

Capítulo 20

Modelos de camadas discretas e teorias zig-zag

Estruturas delgadas, como barras, vigas, placas, cascas são, antes de tudo, corpos tridimensionais. A razão de uso de modelos 2D ou 1D visa a obtenção de soluções aproximadas do seu comportamento real com maior facilidade na dedução de soluções analítica e menor custo computacional para obter aproximações numéricas. O uso desses modelos produz soluções com um erro em relação à solução do problema matemático 3D. É o chamado **erro de modelo**. Toda a pesquisa realizada no desenvolvimento de novos modelos visa à redução do erro de modelo, isto é, buscam-se desenvolver modelos que produzam soluções o mais próximas possível da solução 3D, de forma que a implementação numérica requiera o custo computacional de uma análise 2D. As vias de análise são sumarizadas na Figura 20.1. Tem-se então o **erro de discretização**, tanto das aproximações do problema 3D quanto do 2D, e o erro de modelo. Quando se obtém uma solução numérica do modelo 2D, tem-se o **erro numérico**, que incorpora tanto o erro de discretização quanto o do modelo.

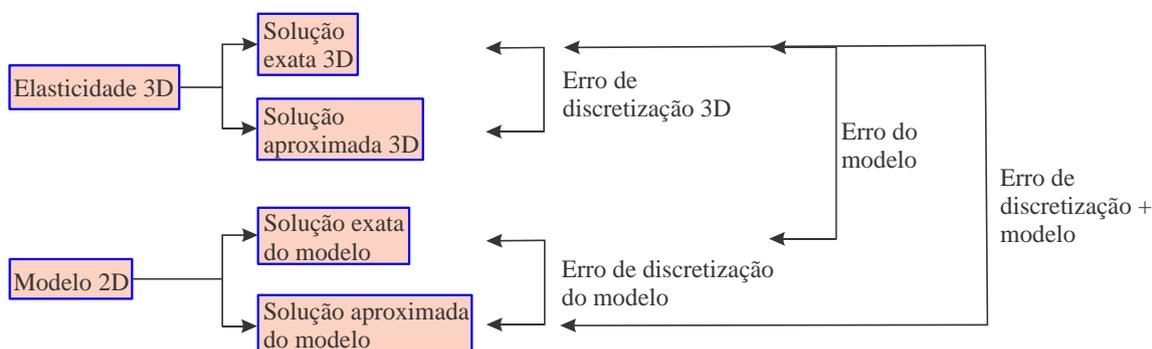


Figura 20.1: Diagramação dos erros de discretização e de modelo em problemas de placas e cascas.

Modelos simples, como os de primeira ordem, são úteis em placas/cascas moderadamente espessas, nas situações em que se desejam valores globais como deslocamentos máximos, primeiras frequências naturais, carga crítica de flambagem e tensões coplanares em regiões distantes de pontos como apoios, cargas e descontinuidades. Nesses casos, as falhas, na satisfação das condições de contorno de Neumann nas faces e na continuidade interlaminar de tensões, podem ser toleradas. Outro tipo de situação é quando se busca obter valores precisos de tensões transversais, ou realizar análises locais de falha em laminados mais espessos, em regiões de apoio, de descontinuidades geométricas, de material e de carregamento. Nesses casos as teorias de primeira ordem não são satisfatórias. As teorias de ordem superior (como aquelas vistas no Capítulo 19), por sua vez, aumentam o escopo de aplicabilidade dos modelos, porém também possuem limites de utilização por também não satisfazerem as condições de continuidade de tensões interlaminares e equilíbrio nas faces.

Quando se consideram soluções do MEF para os modelos cinemáticos, nota-se que o modelo numérico associado pode ser facilmente refinado, por exemplo, pelo aumento do número de elementos

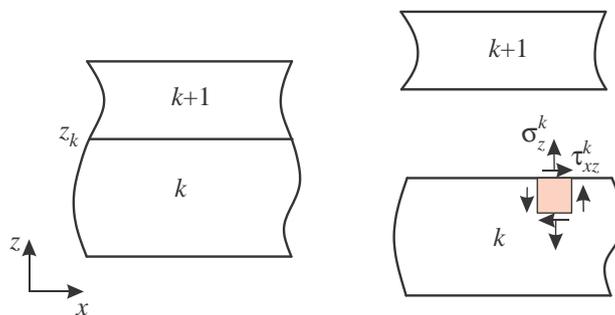


Figura 20.2: Coordenada z_k da interface entre as lâminas k e $k+1$, e tensões transversais na interface.

4. Equilíbrio de forças nas faces superior e inferior do laminado, (condição de contorno de Neumann) entre as tensões transversais e os carregamentos nas faces:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz}^N(\mathbf{x}, z_N, t) &= q_x^s, & \tau_{xz}^1(\mathbf{x}, z_0, t) &= q_x^i, \\
 \tau_{yz}^N(\mathbf{x}, z_N, t) &= q_y^s, & \tau_{yz}^1(\mathbf{x}, z_0, t) &= q_y^i, \\
 \sigma_z^N(\mathbf{x}, z_N, t) &= q_z^s, & \sigma_z^1(\mathbf{x}, z_0, t) &= q_z^i,
 \end{aligned} \tag{20.5}$$

onde N é o número de lâminas do laminado, z_0 e z_N são as coordenadas das superfícies inferior e superior do laminado, e q_x^i e q_x^s são as funções das cargas distribuídas em ambas as superfícies, na direção tangente x , e de forma similar para q_y^i , q_y^s , q_z^i e q_z^s nas direções y , e z .

As condições 1-3 são condições de contato. Note que, uma vez que os materiais de duas lâminas contíguas geralmente são distintos, **a continuidade das tensões transversais implica a descontinuidade das respectivas deformações** (ε_z , γ_{xz} e γ_{yz}).

Quando se observam os modelos de primeira ordem (Kirchhoff-Love, Reissner-Mindlin), e os de ordem superior, nota-se que são modelos adequados a placas/cascas homogêneas, monolâminas. Quando esses modelos são aplicados a painéis multilaminados, eles produzem soluções que aproximam a solução 3D do problema, porém apresentam características e deficiências importantes:

- A continuidade de deslocamento é satisfeita.
- Uma vez que nesses modelos a variação dos deslocamentos é $C^\infty(I)$ ao longo da espessura, todas as componentes aproximadas de deformação também são contínuas, até mesmo as deformações transversais, que deveriam ser descontínuas nas interfaces. As funções de deslocamento nesses modelos são $C^\infty(I)$ ao longo da espessura, enquanto que os deslocamentos são, fisicamente, $C^0(I)$.
- As condições de contorno de equilíbrio nas faces não são satisfeitas. Em particular, resultados desses modelos em laminados com superfícies livres, $q_x^i = q_y^s$, $q_z^i = \dots = 0$ em ambas as faces, frequentemente apresentam aproximações não nulas.

O presente capítulo apresenta um levantamento de algumas poucas teorias representativas de modelos de camada discreta, que são apresentadas no intuito de prover ao leitor uma visão panorâmica do assunto. É deixada para a bibliografia aberta os detalhes sobre diversas variantes dessas famílias de modelos.

20.1 Modelo básico de camada discreta

Nos modelos de camada única equivalente, ESL, o número de funções de deslocamento generalizados incógnitos é independente do número de lâminas. Já nos modelos mais antigos de camada discreta, o

onde n_u e n_w são os números de pontos ao longo da espessura da lâmina, sendo que a mesma quantidade é arbitrada para ambas as componentes coplanares. $\phi_j^k(z)$ e $\bar{\phi}_j^k(z)$ são conjuntos de funções lagrangianas 1D de graus $n_u - 1$ e $n_w - 1$, respectivamente. u_j^k , v_j^k e w_j^k são os valores de deslocamento na superfície $z = z_j$ da lâmina k .

20.1.1 Observação gerais

Resultados numéricos do MEF para os modelos lineares nas formas (20.6) e (20.10), e o de alta ordem, (20.12), podem ser perfeitamente reproduzidos sem a necessidade de sua programação. Basta usar um programa de elementos finitos convencional, modelando cada lâmina por um ou mais elementos sólidos, ao longo da espessura, como ilustrado na Figura 20.5.

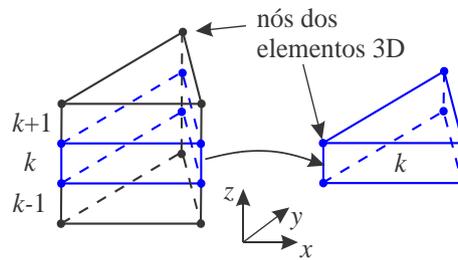


Figura 20.5: Casca laminada modelada por um elementos finitos sólido em cada camada, ao longo da espessura.

A malha deve ser primeiramente gerada num plano (ou superfície, no caso de casca), e em seguida, as coordenadas nodais são transladadas ao longo de z , gerando novas camadas de nós. Mesmo usando elementos lineares, cada lâmina física pode ser subdividida em dois ou mais elementos em sua espessura, gerando o efeito de refino h na espessura do laminado. Paralelamente, as eqs. (20.12) podem ser reproduzidas, usando elementos sólidos de mais alta ordem, gerando um enriquecimento p na espessura da lâmina. Assim, a resposta exata do problema tridimensional pode ser atingida assintoticamente num processo de convergência, conforme as propriedades do MEF.

Quando se observam as formulações do tipo (20.12), torna-se nítido seu alto custo computacional quando implementado no MEF. Uma vez que o custo cresce com o número de lâminas, seu uso é raro em modelagens usuais de engenharia. Isso é agravado pelo fato que muitas das modelagens de problemas realísticos são não lineares, requerendo um processo iterativo de solução. O uso dos métodos de camada discreta é preferencial no âmbito de pesquisa, na geração numérica de **soluções de referência** para o cálculo de erros exatos no âmbito do desenvolvimento de outras teorias.

20.2 Modelos zig-zag

Uma característica de todos as variantes dos métodos de camada discreta é que as soluções não apresentam continuidade de tensões transversais, isto é, não satisfazem as condições (20.3)-(20.5). Dessa forma, uma outra família de formulações foi desenvolvida, visando atender, a-priori, uma ou mais dessas condições. Esses são os chamados modelos zig-zag, que são comentados nessa seção. Esses modelos visam satisfazer os seguintes grandes requisitos:

1. Satisfazer as condições de continuidade de tensões cisalhantes transversais, condição (20.3).
2. Incorporar tensões normais transversais, condição (20.4).
3. Satisfazer as condições de equilíbrio nas faces, condição (20.5).
4. Limitar o número de funções incógnitas a uma quantidade fixa, independente do número de lâminas.

Do ponto de vista de custo de processamento no MEF, o requisito 4 é crucial. Durante as deduções se nota que o requisito 4 é satisfeito através da imposição das condições 1-3. A condição de continuidade geométrica, (20.3), é uma condição essencial e também é imposta nesses modelos. A aplicação dessa condição nos modelos revisados nesse capítulo é feita de **forma forte**, isto é, de forma exata em todos os pontos das interfaces.

Os vários modelos zig-zag disponíveis se distinguem quanto a satisfazer ou não o equilíbrio nas faces, pelo número de funções incógnitas, pela inclusão ou não de σ_z , e pelo grau do polinômio em z em cada lâmina. Carrera [47] faz um levantamento histórico do início do desenvolvimento desses modelos, e remonta sua origem a Lekhnitskii em 1935 [122] e Ambartsumian em 1958 [28], com ambas as referências traduzidas do russo. Aparentemente, esses desenvolvimentos, feitos durante a guerra fria, permaneceram ignorados no ocidente. Isso levou a quase duas décadas de esforços no ocidente, nos anos 1970-1980, para o desenvolvimento de modelos que se equiparassem àqueles anteriormente desenvolvidos.

A seguir revisamos brevemente apenas dois desses modelos, um de di Sciuva, de 1985 [67], e outro de Zhen e Wanji, de 2007 [227]. Muitas outras variações podem ser encontradas na literatura, e podem ser obtidos na lista de referências de [47], mas os dois modelos selecionados provêm uma visão abrangente das estratégias mais versáteis. O modelo de di Sciuva apresenta um mínimo de quantidade de funções incógnitas, 5, com funções lineares em z em cada lâmina, tem inextensibilidade da normal do laminado, e não satisfaz o equilíbrio nas faces. Os modelos de Zhen e Wanji chegam a 11 e 13 funções incógnitas, e preveem funções cúbicas em z em cada lâmina, permitindo a existência de tensões σ_z , embora não sua continuidade ou equilíbrio nas faces.

20.2.1 Modelos de di Sciuva - Ambartsumian

A forma geral desses modelos, conforme apresentado por di Sciuva [67], é a seguinte:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, z, t) &= u_0(\mathbf{x}, t) + z \underbrace{\left(\gamma_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right)}_{f_0} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k(\mathbf{x}, t) (z - z_k) H^k(z - z_k), \\ v(\mathbf{x}, z, t) &= v_0(\mathbf{x}, t) + z \underbrace{\left(\gamma_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right)}_{g_0} + \sum_{k=1}^{N-1} g_k(\mathbf{x}, t) (z - z_k) H^k(z - z_k), \\ w(\mathbf{x}, z, t) &= w_0(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (20.13)$$

onde $H^k(z - z_k)$ é a função degrau unitário¹ de Heaviside². Os somatórios são feitos sobre as $N - 1$ interfaces. γ_x e γ_y são aproximações constantes das deformações cisalhantes na lâmina 1. O termo

$$f_0 = \gamma_x - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (20.14)$$

é o ângulo de rotação da normal da lâmina 1 em torno do eixo y , e similarmente para g_0 . A expansão (20.13) pode ser inspecionada para algumas lâminas:

$$\begin{aligned} \text{lam. 1} &\rightarrow u^1(\mathbf{x}, z, t) = u_0(\mathbf{x}, t) + z f_0, & z \in I_1, \\ \text{lam. 2} &\rightarrow u^2(\mathbf{x}, z, t) = u_0(\mathbf{x}, t) + z f_0 + (z - z_1) f_1(\mathbf{x}, t), & z \in I_2, \\ &= u^1(\mathbf{x}, z, t) + (z - z_1) f_1(\mathbf{x}, t), \\ \text{lam. k} &\rightarrow u^k(\mathbf{x}, z, t) = u_0(\mathbf{x}, t) + z \sum_{j=0}^{k-1} f_j - \sum_{j=0}^{k-1} z_j f_j, & z \in I_k, \\ &= u^{k-1}(\mathbf{x}, z, t) + (z - z_{k-1}) f_{k-1}(\mathbf{x}, t), & k = 1, N. \end{aligned} \quad (20.15)$$

¹ $H^k(z - z_k) = 1$ se $z > z_k$, e $H^k(z - z_k) = 0$ se $z < z_k$.

² Oliver Heaviside, inglês, 1850-1925

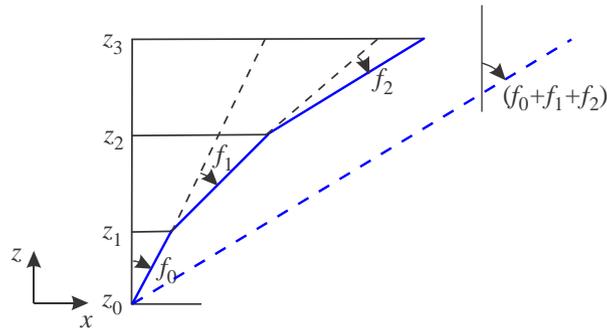


Figura 20.6: Ilustração do significado dos f_j 's, como incrementos de ângulo de rotação da normal de cada lâmina no Modelo de di Sciuva.

O formato das eqs.(20.15) mostra que, por construção, a continuidade de deslocamento é satisfeita, a-priori, para quaisquer funções $f_j(\mathbf{x}, t)$, $j = 0, \dots, N - 1$. A Figura 20.6 ilustra o significado dos f_j 's, como incrementos de ângulo de rotação da normal de cada lâmina. Até esse ponto, são $2N + 3$ funções incógnitas.

Em seguida são impostas as condições de contato para o cisalhamento transversal. Nos restringimos aqui a **laminados ortotrópicos**, como em [66]. Procedimento semelhante, porém mais longo, pode ser usado para obter o equacionamento de laminados anisotrópicos, como em [67]. A relação constitutiva para uma lâmina ortotrópica em relação ao sistema global de coordenadas do laminado, é obtida a partir de (11.57):

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz}^k \\ \tau_{xz}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44}^k & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^k \\ \gamma_{xz}^k \end{Bmatrix}. \quad (20.16)$$

Para cinemática linear, a relação deformação-deslocamento para o cisalhamento γ_{xz}^k é

$$\gamma_{xz}^k = \frac{\partial u^k}{\partial z} - \frac{\partial w^k}{\partial x}, \quad (20.17)$$

e similarmente para γ_{yz}^k . Essa deformação é aproximada pelo modelo, em cada lâmina, por

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^1 &= \gamma_x = f_0 + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \gamma_{xz}^2 &= f_0 + f_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \gamma_x + f_1, \text{ etc.}, \text{ e} \\ \gamma_{xz}^k &= \sum_{j=0}^{k-1} f_j + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \gamma_x + \sum_{j=1}^{k-1} f_j. \end{aligned} \quad (20.18)$$

A condição de continuidade na interface z_k , entre as lâminas k e $k + 1$, é

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{k+1}(z_k) &= \tau_{xz}^k(z_k), \quad \text{logo,} \\ \bar{Q}_{55}^{k+1} \left[\gamma_x + \sum_{j=1}^k f_j \right] &= \bar{Q}_{55}^k \left[\gamma_x + \sum_{j=1}^{k-1} f_j \right]. \end{aligned} \quad (20.19)$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 u^k(\mathbf{x}, z, t) = u^0(\mathbf{x}, t) &+ \left[\sum_{j=1}^{k-1} (z_j - z_{j-1}) a_j + (z - z_{k-1}) a_k \right] \psi_1 \\
 &+ \left[\sum_{j=1}^{k-1} (z_j - z_{j-1}) (a_j - 1) + (z - z_{k-1}) (a_k - 1) \right] \frac{\partial w_0}{\partial x},
 \end{aligned} \tag{20.28}$$

para $z \in I_k$ e uma expressão análoga para $v^k(\mathbf{x}, z_k, t)$. São 5 deslocamentos generalizados incógnitos no laminado: u^0 , v^0 , w^0 , ψ_1 e ϕ_1 .

Caso duas lâminas subsequentes tenham idênticas propriedades de material, por exemplo as lâminas 1 e 2, a eq. (20.27) mostra que $\psi_2 = \psi_1$. Isso significa que o modelo não admite refino h ao longo da espessura via subdivisão de cada lâmina.

As eqs. (20.28) indicam que as deslocamentos dependem das primeiras derivadas de w^0 , o que implica deformações com segundas derivadas de w^0 e primeiras de u^0 , v^0 , ψ_1 e ϕ_1 , de forma que as equações diferenciais de equilíbrio com carga distribuída transversal contínua, requerem $\{u^0, v^0, \psi_1, \phi_1\} \in C^2(\Omega)$ e $w^0 \in C^3(\Omega)$, em $\mathbf{x} \in \Omega$. O Princípio dos Trabalhos Virtuais necessita base de aproximações $\{u^0, v^0, \psi_1, \phi_1\} \in C^0(\Omega)$ e $w^0 \in C^1(\Omega)$. Assim, uma formulação do MEF para esse modelo zig-zag, necessita base de aproximação $C^1(\Omega)$ para w^0 . Esse é o mesmo requisito das formulações de camada equivalente única de Kirchhoff, e as de ordem superior de Reddy e Kant vistas no Capítulo 19. As opções para cumprir esse requisito de continuidade são o uso das funções contínuas $C^1(\Omega)$ do GFEM-Ck [34][135], ou o uso mais tradicional de elementos não conformes.

Resultados do modelo di Sciuva

Mostramos aqui apenas resultados para um laminado quadrado de lados $a \times a$, ortotrópico, de três lâminas idênticas, orientadas em $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com as propriedades de cada lâmina dadas em (15.78). O sistema de coordenadas é mostrado na Figura 15.7. O carregamento é senoidal, dado em (15.71), onde apenas o primeiro harmônico é aplicado. Os resultados são normalizados por: $\bar{z} = z/H$, e

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x(0, 0, z)}{q_{11}}, & \bar{\sigma}_z &= \frac{\sigma_z(0, 0, z)}{q_{11}}, & \bar{\tau}_{xz} &= \frac{\tau_{xz}(a/2, 0, z)}{q_{11}}, \\
 \bar{\tau}_{yz} &= \frac{\tau_{yz}(0, a/2, z)}{q_{11}}, & \bar{u} &= \frac{E_2 u(0, a/2, z)}{H q_{11}}, & \bar{w} &= 100 \frac{E_2 H^3 w(0, 0, z)}{a^4 q_{11}}.
 \end{aligned} \tag{20.29}$$

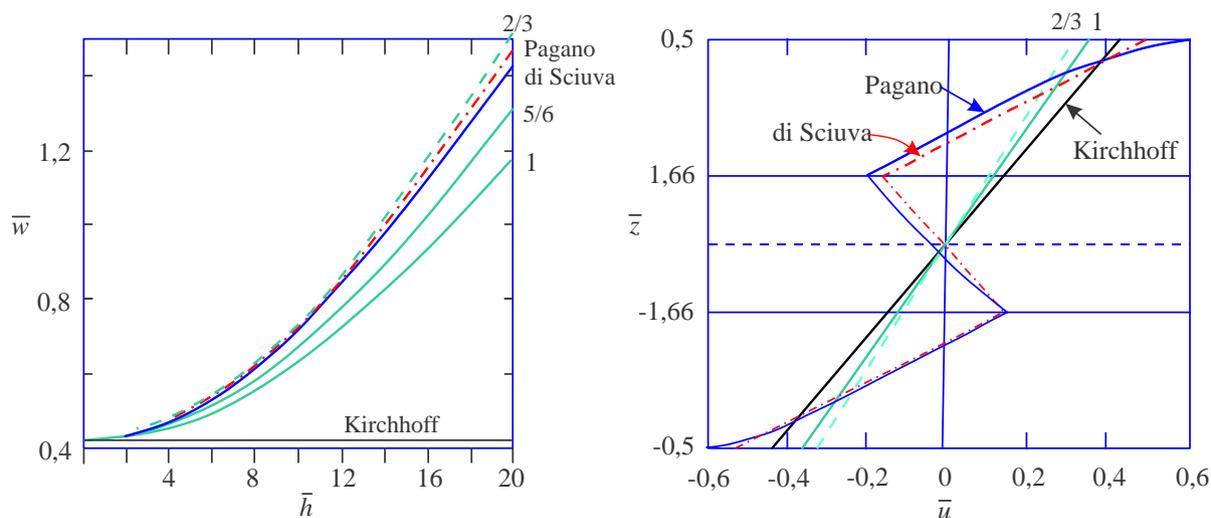


Figura 20.8: Em (a), a deflexão transversal máxima no centro do laminado, para $\bar{h} = 100H/a$. Em (b), a variação do deslocamento coplanar ao longo da espessura, no meio de uma das bordas. $a/H = 4$.

As Figuras 20.8-20.10 mostram resultados do modelo zig-zag de di Sciuva e dos modelos de primeira

ordem, comparando-os com a solução de elasticidade de Pagano [148]. Os resultados mostrados para a teoria de primeira ordem são indicados por 1, 5/6 e 2/3, que são os valores usados do fator de cisalhamento k . Em (b) o laminado é espesso, com aspecto $a/H = 4$.

A Figura 20.8 mostra em (a) a deflexão transversal máxima no centro do laminado, e em (b) a variação do deslocamento coplanar ao longo da espessura, no meio de uma das bordas. Nota-se que para o deslocamento transversal, o melhor valor do modelo de Reissner-Mindlin é para $k = 2/3$. Também é mostrado o resultado para o modelo de Kirchhoff. Para o deslocamento coplanar, nenhuma das soluções de primeira ordem gera uma aproximação aceitável, porém o modelo zig-zag de di Sciuva mostra boa concordância, embora subestimando os valores máximos, que ocorrem nas faces. Adicionalmente, todos os modelos mostram deslocamento nulo na superfície de referência, o que não corresponde à realidade.

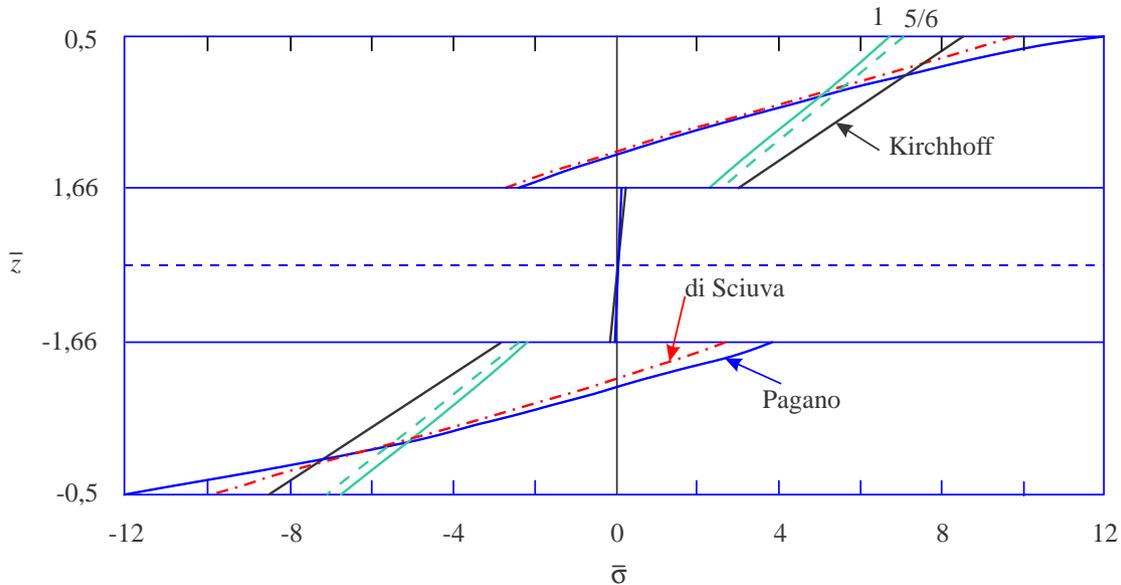


Figura 20.9: Variação da tensão coplanar σ_x no centro da placa, ao longo da espessura. $a/H = 4$.

As Figuras 20.9 e 20.10 mostram a tensão coplanar σ_x no centro da placa e a tensão cisalhante transversal τ_{xz} no centro de uma das bordas, ambas ao longo da espessura. Os resultados de cisalhamento em todos os modelos foram obtidos por integração das equações de equilíbrio locais ao longo da espessura (o método que seria formalmente apresentado por Chaudhuri posteriormente, em 1987 [56]). Sem o uso desse processo de integração, as tensões cisalhantes transversais nos modelos teriam que ser obtidas via relações constitutivas, o que produziria valores constantes ao longo da espessura de cada lâmina. De fato, o modelo zig-zag de di Sciuva apresenta **tensão cisalhante constitutiva uniforme ao longo de toda a espessura do laminado**. Nota-se que um laminado espesso como este, ambas as distribuições de tensão, a transversal obtida por relação constitutiva e a coplanar, são inaceitáveis nos modelos de primeira ordem, irrespectivamente quanto ao fator k de cisalhamento usado. O modelo zig-zag se comporta de maneira bastante adequada nesse problema, quando comparado com a solução 3D de Pagano, embora subestime os valores máximos de tensão normal, que ocorre nas faces, e as tensões cisalhantes máximas.

20.2.3 Modelo global-local de ordem superior

Os modelos do tipo di Sciuva-Ambartumian revistos nas seções anteriores atendem aos seguintes requisitos:

1. Continuidade de deslocamentos e tensões transversais nas interfaces;
2. Possuem um número fixo de funções incógnitas de deslocamentos generalizados, independente do número de lâminas;

GPa, $E_3 = 3,45$ GPa, $G_{12} = 0,414$ GPa, $G_{23} = 0,1104$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, e $\nu_{13n} = \nu_{23n} = \nu_{31n}E_{1n}/E_{3n} = 0,02$.

Os resultados são normalizados por:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x(0, 0, z)H^3}{a^2q_{11}}, & \bar{\sigma}_z &= \frac{\sigma_z(0, 0, z)}{q_{11}}, & \bar{\tau}_{xz} &= \frac{\tau_{xz}(a/2, 0, z)H}{aq_{11}}, \\ \bar{\tau}_{yz} &= \frac{\tau_{yz}(0, a/2, z)H}{aq_{11}},\end{aligned}\quad (20.42)$$

As Figuras 20.12-20.14 apresentam resultados do modelo zig-zag de Zhen-Wanji a partir de uma malha irregular, refinada, de elementos finitos triangulares de 19 graus de liberdade por nó, com continuidade fraca interelementar no deslocamento transversal. Os resultados são comparados com a solução de elasticidade de Pagano [148]. A Figura 20.12 mostra em (a) a variação da tensão coplanar σ_x ao longo da espessura no laminado 2, e em (b) a tensão normal transversal σ_z no laminado 1, ambas no centro da placa. Ambas as tensões são muito bem aproximadas pelo modelo zig-zag. A componente σ_z foi obtida por integração das equações locais de equilíbrio, partindo do valor nulo na superfície inferior do laminado. Ao final do processo, existe um erro na superfície superior onde o carregamento transversal é aplicado.

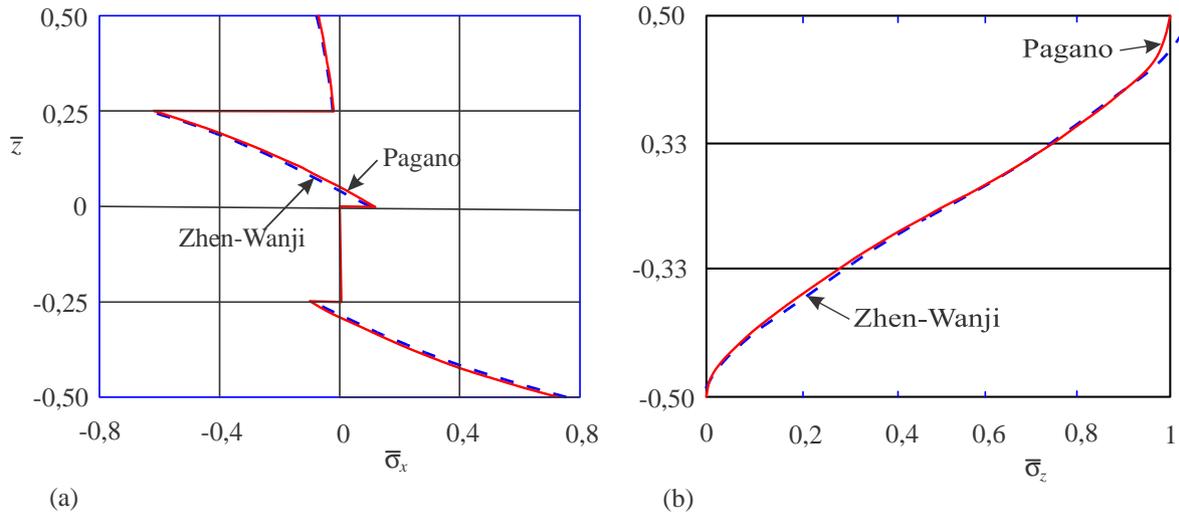


Figura 20.12: (a) variação da tensão coplanar σ_x ao longo da espessura do laminado 2, e em (b) tensão normal transversal σ_z no laminado 2, ambas no centro da placa. $\bar{\sigma}_z = \sigma_z/q_{11}$, $a/H = 4$.

A Figura 20.13 mostra em (a) a variação da tensão cisalhante transversal τ_{xz} ao longo da espessura no laminado 1, e em (b) a tensão coplanar σ_x , no centro da placa sanduíche. Em ambos os casos o aspecto da placa é $a/H = 2$, o que significa um teste em condição mais extrema de espessura que aquela usual dos modelos de camada equivalente única de ordem superior. Nota-se que o modelo zig-zag se comporta de forma excelente na aproximação de σ_x no sanduíche, porém existe um desvio apreciável nos valores máximos de τ_{xz} .

A Figura 20.14 mostra resultados para o sanduíche ao longo da espessura: em (a) a variação da tensão cisalhante transversal τ_{xz} , para $a/H = 2$, e em (b) a tensão τ_{yz} , para $a/H = 4$. Qualitativamente, ambas as aproximações são boas, mas os valores máximos mostram erros não conservativos apreciáveis.

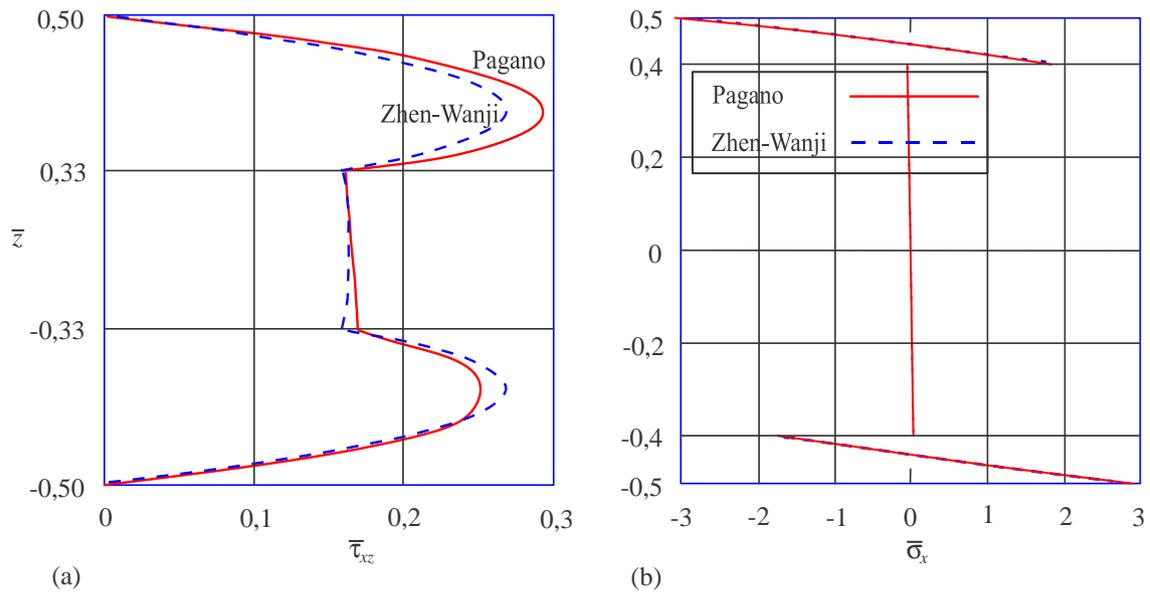


Figura 20.13: (a) a variação da tensão cisalhante transversal τ_{xz} ao longo da espessura no laminado 1, e em (b) a tensão coplanar σ_x , no centro da placa sanduíche. $a/H = 2$.

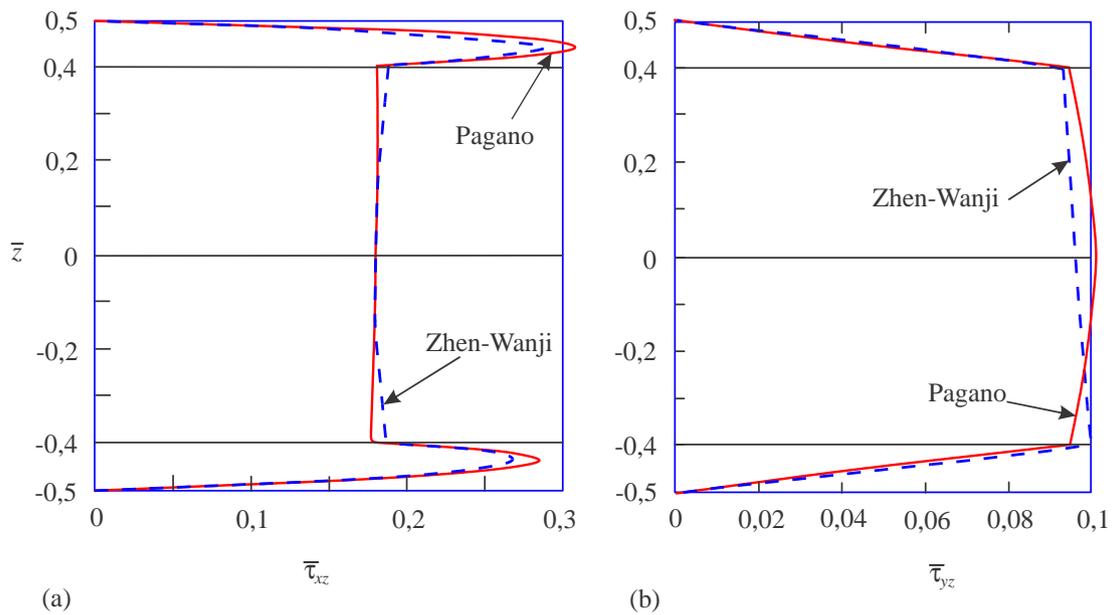


Figura 20.14: Resultados para o sanduíche ao longo da espessura: em (a) a variação da tensão cisalhante transversal τ_{xz} , para $a/H = 2$, e em (b) a tensão τ_{yz} , para $a/H = 4$.