  e  $(x, y) = (0, 0)$ , respectivamente, após a deformação com  $M_\theta = 2\pi EI/L$  (veja Figura 8.23b). ■

**Exemplo 8.8** Suponha agora que a viga do Exemplo 8.6 esteja apenas sob a força vertical  $P_v$  (veja Figura 8.24a).

Como  $P_u = 0$ , as equações (8.145) reduzem-se a

$$N = -P_v \sin \theta \quad Q = -P_v \cos \theta \quad M' = -P_v (1 + u').$$

Apesar de ser possível a solução analítica desse problema pela teoria de Timoshenko (Batista, 2016), vamos aqui introduzir a simplificação  $\epsilon_m = \gamma = 0$ . Assim procedendo, o exemplo anterior mostra que

$$u' = \cos \theta - 1 \quad v' = \sin \theta$$

e, conseqüentemente,

$$M' = -P_v \cos \theta.$$

Substituindo  $M = -EI\theta'$ ,

$$EI\theta'' - P_v \cos \theta = 0$$

para  $EI$  constante. Vamos resolver, a seguir, essa equação diferencial não linear em que  $\theta$  é a única variável dependente.

Multipliquemos a equação por  $\theta'$ ,

$$EI\theta'\theta'' - P_v\theta' \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{EI}{2}\theta'^2 - P_v \sin \theta \right)' = 0,$$

**Tabela 8.2** Resultados para a viga da Figura 8.24.

$P_v L^2 / EI$	$-u(L)/L$	$-v(L)/L$	$\beta_0$ (rad)
0,2	0,00265	0,06636	0,09964
0,4	0,01035	0,13097	0,19715
0,6	0,02249	0,19235	0,29074
0,8	0,03817	0,24945	0,37906
1,0	0,05643	0,30172	0,46135
2,0	0,16064	0,49346	0,78175
3,0	0,25442	0,60326	0,98602
4,0	0,32894	0,66996	1,12124
5,0	0,38763	0,71379	1,21537
6,0	0,43459	0,74457	1,28370
7,0	0,47293	0,76737	1,33496
8,0	0,50483	0,78498	1,37443
9,0	0,53183	0,79906	1,40547
10,0	0,55500	0,81061	1,43029

Para representar a viga deformada, precisamos conhecer os deslocamentos  $u$  e  $v$  em vários pontos ao longo de seu eixo. Supondo que  $\beta_0$  tenha sido escolhido e  $p$ ,  $\bar{\psi}$  e  $\alpha$  avaliados segundo o roteiro acima, podemos identificar esses vários pontos e seus deslocamentos da seguinte forma:

- (a) escolha um valor  $\bar{\psi} \leq \psi = \psi_e \leq \pi/2$  e determine a coordenada  $0 \leq X = X_e \leq L$  correspondente, empregando a equação:

$$\frac{\alpha}{L} \int_0^{X_e} dX = \int_{\bar{\psi}}^{\psi_e} \frac{d\psi}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 \psi}} \quad \Rightarrow \quad X_e = \frac{L}{\alpha} [F(\psi_e, p) - F(\bar{\psi}, p)];$$

- (b) determine os deslocamentos  $u_e$  e  $v_e$  do ponto  $X = X_e$  usando

$$\int_0^{u_e} du = \frac{2pL}{\alpha} \int_{\bar{\psi}}^{\psi_e} \sin \psi \, d\psi - \underbrace{\frac{L}{\alpha} \int_{\bar{\psi}}^{\psi_e} \frac{d\psi}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 \psi}}}_{X_e}$$

$$\int_0^{v_e} dv = \frac{2L}{\alpha} \int_{\bar{\psi}}^{\psi_e} \sqrt{1-p^2 \sin^2 \psi} \, d\psi - \underbrace{\frac{L}{\alpha} \int_{\bar{\psi}}^{\psi_e} \frac{d\psi}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 \psi}}}_{X_e}.$$

Ou seja,

$$u_e = \frac{2pL}{\alpha} (\cos \bar{\psi} - \cos \psi_e) - X_e \quad v_e = \frac{2L}{\alpha} [E(\psi_e, p) - E(\bar{\psi}, p)] - X_e;$$

- (c) repita os dois passos anteriores, tantas vezes quantas forem necessárias, para determinar os deslocamentos em vários outros pontos.

## Capítulo 9

# Métodos dos resíduos ponderados e de Ritz

O comportamento das estruturas é descrito por equações diferenciais e formulado, normalmente, como um problema de valor de contorno e/ou inicial de difícil solução exata. Felizmente, existem métodos para obtenção de soluções aproximadas de problemas desse tipo. Destacamos neste capítulo o *método dos resíduos ponderados* e o *método de Ritz*.<sup>1</sup> O método dos elementos finitos é uma generalização da aplicação desses métodos, que será introduzido no próximo capítulo como uma extensão do método de Ritz.

### 9.1 Método dos resíduos ponderados

A barra indicada na Figura 9.1 tem rigidez  $EA$  constante e está sob uma carga senoidal distribuída, além de uma força aplicada na extremidade livre. O comportamento da barra é descrito pela equação diferencial (veja Seção 8.1)

$$EAu'' + q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} = 0 \quad 0 < x < L \quad (9.1)$$

sujeita às condições de contorno

$$u(0) = 0 \text{ (geométrica)} \quad N(L) = P \text{ (mecânica)}, \quad (9.2)$$

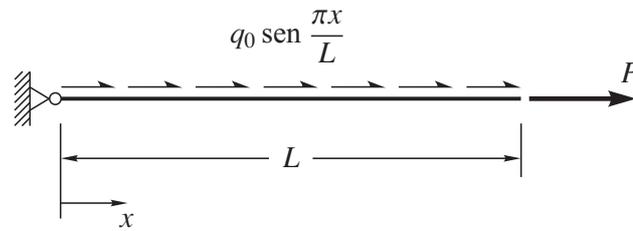
onde  $(\ )' = d(\ )/dx$ . A solução exata é dada por

$$u(x) = \frac{q_0 L^2}{\pi^2 EA} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + \frac{\pi x}{L} \right) + \frac{P}{EA} x = \frac{q_0 L^2}{\pi^2 EA} \left[ \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + \pi \left( 1 + \frac{\pi P}{q_0 L} \right) \frac{x}{L} \right]. \quad (9.3)$$

Vamos descrever o método dos resíduos ponderados, enquanto fazemos sua aplicação na solução deste problema. A escolha da carga senoidal tem o propósito de evitar que a solução exata seja obtida com as aproximações polinomiais que adotaremos.

---

<sup>1</sup>Walter Ritz, físico suíço nascido em Sitten em 1878, falecido em Göttingen em 1909.



**Figura 9.1** Barra sob carga senoidal distribuída de amplitude  $q_0$  e força  $P$  aplicada na extremidade livre.

Para aplicar o método dos resíduos ponderados, a equação diferencial deve antes ser escrita numa forma integral equivalente, multiplicando (9.1) por uma *função peso*  $W(x)$  e integrando o produto no domínio:

$$\int_0^L \left( EAu'' + q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \right) W dx = 0. \quad (9.4)$$

Admitindo que  $W(x)$  seja uma função completamente arbitrária, o lema fundamental do cálculo variacional nos assegura que as expressões (9.1) e (9.4) equivalem-se. Perceba aqui a semelhança entre essa equivalência e a estabelecida entre  $G = 0$  e  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  na Seção 7.2. A *forma ponderada* (9.4) é a base do método dos resíduos ponderados na solução desse problema e a escolha de  $W(x)$  na busca da solução aproximada é o que distingue os diversos casos especiais do método.

A solução aproximada  $u_n(x)$  é procurada na forma

$$u(x) \approx u_n(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \quad (9.5)$$

que, em notação matricial, escreve-se

$$u_n = \phi_0 + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{c} \quad (9.6)$$

onde

$$\boldsymbol{\phi} = [ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n ]^T \quad \mathbf{c} = [ c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n ]^T. \quad (9.7)$$

A menos que  $u_n(x)$  seja a solução exata, o que seria uma mera casualidade, sua substituição direta na equação diferencial resultaria no *resíduo* (erro)

$$R_n(x) = EAu_n'' + q_0 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (9.8)$$

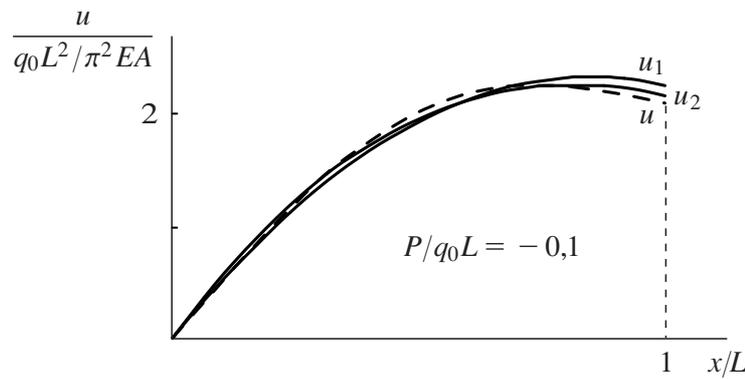
O método dos resíduos ponderados procura determinar os coeficientes  $c_i$  com a substituição de  $u_n(x)$  na forma ponderada (9.4),

$$\int_0^L \left( EAu_n'' + q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \right) W_n dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^L R_n W_n dx = 0, \quad (9.9)$$

em que o peso é aproximado por

$$W(x) \approx W_n(x) = \sum_{i=1}^n d_i \Psi_i(x). \quad (9.10)$$

Ou seja, o peso é aproximado por um elemento arbitrário de um espaço vetorial de dimensão  $n$  (veja Apêndice A), gerado pelas funções  $\Psi_i(x)$ , de modo que (9.9) forneça  $n$  equações algébricas para a determinação dos coeficientes  $c_i$  como segue.



**Figura 9.2** Exemplo 9.1: solução exata  $u$  e soluções aproximadas  $u_1$  e  $u_2$  obtidas pelo método de Galerkin.

$$u_2(x) = \frac{P}{EA}x + c_1x(2L - x) + c_2x(3L^2 - x^2) \Rightarrow \begin{cases} \phi_0(x) = \frac{P}{EA}x \\ \phi_1(x) = x(2L - x) \\ \phi_2(x) = x(3L^2 - x^2) \end{cases} \quad \phi = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}.$$

Sabendo-se que

$$\Psi = \phi = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix},$$

obtemos de (9.20)

$$\mathbf{k} = EAL^3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5L}{2} \\ \frac{5L}{2} & \frac{24L^2}{5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \frac{q_0L^3}{\pi} \begin{Bmatrix} 1 + \frac{4}{\pi^2} \\ 2L \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right) \end{Bmatrix}.$$

A simetria de  $\mathbf{k}$  decorre do fato de

$$\int_0^L \Psi \phi'^T dx = \Psi \phi'^T \Big|_0^L - \int_0^L \Psi' \phi'^T dx = - \int_0^L \phi' \phi'^T dx = - \left( \int_0^L \phi' \phi'^T dx \right)^T$$

em (9.20) para  $\Psi = \phi$ . A solução de

$$\mathbf{k}\mathbf{c} = \mathbf{f} \Rightarrow EAL^3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5L}{2} \\ \frac{5L}{2} & \frac{24L^2}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \frac{q_0L^3}{\pi} \begin{Bmatrix} 1 + \frac{4}{\pi^2} \\ 2L \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right) \end{Bmatrix}$$

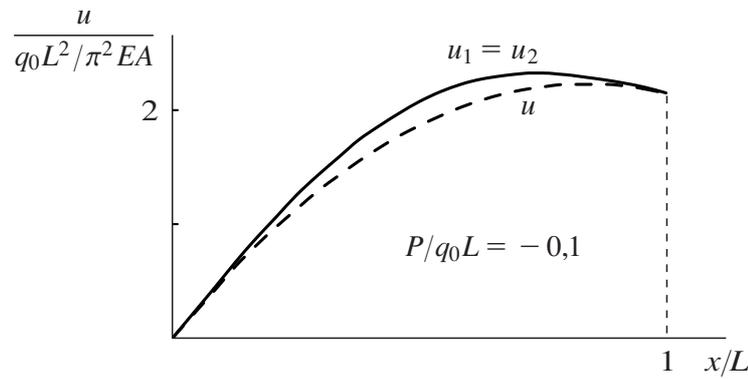
$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \frac{2q_0}{3\pi EA} \begin{Bmatrix} 2 \left( \frac{21}{\pi^2} - 1 \right) \\ \frac{5}{3L} \left( 1 - \frac{12}{\pi^2} \right) \end{Bmatrix}$$

conduz à segunda aproximação

$$u_2(x) = \frac{P}{EA}x + \frac{4q_0}{3\pi EA} \left( \frac{21}{\pi^2} - 1 \right) x(2L - x) + \frac{10q_0}{9\pi EAL} \left( 1 - \frac{12}{\pi^2} \right) x(3L^2 - x^2)$$

$$= \frac{q_0L^2}{\pi^2 EA} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{21}{\pi} - \pi \right) \left( 2 - \frac{x}{L} \right) - \frac{10}{9} \left( \frac{12}{\pi} - \pi \right) \left( 3 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{\pi^2 P}{q_0L} \right] \frac{x}{L}.$$

A solução exata (9.3) e as soluções aproximadas  $u_1$  e  $u_2$  estão representadas graficamente na Figura 9.2 para  $P/q_0L = -0,1$ . Os erros (9.30) associados a  $u_1$  e  $u_2$  são, respectivamente,



**Figura 9.3** Exemplo 9.2: solução exata  $u$  e soluções aproximadas  $u_1 = u_2$  obtidas pelo método dos mínimos quadrados.

Sabendo-se que

$$\Psi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial R_2}{\partial c_1} \\ \frac{\partial R_2}{\partial c_2} \end{Bmatrix} = -2EA \begin{Bmatrix} 1 \\ 3x \end{Bmatrix},$$

obtemos de (9.20)

$$\mathbf{k} = -2(EA)^2 L \begin{bmatrix} 2 & 3L \\ 3L & 6L^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = -\frac{2q_0 EAL}{\pi} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3L \end{Bmatrix}.$$

A simetria de  $\mathbf{k}$  decorre do fato de

$$\int_0^L \Psi \phi''^T dx = \int_0^L EA \phi'' \phi''^T dx = \left( \int_0^L EA \phi'' \phi''^T dx \right)^T$$

em (9.20) para  $\Psi = EA \phi''$ . A solução de

$$\mathbf{kc} = \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad -2(EA)^2 L \begin{bmatrix} 2 & 3L \\ 3L & 6L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -\frac{2q_0 EAL}{\pi} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3L \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \frac{q_0}{\pi EA} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

mostra que a contribuição de  $\phi_2(x)$  é rejeitada ao ser mantido o mesmo valor de  $c_1$  com  $c_2 = 0$ . Ou seja, a inclusão desse termo extra não ajuda a melhorar a solução segundo o método dos mínimos quadrados.

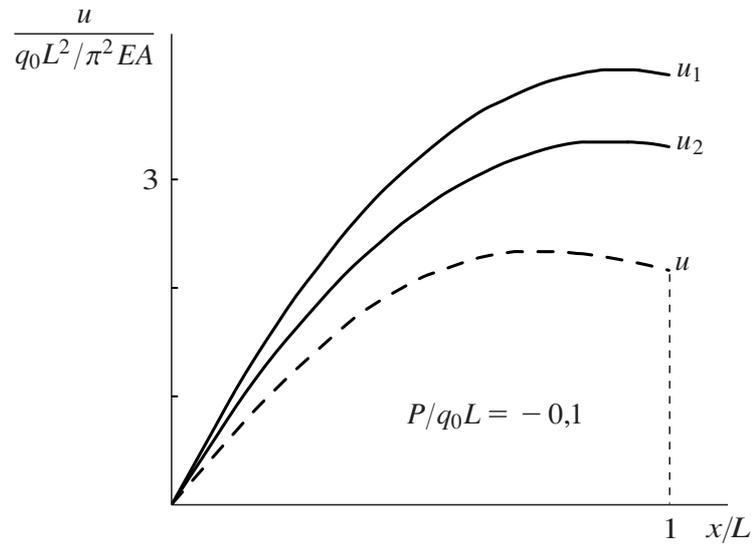
A solução exata (9.3) e as soluções aproximadas  $u_1 = u_2$  estão representadas graficamente na Figura 9.3 para  $P/q_0L = -0,1$ . O erro (9.30) associado a  $u_1 = u_2$  é

$$e_1 = e_2 = 7,34\%. \quad \blacksquare$$

### Método da colocação

No *método da colocação* a equação diferencial é forçada a ser satisfeita em pontos predefinidos (pontos de colocação):

$$R_n(x_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.34)$$



**Figura 9.4** Exemplo 9.3: solução exata  $u$  e soluções aproximadas  $u_1$  e  $u_2$  obtidas pelo método da colocação.

Apesar de  $c_2$  ser nulo,  $u_2$  é diferente de  $u_1$  porque há mudança nos pontos de colocação, alterando  $c_1$ . Note que a matriz  $[k]$  não é simétrica.

A solução exata (9.3) e as soluções aproximadas  $u_1$  e  $u_2$  estão representadas graficamente na Figura 9.4 para  $P/q_0 L = -0,1$ . Os erros (9.30) associados a  $u_1$  e  $u_2$  são, respectivamente,

$$e_1 = 64,98\% \quad e_2 = 38,96\%. \quad \blacksquare$$

### Método de Petrov-Galerkin

O método de Petrov<sup>7</sup>-Galerkin é uma variante do método de (Bubnov-) Galerkin no qual alguns ou todos  $\Psi_i$  diferem de  $\phi_i$ . Por definição, continuaremos a denominar método dos mínimos quadrados quando  $\Psi_i = \partial R_n / \partial c_i$  e método da colocação quando  $\Psi_i = \delta(x - x_i)$ .

**Exemplo 9.4** Refaça o Exemplo 9.1 pelo método de Petrov-Galerkin.

De (9.23),

$$u_1(x) = \frac{P}{EA}x + c_1 x(2L - x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \phi_0(x) = \frac{P}{EA}x \\ \phi_1(x) = x(2L - x) \end{cases} \quad \phi = \phi_1.$$

Escolhendo

$$\Psi_1 = x \quad \Rightarrow \quad \Psi = \Psi_1,$$

temos de (9.20) que

$$\mathbf{k} = EAL^2 \quad \mathbf{f} = \frac{q_0 L^2}{\pi}.$$

A solução de

$$\mathbf{kc} = \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad EAL^2 c_1 = \frac{q_0 L^2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{q_0}{\pi EA}$$

<sup>7</sup>Georgii Ivanovich Petrov, engenheiro russo nascido em Pinega em 1912, falecido em Moscou em 1987.

conduz à primeira aproximação

$$u_1(x) = \frac{P}{EA}x + \frac{q_0}{\pi EA}x(2L-x) = \frac{q_0L^2}{\pi^2EA} \left[ \pi \left( 2 - \frac{x}{L} \right) + \frac{\pi^2P}{q_0L} \right] \frac{x}{L}.$$

De (9.26),

$$u_2(x) = \frac{P}{EA}x + c_1x(2L-x) + c_2x(3L^2-x^2) \Rightarrow \begin{cases} \phi_0(x) = \frac{P}{EA}x \\ \phi_1(x) = x(2L-x) \\ \phi_2(x) = x(3L^2-x^2) \end{cases} \quad \phi = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}.$$

Escolhendo

$$\Psi_1 = x \quad \Psi_2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad \Psi = \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix},$$

temos de (9.20) que

$$\mathbf{k} = EAL^2 \begin{bmatrix} 1 & 2L \\ \frac{2L}{3} & \frac{3L^2}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \frac{q_0L^2}{\pi} \begin{Bmatrix} 1 \\ L \left( 1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \end{Bmatrix}.$$

Note que a matriz  $\mathbf{k}$  não é simétrica. A solução de

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\mathbf{c} = \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad EAL^2 \begin{bmatrix} 1 & 2L \\ \frac{2L}{3} & \frac{3L^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} &= \frac{q_0L^2}{\pi} \begin{Bmatrix} 1 \\ L \left( 1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} &= \frac{q_0}{\pi^3EA} \begin{Bmatrix} 3(16 - \pi^2) \\ \frac{2}{L}(\pi^2 - 12) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

conduz à segunda aproximação

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \frac{P}{EA}x + \frac{3q_0}{\pi^3EA}(16 - \pi^2)x(2L-x) + \frac{2q_0}{\pi^3EAL}(\pi^2 - 12)x(3L^2 - x^2) \\ &= \frac{q_0L^2}{\pi^2EA} \left[ \frac{3}{\pi}(16 - \pi^2) \left( 2 - \frac{x}{L} \right) + \frac{2}{\pi}(\pi^2 - 12) \left( 3 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{\pi^2P}{q_0L} \right] \frac{x}{L}. \end{aligned}$$

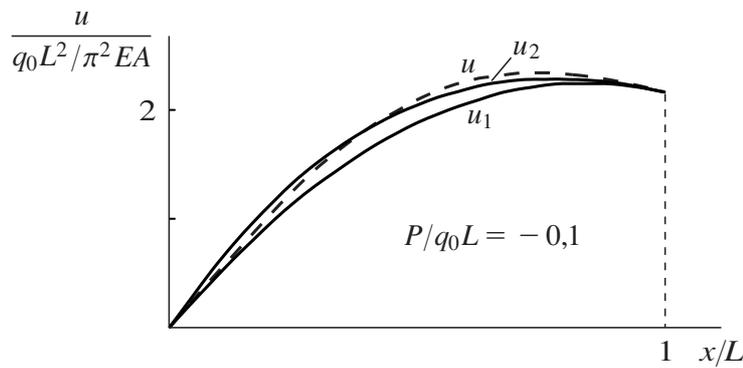
A solução exata (9.3) e as soluções aproximadas  $u_1$  e  $u_2$  estão representadas graficamente na Figura 9.5 para  $P/q_0L = -0,1$ . Os erros (9.30) associados a  $u_1$  e  $u_2$  são, respectivamente,

$$e_1 = 7,34\% \quad e_2 = 2,96\%. \quad \blacksquare$$

## 9.2 Método de Ritz

O método parece ter sido pioneiramente usado por Rayleigh<sup>8</sup> em torno de 1870 e generalizado por Ritz em torno de 1909. Há quem o chame de “método de Rayleigh-Ritz”, assim como há quem

<sup>8</sup>John William Strutt, Lord Rayleigh, físico inglês nascido em Langford Grove em 1842, falecido em Witham em 1919.



**Figura 9.5** Exemplo 9.4: solução exata  $u$  e soluções aproximadas  $u_1$  e  $u_2$  obtidas pelo método de Petrov-Galerkin.

defenda que justo seria denominá-lo unicamente “método de Ritz” (Leissa, 2005). Vamos descrever o método, enquanto fazemos sua aplicação na solução do problema da barra indicada na Figura 9.1.

Para aplicar o método de Ritz, a equação diferencial deve antes ser escrita numa forma integral equivalente, com reduzida ordem de derivação e contendo a condição de contorno mecânica. Mostremos os três passos a serem seguidos para a obtenção dessa forma integral.

- *Passo 1:* o primeiro passo consiste em multiplicar (9.1) por uma função peso completamente arbitrária e integrar o produto no domínio, exatamente como em (9.4):

$$\int_0^L \left( EAu'' + q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \right) W dx = 0. \quad (9.37)$$

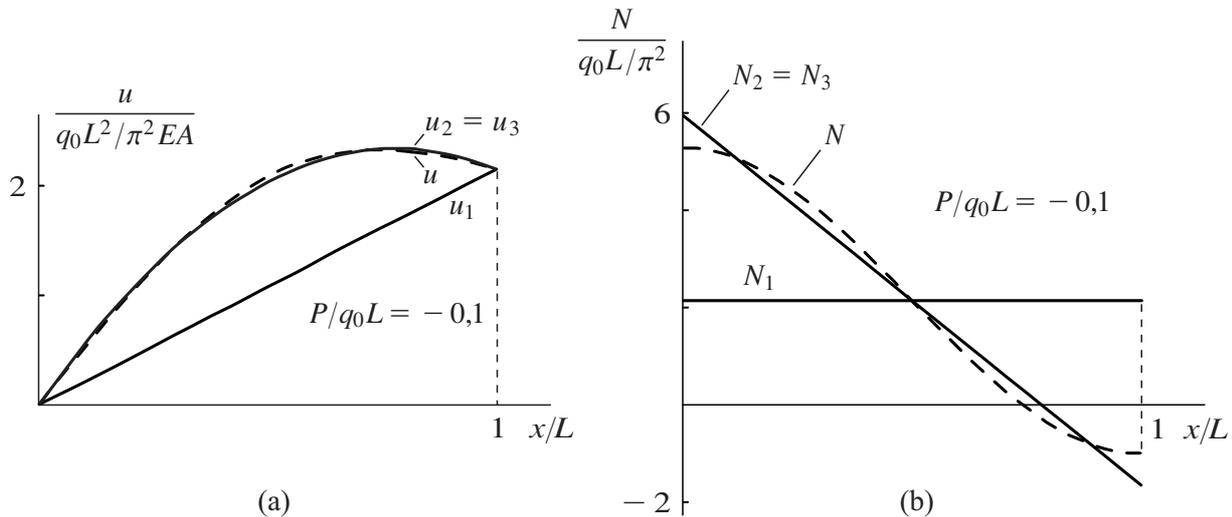
- *Passo 2:* no segundo passo, fazemos um balanço entre a ordem de derivação de  $u$  e  $W$  usando integração por partes. Substituindo

$$\int_0^L u'' W dx = \int_0^L (u' W)' dx - \int_0^L u' W' dx = u' W \Big|_0^L - \int_0^L u' W' dx \quad (9.38)$$

em (9.37), obtemos

$$\int_0^L \left( -EAu' W' + q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} W \right) dx + EAu' W \Big|_0^L = 0. \quad (9.39)$$

Observe nesta passagem que  $W$  é suposto diferenciável pelo menos uma vez, o que não era necessário ao método dos resíduos ponderados. Um ponto importante no segundo passo é a identificação das condições de contorno essenciais e naturais do problema, no que diz respeito à forma integral procurada. Esse conceito foi introduzido no Capítulo 6 e usado em outras partes do texto, mas sempre no âmbito variacional. Vale a pena repeti-lo devido à presença do peso  $W$ . O termo  $EAu' W \Big|_0^L$  é constituído de duas partes:  $W$  e seu coeficiente  $EAu'$ . A variável dependente  $u$ , expressa na mesma forma como está o peso  $W$  no termo de contorno (no caso, o peso está na forma da função em si, não de suas derivadas), é chamada variável primária e sua especificação (no caso, especificação de  $u$ ) será a condição de contorno essencial; o coeficiente de  $W$  é a variável secundária e sua especificação (especificação de  $EAu'$ ) será a condição de



**Figura 9.6** Exemplo 9.5: (a) solução exata  $u$  e soluções aproximadas  $u_1$  e  $u_2 = u_3$  obtidas pelo método de Ritz; (b) solução exata  $N$  e soluções aproximadas  $N_1$  e  $N_2 = N_3$  obtidas pelo método de Ritz.

O fato de ser a força normal obtida por meio da derivada de um deslocamento que é aproximado explica sua convergência mais lenta:

$$\sqrt{\frac{\int_0^L (N_1 - N)^2 dx}{\int_0^L N^2 dx}} = 71,78\% \quad \sqrt{\frac{\int_0^L (N_2 - N)^2 dx}{\int_0^L N^2 dx}} = 8,63\%.$$

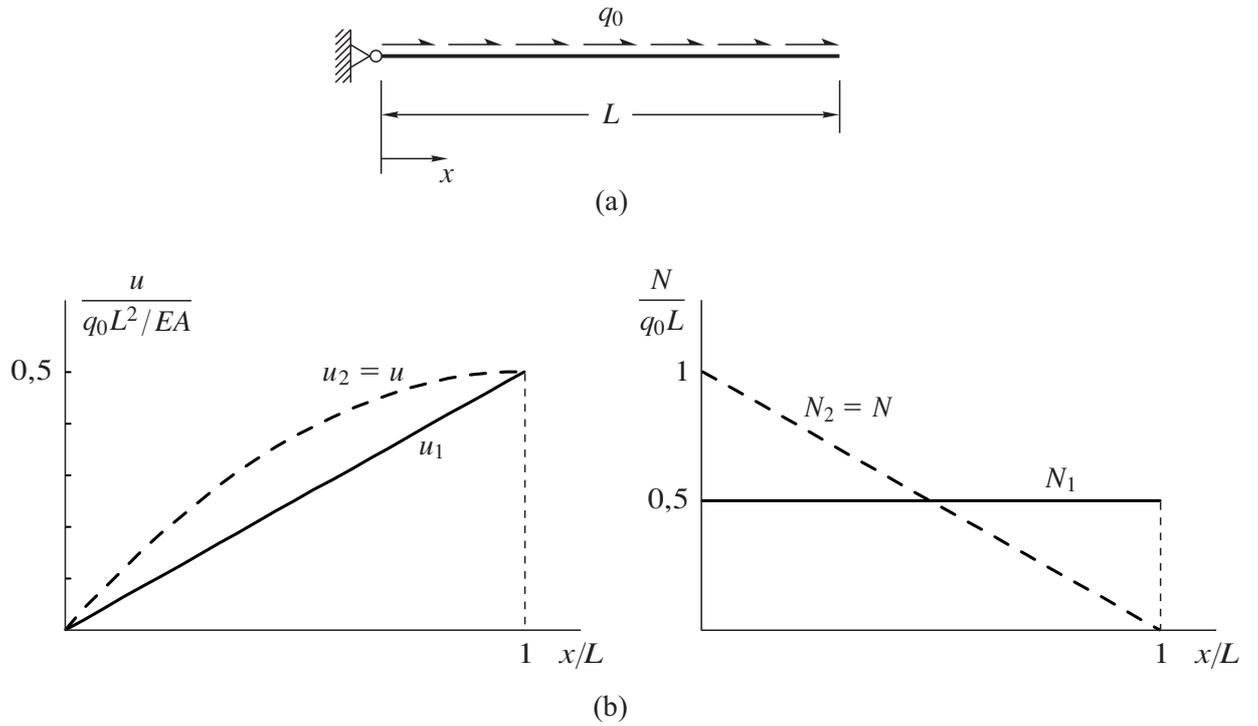
As soluções exata e aproximadas estão representadas graficamente na Figura 9.6b para  $P/q_0 L = -0,1$  (veja Problemas 9.15 e 9.16 para um tratamento de  $N$  independente de  $u$ ).

Para ilustrar melhor a causa da imprecisão da força normal, consideremos a função  $g = e^x$  e sua aproximação em série de Taylor  $g_1 = 1 + x$ . As duas funções  $g$  e  $g_1$  são bem próximas uma da outra no domínio  $0 < x < 0,1$ , digamos. No entanto, as primeiras derivadas  $g' = e^x$  e  $g_1' = 1$  são bem diferentes e as segundas derivadas  $g'' = e^x$  e  $g_1'' = 0$  mais ainda. A cada derivação um termo da série de Taylor é truncado, reduzindo assim a precisão de uma derivada em relação à derivada anterior. De uma maneira geral, é familiar aos que lidam com a forma tradicional do método dos elementos finitos que um campo de deformação (e de tensão) é menos preciso do que o campo de deslocamento aproximado do qual se deriva. ■

*Comentários 9.2:*

- Nos exemplos apresentados recorremos a três maneiras diferentes, mas matematicamente equivalentes, de expressar o mesmo problema: (a) a equação diferencial (9.1) sujeita às condições de contorno (9.2); (b) a forma ponderada (9.4) sujeita às condições de contorno (9.2); (c) a forma fraca (9.41) sujeita à condição de contorno  $u(0) = 0$ .

A maneira dada em (c) “enfraquece” a ordem de continuidade exigida por  $u$ , se comparada com a maneira dada em (a) ou (b), pois (9.41) requer  $u$  apenas uma vez diferenciável, enquanto



**Figura 9.7** Exemplo 9.6: (a) barra sob carga uniformemente distribuída  $q_0$ ; (b) soluções exatas  $u$ ,  $N$  e soluções aproximadas  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  obtidas pelo método de Ritz.

- É comum na literatura empregar o nome “método de Galerkin” a casos em que o nome deveria ser “método de Ritz”.

**Exemplo 9.6** Refaça o Exemplo 9.5, supondo  $P = 0$  e que a carga distribuída seja constante e igual a  $q_0$  (veja Figura 9.7a).

O comportamento da barra é descrito pela equação diferencial

$$EAu'' + q_0 = 0 \quad 0 < x < L$$

sujeita às condições de contorno

$$u(0) = 0 \text{ (geométrica)} \quad N(L) = 0 \text{ (mecânica)}.$$

A solução exata é

$$u(x) = \frac{q_0 x}{EA} \left( L - \frac{x}{2} \right)$$

e a força normal tem distribuição

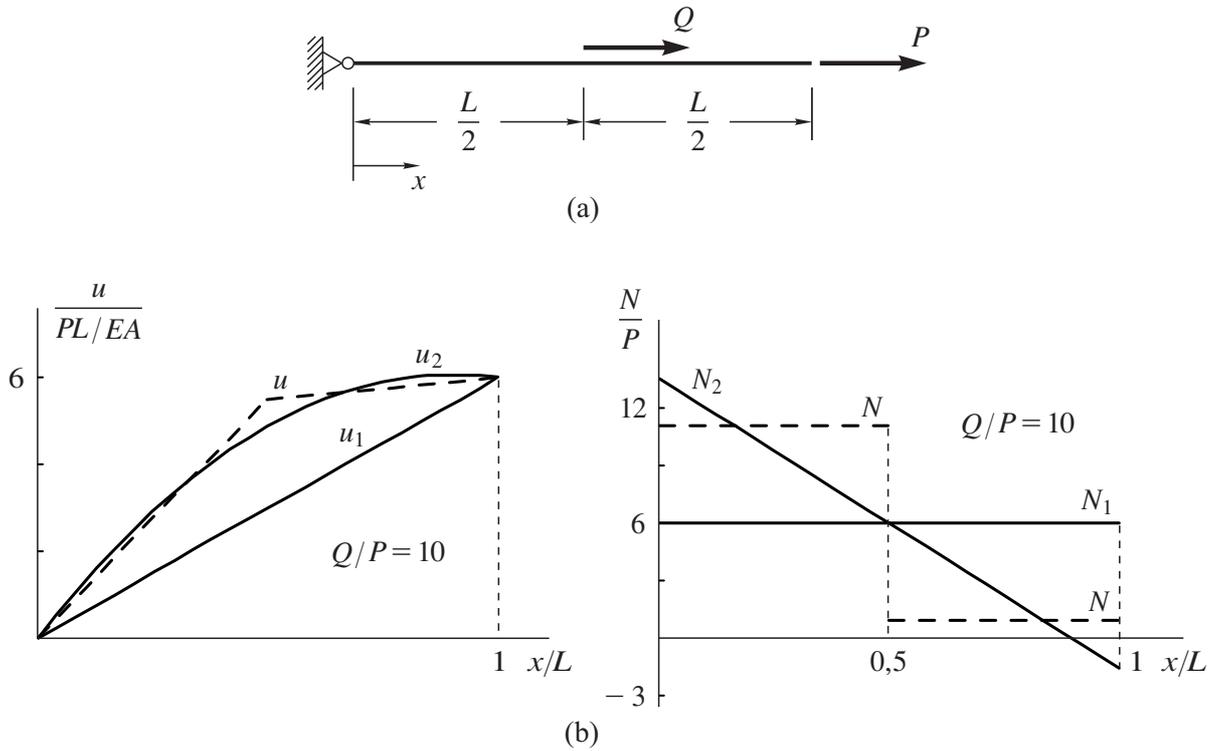
$$N(x) = EAu' = q_0(L - x).$$

As equações (9.46) e (9.47) escrevem-se

$$\mathbf{k}\mathbf{c} = \mathbf{f}$$

e

$$\mathbf{k} = \int_0^L EA\phi'\phi'^T dx \quad \mathbf{f} = \int_0^L (q_0\phi - EA\phi'_0\phi') dx.$$



**Figura 9.8** Exemplo 9.7: (a) barra sob forças  $Q$  e  $P$  aplicadas em  $x = L/2$  e  $x = L$ , respectivamente; (b) soluções exatas  $u$ ,  $N$  e soluções aproximadas  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  obtidas pelo método de Ritz.

inalterado porque todos os coeficientes adicionais serão identificados como nulos e os coeficientes já existentes permanecerão inalterados. ■

**Exemplo 9.7** Refaça o Exemplo 9.5, supondo que a carga distribuída seja substituída pela carga concentrada  $Q$  indicada na Figura 9.8a.

Neste exemplo a carga distribuída  $q(x)$ , que aparece na equação diferencial

$$EAu'' + q = 0,$$

degenera-se na carga concentrada  $Q$ . As condições de contorno são

$$u(0) = 0 \text{ (geométrica)} \quad N(L) = P \text{ (mecânica)}$$

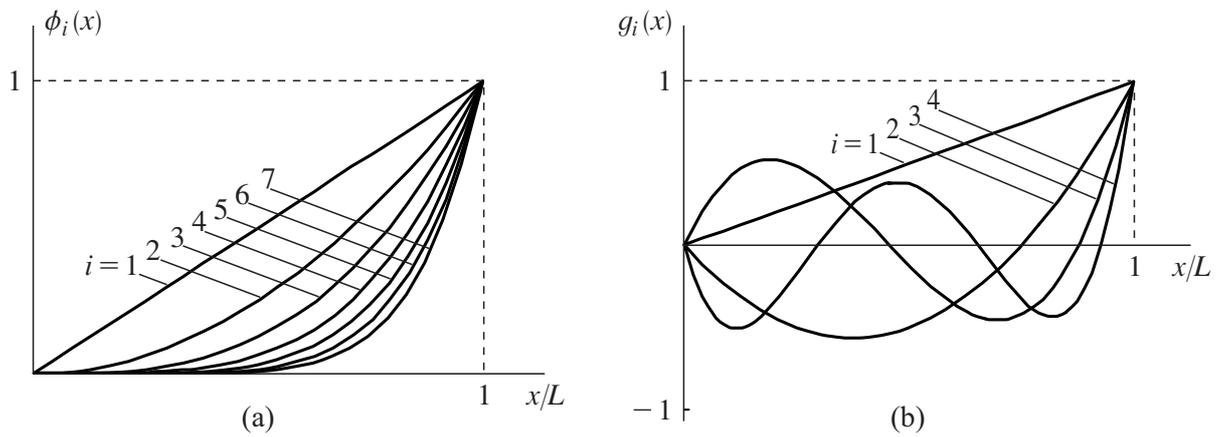
e a solução exata é dada por

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{EA} (P + Q) x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{1}{EA} \left( \frac{QL}{2} + Px \right) & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

ou

$$\frac{u}{PL/EA} = \begin{cases} \frac{x}{L} \left( 1 + \frac{Q}{P} \right) & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{Q}{2P} + \frac{x}{L} & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

A força normal tem distribuição



**Figura 9.9** (a) Os sete primeiros elementos do conjunto  $\{\phi_i\}$  de polinômios simples; (b) os quatro primeiros elementos do conjunto  $\{g_i\}$  de polinômios ortogonais.

A solução exata  $u$  e as soluções aproximadas  $u_1$  e  $u_2$  estão representadas graficamente na Figura 9.8b para  $Q/P = 10$ . Os erros (9.30) associados a  $u_1$  e  $u_2$  são, respectivamente,

$$e_1 = 31,07\% \quad e_2 = 4,91\%.$$

O erro cometido poderá ser reduzido com a inclusão de mais funções  $\phi_i$ . No entanto, jamais a solução exata será fielmente reproduzida, pelo menos com um número finito de funções, visto que  $u(x)$  é dada por duas funções distintas, uma válida em  $0 \leq x \leq L/2$  e outra em  $L/2 \leq x \leq L$ . A simples troca da carga uniformemente distribuída  $q_0$ , usada no Exemplo 9.6, pela carga concentrada  $Q$  foi suficiente para a nova solução do problema deixar de pertencer ao espaço gerado por  $\phi_1 = x/L, \phi_2 = (x/L)^2, \phi_3 = (x/L)^3, \dots, \phi_n = (x/L)^n$ , com um número finito de funções. O próximo capítulo mostra como contornar essa dificuldade usando o método dos elementos finitos.

As distribuições da força normal obtida na primeira e segunda aproximações são dadas por

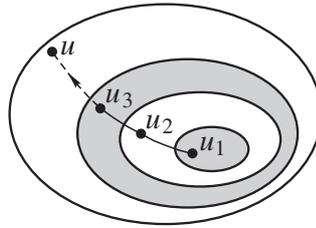
$$N_1(x) = EAu'_1 = P + \frac{Q}{2} \quad N_2(x) = EAu'_2 = \frac{4P + 5Q}{4} - \frac{3Q}{2L}x$$

e estão representadas graficamente Figura 9.8b. Os erros associados a  $N_1$  e  $N_2$  são, respectivamente,

$$\sqrt{\frac{\int_0^L (N_1 - N)^2 dx}{\int_0^L N^2 dx}} = 64,02\% \quad \sqrt{\frac{\int_0^L (N_2 - N)^2 dx}{\int_0^L N^2 dx}} = 32,01\%. \quad \blacksquare$$

### A base de polinômios simples

No método de Ritz, a solução exata (9.3) não pertence ao espaço gerado pelo conjunto  $\{\phi_i\}$  de polinômios simples adotado:  $\phi_1 = x/L, \phi_2 = (x/L)^2, \phi_3 = (x/L)^3, \dots, \phi_n = (x/L)^n$ . É de se esperar que aproximações mais precisas sejam obtidas com o aumento da dimensão  $n$  do espaço (inclusão de mais elementos  $\phi_i$ ). Surge, no entanto, uma dificuldade numérica com o uso desse conjunto ao se incluir mais elementos, que pode ser entendida analisando a representação gráfica dos sete primeiros elementos de  $\{\phi_i\}$  na Figura 9.9a.



**Figura 9.10** Espaços das soluções aproximadas  $u_i$  e exata  $u$ .

será de melhor qualidade. A figura também enfatiza que a solução exata será identificada se o espaço de busca a contiver.

Na resolução dos exemplos e dos problemas propostos neste capítulo, recomendamos o uso de um manipulador algébrico do tipo MATHEMATICA (Wolfram, 2003). Uma limitação séria dos métodos apresentados está na escolha de uma única função para aproximar a solução em todo o domínio, satisfazendo a priori todas as condições de contorno (método dos resíduos ponderados) ou parte delas (método de Ritz). Como consequência, deparamos com as seguintes dificuldades: (a) a convergência para a solução exata usando uma base  $\{\phi_i\}$  com um número finito de elementos pode ser impossível; (b) a mudança de uma simples condição de contorno pode significar para o usuário o recomeço de todo o processo; (c) o problema pode ser suscetível a mau condicionamento; (d) um domínio irregular pode inviabilizar a solução pela impossibilidade de se identificar aproximações que satisfaçam as condições de contorno. Mostraremos no próximo capítulo como contornar essas dificuldades pelo método dos elementos finitos.

## Problemas

**9.1** Mostre que a forma fraca (9.41) equivale à equação diferencial (9.1) e à condição de contorno mecânica  $N(L) = P$ .

**9.2** Mostre que a forma fraca (9.41) atribui os pesos  $\delta u(x)$  à equação diferencial (9.1) e  $\delta u(L)$  à condição de contorno mecânica  $N(L) = P$ .

**9.3** Mostre que os métodos de Ritz e de Galerkin conduzem ao mesmo sistema de equações  $\mathbf{k}\mathbf{c} = \mathbf{f}$  e, portanto, aos mesmos coeficientes  $c_i$ , quando uma mesma função  $u_n(x)$  usada no método de Galerkin é também usada no método de Ritz com  $W_n = \delta u_n$ .

**9.4** Verifique que as matrizes  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{f}$  obtidas pelo método de Galerkin no Exemplo 9.1 com o

polinômio cúbico (9.26) permanecem inalteradas se essa mesma aproximação for empregada com o método de Ritz.

**9.5** Na solução do Exemplo 9.7 pelo método de Galerkin, determine:

- (a) as funções  $\phi_0(x)$  e  $\phi_1(x)$ , sabendo-se que  $u_1(x) = \phi_0(x) + c_1\phi_1(x)$  é a aproximação polinomial mais simples;
- (b) o coeficiente  $c_1$ .

**9.6** Na busca de uma solução aproximada pelo método de Ritz usando

$$u_2(x) = c_1 \frac{x}{L} + c_2 \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

## Capítulo 10

# Método dos elementos finitos

Na prática, são várias as dificuldades encontradas na aplicação dos métodos dos resíduos ponderados e de Ritz na forma exposta no capítulo anterior:

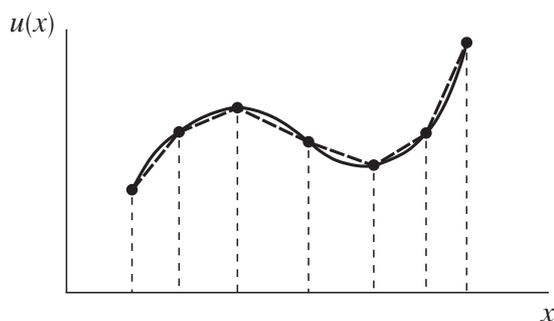
- (1) é uma tarefa difícil, se não impossível, conseguir aproximações que satisfaçam as condições de contorno quando o domínio tem geometria irregular;
- (2) mudar as condições de contorno ou a geometria do domínio pode significar uma mudança completa na aproximação adotada, não havendo uma escolha sistemática da base  $\{\phi_i\}$ . Qualquer implementação computacional desses métodos é normalmente limitada à solução de um problema bem específico;
- (3) adicionar termos à aproximação implica integrações mais trabalhosas e, muitas vezes, um problema mal condicionado;
- (4) há casos em que a solução exata do problema não é dada por uma única função, válida em todo o domínio. Percebemos claramente essa situação na solução da equação diferencial

$$au'' + f(x) = 0, \quad (10.1)$$

onde  $( )' = d( )/dx$ , quando o coeficiente  $a$  ou a função  $f(x)$  são definidos de maneira diferente em trechos distintos do domínio;

- (5) uma solução poderia ser melhorada modificando a aproximação apenas nas regiões do domínio onde se faz necessária, como, por exemplo, onde ocorre variação brusca da solução. O uso de novas aproximações que se estendem desnecessariamente por todo o domínio, como fazem os métodos dos resíduos ponderados e de Ritz, poderia assim ser evitado;
- (6) os coeficientes  $c_i$  não têm significado físico. Isso não se constitui, a rigor, numa dificuldade, mas apenas em algo que pode ser indesejável. Existem algumas formulações do método dos elementos finitos que também recorrem a coeficientes  $c_i$  sem significado físico.

O método dos elementos finitos mantém os conceitos do método dos resíduos ponderados ou de Ritz, porém incorpora estratégias com relação à escolha da base  $\{\phi_i\}$  de maneira a contornar as difi-



**Figura 10.1** A função  $u(x)$  é aproximada por trechos lineares.

culdades acima. A principal dessas estratégias é dividir o domínio em trechos menores e usar aproximações simples em cada trecho, normalmente polinômios algébricos de baixa ordem, contrapondo ao uso tradicional de aproximações complexas para todo o domínio. Cada trecho é um *elemento finito*. A Figura 10.1 ilustra a situação, ao aproximar a solução (não linear em  $x$ ) de um problema por meio de aproximações lineares da solução dentro de cada elemento (domínio dividido em seis elementos). A aproximação em todo o domínio melhora com o aumento do número de elementos. O método dos elementos finitos impõe certas limitações à continuidade da aproximação ou de algumas de suas derivadas dentro de cada elemento e entre elementos adjacentes, de modo que uma aproximação linear dentro do elemento, dependendo do problema, pode ser rejeitada pelo método. São limitações do próprio método dos resíduos poderados ou de Ritz ao ser aplicado por trechos e que serão devidamente esclarecidas.

Neste capítulo o método dos elementos finitos é apresentado na sua forma tradicional: (a) como uma extensão do método de Ritz, para se beneficiar da simplicidade da aproximação, em termos de continuidade, dentro de cada elemento e entre elementos adjacentes; (b) com aproximações idênticas para todos os elemento (se num elemento a aproximação é linear, ela será também linear para os demais elementos); (c) com uma melhor aproximação advinda da divisão do domínio em um número maior de elementos; (d) com todos os coeficientes  $c_i$  tendo significado físico. Problemas lineares simples unidimensionais da mecânica das estruturas serão empregados para ilustrar o método.

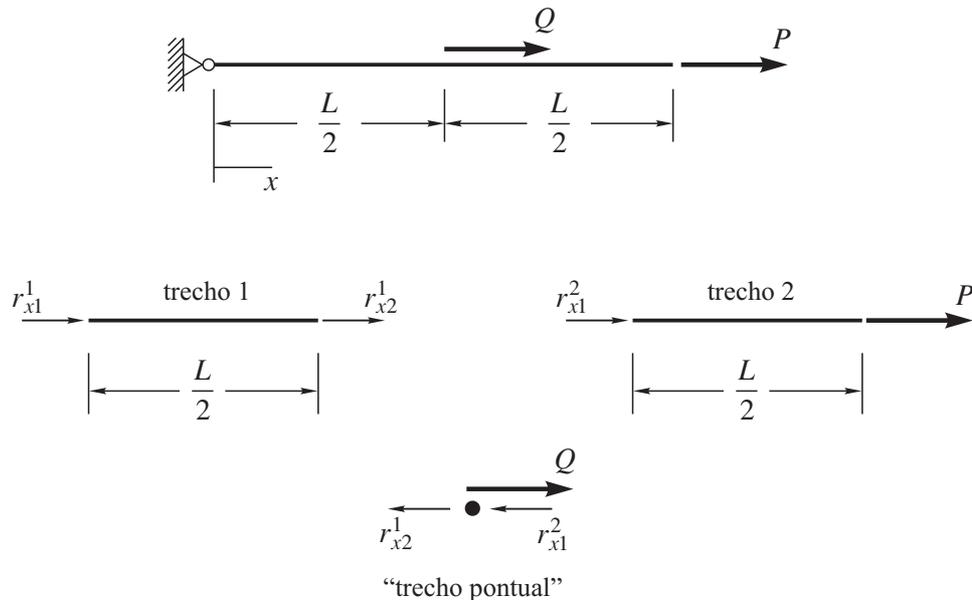
## 10.1 Aproximação por trechos

Mostremos como modificar a forma fraca de um problema de modo a viabilizar, pelo método de Ritz, o uso de aproximações por trechos (elementos) em vez de uma única aproximação em todo o domínio.

**Exemplo 10.1** Use o método de Ritz para analisar a estrutura da Figura 9.8a, aproximando o deslocamento nas duas metades da barra separadamente.

O comportamento da barra é descrito por

$$\begin{aligned}
 N' + q_x = 0 & \quad \text{equação de equilíbrio} & \quad N = EA\epsilon_m & \quad \text{equação constitutiva} \\
 \epsilon_m = u' & \quad \text{relação deformação-deslocamento} & & 
 \end{aligned}
 \tag{10.2}$$



**Figura 10.2** Exemplo 10.1: barra com suas duas metades (trecho 1 e trecho 2) e junção entre elas (trecho “pontual”) em diagrama de corpo livre.

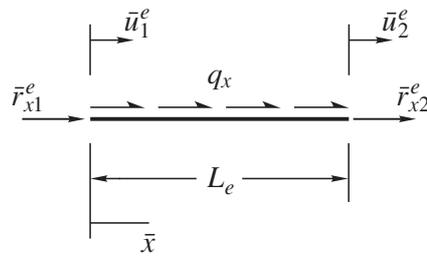
$$-\int_0^L EAu'\delta u'dx + Q\delta u\left(\frac{L}{2}\right) + P\delta u(L) = 0 \quad (10.13)$$

sujeita à condição de contorno

$$u(0) = 0. \quad (10.14)$$

Analisando (10.11), percebemos que a solução  $u(x)$  é dada por uma única função nos trechos em que  $E$ ,  $A$  e  $q_x$  são, simultaneamente, também dados por uma única função. No caso deste exemplo,  $EA$  é constante ao longo de toda a barra, mas o carregamento varia da seguinte forma:  $q_x = 0$  em  $0 < x < L/2$  (indicado por trecho 1 na Figura 10.2); depois degenera-se numa carga concentrada  $Q$  em  $x = L/2$  (indicado por “trecho pontual”); em seguida volta a ser  $q_x = 0$  em  $L/2 < x < L$  (indicado por trecho 2). Ou seja, o carregamento é descontínuo (veja a quarta dificuldade mencionada na página 251). Por ser  $EA$  constante e  $q_x = 0$  no trecho 1, podemos antecipar que a solução  $u(x)$  é um polinômio de primeiro grau. Pelo mesmo motivo, a solução  $u(x)$  é também um polinômio de primeiro grau no trecho 2. São dois polinômios distintos por causa da presença do “trecho pontual”, sob a ação de  $Q$ , entre os trechos 1 e 2. Um diagrama de corpo livre para cada trecho da barra (trecho com todas as forças que nele atuam) é mostrado na Figura 10.2, onde  $r_{x1}^1$  e  $r_{x2}^1$  são as reações nas extremidades esquerda e direita do trecho 1 e  $r_{x1}^2$  é a reação na extremidade esquerda do trecho 2.

Se a forma fraca (10.13) for usada para aplicar o método de Ritz convencional, o erro cometido pela solução aproximada poderia ser reduzido com a inclusão de mais elementos do conjunto  $\{\phi_i\}$  (aumento do espaço de busca da solução). No entanto, jamais a solução exata seria fielmente reproduzida, pelo menos com uma base de dimensão finita, visto que  $u(x)$  é dada por duas funções distintas: uma denominada  $u_1(x)$  válida em  $0 < x < L/2$  e a outra denominada  $u_2(x)$  válida em  $L/2 < x < L$  (veja Exemplo 9.7). Podemos modificar a forma fraca para levar em conta essa peculiaridade, ou seja, a



**Figura 10.3** Elemento de barra “e” num diagrama de corpo livre.

Por ser numericamente estável e de fácil aplicação, o método logo se torna objeto de vasta pesquisa, aparecendo num grande número de artigos e livros. Uma bibliografia de 1991 (Noor, 1991), por exemplo, já listava aproximadamente 400 livros sobre o assunto. O avanço tecnológico dos equipamentos computacionais foi fundamental para o desenvolvimento do método. É impossível hoje imaginar a prática da engenharia de estruturas sem o seu suporte. Em muitos casos, é ele a única ferramenta capaz de oferecer uma solução confiável. Não é por acaso que se tornou disciplina obrigatória nos currículos das melhores universidades do mundo.

### 10.3 Elemento de barra

É indiferente dizer que um elemento de barra deriva-se da teoria de vigas de Euler-Bernoulli ou de Timoshenko, uma vez que  $u(x)$ ,  $\epsilon_m(x)$  e  $N(x)$  são as únicas incógnitas sob análise. Não há, assim, envolvimento de flexão nem de torção. O elemento mais simples de barra será aqui desenvolvido.

A Figura 10.3 mostra um elemento finito “e” num diagrama de corpo livre. O princípio dos deslocamentos virtuais é dado por

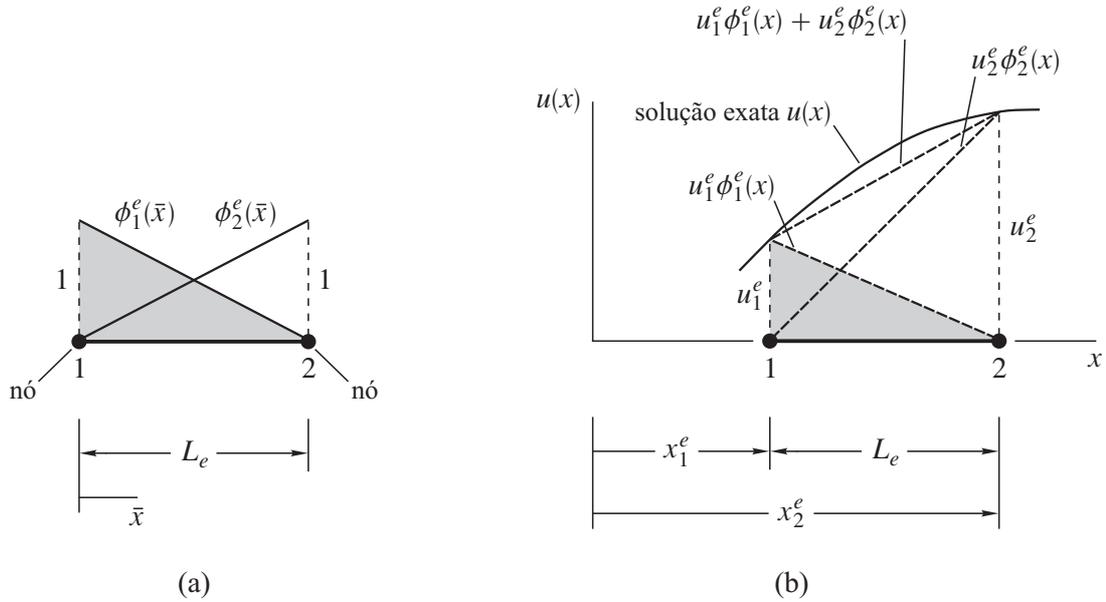
$$-\int_0^{L_e} N \delta \epsilon_m d\bar{x} + \int_0^{L_e} q_x \delta u d\bar{x} + \bar{r}_{x1}^e \delta \bar{u}_1^e + \bar{r}_{x2}^e \delta \bar{u}_2^e = 0 \quad (10.30)$$

ou, introduzindo a equação constitutiva e a relação deformação-deslocamento,

$$-\int_0^{L_e} EAu' \delta u' d\bar{x} + \int_0^{L_e} q_x \delta u d\bar{x} + \bar{r}_{x1}^e \delta \bar{u}_1^e + \bar{r}_{x2}^e \delta \bar{u}_2^e = 0. \quad (10.31)$$

Denotamos por  $L_e$  o comprimento do elemento,  $\bar{x}$  sua *coordenada local* ( $0 < \bar{x} < L_e$ ),  $\bar{u}_1^e$  e  $\bar{u}_2^e$  os deslocamentos nas extremidades do elemento,  $\bar{r}_{x1}^e$  e  $\bar{r}_{x2}^e$  as reações nas suas extremidades. O traço sobre  $\bar{u}_1^e$ ,  $\bar{r}_{x1}^e$ , etc., é para enfatizar que as quantidades referem-se ao eixo  $\bar{x}$ .

Partir de um diagrama de corpo livre tem a vantagem de o problema ser descrito, em nível do elemento, unicamente pela forma fraca (10.31) com todas as reações nodais  $\bar{r}_{xi}^e$  possíveis, sem nenhuma condição de contorno essencial com que se preocupar. No entanto, a aproximação de  $u(\bar{x})$  a ser adotada deve permitir que esse elemento “livre” possa satisfazer qualquer condição de contorno essencial em suas extremidades. É uma propriedade importante na conexão do elemento aos demais, inclusive aos apoios, para recompor toda a estrutura. Esse procedimento dispensa explicitar a forma fraca modificada da estrutura, como fizemos no Exemplo 10.1, focando-se tão somente num único elemento.



**Figura 10.4** Elemento de barra: (a) funções  $\phi_1^e$  e  $\phi_2^e$  da base local; (b) aproximação linear  $u_1^e \phi_1^e(x) + u_2^e \phi_2^e(x)$  conferida pelo elemento.

Admitindo que  $\delta \bar{u}_1^e$  e  $\delta \bar{u}_2^e$  sejam arbitrários e independentes,

$$EA \left( \frac{\bar{u}_2^e - \bar{u}_1^e}{L_e} \right) + \frac{q_x L_e}{2} + \bar{r}_{x1}^e = 0 \quad -EA \left( \frac{\bar{u}_2^e - \bar{u}_1^e}{L_e} \right) + \frac{q_x L_e}{2} + \bar{r}_{x2}^e = 0 \quad (10.38)$$

ou

$$\frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \end{Bmatrix} = \frac{q_x L_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{r}_{x1}^e \\ \bar{r}_{x2}^e \end{Bmatrix}. \quad (10.39)$$

Esta equação é uma forma discretizada da equação diferencial

$$EAu'' + q_x = 0 \quad 0 < \bar{x} < L_e \quad (10.40)$$

e das condições de contorno

$$N(0) = -\bar{r}_{x1}^e \quad \text{se } \bar{u}_1^e \text{ for desconhecido} \quad N(L_e) = \bar{r}_{x2}^e \quad \text{se } \bar{u}_2^e \text{ for desconhecido.} \quad (10.41)$$

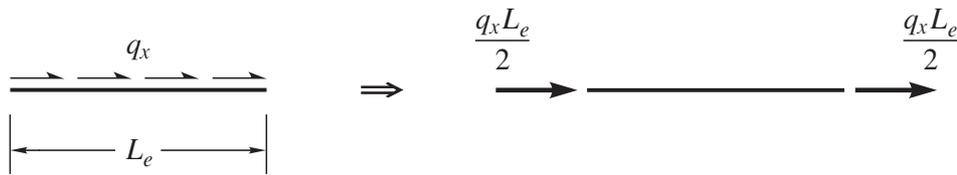
Numa forma compacta, a equação do elemento (10.39) escreve-se

$$\bar{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{d}} = \underbrace{\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{r}}}_{\bar{\mathbf{f}}} \quad (10.42)$$

onde  $\bar{\mathbf{k}}$  é a matriz de rigidez do elemento,  $\bar{\mathbf{d}}$  é o vetor dos deslocamentos nodais (valores nodais da variável primária),  $\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{r}}$  é o vetor das forças nodais definidos por

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{f}} = \underbrace{\frac{q_x L_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{p}}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{r}_{x1}^e \\ \bar{r}_{x2}^e \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{r}}}. \quad (10.43)$$

Observe que (10.42) representa o equilíbrio em cada nó do elemento. O vetor  $\bar{\mathbf{f}}$  é constituído pelo vetor das forças nodais equivalentes  $\bar{\mathbf{p}}$  (equivalentes à carga  $q_x$  aplicada no elemento) e pelo vetor



**Figura 10.5** Com relação à carga  $q_x$  uniformemente distribuída, as duas forças nodais  $q_x L_e / 2$  são equivalentes tanto no trabalho que realizam como em termos estáticos.

das reações nodais  $\bar{\mathbf{r}}$  (valores nodais da variável secundária). O vetor  $-\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{d}}$  contém as forças internas nodais de origem elástica induzidas pelo deslocamento.

Além de ser estaticamente equivalente à carga  $q_x$  uniformemente distribuída aplicada no elemento (veja Figura 10.5), o vetor

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{q_x L_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (10.44)$$

é também *equivalente no trabalho* à carga  $q_x$ :

$$\bar{\mathbf{p}}^T \delta \bar{\mathbf{d}} = \int_0^{L_e} q_x \delta u \, d\bar{x}. \quad (10.45)$$

**Exemplo 10.2** Refaça o Exemplo 10.1 usando o elemento finito (10.39).

Vamos dividir a barra em dois elementos, como indicado na Figura 10.6. O deslocamento global  $D_i$  de um nó da estrutura coincide com o deslocamento local  $\bar{u}_i^e$  do elemento que ali se conecta. A reação de apoio é indicada por  $R$ . É comum chamar de *malha* um dado arranjo de elementos com o qual dividimos o domínio do problema.

*Elemento 1:* como não existe carga externa aplicada ao elemento 1, então  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ . A equação (10.42) escreve-se

$$\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^1 \\ \bar{u}_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_{x1}^1 \\ \bar{r}_{x2}^1 \end{Bmatrix}.$$

Para melhor visualizar o posicionamento do elemento na estrutura e sua conexão ao elemento vizinho, vamos reescrever a equação do elemento em termos de todos os deslocamentos nodais  $D_i$  da estrutura, adicionando linhas e colunas nulas onde forem necessárias. Sabendo-se que

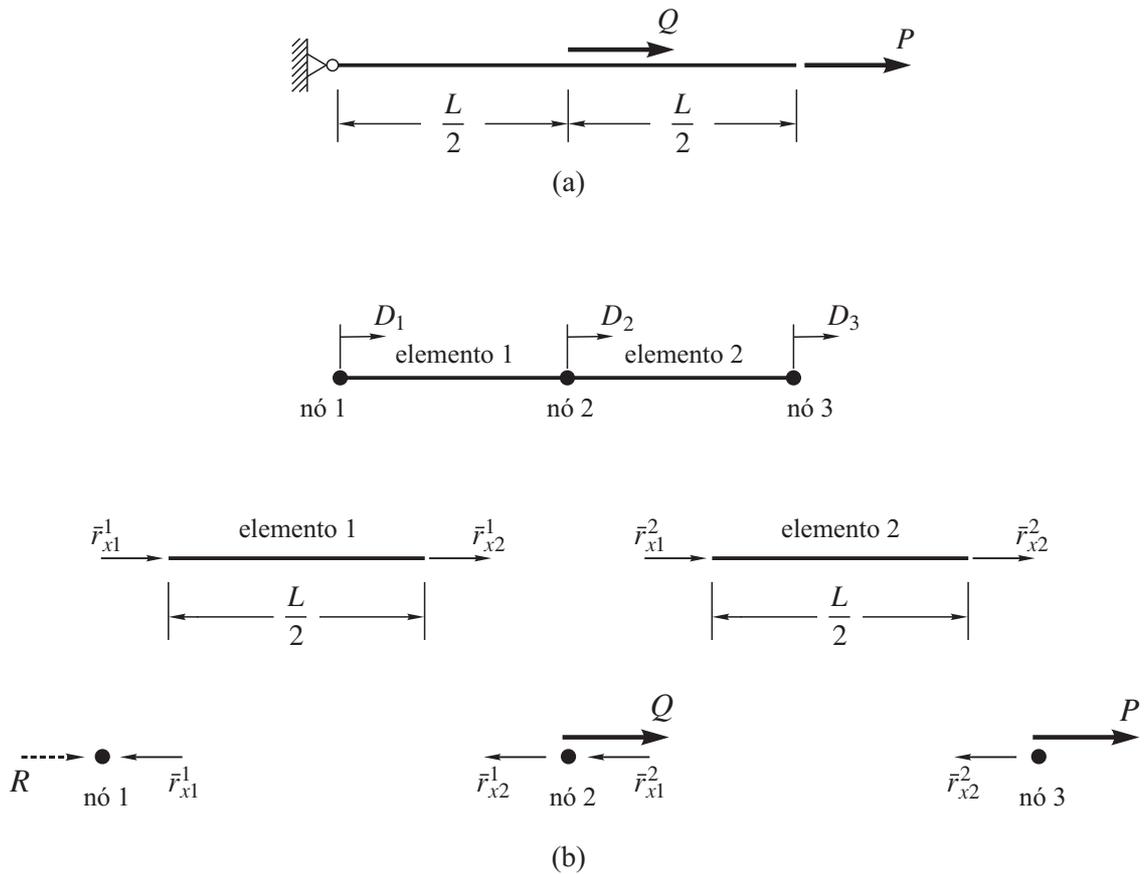
$$\bar{u}_1^1 = D_1 \quad \bar{u}_2^1 = D_2,$$

então

$$\frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_{x1}^1 \\ \bar{r}_{x2}^1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

*Elemento 2:* de maneira análoga ao elemento 1, escrevemos para o elemento 2

$$\frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^2 \\ \bar{u}_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_{x1}^2 \\ \bar{r}_{x2}^2 \end{Bmatrix}.$$



**Figura 10.6** Exemplo 10.2: (a) geometria da barra e carregamento; (b) discretização da barra em dois elementos, e elementos e nós em diagrama de corpo livre.

Sabendo-se que

$$\bar{u}_1^2 = D_2 \quad \bar{u}_2^2 = D_3,$$

então

$$\frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{r}_{x1}^2 \\ \bar{r}_{x2}^2 \end{Bmatrix}.$$

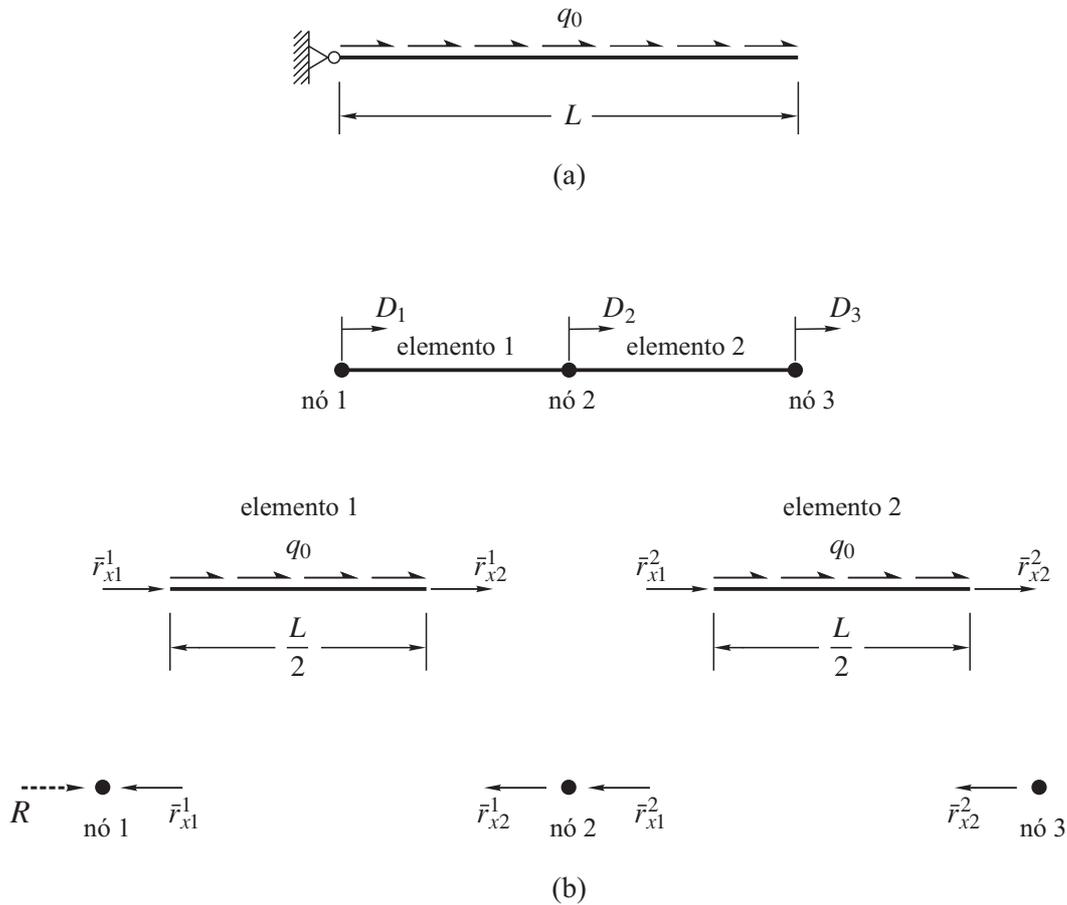
A soma das equações dos dois elementos resulta em

$$\frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} \underline{1} & -\underline{1} & 0 \\ -\underline{1} & \underline{1} + \underline{1} & -\underline{1} \\ 0 & -\underline{1} & \underline{1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_{x1}^1 \\ \bar{r}_{x2}^1 + \bar{r}_{x1}^2 \\ \bar{r}_{x2}^2 \end{Bmatrix},$$

onde grifamos com um e dois traços, respectivamente, as contribuições dos elementos 1 e 2 na matriz de rigidez. A continuidade da variável primária (deslocamento  $u$ ) entre os dois elementos é imposta ao considerar que  $\bar{u}_2^1 = \bar{u}_1^2 = D_2$ . Observe como a troca de  $c_i$  por  $\bar{u}_i^e$  em (10.34) facilita essa operação. Podemos agora impor as condições de equilíbrio dos nós,

$$\bar{r}_{x1}^1 = R \quad \bar{r}_{x2}^1 + \bar{r}_{x1}^2 = Q \quad \bar{r}_{x2}^2 = P,$$

para obter



**Figura 10.7** Exemplo 10.3: (a) geometria da barra e carregamento; (b) discretização da barra em dois elementos, e elementos e nós em diagrama de corpo livre.

$$\begin{Bmatrix} \bar{r}_{x1}^2 \\ \bar{r}_{x2}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N(0) \\ N(\frac{L}{2}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EAu'(0) \\ EAu'(\frac{L}{2}) \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Se a estrutura fosse dividida em um número maior de elementos, ou seja, se houvesse um *refinamento* no modelo de elementos finitos, nenhuma mudança ocorreria nos resultados já obtidos (as novas malhas deveriam manter  $Q$  como carga nodal). Isto se deve ao fato de a aproximação linear adotada para o campo de deslocamento em cada elemento reproduzir a solução exata (10.28), uma vez que  $q_x = 0$ . ■

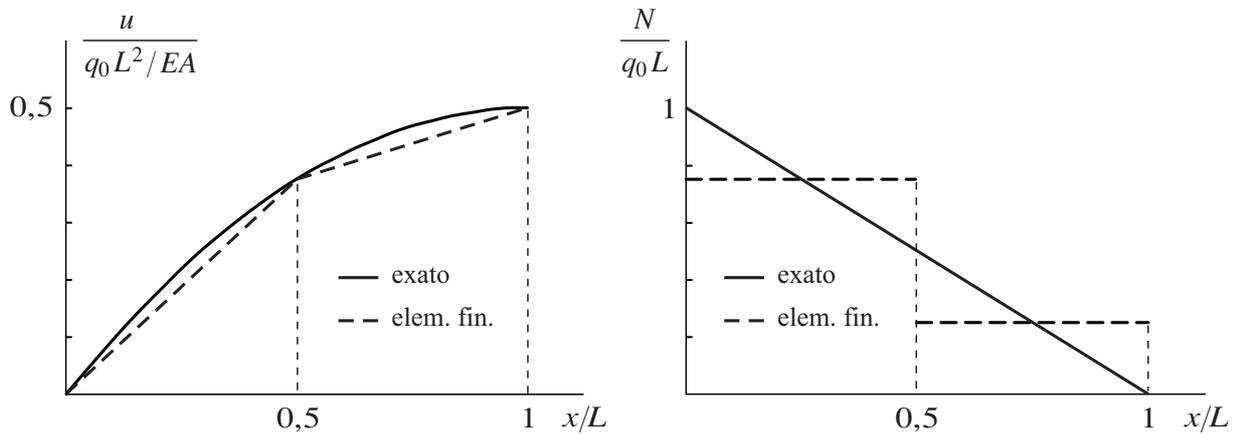
**Exemplo 10.3** Refaça o Exemplo 10.2, supondo que a estrutura esteja sob uma carga  $q_x = q_0$  uniformemente distribuída (veja Figura 10.7).

A solução exata do problema é dada por (veja Exemplo 9.6)

$$u(x) = \frac{q_0 x}{EA} \left( L - \frac{x}{2} \right) \quad N(x) = EAu' = q_0 (L - x).$$

A barra dividida em dois elementos, como no Exemplo 10.2, está indicada na Figura 10.7.

*Elemento 1:* a equação (10.39) escreve-se



**Figura 10.8** Exemplo 10.3: distribuição do deslocamento e da força normal.

### Base global

A Figura 10.9 traz a barra dividida em dois elementos, como usada nos Exemplos 10.2 e 10.3, com o campo de deslocamento representado na base local  $\{\phi_1^e, \phi_2^e\}$  de cada elemento.

Considerando a relação que existe entre os deslocamentos locais  $\bar{u}_i^e$  e globais  $D_i$ , e entre as coordenadas local  $\bar{x}$  e global  $x$ , escrevemos

$$u(x) = \begin{cases} D_1\phi_1^1 + D_2\phi_2^1 & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ D_2\phi_1^2 + D_3\phi_2^2 & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases} \quad (10.46)$$

Como uma função  $\phi_i^e$  ( $i = 1, 2$ ) só não é nula dentro do elemento “e”, podemos adicionar as duas expressões acima para obter uma única expressão dada por

$$\begin{aligned} u(x) &= (D_1\phi_1^1 + D_2\phi_2^1) + (D_2\phi_1^2 + D_3\phi_2^2) = D_1\phi_1^1 + D_2(\phi_2^1 + \phi_1^2) + D_3\phi_2^2 \\ &= D_1\phi_1 + D_2\phi_2 + D_3\phi_3 = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{D} \end{aligned} \quad (10.47)$$

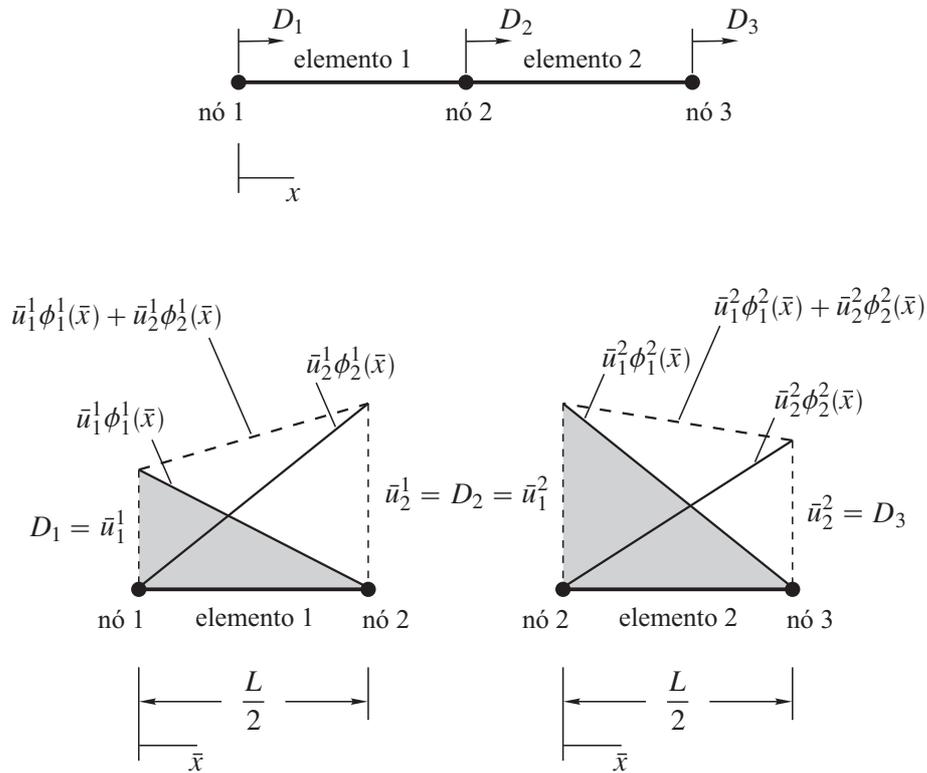
onde

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad (10.48)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \begin{cases} \phi_1^1(x) & x \in \text{elemento 1} \\ 0 & x \in \text{elemento 2} \end{cases} & \phi_2(x) &= \begin{cases} \phi_2^1(x) & x \in \text{elemento 1} \\ \phi_1^2(x) & x \in \text{elemento 2} \end{cases} \\ \phi_3(x) &= \begin{cases} 0 & x \in \text{elemento 1} \\ \phi_2^2(x) & x \in \text{elemento 2.} \end{cases} \end{aligned} \quad (10.49)$$

Sem levar em conta as condições de contorno, a busca do deslocamento  $u(x)$  em toda a barra se dá num espaço vetorial de dimensão 3 gerado pela *base global*  $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$  (veja Figura 10.10). Se localmente as funções  $\phi_1^e$  e  $\phi_2^e$  interpolam os valores nodais  $\bar{u}_1^e$  e  $\bar{u}_2^e$  para fornecer o deslocamento em



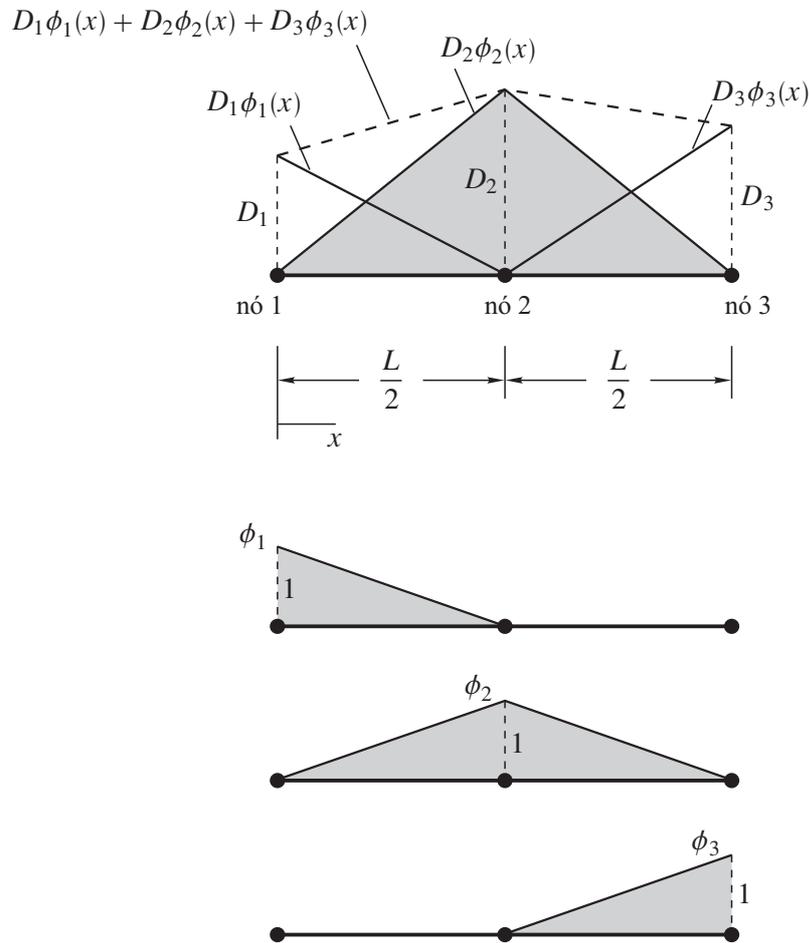
**Figura 10.9** Barra dividida em dois elementos, com o campo de deslocamento representado na base local  $\{\phi_1^e, \phi_2^e\}$  de cada elemento.

qualquer ponto do elemento “e”, globalmente as funções  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  interpolam os valores nodais  $D_1, D_2$  e  $D_3$  para fornecer o deslocamento em qualquer ponto da barra.

A Figura 10.11 mostra as  $n$  funções  $\phi_i(x)$  da base global, caso a barra seja dividida em  $n - 1$  elementos, num total de  $n$  nós. Perceba que uma função  $\phi_i$  da base só não é ortogonal às funções adjacentes  $\phi_{i-1}$  e  $\phi_{i+1}$ . Ou seja, a aproximação por elementos finitos conduz a uma base próxima de ser ortogonal, inclusive em suas derivadas, o que explica o bom condicionamento da equação da estrutura se comparada com o método de Ritz convencional. Além disso, adicionar elementos não implica integrações mais trabalhosas (veja a terceira dificuldade mencionada na página 251). Uma consequência prática importante do uso dessa base é que a matriz de rigidez gerada é esparsa, podendo ser armazenada e tratada com eficiência computacional (Pissanetsky, 1984). Assim, ao dividir o domínio em trechos e fazer aproximações do deslocamento nesses trechos, o método dos elementos finitos constrói para todo o domínio bases “quase ortogonais”.

*Comentários 10.1:*

- O polinômio completo escolhido para aproximar o deslocamento deve ser tal que: (a) o deslocamento seja contínuo dentro do elemento até, pelo menos, a derivação de ordem mais elevada presente na forma fraca; (b) o deslocamento, por ter sido identificado como variável primária, seja contínuo entre elementos adjacentes. Com relação à essa continuidade, é instrutivo consultar o elemento de viga de Euler-Bernoulli apresentado na Seção 10.4.
- A conexão dos elementos para recompor a estrutura é feita de maneira sistemática e se baseia:



**Figura 10.10** Barra dividida em dois elementos, com o campo de deslocamento representado na base global  $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ .

(a) na continuidade do deslocamento entre elementos adjacentes (restrição sobre a variável primária); (b) no equilíbrio dos nós (restrição sobre a variável secundária).

- Numa forma compacta, a equação da estrutura escreve-se

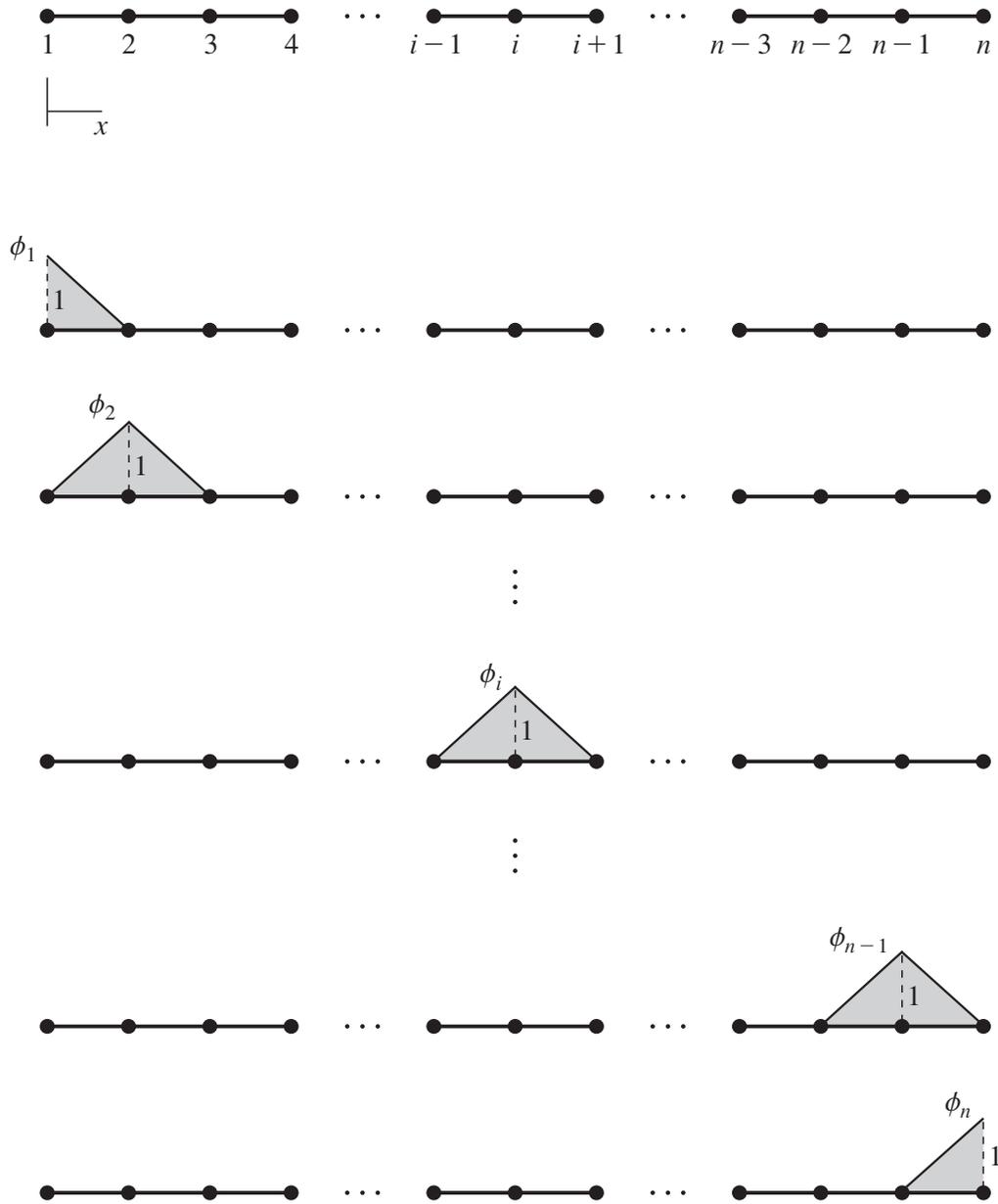
$$\mathbf{KD} = \mathbf{P} + \mathbf{R} = \mathbf{F} \quad (10.50)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a *matriz de rigidez da estrutura* e  $\mathbf{D}$  é o vetor dos deslocamentos nodais. O vetor  $\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{R}$  das forças nodais é constituído pelas forças nodais equivalentes  $\mathbf{P}$  (obtido do vetor  $\bar{\mathbf{p}}$  dos elementos) e pelas forças externas  $\mathbf{R}$  (incluem as reações de apoio) aplicadas nos nós. No Exemplo 10.2

$$\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R \\ Q \\ P \end{Bmatrix}, \quad (10.51)$$

e no Exemplo 10.3

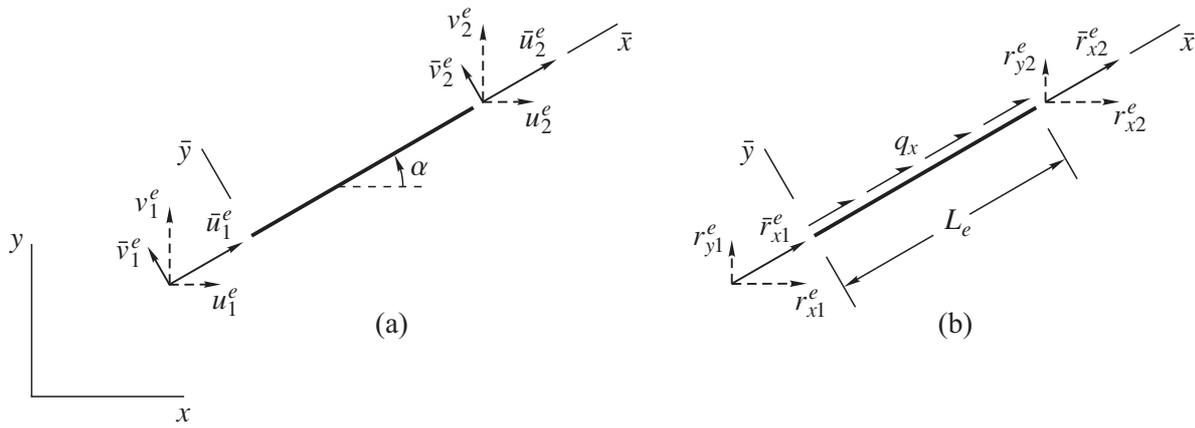
$$\mathbf{P} = \frac{q_0 L}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (10.52)$$



**Figura 10.11** Funções  $\phi_i(x)$  da base global para a barra dividida em  $n - 1$  elementos.

Temos obtido  $\mathbf{R}$  pelo equilíbrio de cada nó apenas para enfatizar o que se passa no processo de espalhamento. No entanto, esse vetor pode ser obtido de maneira expedita só em observar as forças nodais aplicadas. Antes da solução do problema, se um deslocamento  $D_i$  é conhecido, a correspondente força  $R_i$  deverá ser incógnita, e vice-versa.

- Impor a condição de contorno  $D_1 = 0$  nos Exemplos 10.2 e 10.3 significa remover  $\phi_1$  da base global (veja equação (10.47)), reduzindo a dimensão do espaço para 2. Isso claramente reflete na remoção do movimento de corpo rígido da barra ( $D_1 = 0$ ), ou seja, o subespaço  $D_2\phi_2 + D_3\phi_3$  é restrito a elementos (funções) sem movimento de corpo rígido. De maneira menos clara, isso também reflete na remoção da singularidade da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . Nesse sentido, sabemos que o sistema linear  $\mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{F}$  tem uma, e somente uma, solução para  $\mathbf{K}$  não singular. Se  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , por exemplo, a solução será  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  para  $\mathbf{K}$  não singular, mas haverá infinitas soluções para  $\mathbf{K}$  singular. É fácil, portanto, entender fisicamente por que  $\mathbf{K}$  é singular quando a estrutura



**Figura 10.12** Elemento de barra no plano  $xy$  sob orientação dada pelo ângulo  $\alpha$ : (a) deslocamentos nodais  $\bar{u}_i^e, \bar{v}_i^e$  no sistema local  $\bar{x}\bar{y}$  e deslocamentos nodais  $u_i^e, v_i^e$  no sistema global  $xy$ ; (b) reações nodais  $\bar{r}_{xi}^e$  e carga externa  $q_x$  no sistema local  $\bar{x}\bar{y}$ , e reações nodais  $r_{xi}^e, r_{yi}^e$  no sistema global  $xy$ .

### Treliça plana

Mostremos como uma treliça, que é uma estrutura formada por barras que não envolvem flexão nem torção, pode ser discretizada simplesmente usando o elemento de barra apresentado. No caso específico de uma treliça plana, a equação do elemento (10.42), válida no sistema local  $\bar{x}\bar{y}$ , deve antes ser transformada para o sistema global  $xy$  considerando que o elemento esteja orientado segundo um ângulo  $\alpha$ , como indicado na Figura 10.12.

Pela figura percebemos que as componentes do deslocamento em cada nó nos sistemas local e global estão relacionadas por

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^e &= u_1^e \cos \alpha + v_1^e \sin \alpha & \bar{v}_1^e &= -u_1^e \sin \alpha + v_1^e \cos \alpha \\ \bar{u}_2^e &= u_2^e \cos \alpha + v_2^e \sin \alpha & \bar{v}_2^e &= -u_2^e \sin \alpha + v_2^e \cos \alpha \end{aligned} \quad (10.58)$$

ou

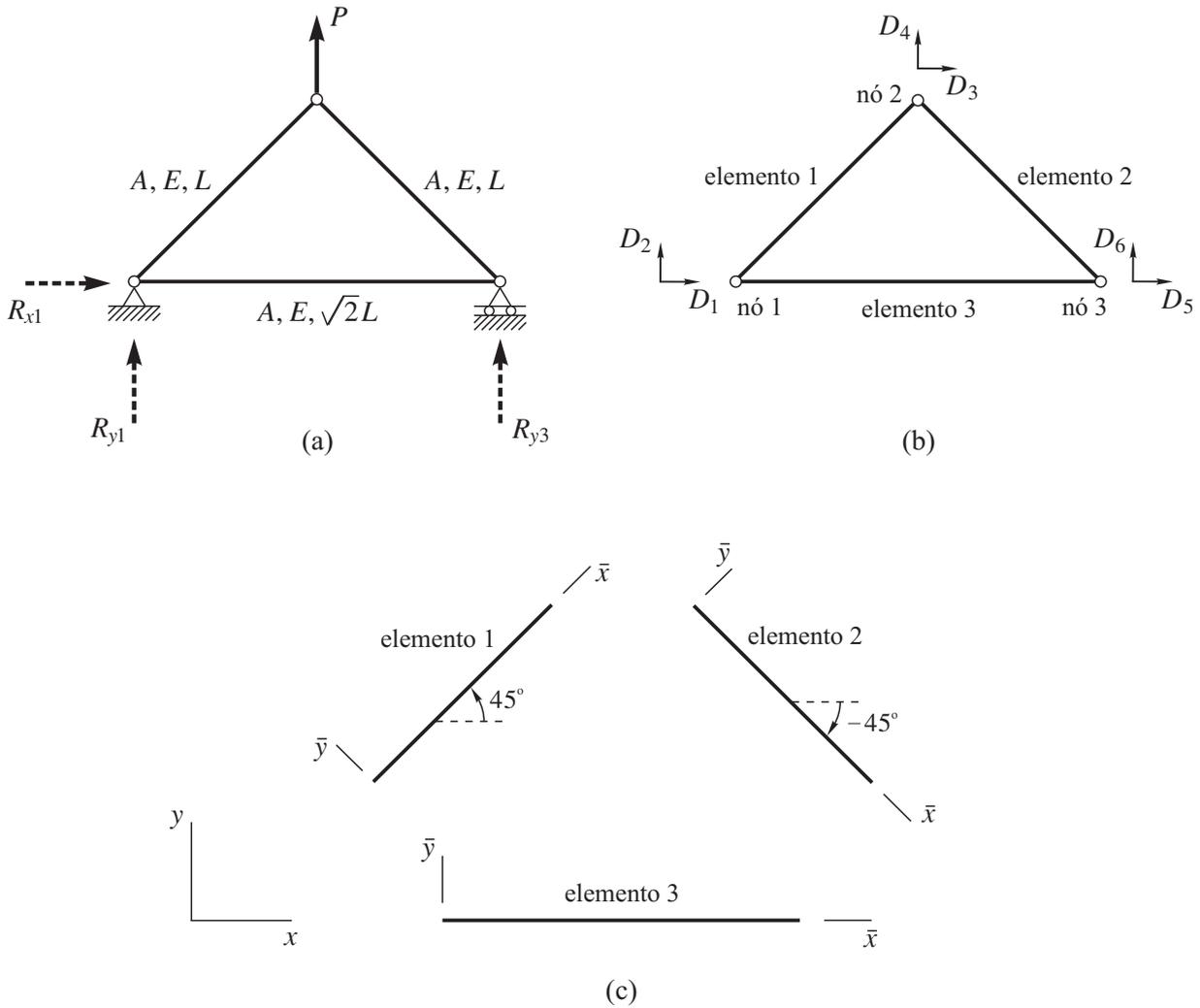
$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{v}_1^e \\ \bar{u}_2^e \\ \bar{v}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \end{Bmatrix}. \quad (10.59)$$

Como no sistema local a equação do elemento (10.42) só envolve as componentes axiais  $\bar{u}_1^e$  e  $\bar{u}_2^e$  do deslocamento nodal, vamos considerar apenas a primeira e a terceira equações em (10.59):

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{T}\mathbf{d}. \quad (10.60)$$

A matriz de transformação

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \quad c = \cos \alpha \quad s = \sin \alpha \quad (10.61)$$



**Figura 10.13** Exemplo 10.4: (a) treliça plana; (b) numeração dos elementos, nós e deslocamentos nodais no sistema global  $xy$ ; (c) posicionamento do sistema local  $\bar{x}\bar{y}$  em cada elemento.

Para se fazer o espalhamento de cada elemento, devemos lidar com a sua equação (10.65) no sistema global.

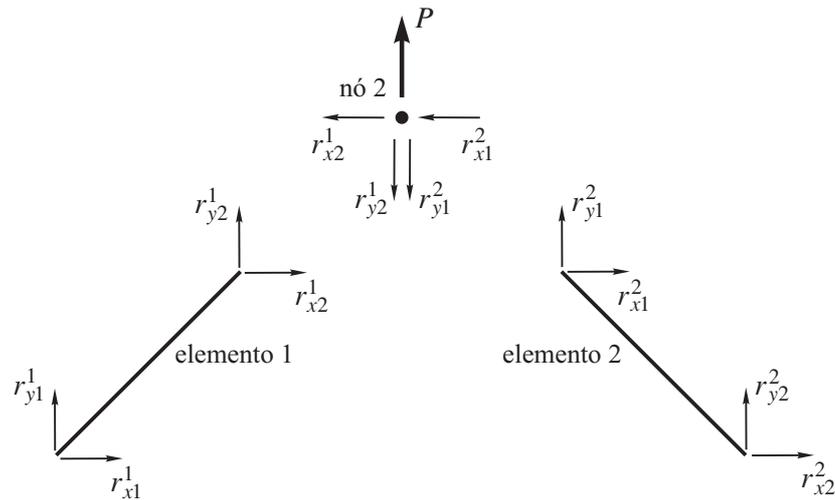
*Elemento 1* ( $\alpha = 45^\circ$ ;  $L_e = L$ ):

$$\Rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{x1}^1 \\ r_{y1}^1 \\ r_{x2}^1 \\ r_{y2}^1 \end{Bmatrix}.$$

Sabendo-se que

$$u_1^1 = D_1 \quad v_1^1 = D_2 \quad u_2^1 = D_3 \quad v_2^1 = D_4,$$

então



**Figura 10.14** Exemplo 10.4: nó 2 em diagrama de corpo livre.

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 & -0,707 \\ -0,5 & -0,5 & 0 \\ 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 1,207 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 0 \\ P \\ 0 \\ R_{y3} \end{Bmatrix}.$$

Em particular, as condições de equilíbrio do nó 2,

$$r_{x2}^1 + r_{x1}^2 = 0 \quad r_{y2}^1 + r_{y1}^2 = P,$$

pode ser visualizada na Figura 10.14. Reagrupemos as equações na forma

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 1,207 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

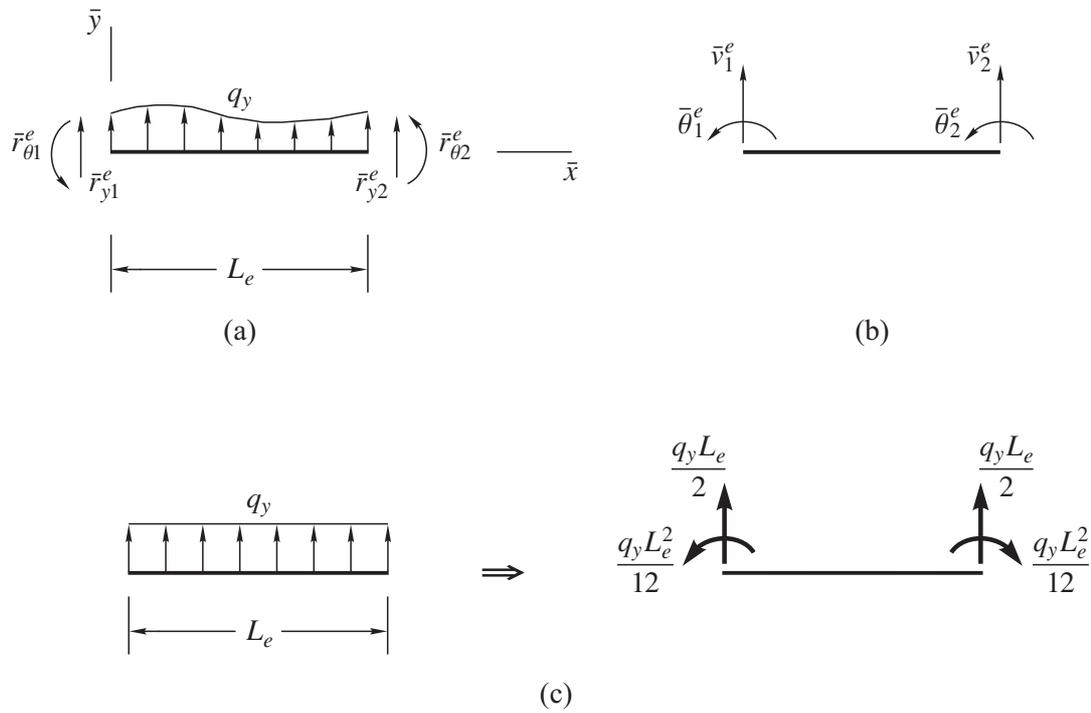
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 & -0,707 \\ -0,5 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{y3} \end{Bmatrix}.$$

(a) Do primeiro grupo de equações,

$$\begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 1,207 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,354 \\ 1,354 \\ -0,707 \end{Bmatrix} \frac{PL}{EA}.$$

(b) Substituindo esse resultado no segundo grupo de equações,

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 & -0,707 \\ -0,5 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,354 \\ 1,354 \\ -0,707 \end{Bmatrix} \frac{PL}{EA} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ -0,5 \end{Bmatrix} P.$$



**Figura 10.15** Elemento de viga de Euler-Bernoulli “e” referido ao sistema local  $\bar{x}\bar{y}$ : (a) diagrama de corpo livre; (b) deslocamentos e rotações nas extremidades; (c) forças nodais equivalentes à carga  $q_y$  uniformemente distribuída.

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{d}} = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,707 \end{Bmatrix} \frac{PL}{EA} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{Bmatrix} P.$$



As seguintes vantagens de se discretizar todo o domínio a partir de um elemento simples podem ser identificadas nos exemplos anteriores: (a) contornar a dificuldade de não ser a solução dada por uma única função (Exemplo 10.2); (b) aproximar a solução usando uma malha de elementos finitos (Exemplo 10.3); (c) lidar com geometrias irregulares simplesmente rotacionando o elemento (Exemplo 10.4).

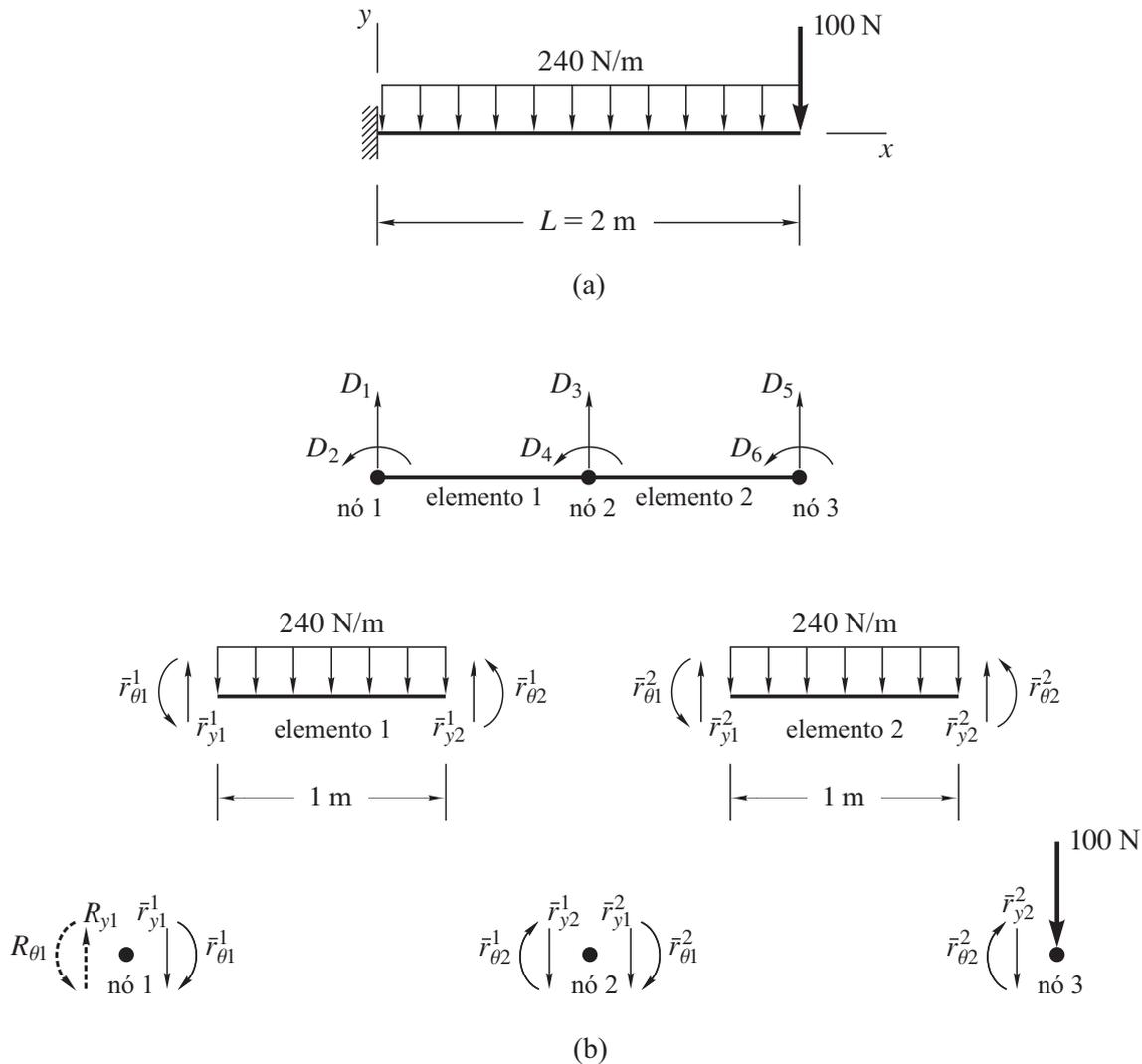
## 10.4 Elemento de viga de Euler-Bernoulli

Suponha que o elemento finito “e” indicado na Figura 10.15a em diagrama de corpo livre, sujeito a uma carga externa  $q_y$  (força transversal por unidade de comprimento), seja de uma viga de Euler-Bernoulli sob flexão no plano  $\bar{x}\bar{y}$  do sistema local. O princípio dos deslocamentos virtuais é dado por

$$-\int_0^{L_e} M \delta \kappa d\bar{x} + \int_0^{L_e} q_y \delta v d\bar{x} + \bar{r}_{y1}^e \delta \bar{v}_1^e + \bar{r}_{\theta 1}^e \delta \bar{\theta}_1^e + \bar{r}_{y2}^e \delta \bar{v}_2^e + \bar{r}_{\theta 2}^e \delta \bar{\theta}_2^e = 0 \quad (10.68)$$

ou, introduzindo a equação constitutiva  $M = EI\kappa$  e a relação deformação-deslocamento  $\kappa = -v''$ ,

$$-\int_0^{L_e} EIV'' \delta v'' d\bar{x} + \int_0^{L_e} q_y \delta v d\bar{x} + \bar{r}_{y1}^e \delta \bar{v}_1^e + \bar{r}_{\theta 1}^e \delta \bar{\theta}_1^e + \bar{r}_{y2}^e \delta \bar{v}_2^e + \bar{r}_{\theta 2}^e \delta \bar{\theta}_2^e = 0. \quad (10.69)$$



**Figura 10.17** Exemplo 10.5: (a) geometria da viga e carregamento; (b) discretização da viga em dois elementos, e elementos e nós em diagrama de corpo livre.

O deslocamento ou rotação global  $D_i$  de um nó da estrutura, referido ao sistema  $xy$ , coincide com o deslocamento  $\bar{v}_i^e$  ou rotação  $\bar{\theta}_i^e$  local da extremidade do elemento que ali se conecta, referido ao sistema  $\bar{x}\bar{y}$ . As reações de apoio estão indicadas por  $R_{y1}$  e  $R_{\theta1}$ . Adotemos a seguir o mesmo procedimento de solução dos exemplos anteriores.

*Elemento 1:* a equação (10.75) escreve-se

$$EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1^1 \\ \bar{\theta}_1^1 \\ \bar{v}_2^1 \\ \bar{\theta}_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -120 \\ -20 \\ -120 \\ 20 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{r}_{y1}^1 \\ \bar{r}_{\theta1}^1 \\ \bar{r}_{y2}^1 \\ \bar{r}_{\theta2}^1 \end{Bmatrix}.$$

Sabendo-se que

$$\bar{v}_1^1 = D_1 \quad \bar{\theta}_1^1 = D_2 \quad \bar{v}_2^1 = D_3 \quad \bar{\theta}_2^1 = D_4,$$

então

Elemento 2:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \bar{r}_{y1}^2 \\ \bar{r}_{\theta1}^2 \\ \bar{r}_{y2}^2 \\ \bar{r}_{\theta2}^2 \end{Bmatrix} &= EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1^2 \\ \bar{\theta}_1^2 \\ \bar{v}_2^2 \\ \bar{\theta}_2^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -120 \\ -20 \\ -120 \\ 20 \end{Bmatrix} \\
 &= EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -120 \\ -20 \\ -120 \\ 20 \end{Bmatrix} \\
 &= EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -76 \\ -129 \\ \frac{10}{3EI} \\ -224 \\ -156 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -120 \\ -20 \\ -120 \\ 20 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 340 \\ 220 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$220 \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{elemento 2} \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} 100$

Com base na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, a solução exata do problema conduz a

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \frac{q_y L^4}{24EI} \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^4 - 4 \left( 1 - \frac{P}{q_y L} \right) \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 6 \left( 1 - \frac{2P}{q_y L} \right) \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \\
 M(x) &= -EIv'' = -\frac{q_y L^2}{2} \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left( 1 - \frac{P}{q_y L} \right) \frac{x}{L} - \frac{2P}{q_y L} + 1 \right] \\
 Q(x) &= M' = -q_y L \left( \frac{x}{L} + \frac{P}{q_y L} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Para  $L = 2$  m,  $q_y = -240$  kN/m e  $P = 100$  kN, os valores

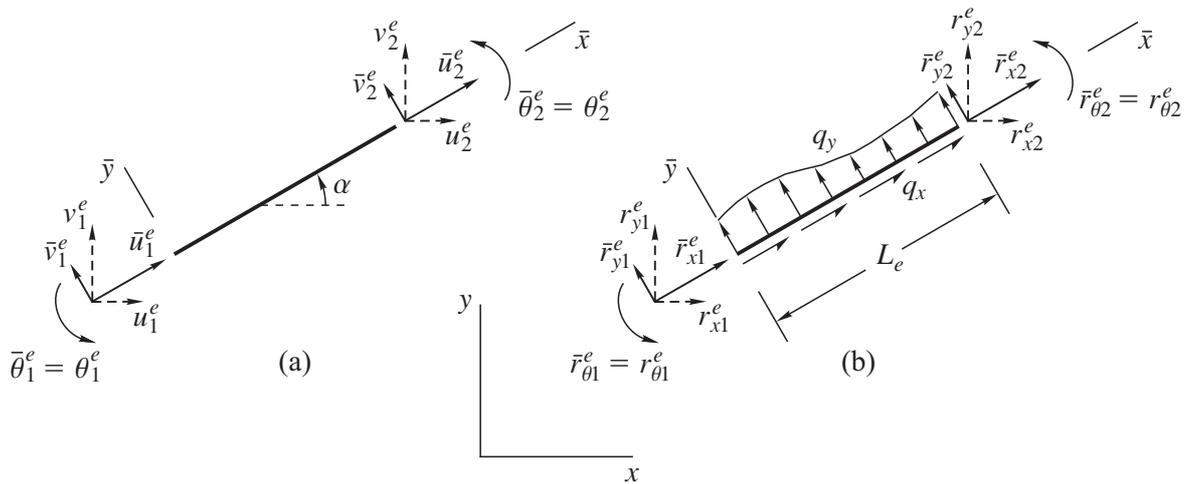
$$\begin{aligned}
 v(1) &= -\frac{760}{3EI} & v'(1) &= -\frac{430}{EI} & v(2) &= -\frac{2240}{3EI} & v'(2) &= -\frac{520}{EI} \\
 M(0) &= 680 & M(1) &= 220 & M(2) &= 0 \\
 Q(0) &= -580 & Q(1) &= -340 & Q(2) &= -100,
 \end{aligned}$$

levando em conta a convenção de sinal adotada para  $M$  e  $Q$  na Figura 8.3, confirmam a superconvergência do elemento: os deslocamentos nodais, as reações de apoio e as reações nodais determinados pelo modelo de elementos finitos são todos exatos. ■

## 10.5 Elemento de viga de Timoshenko

Retornemos à Figura 10.15a, considerando agora que o elemento finito “e” lá representado em diagrama de corpo livre seja de viga de Timoshenko. O princípio dos deslocamentos virtuais escreve-se

$$- \int_0^L (M \delta\kappa + Q \delta\gamma) dx + \int_0^{L_e} q_y \delta v d\bar{x} + \bar{r}_{y1}^e \delta \bar{v}_1^e + \bar{r}_{\theta1}^e \delta \bar{\theta}_1^e + \bar{r}_{y2}^e \delta \bar{v}_2^e + \bar{r}_{\theta2}^e \delta \bar{\theta}_2^e = 0 \quad (10.81)$$



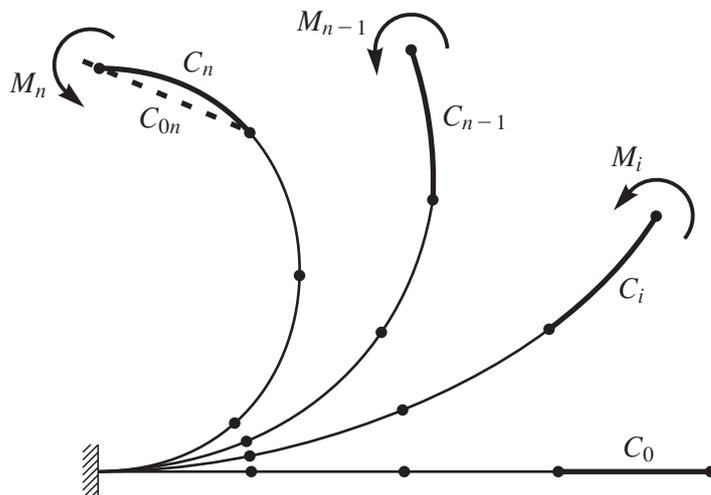
**Figura 10.18** Elemento no plano  $xy$  sob orientação dada pelo ângulo  $\alpha$ : (a) deslocamentos e rotações nodais  $\bar{u}_i^e$ ,  $\bar{v}_i^e$ ,  $\bar{\theta}_i^e$  no sistema local  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , e deslocamentos e rotações nodais  $u_i^e$ ,  $v_i^e$ ,  $\theta_i^e$  no sistema global  $xyz$ ; (b) reações nodais  $\bar{r}_{xi}^e$ ,  $\bar{r}_{yi}^e$ ,  $\bar{r}_{\theta i}^e$  e carregamento externo  $q_x$ ,  $q_y$  no sistema local, e reações nodais  $r_{xi}^e$ ,  $r_{yi}^e$ ,  $r_{\theta i}^e$  no sistema global.

e o elemento é superconvergente para  $EA$ ,  $EI$  e  $KGA$  constantes ao longo de seu comprimento. A troca de (10.95) por (10.75) na construção de (10.96) removeria o efeito do cisalhamento transversal, mas preservaria a superconvergência em relação à teoria de vigas de Euler-Bernoulli. A Figura 10.18 mostra o elemento orientado segundo um ângulo  $\alpha$ , com os deslocamentos, rotações e reações nodais nos sistemas local  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  e global  $xyz$ . A transformação da equação do elemento  $\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{r}}$  entre os dois sistemas se dá de maneira semelhante à do elemento de barra na discretização de treliças (veja Exemplo 10.4), mas agora usando

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.98)$$

## 10.6 Considerações finais

Vamos comentar brevemente a seguir as formas de se referenciar a equação de um elemento finito na solução de um problema. Por uma questão de simplicidade, usaremos a viga da Figura 10.19, sob grandes deslocamentos e rotações, dividida em quatro elementos, com uma extremidade engastada e a outra livre sob um momento aplicado. Suponha que se deseja determinar a configuração  $C_n$  do elemento da extremidade livre, quando o momento aplicado tem magnitude  $M_n$ . A natureza não linear do problema requer que a solução seja obtida em etapas, normalmente por um método incremental iterativo: conhecem-se antes as configurações  $C_0, C_1, \dots, C_i, \dots, C_{n-1}$  para, em seguida,



**Figura 10.19** O elemento em destaque, na extremidade livre da viga, está em equilíbrio nas configurações  $C_0$ ,  $C_i$ ,  $C_{n-1}$  e  $C_n$ . Apesar de ser apenas auxiliar, a configuração  $C_{0n}$  é fundamental na descrição corrotacional.

determinar-se a configuração  $C_n$ . Quatro dessas configurações estão indicadas na Figura 10.19: a configuração inicial  $C_0$ , uma configuração intermediária  $C_i$ , a configuração  $C_{n-1}$  e a configuração atual  $C_n$  que se deseja determinar.

Se no processo incremental iterativo para a determinação de  $C_n$  a equação do elemento é estabelecida tomando-se como referência uma configuração conhecida, é dito que se está utilizando uma descrição lagrangiana: na *descrição lagrangiana total*  $C_0$  é a configuração de referência; na *descrição lagrangiana atualizada* a referência é a configuração  $C_{n-1}$ . Cescotto *et al.* (1979) sugerem o nome “generalizada” para a descrição com referência numa configuração intermediária  $C_i$ , que tem como casos particulares a descrição lagrangiana total ( $C_i = C_0$ ) e a atualizada ( $C_i = C_{n-1}$ ).

A *descrição euleriana*, que usaria como referência a própria configuração  $C_n$ , é de uso limitado na mecânica dos sólidos pelo fato de  $C_n$  ser uma configuração desconhecida no processo de solução. Nos problemas geometricamente lineares é tácito o uso da descrição lagrangiana total dada a proximidade entre  $C_0$  e  $C_n$ , como temos feito até agora neste capítulo.

Para grandes deslocamentos e rotações sob pequenas deformações, os elementos finitos corrotacionais têm mostrado uma certa superioridade em relação aos elementos que usam descrições lagrangianas. Tais elementos adotam uma configuração indeformada auxiliar  $C_{0n}$ , muito próxima à  $C_n$ , que é obtida exclusivamente pelo movimento de corpo rígido do elemento de sua configuração  $C_0$ . Nenhuma parcela de movimento de corpo rígido existe entre as configurações  $C_{0n}$  e  $C_n$ , de modo que todo deslocamento entre essas configurações é revertido em deformação. Identificar  $C_{0n}$  com essa propriedade seria o ideal sob o ponto de vista da *descrição corrotacional*, que tem suas raízes no teorema da decomposição polar (veja Seção 2.9). Utilizando-se de ambas as configurações  $C_0$  e  $C_{0n}$  como referência, a descrição corrotacional não pode, a rigor, ser classificada como lagrangiana ou euleriana, como às vezes aparece rotulada na literatura.