Parte I

Introdução à Mecânica do Contínuo

A Mecânica do Contínuo é a área de estudo que busca exprimir o comportamento mecânico da matéria em escala macroscópica. O objetivo consiste no desenvolvimento da capacidade de representar o comportamento de uma região suficientemente grande de matéria sem se preocupar com os mecanismos envolvidos em escalas moleculares. Esta atenção voltada para os fenômenos macroscópicos permite admitir, como o nome indica, a hipótese que a materia de um corpo se distribui de forma contínua ao longo deste. Em outras palavras, podemos dividi-lo infinitamente, obtendo como resultado ainda uma porção de matéria.

Assim, podemos classificar a Mecânica do Contínuo como uma disciplina que estabelece modelos através de abstrações e simplificações da realidade com o objetivo de extrair, qualificar e quantificar informações relevantes de apenas alguns aspectos desta.

Ao longo da sua história, que remonta à época de Galileu Galilei (1564-1642), muitos modelos arquitetados foram bem sucedidos, isto é, se revelaram eficientes em simular os fenômenos a que se propunham. Simultaneamente, ao longo do processo, uma quantidade muito maior de outros modelos se revelaram pobres, inadequados, ou simplesmente incorretos. Este processo, às vezes evolutivo e outras revolucionario, sedimentou o que hoje constitui o conjunto de conceitos e conhecimentos estabelecidos na literatura técnica e na pratica da engenharia moderna.

Esta observação tem o intuito de tornar o leitor menos passivo, mais livre e crítico em relação às expressões e modelos que serão apresentados ao longo do texto. Estes modelos tem, por trás de uma fachada de rigorismos matemáticos e de teoremas bem fundamentados, uma origem de criatividade, de senso comum, de observação, de simulação e de representação aproximada de uma realidade infinitamente complexa. Cabe assim ao leitor o direito de agregar, complementar, ou até mesmo contestar conteúdos. Adverte-se, no entanto, que esta capacidade requerer a lenta tarefa de se adentrar nesta arte que tem como fascínio a possibilidade de combinar a elegância das matemáticas, a compreensão da mecânica e a liberdade da engenharia.

Capítulo 1

Conceitos matemáticos preliminares

1.1 Grandezas na mecânica do contínuo

Consideramos um **corpo** $\mathcal{B}$ constituído por uma porção de matéria ocupando uma **região** Ω num espaço físico tridimensional. Cada ponto dessa região é univocamente determinado pela sua posição em relação a um **sistema de referência**. Evitando entrar em formalismos desnecessários nesse ponto do texto, devemos entender um sistema de referência como um ambiente fixo no espaço em relação ao qual é possível descrever o movimento de corpos. As paredes de um laboratório constituem um bom exemplo de sistema de referência para a descrição do movimento de um corpo de prova sendo deformado num ensaio mecânico. Para operacionalizar tal descrição é necessário contar com um sistema de coordenadas vinculado ao ambiente de referência. Tal sistema é constituído por um ponto de origem e por três eixos coordenados. No presente livro, trabalharmos com sistemas de coordenadas cartesianas nos quais os eixos coordenados são dados por linhas retas mutuamente ortogonais. Dados três números reais, chamados parâmetros coordenados, ou simplesmente **coordenadas**, atinge-se a posição de um único ponto do espaço. O ponto de origem corresponde ao conjunto de coordenadas nulas.

Para completar estes conceitos, é possível definir um segmento unindo o ponto de origem com um ponto qualquer no espaço e verificar que cada um desses segmentos possui as propriedades de **vetor** de um espaço vetorial, detalhado na seção 1.2 a seguir. Na Figura 1.1, o segmento unindo os pontos O e P é univocamente vinculado ao vetor posição $\mathbf{x}$. Também nessa figura visualizamos três segmentos unindo o ponto de origem com três pontos situados nas coordenadas unitárias de cada eixo, gerando assim três vetores de tamanho unitário. Tais vetores são denominados **vetores da base** do sistema de coordenadas cartasiano.

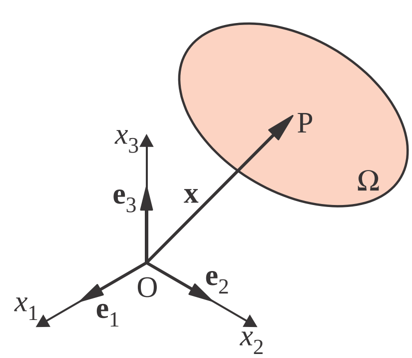

Figura 1.1: Corpo, eixos coordenados, ponto de origem O, ponto P, vetor posição $\mathbf{x}$ e vetores base.

A uma dada partícula podemos vincular grandezas mecânicas (dentre outras) tais como:

- deslocamentos,
- velocidades,
- densidade,
- temperatura.

Estas grandezas possuem naturezas distintas entre si, de forma que também as entidades matemáticas necessárias para quantifica-las são diferentes. Por exemplo, enquanto um escalar basta para identificar o valor da temperatura num ponto do corpo, a entidade adequada para representar a velocidade é um vetor. Finalmente, para poder representar grandezas tais como a deformação ou a tensão atuando na partícula, será necessária mais informação que a disponível num vetor, dando lugar ao conceito de tensor. Escalar e vetor são elementos facilmente reconhecíveis, enquanto o tensor nem sempre é familiar ao leitor e será tratado com especial atenção.

1.2 Vetores e tensores

Definem-se vetores como elementos de um conjunto denominado **espaço vetorial**. Pode parecer estranha essa definição, pois caracteriza os vetores a partir das propriedades que ele precisam ter para pertencer a tal conjunto. Em outras palavras, para pertencer a um conjunto do tipo espaço vetorial, e ser chamado vetor, esses elementos devem permitir a execução de duas operações: uma, que a soma de dois vetores resulte num terceiro elemento também vetor, e outra, que o produto de um vetor por um número real resulte num vetor. Em forma simbólica essas operações são denotadas por:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w} & \text{soma vetorial de } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v}, \\ c\mathbf{a}=\mathbf{b} & \text{produto de vetor } \mathbf{a} \text{ por número real } c. \end{array} \tag{1.1}$$

(Nota-se que, em geral, se usam letras em negrito para denotar vetores e sem negrito para escalares.) Essas duas operações devem ser definidas de tal forma que satisfaçam as seguinte propriedades:

$$\begin{array}{lll} 1. & \text{Associatividade:} & (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \\ 2. & \text{Comultatividade:} & \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \\ 3. & \text{Existência do vetor zero, } \mathbf{0}\text{:} & \mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a} \\ 4. & \text{Existência do vetor inverso } -\mathbf{a}\text{:} & -\mathbf{a}+\mathbf{a}=\mathbf{0} \\ 5. & \text{Multiplicação por escalar real } c \text{ comultativa:} & c\mathbf{a}=\mathbf{a}c \\ 6. & \text{Multiplicação por escalares reais } c \text{ e } d \text{ associativa:} & c(d\mathbf{a})=(\mathbf{cd})\mathbf{a} \\ 7. & \text{Existência de escalar real unitário, 1:} & 1c=c \\ 8. & \text{Distributividade no produto por escalares reais} & (c+d)(\mathbf{a}+\mathbf{b})=c\mathbf{a}+c\mathbf{b}+d\mathbf{a}+d\mathbf{b} \end{array} \tag{1.2}$$

A definição acima é completamente geral, e permite sua aplicação num grande número de entidades matemáticas. Por exemplo, funções são normalmente classificadas como vetores pertencentes a diferentes tipos de espaços vetoriais, dependendo das suas características. No presente livro usaremos principalmente vetores geométricos tridimensionais, usualmente representados em forma gráfica por uma reta com direção, sentido, comprimento. No exemplo da Figura 1.1, a posição de um ponto P em relação ao ponto de origem O é univocamente relacionada ao vetor $\mathbf{x}$. Normalmente se diz que os pontos O e P são pontos pertencentes a um conjunto denominado **Espaço Euclidiano tridimensional**, e o vetor posição $\mathbf{x}$ é um elemento do espaço vetorial associado. Nesse espaço vetorial, dados os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, sua soma se efetua transladando em forma paralela o inicio do vetor $\mathbf{v}$ para o final do vetor $\mathbf{u}$ (ou vice-versa), e finalmente unindo o inicio de $\mathbf{u}$ ao final do vetor $\mathbf{v}$ transladado, o que gera o vetor soma $\mathbf{w}$ (Figura 1.2).

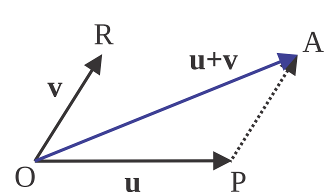

Figura 1.2: Visualização da regra do paralelogramo para soma de vetores.

A soma respeita a denominada regra do paralelogramo. Por trigonometria se prova que a seguinte relação de comprimentos dos vetores é satisfeita:

$$2\,\overline{\mathrm{OR}}^2 + 2\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{RP}}^2 + \overline{\mathrm{OA}}^2 \tag{1.3}$$

onde $\overline{\mathrm{OR}}$ é a distância entre os pontos O e P, igual ao comprimento do vetor $\mathbf{u}$. O produto do vetor $\mathbf{u}$ por um número real c gera um novo vetor $\mathbf{w}$ com a mesma direção e sentido, mas com comprimento igual ao comprimento do vetor $\mathbf{u}$ multiplicado pelo número real c.

Diz-se que vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são **linearmente independentes** no espaço vetorial 3D se não é possível achar números reais a, b, c não nulos tais que:

$$a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w} = \mathbf{0}, \tag{1.4}$$

isto é, a única forma de obter o vetor nulo $\mathbf{0}$ é com $a = b = c = 0$. Isso também pode ser enunciado da seguinte forma: se os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente independentes, então $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w} = \mathbf{a}$, onde $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ exceto se $a = b = c = 0$.

A **dimensão** d do espaço vetorial é definida como o maior número de vetores linearmente independentes que é possivel encontrar naquele espaço. Assim, no espaço vetorial tridimensional por exemplo, não é possível encontrar mais que três vetores linearmente independentes.

Define-se uma **base** do espaço como qualquer conjunto de d vetores linearmente independentes. Qualquer vetor do espaço pode ser representado por uma combinação linear dos vetores de uma dada base. Por exemplo, num espaço definido por uma base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, um vetor arbitrário $\mathbf{a}$ pode ser representado por

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{u}+u_2\mathbf{v}+u_3\mathbf{w},$$

onde u_1, u_2 e u_3 são escalares reais adequados. Esses escalares são únicos para representar o vetor $\mathbf{u}$. Esses escalares são denominados **componentes** de $\mathbf{u}$ em relação à base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

1.2.1 Produto interno

O produto interno é uma operação binária (precisa de dois vetores), cujo resultado é um número real, isto é, dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ arbitrários, denota-se o produto interno $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ como como um escalar real c, isto é:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = c \tag{1.5}$$

No caso de vetores no espaço vetorial 3D, tal operação é definida como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv\cos\theta \tag{1.6}$$

onde u e v são os módulos (comprimentos) de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e θ é o ângulo formado entre eles.

A definição de produto interno deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\begin{array}{lll} 1. & \text{Comutatividade:} & c = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \\ 2. & \text{Distributividade:} & (a\mathbf{u}+b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})+b(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}), \\ 3. & \text{Positividade:} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \text{ para qualquer } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \end{array} \tag{1.7}$$

Dois vetores são **ortogonais** se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, isto é, se $\theta = \pi/2$;
Dois vetores são paralelos se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv$, isto é, se $\theta = 0$;
Como consequência da propriedade 3, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2$, onde $u \neq 0$. Logo, pode-se definir a **norma do vetor**, $\|\mathbf{u}\|$, dada por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = u, \tag{1.8}$$

que é igual ao seu comprimento u.

1.2.2 Base ortonormal

Como visto, no espaço vetorial tridimensional, qualquer conjunto de três vetores linearmente independentes se constitui numa base do espaço. Dentre todas as possíveis bases, um tipo se destaca, aquele em que seus elementos são vetores de comprimento unitário, e são mutuamente ortogonais entre si. Assim, dado o conjunto de vetores $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, ele se constitui numa **base ortonormal** se:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \text{ para } i, j = 1, 2 \text{ e } 3, \text{ e} \\ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j &= 1 \text{ para } j = 1, 2 \text{ e } 3.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Dado um vetor arbitrário $\mathbf{u}$, é possível calcular números reais unívocos u_1, u_2 e u_3 tais que

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3. \tag{1.10}$$

Os coeficientes são as componentes do vetor, e podem ser calculadas por

$$u_p = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_p \text{ para } p = 1, 2 \text{ e } 3. \tag{1.11}$$

A demonstração é simples. Para isso, tomemos o exemplo do produto para $p = 2$, usando a representação de $\mathbf{u}$ em termos da base, eq. (1.10):

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2, \text{ (usar distributividade)} \\ &= u_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + u_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) + u_3 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2), \text{ (usar ortonormalidade)} \\ &= u_2.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Ao longo desse livro, utilizaremos sempre bases ortonormais devido às vantagens operacionais decorrentes das propriedades (1.9). Por exemplo, o produto interno de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pode ser obtido em termos de suas componentes:

$$\begin{aligned}c &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3), \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{j=1}^{3} u_j v_j.\end{aligned} \tag{1.13}$$

As componentes dos vetores são usualmente representadas em arranjos em forma de matriz coluna:

$$\{\mathbf{u}\} = \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}\right\}, \quad \text{e} \quad \{\mathbf{v}\} = \left\{\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\right\}, \tag{1.14}$$

Assim, o produto interno pode ser representado em notação matricial por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{v}\}. \tag{1.15}$$

onde o spbre-escrito T indica transposto da matriz.

Quando a base é conhecida, ou subentendida, como no caso deste livro, onde se usará sempre uma ou duas bases ortonormais bem definidas, torna-se possível representar apenas as componentes em quase todas as situações (em vez do vetor completo componente-base). Desta forma, para evitar proliferação de notação, se usará o símbolo $\mathbf{u}$ tanto para representar o vetor quanto para o arranjo com suas componentes, em lugar de $\{\mathbf{u}\}$, quando o contexto for suficiente claro para evitar confusão.

1.2.3 Produto vetorial

O produto vetorial de dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ arbitrários, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, é **definido** como um vetor $\mathbf{c}$ cujo módulo c é dado por

$$\boxed{c = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = uv \text{ sen } \theta} \tag{1.16}$$

onde u e v são os módulos (comprimentos) de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e θ é o **menor** ângulo formado entre eles, isto é, $0 \leq \theta \leq \pi$. A orientação do vetor $\mathbf{c}$ é perpendicular ao plano formado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, com sentido dado pela regra da mão direita.

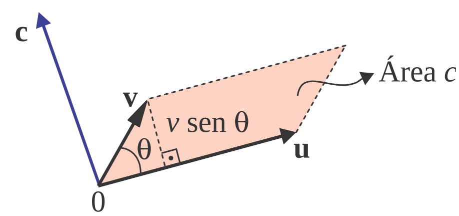

Figura 1.3: Paralelogramo associado ao produto vetorial.

Da definição segue-se que algumas consequências.

1. Observe na Figura 1.3 que a parcela v sen θ da definição de c é uma das duas alturas do paralelogramo formado pelos dois vetores. De geometria, sabe-se que o produto de uma das bases de um paralelogramo pela altura correspondente é igual a sua área. Logo, a definição do produto vetorial indica que o módulo de **c é igual à área** formada pelo paralelogramo definido pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

2. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem paralelos entre si, isto é, se $\theta = 0$;

3. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = uv$ se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem perpendiculares entre si, isto é, se $\theta = \pi/2$;

4. Note que a definição e as propriedades deste produto independem da base do espaço vetorial utilizado para representar os vetores e a operação. Os vetores de uma **base ortonormal positiva** satisfazem às condições

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = 1, \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -1, \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Esses resultados são representados de forma compacta pelo **operador de permutação** de índices e_{ijk}, que é definido, conforme os valores dos seus índices, da seguinte forma:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } i = k, \text{ ou } i = j = k, \\ 1 & \text{se} \quad ijk = 123 \text{ ou } 231 \text{ ou } 312, \\ -1 & \text{se} \quad ijk = 321 \text{ ou } 132 \text{ ou } 213. \end{cases} \tag{1.18}$$

Assim, existem 27 combinações possíveis para os índices, e o operador gera resultados não nulos apenas em 6 combinações dos índices. Por exemplo, $e_{112} = 0$, $e_{231} = 1$ e $e_{213} = -1$. O conjunto inteiro das 9 equações (1.17) fica compactado em apenas

$$\boxed{\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} e_{ijk} \mathbf{e}_k} \tag{1.19}$$

Dada uma base ortonormal, o produto vetorial pode ser expresso por diversas formas equivalentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{u}\times\mathbf{v}\,, \\ &= \det\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\,, \qquad (1.20)\\ &= \mathbf{e}_1(u_2v_3-u_3v_2)+\mathbf{e}_2(u_3v_1-u_1v_3)+\mathbf{e}_3(u_1v_2-u_2v_1)\,, \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\mathbf{e}_i\, e_{ijk}\, u_jv_k. \qquad (1.21) \end{aligned}$$

Se tomarmos como subentendidos os vetores da base, podemos indicar apenas as componentes de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ como

$$\{\mathbf{c}\} = \left\{ \begin{array}{c} u_2v_3-u_3v_2 \\ u_3v_1-u_1v_3 \\ u_1v_2-u_2v_1 \end{array} \right\}.$$

1.2.4 Produtos entre tensores

O próximo tipo de produto entre vetores, é o **produto tensorial**, que dá origem a uma nova entidade matemática denominada **tensor.** Para introduzir este conceito, tomemos dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, cada um definido em R^3 e realizemos a seguinte operação sobre um vetor arbitrário $\mathbf{u}\in R^3$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}). \qquad (1.22)$$

Como $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})$ é um escalar, o vetor resultante $\mathbf{v}$ tem a mesma direção de $\mathbf{a}$, com módulo que depende do produto interno de $\mathbf{b}$ com $\mathbf{u}$. A expressão acima define uma operação que transforma o vetor $\mathbf{u}$ no vetor $\mathbf{v}$. Podemos notar que a operação definida pelos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é linear em relação a vetores arbitrários $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, isto é, dados dois números reais arbitrários c e d, tem-se que

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot(c\mathbf{u}+d\mathbf{v})) = c\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})+d\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}). \qquad (1.23)$$

Constatada essa propriedade, pode-se dizer que os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ realizam a operação de um **tensor**. **Tensor é, por definição, uma entidade (um operador) que produz uma transformação linear em vetores, transformando-os em vetores diferentes.** Tensores são frequentemente denotados por letras maiúsculas em negrito. No present exemplo, o tensor definido pelos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é simbolizado por

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}, \qquad (1.24)$$

onde o símbolo $\otimes$ é conhecido como produto tensorial entre vetores (Na literatura, frequentemente, a operação é representada simplesmente por $\mathbf{A} = \mathbf{ab}$.). Diz-se então que o tensor $\mathbf{A}$ é definido pelo **produto tensorial** dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Então, dado um vetor $\mathbf{u}$, um tensor $\mathbf{A}$ transforma-o num outro vetor, $\mathbf{v}$, através de**:**

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}. \qquad (1.25)$$

Caso o tensor $\mathbf{A}$ seja definido pelo produto tensorial entre dois vetores, $\mathbf{A} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$, sua operação sobre um vetor $\mathbf{u}$ é caracterizada pela expressão (1.22):

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} = (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\,\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}). \qquad (1.26)$$

Deve-se notar que, dados dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, seu produto tensorial resulta num tensor, porém o reverso não ocorre sempre: nem todo tensor pode ser representado pelo produto de dois vetores.

Podemos provar que a transformação é linear. De fato, dados dois números reais α e β, e usando a propriedade da distributividade do produto interno entre vetores, tem-se que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) &= \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})),\\
&= \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot(\alpha\mathbf{u}))+\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot(\beta\mathbf{v})),\\
&= \alpha\,\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})+\beta\,\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}),\\
&= \alpha\,\mathbf{A}\mathbf{u}+\beta\,\mathbf{A}\mathbf{v}.
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

No caso particular de trabalharmos com bases cartesianas retangulares, esta operação fica muito clara pois as componentes de $\mathbf{A}$, isto é, $[\mathbf{A}]$, podem ser obtidas mediante o seguinte diagrama de operações matriciais:

$$
[\mathbf{A}]=[\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}]=\{\mathbf{a}\}\{\mathbf{b}\}^T=\left\{\begin{array}{c} a_x\\ a_y\\ a_z\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{ccc} b_x & b_y & b_z\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc} a_xb_x & a_xb_y & a_xb_z\\ a_yb_x & a_yb_y & a_yb_z\\ a_zb_x & a_zb_y & a_zb_z\end{array}\right]. \tag{1.28}
$$

A operação $\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{u}$ então pode ser representada em termos de componentes cartesianas da seguinte forma:

$$
\{\mathbf{v}\}=[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\}=[\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}]\{\mathbf{u}\}=\left\{\begin{array}{c} a_x\\ a_y\\ a_z\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{ccc} b_x & b_y & b_z\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} u_x\\ u_y\\ u_z\end{array}\right\}=\{\mathbf{a}\}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}). \tag{1.29}
$$

Em ambas as equações acima utilizamos a notação de colchetes e chaves para distinguir os vetores ou tensores, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{A}$ dos respectivos arranjos de suas componentes, $\{\mathbf{u}\}$ e $[\mathbf{A}]$ respectivamente. Como já indicado, no texto que segue abandonaremos, quando possível, a representação com os colchetes/chaves. O leitor deve ter em mente a distinção entre ambas as entidades.

Seja, por exemplo, o tensor $\mathbf{A}$ definido pelos vetores $\mathbf{a}=\{2;4;1\}^T$, $\mathbf{b}=\{1;1;2\}^T$. Então um vetor $\mathbf{u}=\{1;1;0\}^T$ se transforma em $\mathbf{v}$, pela ação do tensor, da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=\left\{\begin{array}{c} 2\\ 4\\ 1\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 4\\ 4 & 4 & 8\\ 1 & 1 & 2\end{array}\right],\\
\mathbf{v} &= \mathbf{A}\mathbf{u}=\left\{\begin{array}{c} 2\\ 4\\ 1\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} 1\\ 1\\ 0\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 4\\ 4 & 4 & 8\\ 1 & 1 & 2\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} 1\\ 1\\ 0\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} 4\\ 8\\ 2\end{array}\right\}.
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

O vetor resultante $\mathbf{v}$ é, como esperado, colinear com $\mathbf{a}$. Seu tamanho porém, resultou modificado.

Componentes de um tensor

Dada uma base $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, as componentes $[\mathbf{A}]_{ij}$ de um tensor arbitrário $\mathbf{A}$, denotadas simplesmente por A_{ij}, são obtidas da seguinte forma:

$$
[\mathbf{A}]_{ij}=A_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{A}\mathbf{e}_j. \tag{1.31}
$$

Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
A_{23} &= \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{A}\mathbf{e}_3,\\
&= \{\mathbf{e}_2\}^T\{\mathbf{A}\mathbf{e}_3\},\\
&= \{0,1,0\}\left\{\left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} 0\\ 0\\ 1\end{array}\right\}\right\}, \quad \text{isto é,}
\end{aligned}
$$

$$A_{23} = \{0,1,0\} \left\{ \begin{array}{c} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{array} \right\} = A_{23}. \tag{1.32}$$

Operações entre tensores

Da mesma forma que entre vetores, existem diversas operações entre tensores. Quando esses tensores são representados em componentes cartesianas, essss operações seguem regras similares às operações algébricas com matrizes. As principais operações entre tensores, explicitadas em coordenadas cartesianas, são descritas a seguir.

Soma de tensores

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{B} + \mathbf{C}\,, \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11}+C_{11} & B_{12}+C_{12} & B_{13}+C_{13} \\ B_{21}+C_{21} & B_{22}+C_{22} & B_{23}+C_{23} \\ B_{31}+C_{31} & B_{32}+C_{32} & B_{33}+C_{33} \end{bmatrix}, \\ A_{ij} &= B_{ij} + C_{ij}, \quad \text{para } i,j = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Tensor aplicado sobre vetor

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{B}\mathbf{v}, \\ \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} B_{11}v_1 + B_{12}v_2 + B_{13}v_3 \\ B_{21}v_1 + B_{22}v_2 + B_{23}v_3 \\ B_{31}v_1 + B_{32}v_2 + B_{33}v_3 \end{array} \right\}, \quad \rightarrow \quad u_i = \sum_{j=1}^{3} B_{ij} v_j \quad i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Produto interno de tensores (note que o resultado é um escalar):

$$\alpha = \mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{ij}. \tag{1.35}$$

Transposição de tensor. As componentes de um tensor $\mathbf{A}^T$ são

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}, \text{ isto é,}$$

$$\left[\mathbf{A}^T\right]_{ij} = A_{ji}. \tag{1.36}$$

Produto de tensores (note que o resultado é um tensor):

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}, \qquad \rightarrow \qquad C_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{kj}. \tag{1.37}$$

Um tensor $\mathbf{S}$ é dito **simétrico** se

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \qquad \text{isto é,} \qquad S_{ij} = S_{ji} \tag{1.38}$$

e **antissimétrico** se

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \qquad \text{isto é,} \qquad A_{ij} = -A_{ji}. \tag{1.39}$$

As componentes de um tensor simétrico e antissimétrico têm a forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.40}$$

Observe que, devido a sua definição, todo tensor antissimétrico tem, necessariamente, a diagonal nula.

Todo tensor $\mathbf{M}$ pode ser **univocamente** decomposto aditivamente num tensor simétrico $\mathbf{S}$ e noutro antissimétrico $\mathbf{A}$ mediante a seguinte operação:

$$\boxed{\mathbf{M} = \frac{\mathbf{M}+\mathbf{M}^T}{2} + \frac{\mathbf{M}-\mathbf{M}^T}{2} = \mathbf{S}+\mathbf{A}} \tag{1.41}$$

Pode-se comprovar que $\mathbf{S}$ e $\mathbf{A}$ são, respectivamente, simétrico e antissimétrico usando as definições de simetria e a propriedade algébrica que $(\mathbf{B}+\mathbf{C})^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T &= \left(\frac{\mathbf{M}+\mathbf{M}^T}{2}\right)^T = \frac{\mathbf{M}^T + \left(\mathbf{M}^T\right)^T}{2} = \frac{\mathbf{M}^T+\mathbf{M}}{2} = \mathbf{S}, \\ \mathbf{A}^T &= \left(\frac{\mathbf{M}-\mathbf{M}^T}{2}\right)^T = \frac{\mathbf{M}^T - \left(\mathbf{M}^T\right)^T}{2} = -\frac{\mathbf{M}-\mathbf{M}^T}{2} = -\mathbf{A}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

O produto interno de uma matriz simétrica por uma antissimétrica é nulo. Isso pode ser visto notando que, pela definição de produto interno, $\mathbf{S}:\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} S_{ij}A_{ij}$. Então, tomando por exemplo um par de termos fora da diagonal, $ij = 12$ e 21, tem-se $S_{ij}A_{ij} = S_{12}A_{12} + S_{21}A_{21}$. Como $S_{21} = S_{12}$ e $A_{21} = -A_{12}$. Repetindo o procedimento para os outros dois pares de termos fora da diagonal, e considerando que a diagonal de $\mathbf{A}$ é nula, segue-se que

$$\boxed{\mathbf{S}:\mathbf{A} = 0} \tag{1.43}$$

Consideremos agora o produto interno de uma matriz simétrica $\mathbf{S}$ por uma matriz arbitrária $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{S}:\mathbf{M} = \mathbf{S}:(\mathbf{M}^{\mathbf{s}}+\mathbf{M}^a) = \mathbf{S}:\mathbf{M}^{\mathbf{s}} + \underbrace{\mathbf{S}:\mathbf{M}^a}_{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{S}:\mathbf{M} = \mathbf{S}:\mathbf{M}^{\mathbf{s}}} \tag{1.44}$$

onde $\mathbf{M}^a$ e $\mathbf{M}^s$ são as partes simétrica e antissimétrica de $\mathbf{M}$. Isto significa que o produto interno de uma matriz simétrica por uma outra arbitrária é igual ao produto da primeira pela parte simétrica da segunda.

Finalmente, mostramos que todo tensor pode ser escrito a partir de uma combinação linear de produtos tensoriais dos vetores da base do sistema de coordenadas cartesiana:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{ij}\left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right), \\ &= A_{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + A_{12}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \cdots + A_{33}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ &= A_{11}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\{1,0,0\} + A_{12}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\{0,1,0\} + \cdots + A_{33}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\{0,0,1\}, \\ &= A_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + A_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + A_{33}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Porque resulta tão mais fácil assimilar o conceito de **vetor** que o de **tensor?** A resposta é muito simples: enquanto o primeiro é diretamente vinculado a uma representação geométrica no espaço físico, que percebemos em forma intuitiva (podemos *ver* um vetor no espaço tridimensional), falta-nos percepção sensorial de espaços de maior dimensão. Ficamos assim dependentes de nossa capacidade de abstração para compreender estas entidades.

Um tensor é dito de **segunda ordem** se a especificação de cada uma de suas componentes requer dois índices, como os tensores definidos acima.

Nota-se que as componentes de um tensor mudam de acordo com a base. Entretanto, **O tensor em si independe da base** em relação à qual as suas componentes foram definidas. As componentes devem se transformar de uma base a outra seguindo regras de transformação específicas, que serão detalhadas na seção 1.4.

1.3 Notação

Ao longo do texto faremos uso de algumas formas diferentes de notação com o objetivo de tornar o mais simples possível a leitura e a compreensão dos conceitos. Como já deve ter sido observado, usamos em geral **letras minúsculas para representar os vetores e maiúsculas para os tensores**. Símbolos em negrito representam, em geral, entidades vetoriais ou tensoriais enquanto escalares ou componentes são escritas com símbolos normais (sem negrito), porém em itálico. Além disso existem as seguintes formas de notação usuais na literatura:

1. **Notação aberta:** essa é a notação quando, nas expressões e equações, todos os termos presentes estão explícitos e visíveis. Vamos usar esta forma de notação com o objetivo didático de tornar clara as características de cada expressão. Geralmente os termos são explicitados em coordenadas cartesianas.

2. **Notação compacta**: Quando toda uma expressão é resumida num simbolismo simples, definido para tal fim. Por exemplo, a operação de produto interno em (1.13), está simbolizada em notação compacta na primeira igualdade e em notação aberta na terceira igualdade. Na notação aberta é comum utilizar tanto sub-índices numéricos $(1, 2, 3)$ quanto literais (x, y, z), para indicar as direções cartesianas. Assim, pode-se usar $\mathbf{e}_x$ ou $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_y$ ou $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_z$ ou $\mathbf{e}_3$. Muitas vezes as coordenadas são indicadas por x_i, para indicar x_1, x_2 e x_3, em vez de x, y e z, respectivamente. O mesmo pode ser utilizado para componentes cartesianas de um vetor. Por exemplo, em vez de u_x, u_y e u_z, pode-se usar u_1, u_2 e u_3, respectivamente e, de forma ainda mais compacta, escrever apenas "u_i, para $i = 1, 2, 3$". Os sub-índices numéricos possuem a vantagem de poder ser usados num terceiro tipo de notação, que permite compactar grandes expressões e mostrar ao mesmo tempo as operações envolvidas. Esta notação é denominada *notação indicial* ou *notação de Einstein.*

3. **Notação Indicial**:

Se nas expressões (1.33)-(1.35) e (1.45) eliminamos os símbolos de somatório temos, para cada operação,

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} & \rightarrow & A_{ij} = B_{ij} + C_{ij} \\ \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{v} & \rightarrow & u_i = B_{ij} v_j \\ \alpha = \mathbf{A} : \mathbf{B} & \rightarrow & \alpha = A_{ij} B_{ij} \\ \mathbf{A} & \rightarrow & \mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{array}} \tag{1.46}$$

Ao eliminar o somatório devemos incorporar algumas regras de operação, que se constituem na chamada **regra do somatório dos índices repetidos**. Isto é dado através da observação dos índices. **Índices repetidos** num termo indica um somatório do termo, com o índice variando de 1 a 3. Por exemplo: $a_k a_k$ significa $a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3$. Um índice livre (que aparece apenas uma vez num termo) indica um conjunto de três expressões (equações) diferentes, cada uma delas com o índice livre tomando um único valor, de 1 a 3. Índices podem ser ocorrer apenas uma ou duas vezes num termo. Três vezes, por exemplo, é proibido: nos casos em que sejam necessários mais de dois índices iguais, o símbolo de somatório deve ser mantido, e a regra do somatório na notação indicial não pode ser usada. Note que, mesmo havendo o índice i tanto em B quanto em C na equação $(1.46)_1$, este não é considerado repetido, uma vez que ocorre em termos diferentes. Então, $(1.46)_1$ só tem índices livres em cada termo (i e j só aparecem uma única vez em A, em B e em C). Isto significa que, variando cada índice de 1 a 3, existem 9 (nove) equações envolvidas, cada uma delas representando uma componente do tensor soma. Note que, para cada índice livre á direita da igualdade, deve corresponder o mesmo índice livre à esquerda. Essa equação representa nove equações do tipo: $A_{11} = B_{11} + C_{11}$, $A_{12} = B_{12} + C_{12}$, $A_{31} = B_{31} + C_{31}$, etc.

A expressão $(1.46)_2$ possui o termo da direita com o índice j repetido, mantendo o i livre. Isto se traduz em três equações, uma para cada valor de i, cada uma delas com uma somatória em j, isto é,

$$\begin{aligned} u_1 &= B_{11}v_1 + B_{12}v_2 + B_{13}v_3 \ , \\ u_2 &= B_{21}v_1 + B_{22}v_2 + B_{23}v_3 \ , \\ u_3 &= B_{31}v_1 + B_{32}v_2 + B_{33}v_3 \ . \end{aligned}$$

O produto interno de tensores, como indicado em $(1.46)_3$, possui dois índices repetidos, ij, que representam dois somatórios, um em i e outro em j. O resultado é um escalar dado por 9 termos:

$$\begin{aligned} \alpha &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{13}B_{13} + ... \\ &\quad + A_{31}B_{31} + A_{32}B_{32} + A_{33}B_{33} \ . \end{aligned}$$

Finalmente é preciso introduzir um operador chamado de **Delta de Kronecker**, denotado por $\boldsymbol{\delta}_{ij}$, que é definido através da seguinte propriedade:

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j, \\ 0 \text{ se } i \neq j. \end{cases}} \tag{1.47}$$

Os índices desse operador podem tomar nove possíveis combinações, e pode resultar em apenas dois valores, $+1$ e 0. Por exemplo, $\delta_{22} = 1$, $\delta_{23} = 0$, etc. O operador delta de Kronecker é bastante útil no trabalho de representação e manipulação de expressões indiciais, quando usado em conjunto à regra do somatório. Vejamos um exemplo de sua aplicação ao abrir a seguinte expressão dada em notação indicial:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{E}{1+\nu}\right)\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)\varepsilon_{mm}\delta_{ij} \ . \tag{1.48}$$

Podemos identificar nesta expressão os índices livres i e j, e o índice repetido m. Por tanto, a notação indica 9 (nove) equações (uma para cada componente ij) e um somatório em m. Em forma aberta temos, por exemplo,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left(\frac{E}{1+\nu}\right)\varepsilon_{11} + \left(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{11})\underbrace{\delta_{11}}_{=1}, \\ &= \left(\frac{E}{1+\nu}\right)\varepsilon_{11} + \left(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{11}) \ . \\ \sigma_{12} &= \left(\frac{E}{1+\nu}\right)\varepsilon_{12} + \left(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{11})\underbrace{\delta_{12}}_{=0}, \\ &= \left(\frac{E}{1+\nu}\right)\varepsilon_{12} \ . \end{aligned} \tag{1.49}$$

Os demais termos seguem o mesmo padrão. Observemos mais um exemplo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\delta_{ij} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\delta_{11}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\delta_{12}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\delta_{13}+...\\ &\quad+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\delta_{31}+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\delta_{32}+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\delta_{33}\\ &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\end{aligned}$$

Finalmente, dado que derivadas parciais serão usadas frequentemente no texto, usaremos as seguintes notações para derivada parcial em relação a uma coordenada cartesiana:

$$(\cdot),_1=\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} \qquad \text{ou} \qquad (\cdot),_x=\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}\ . \tag{1.50}$$

1.4 Mudança de base

Já foi destacado anteriormente que tanto vetores como tensores são entidades independentes da base usada para representá-los. Suas componentes, porém, estão intimamente relacionadas com os vetores da base usada.

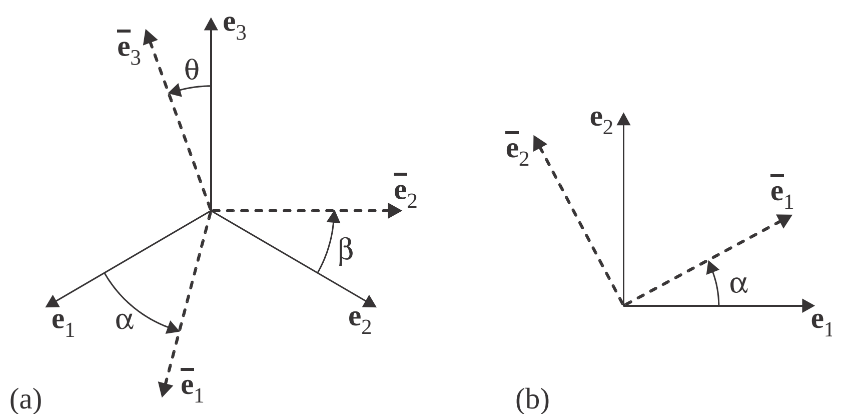

Figura 1.4: (a) Mudanca de uma base ortogonal para outra; (b) rotação plana em torno da direção $\mathbf{e}_3$.

Seja um sistema cartesiano $\mathcal{E}$ associado à base de vetores unitários $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ e o sistema $\mathcal{E}'$ associado à base $\{\bar{\mathbf{e}}_1,\bar{\mathbf{e}}_2,\bar{\mathbf{e}}_3\}$ (Figura 1.4a). Considere a definição do produto escalar entre dois vetores: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores. Qualitativamente, a definição acima significa que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ representa a componente de $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{b}$ (e, de fato, também a componente de $\mathbf{b}$ na direção de $\mathbf{a}$). Se considerarmos agora um par de vetores unitários, um de cada base, por exemplo, $\mathbf{e}_1$ e $\bar{\mathbf{e}}_2$, temos que $\bar{\mathbf{e}}_2\cdot\mathbf{e}_1=\cos\alpha$, isto é, o escalar $\bar{\mathbf{e}}_2\cdot\mathbf{e}_1$ é a componente de $\mathbf{e}_1$ na direção $\bar{\mathbf{e}}_2$. Esse produto é o chamado o **cosseno diretor** do vetor $\mathbf{e}_1$ na direção $\bar{\mathbf{e}}_2$ e vice-versa. Cada par de vetores forma um ângulo entre si, o que gera nove diferentes ângulos. Então, de forma geral, o produto escalar entre todos os pares de vetores das respectivas bases nos fornece os cossenos diretores que formarão uma matriz de rotação $\mathbf{R}$ que permite transformar componentes de um vetor de uma base para outra:

$$\boxed{R_{ij}=\bar{\mathbf{e}}_i\cdot\mathbf{e}_j=\cos(\bar{\mathbf{e}}_i;\mathbf{e}_j)} \tag{1.51}$$

Assim, dado o vetor arbitrário $\mathbf{u}\in R^3$, suas componentes $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}^T$ no sistema $\mathbf{e}_i$ e suas componentes $\{\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3\}^T$ no sistema $\bar{\mathbf{e}}_i$, a matriz de rotação $\mathbf{R}$ permite relacionar estas componentes mediante a operação

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\bar{u}_1\\ \bar{u}_2\\ \bar{u}_3\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc}R_{11} & R_{12} & R_{13}\\ R_{21} & R_{22} & R_{23}\\ R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}u_1\\ u_2\\ u_3\end{array}\right\}} \tag{1.52}$$

$$\text{ou na forma } \bar{u}_i = R_{ij}u_j, \text{ ou ainda } \overline{\{\mathbf{u}_i\}} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{u}\}\,. \tag{1.53}$$

Seja, por exemplo, o caso mostrado na Figura 1.4b, onde os dois sistemas se diferenciam por uma rotação α em torno do vetor $\mathbf{e}_3$, isto é, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3$. O produto entre os vetores da base é:

$$\begin{array}{ll}
R_{11} = \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \cos\alpha\ , & R_{22} = \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos\alpha\ ,\\
R_{12} = \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \operatorname{sen}\alpha\ , & R_{33} = \bar{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1\ ,\\
R_{21} = \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = -\operatorname{sen}\alpha\ , & R_{13} = R_{31} = R_{23} = R_{32} = 0\ ,
\end{array}$$

fornecendo a clássica matriz de **rotação plana de componentes vetoriais**:$\{\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3\}$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\bar{u}_1\\ \bar{u}_2\\ \bar{u}_3\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0\\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}u_1\\ u_2\\ u_3\end{array}\right\}} \tag{1.54}$$

Esta regra de transformação de componentes vetoriais, junto ao conceito de tensor, permite estabelecer as regras de transformação destes últimos. Foi definido que um tensor $\mathbf{M}$ é uma operação linear de vetores tal que, dado um vetor arbitrário $\mathbf{u}$, a aplicação de $\mathbf{M}$ sobre $\mathbf{u}$ fornece um vetor $\mathbf{v}$ dado por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}\mathbf{u}. \tag{1.55}$$

O aspecto mais importante a destacar é que o resultado desta operação deve ser independente da base usada para descreve-la. Assim, denotamos $\{\mathbf{u}\}$, $\overline{\{\mathbf{u}\}}$, $\{\mathbf{v}\}$ e $\overline{\{\mathbf{v}\}}$ às componentes de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ nas respectivas bases. Operando no sistema $\bar{\mathbf{e}}_i$, a transformação (1.55) corresponde, em componentes, a

$$\overline{\{\mathbf{v}\}} = \overline{[\mathbf{M}]}\overline{\{\mathbf{u}\}}.$$

Por outro lado, as componentes vetoriais seguem a regra de transformação definida em (1.53)

$$[\mathbf{R}]\{\mathbf{v}\} = \overline{[\mathbf{M}]}\,[\mathbf{R}]\{\mathbf{u}\}\,.$$

Multiplicando ambos os membros pela inversa da matriz rotação, $[\mathbf{R}]^{-1}$, se tem que

$$\begin{aligned}\{\mathbf{v}\} &= [\mathbf{R}]^{-1}\,\overline{[\mathbf{M}]}\,[\mathbf{R}]\{\mathbf{u}\}\\ &= [\mathbf{M}]\{\mathbf{u}\}\,.\end{aligned}$$

Entretanto, prova-se (ver a lista de exercícios), que a matriz de rotação goza da propriedade de ortogonalidade, isto é, $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^T$. Então a expressão acima resulta em:

$$\boxed{[\mathbf{M}] = [\mathbf{R}]^T\,\overline{[\mathbf{M}]}\,[\mathbf{R}]} \tag{1.56}$$

1.5 Cálculo tensorial - gradientes e divergentes

Quando mencionamos a que cada ponto/partícula de um corpo pode ser associado a uma grandeza física, estamos implicitamente admitindo que esta grandeza é função do ponto material, isto é, varia de ponto a ponto no corpo. Em outras palavras, não somente temos escalares, vetores ou tensores mas sim **funções escalares, vetoriais e tensoriais**, cujo argumento é a posição do ponto no espaço físico. Dado um ponto material ou partícula p localizada numa posição $\mathbf{x}$, temos escalares, vetores e tensores associados a esta:

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mathbf{x}) &= \alpha(x_1, x_2, x_3), \\
\mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \left\{ \begin{array}{c} v_1(\mathbf{x}) \\ v_2(\mathbf{x}) \\ v_3(\mathbf{x}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{array} \right\}, \\
\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3),
\end{aligned}
$$

onde $\mathbf{x}$ é o vetor que representa a posição do ponto, e tem componentes cartesianas (x_1, x_2, x_3). Os modelos usados para representar os comportamentos na mecânica do contínuo normalmente são dados por equações diferenciais cujas variáveis são precisamente as grandezas (funções) que estamos definindo. Frequentemente será preciso realizar operações de cálculo sobre funções ou produtos de funções de diferente natureza. Assim, definimos a seguir um conjunto de operações de derivação realizadas no sistema de coordenadas cartesiano em relação ao ponto material $\mathbf{x}$.

Gradiente de função escalar

Dada uma função escalar $g(\mathbf{x})$, seu gradiente é a função vetorial $\nabla g(\mathbf{x})$, definida de tal forma que $\nabla g \cdot \mathbf{n} = \partial g / \partial s$, onde $\mathbf{n}$ é um vetor unitário e $\partial g / \partial s$ é a derivada direcional da função g na direção $\mathbf{n}$. No sistema cartesiano, as componentes do vetor gradiente são:

$$
\{\nabla g\} = \left\{ \begin{array}{c} g_{,1} \\ g_{,2} \\ g_{,3} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} g_{,x} \\ g_{,y} \\ g_{,z} \end{array} \right\} \text{ isto é, } \boxed{\{\nabla g\}_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}}. \tag{1.57}
$$

Gradiente de função vetorial

O gradiente de uma função vetorial $\mathbf{u}$ resulta numa função tensorial, denotada por $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$, cujas componentes no sistema cartesiano são dadas por

$$
\nabla \mathbf{u} = \left[\begin{array}{ccc} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} u_{x,x} & u_{x,y} & u_{x,z} \\ u_{y,x} & u_{y,y} & u_{y,z} \\ u_{z,x} & u_{z,y} & u_{z,z} \end{array} \right],
$$

$$
\boxed{[\nabla \mathbf{u}]_{ij} = u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}. \tag{1.58}
$$

Divergente de função vetorial

O divergente de uma função vetorial $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ é uma função escalar denotada por div $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, ou ainda $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Em coordenadas cartesianas é dado por

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{u} &= \nabla \cdot \mathbf{u} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}, \text{ ou} \\
&= u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}, \quad \text{ou ainda,} \quad \boxed{\operatorname{div} \mathbf{u} = u_{i,i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}}
\end{aligned} \tag{1.59}
$$

Divergente de função tensorial

O divergente de uma função tensorial $\mathbf{A}$ é uma função vetorial denotada por div $\mathbf{A}$, que em coordenadas cartesianas é dado por:

$$
\operatorname{div} \mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{c} A_{11,1} + A_{12,2} + A_{13,3} \\ A_{21,1} + A_{22,2} + A_{23,3} \\ A_{31,1} + A_{32,2} + A_{33,3} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} A_{xx,x} + A_{xy,y} + A_{xz,z} \\ A_{yx,x} + A_{yy,y} + A_{yz,z} \\ A_{zx,x} + A_{zy,y} + A_{zz,z} \end{array} \right\}, \text{ ou } \quad \boxed{\{\operatorname{div} \mathbf{A}\}_i = A_{ij,j}}. \tag{1.60}
$$

Observe que enquanto o divergente de um vetor é um escalar, o divergente de um tensor é um vetor.

Derivadas do produto de funções

Da mesma forma que no caso de funções de uma variável, onde se tem a necessidade de derivar o produto de duas funções $a\left(x\right)$ e $b\left(x\right)$, isto é,

$$\frac{d}{dx}\left(a\left(x\right)\cdot b\left(x\right)\right)=a'\left(x\right)b\left(x\right)+a\left(x\right)b'\left(x\right),$$

é frequente a necessidade de realizar operações de derivação do produto de funções escalares, vetoriais ou tensoriais. Da aplicação sistemática das regras usuais de derivação sobre a operação envolvida, surge um conjunto de resultados práticos ou regras de derivação para operações específicas. Vamos aqui mostrar a obtenção de uma destas, deixando para o leitor a dedução das restantes. Para operar, consideremos uma função tensorial $\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{x}\right)$, uma função vetorial $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e uma função escalar $\alpha(\mathbf{x})$. Então,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{u}\right) &= \left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{u}\right)_{i,i}=\left(\sigma_{ij}u_j\right)_{,i}=\sigma_{ij,i}\,u_j+\sigma_{ij}u_{j,i},\\ &= \sigma^T_{ji,i}\,u_j+\sigma^T_{ji}u_{j,i},\\ &= \left(\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}^T\right)\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\sigma}^T\cdot\nabla\mathbf{u}.\end{aligned}\tag{1.61}$$

Usando um sistema cartesiano em notação aberta temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{u}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}u_x+\sigma_{xy}u_y+\sigma_{xz}u_z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{yx}u_x+\sigma_{yy}u_y+\sigma_{yz}u_z\right)\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{zx}u_x+\sigma_{zy}u_y+\sigma_{zz}u_z\right),\\ &= \sigma_{xx,x}u_x+\sigma_{xx}u_{x,x}+\sigma_{xy,x}u_y+\sigma_{xy}u_{y,x}+\sigma_{xz,x}u_z+\sigma_{xz}u_{z,x}\\ &\quad+\sigma_{yx,y}u_x+\sigma_{yx}u_{x,y}+\sigma_{yy,y}u_y+\sigma_{yy}u_{y,y}+\sigma_{yz,y}u_z+\sigma_{yz}u_{z,y}\\ &\quad+\sigma_{zx,z}u_x+\sigma_{zx}u_{x,z}+\sigma_{zy,z}u_y+\sigma_{zy}u_{y,z}+\sigma_{zz,z}u_z+\sigma_{zz}u_{z,z},\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{u}\right) &= \left(\sigma_{xx,x}+\sigma_{yx,y}+\sigma_{zx,z}\right)u_x+\left(\sigma_{xy,x}+\sigma_{yy,y}+\sigma_{zy,z}\right)u_y\\ &\quad+\left(\sigma_{xz,x}+\sigma_{yz,y}+\sigma_{zz,z}\right)u_z+\sigma_{xx}u_{x,x}+\sigma_{yx}u_{x,y}+\sigma_{zx}u_{x,z}\\ &\quad+\sigma_{xy}u_{y,x}+\sigma_{yy}u_{y,y}+\sigma_{zy}u_{y,z}+\sigma_{xz}u_{z,x}+\sigma_{yz}u_{z,y}+\sigma_{zz}u_{z,z}.\\ &\rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{u})=\left(\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}^T\right)\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\sigma}^T\cdot\nabla\mathbf{u}}\end{aligned}\tag{1.62}$$

A última linha é obtida a partir das definições de divergente de um tensor e do produto escalar entre estes.

1.5.1 Teorema do divergente

Seja um corpo $\mathcal{B}$ e uma porção deste ocupando uma região Ω no espaço e seja Γ o contorno de Ω. Sejam $\alpha(x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{\sigma}(x_1,x_2,x_3)$ uma função escalar, vetorial e tensorial respectivamente, definidas em Ω. Seja $\mathbf{n}\left(\mathbf{x}\right)$ o vetor normal num ponto $\mathbf{x}$ do contorno, definido de forma a apontar para fora de Ω, com componentes cartesianas $\{n_1;n_2;n_3\}^T$.

O primeiro enunciado importante, que é apresentado aqui sem demonstração, é uma das inúmeras formas conhecidas como **teorema de Green**: dada uma função escalar $\alpha(x_1,x_2,x_3)$, tem-se que

$$\boxed{\int_\Omega\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\,d\Omega=\oint_\Gamma\alpha\;n_i\;d\Gamma,\qquad\text{para } i=1,2,3}\tag{1.63}$$

Considerando um domínio bidimensional, e considerando uma função escalar que seja o produto de duas outras, isto é, $\alpha=uv$, o teorema de Green toma a forma

$$\int_\Omega \frac{\partial (uv)}{\partial x_i}\ d\Omega = \oint_\Gamma uv\ n_i\ d\Gamma, \qquad \text{para } i = 1, 2.$$

Abrindo o produto na primeira integral tem-se uma forma de **integração por partes em domínios bidimensionais**:

$$\boxed{\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\ d\Omega = \oint_\Gamma uv\ n_i\ d\Gamma - \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}\ d\Omega}. \tag{1.64}$$

De forma aberta tem-se

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_1}\ d\Omega &= \oint_\Gamma uv\ n_1\ d\Gamma - \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_1}\ d\Omega, \\ \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_2}\ d\Omega &= \oint_\Gamma uv\ n_2\ d\Gamma - \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_2}\ d\Omega. \end{aligned}} \tag{1.65}$$

O **teorema do divergente** postula que a integral de domínio do divergente de uma função é igual ao fluxo desta função através do contorno Γ. Isto é representado por:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Caso escalar} & \rightarrow & \displaystyle\int_\Omega \nabla\alpha\ d\Omega = \int_\Gamma \alpha\mathbf{n}\ d\Gamma, \\ \text{Caso vetorial} & \rightarrow & \displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}\ d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\ d\Gamma, \\ \text{Caso tensorial} & \rightarrow & \displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\ d\Omega = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\ d\Gamma. \end{array}} \tag{1.66}$$

Lembrando que o divergente de um vetor, em notação aberta, em coordenadas cartesianas, é dada por (1.59) tem-se que a equação $(1.66)_2$ se escreve em notação aberta como

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) d\Omega = \int_\Gamma (u_1\ n_1 + u_2\ n_2 + u_3\ n_3)\, d\Gamma. \tag{1.67}$$

Fica a cargo do leitor abrir as expressões das outras igualdades. Este teorema permite converter integrais definidas no domínio (integrais de domínio) em integrais definidas no contorno (integrais de contorno) e vice-versa.

1.6 Exercícios

1.1 Demonstre a forma (1.20) para o produto vetorial.

1.2 Desenvolva em notação aberta as seguintes operações dadas em notação indicial ($i, j, k = 1, 2, 3$):

a. $(\sigma_n)_j = \sigma_{ji}\, n_i$,

b. $\sigma_{nn} = \sigma_{ji}\, n_i n_j$,

c. $\gamma_{ij} = \dfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\, u_{k,j})$,

d. $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\,\sigma_{kk}\right)$,

e. $\pi = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\ d\Omega - \int_\Omega b_i\, u_i\ d\Omega - \int_\Gamma f_i\, u_i\ d\Gamma$.

1.3 Mostre que, em notação indicial, $(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})_{ij} = u_i v_j$.

1.4 Mostre que, em notação indicial, o produto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ de dois tensores se escreve $C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$.

1.5 Coloque em notação aberta e mostre que, dada uma função escalar $\alpha(\mathbf{x})$ e funções vetoriais $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} \text{(a) div } (\alpha\mathbf{u}) &= \nabla\alpha\cdot\mathbf{u}+\alpha \text{ div}\,\mathbf{u}\,, \\ \text{(b) } \nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= (\text{div}\,\mathbf{u})\,\mathbf{v}+(\text{div}\,\mathbf{v})\,\mathbf{u}. \end{aligned}$$

1.6 Verifique que a matriz de rotação $\mathbf{R}$ é tal que $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \bar{\mathbf{e}}_i\cdot\mathbf{e}_j, \\ \left(\mathbf{R}\mathbf{R}^T\right)_{ij} &= R_{ik}R^T_{kj} = R_{ik}R_{jk} = (\bar{\mathbf{e}}_i\cdot\mathbf{e}_k)\,(\bar{\mathbf{e}}_j\cdot\mathbf{e}_k)\,, \\ &= (\mathbf{e}_k\cdot\bar{\mathbf{e}}_i)\left(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}'_j\right) = (\mathbf{e}_k\,(\mathbf{e}_k\cdot\bar{\mathbf{e}}_j))\cdot\bar{\mathbf{e}}_j, \\ &= (\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_k)\;\bar{\mathbf{e}}_i\cdot\bar{\mathbf{e}}_j = \bar{\mathbf{e}}_i\cdot\bar{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}, \\ &\Rightarrow\;\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

1.7 Comprove a propriedade acima fazendo a operação $\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ com a matriz de rotação plana (1.54).

1.8 Sejam as bases cartesianas $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ e $\{\bar{\mathbf{e}}_1,\bar{\mathbf{e}}_2,\bar{\mathbf{e}}_3\}$ relacionadas por uma rotação de $\theta = 30°$ positivos em torno do eixo $\mathbf{e}_3$. Seja a matriz $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{v}$ dados em componentes da base $\{\bar{\mathbf{e}}_j\}$:

$$\overline{[\mathbf{A}]} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\{\mathbf{v}\}} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

(a) Calcular as componentes de $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v}$, no sistema $\{\bar{\mathbf{e}}_j\}$;

(b) Calcular as componentes de $\mathbf{u}$ no sistema $\{\mathbf{e}_i\}$ mediante a rotação das suas componentes no sistema $\{\bar{\mathbf{e}}_j\}$ anteriormente obtidas;

(c) Calcular as componentes de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{v}$ no sistema $\{\mathbf{e}_i\}$;

(d) Calcular as componentes $\mathbf{u}$ no sistema $\{\mathbf{e}_i\}$ mediante a operação $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v}$ e comparar com as mesmas componentes do segundo item.

1.9 Considere o elemento triangular de três nós mostrado na Figura 1.5. O elemento é contido o plano $z = 0$, isto é, tem coordenadas dos vértices dadas por $\mathbf{x}^1 = \{x_1; y_1; 0\}^T$, $\mathbf{x}^2 = \{x_2; y_2; 0\}^T$ e $\mathbf{x}^3 = \{x_3; y_3; 0\}^T$ respectivamente.

(a) Mostre que a área do triângulo é dada por

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{bmatrix}} \tag{1.68}$$

Note que aqui a área tem um aspecto vetorial, em que, além do valor da superfície, se tem também a orientação de um vetor normal a ela.

(b) Para as coordenadas cartesianas $\mathbf{x}^1 = \{4; 6; 0\}^T$, $\mathbf{x}^2 = \{10; 8; 0\}^T$ e $\mathbf{x}^3 = \{2; 14; 0\}^T$ qual o valor da área? (*Solução*: Defina vetores $\mathbf{a} = \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1$ e $\mathbf{b} = \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1$, que são concorrentes no nó 1. Finalmente utilize a definição de produto vetorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.)

1.10 Para a Figura 1.5, com as coordenadas nodais do Exercício 9, determine o vetor $\mathbf{n}^{23}$ normal ao segmento 23 e contido no plano $0xy$. (*Solução*: Obter o vetor $\mathbf{c} = \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2$. O vetor $\mathbf{e} = \mathbf{c}\times\hat{\mathbf{e}}_3$ é normal a $\mathbf{c}$ e a $\mathbf{e}_3$, isto é, está contido no plano. Então basta normaliza-lo. Substituindo os valores, $\mathbf{n}^{23} = 0,6\hat{\mathbf{e}}_1 + 0,8\hat{\mathbf{e}}_2$.)

1.11 Para o elemento triangular da Figura 1.5, (a) determine os valores dos comprimentos dos três lados do triângulo; (b) determine as correspondentes alturas do triângulo; (c) determine os

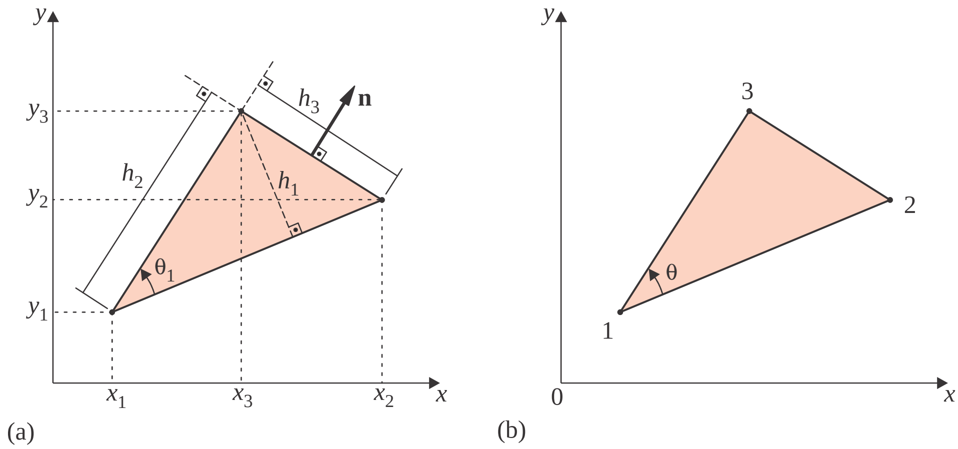

Figura 1.5: Dados do Exercício 1.10.

três ângulos internos. (*Solução*: defina os vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ como nos Exercícios 9 e 10. (a) os comprimentos dos lados são $a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$, etc. Os vetores unitários nas direções dos lados são $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$, $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}/b$, etc. (c) Os ângulos internos vem da definição de produto escalar (1.5): cos $\theta_1 = \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{c}}$, etc. (b) As alturas são $h_1 = c$ sen θ_1, etc.)

1.12 Use as coordenadas do Exercício 9 e obtenha os valores do Exercício 11.

1.13 Considre o elemento triangular da Figura 1.5, num plano inclinado, com as coordenadas nodais $\mathbf{x}^1 = \{x_1; y_1; z_1\}^T$, $\mathbf{x}^2 = \{x_2; y_2; z_2\}^T$ e $\mathbf{x}^3 = \{x_3; y_3; z_3\}^T$. Mostre que a área de um triângulo arbitrário no espaço é dada por

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix}} \tag{1.69}$$

(*Solução*: similar à do Exercício 1.9.)

1.14 Para o triângulo do Exercício 1.13, determine o vetor normal à superfície do elemento, $\mathbf{n}$, e o vetor coplanar normal ao lado 23, $\mathbf{n}^{23}$. (*Solução*: definir os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ como no Exercício 1.9. $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} / \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Definir o vetor $\mathbf{c} = \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2$. O vetor $\mathbf{e} = \mathbf{c} \times \mathbf{e}_3$ é normal a $\mathbf{c}$ e a $\mathbf{e}_3$, isto é, está contido no plano. Então basta normaliza-lo.)

1.15 Obtenha os valores pedidos no Exercício 11 para o elemento do Exercício 14.

1.16 Sabe-se, da teoria de geometria, que o volume de um tetraedro é igual a um terço da área de uma das faces vezes a altura correspondente. Considere o tetraedro mostrado na Figura 1.6, com os nós 1, 2, 3 e 4. Determine seu volume em termos das coordenadas nodais. Utilize os resultados dos Exercícios 13 e 14 para obter:

$$\boxed{V = \frac{1}{6}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}} \tag{1.70}$$

(*Solução*: A área da base, definida pelos nós 123 é o vetor $\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, na direção normal. Por definição de produto escalar, tem-se que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = ac\cos\theta$. Porém, $c\cos\theta = h$, a altura correspondente à base 123. Logo, o volume é a expressão mostrada.)

1.17 Determine o vetor normal à face 124 no tetraedro do Exercício 16, Figura 1.6. (*Solução*: usar a solução do Exercício 14.)

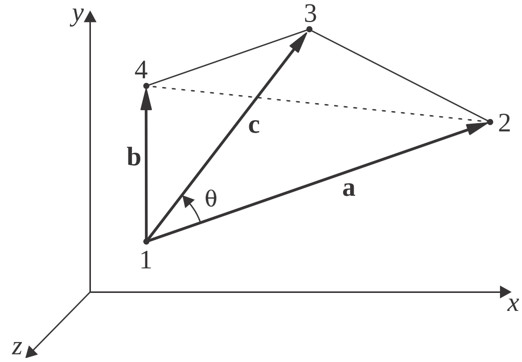

Figura 1.6: Elemento tetraédrico de 4 nós.

1.18 Determine o vetor normal do Exercício 17 para as coordenadas nodais cartesianas $\mathbf{x}^1 = \{8; 6; 8\}^T$, $\mathbf{x}^2 = \{10; 8; 2\}^T$, $\mathbf{x}^3 = \{4; 8; 2\}^T$ e $\mathbf{x}^4 = \{6; 16; 2\}^T$. (*Solução*:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} = \frac{12\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3}{\sqrt{216}}.)$$