

## Capítulo 19

# Método de sobreposição modal

O objetivo do presente capítulo é o de apresentar o método de sobreposição modal para obter solução no tempo, a partir de um sistema de equações do movimento discretizado no espaço, na forma  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$ . Na descrição e aplicação do método, até certo ponto, não importa como ou qual o método utilizado para fazer a discretização do corpo e determinar as matrizes. Mas consideraremos sempre no texto que o sistema foi obtido pelo Método de Elementos Finitos e, entre outras coisas, possui matrizes reais, simétricas, de grande porte, com  $\mathbf{M}$  não singular e positiva definida (todos os autovalores positivos) e  $\mathbf{K}$  não singulares se as condições de contorno aplicadas forem suficientes para eliminar todos os movimentos de corpo rígido que o modelo é capaz de desenvolver.

O método de sobreposição modal permite a determinação da resposta no tempo para carregamentos e condições iniciais bastante gerais, entretanto, deve-se ter em mente que é um **método limitado a problemas lineares**, isto é, em sua forma clássica não pode ser aplicado a problemas com não linearidades: de material (plasticidade, viscoplasticidade, por exemplo), contato, ou com grandes deformações ou deslocamentos. Para essas situações, a família de métodos adequados são os **métodos de integração direta**, descritos no próximo capítulo.

### 19.1 Vibrações livres não amortecidas

Consideremos  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$ , isto é, o sistema de  $N$  equações diferenciais (18.23) descarregado,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (19.1)$$

A única coordenada neste sistema é o tempo, uma vez que as coordenadas espaciais  $xyz$  já foram discretizados. Este tipo de equação é bastante conhecida e estudada em matemática, uma vez que toda uma série de fenômenos físicos é modelada por sistemas diferenciais ordinários deste tipo. Uma classe de solução tem a seguinte forma

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}f(t), \quad (19.2)$$

onde  $\boldsymbol{\phi}$  é um vetor nodal constante no tempo, a ser determinado. Consideremos o significado desta função. A Figura 19.1 ilustra o caso em que uma barra foi modelada por três elementos e quatro nós. A eq. (19.2) então aplica-se aos deslocamentos de cada nó:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \phi_1 f(t), \\ u_2(t) &= \phi_2 f(t), \\ u_3(t) &= \phi_3 f(t), \\ u_4(t) &= \phi_4 f(t). \end{aligned} \quad (19.3)$$

Imagine-se que num dado instante,  $t_0 = 0$ , por exemplo, os deslocamentos sejam  $\boldsymbol{\phi} = \{0; 0,2; 0,7; 1,1\}^T$  como na figura. Se num certo instante  $t_1$ ,  $f(t_1) = f_1$ , e num outro instante  $t_2$ ,  $f(t_2) = f_2$ , por exemplo, isto significa, pela hipótese da eq. (19.1), que os **todos** os deslocamentos nodais no instante,

$t_2$  são  $f_2/f_1$  vezes maior que no instante  $t_1$ . Os valores nodais do deslocamento são sempre **proporcionais** entre si a qualquer instante.

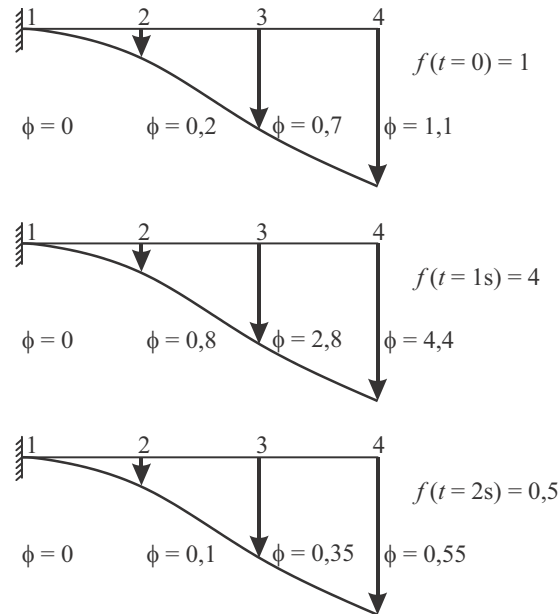


Figura 19.1: Exemplo de deslocamentos nodais proporcionais a um fator comum  $f(t)$  que varia no tempo. CADA CURVA DEVE TER UMA AMPLITUDE DIFERENTE.

Observe que (19.2) não é a solução de (19.1), mas apenas sua forma geral. Antes desconhecíamos os valores nodais da função do tempo  $\mathbf{u}(t)$ . Agora temos  $\mathbf{u}(t)$  expresso em termos de um perfil de deslocamentos nodais  $\phi$ , independente do tempo, e de um fator comum,  $f(t)$ , ambos também desconhecidos. A diferença é que antes tínhamos  $N$  funções do tempo incógnitas a determinar, agora as  $N$  incógnitas são constantes, as componentes de  $\phi$ , e apenas uma função incógnita dependente do tempo,  $f(t)$ . Substituindo (19.2) em (19.1) temos

$$\mathbf{M}\phi \ddot{f}(t) + \mathbf{K}\phi f(t) = \mathbf{0}. \quad (19.4)$$

Se consideramos  $f(t) \neq 0$  para qualquer valor de  $t$ , podemos dividir tudo por  $f(t)$  obtendo:

$$\mathbf{M}\phi \underbrace{\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)}}_{-\lambda} = -\mathbf{K}\phi. \quad (19.5)$$

Lembramos que estas são  $N$  equações diferenciais em  $f(t)$ ;  $\mathbf{M}\phi$  é uma matriz coluna de  $N$  termos, tanto quanto  $\mathbf{K}\phi$ . Uma vez que tanto  $\mathbf{M}\phi$  quanto  $\mathbf{K}\phi$  são independentes de  $t$ , também  $\ddot{f}(t)/f(t)$  deve sê-lo. Deve então ser igual a uma certa constante,  $-\lambda$  ainda a ser determinada. Com isto se obtém uma nova equação diferencial, escalar, em termos apenas de  $f(t)$ :  $\ddot{f}(t)/f(t) = -\lambda$ . Então, (19.5) gera dois problemas:

$$\boxed{\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0, \quad \text{e} \quad [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] \phi = \mathbf{0}} \quad (19.6)$$

### Problema 1 - solução no tempo $f(t)$

O primeiro problema é uma equação com forma bastante conhecida, cuja solução tem a forma geral

$$f(t) = Ae^{st}. \quad (19.7)$$

onde  $s$  e  $A$  são constantes a serem determinadas. Substituindo em (19.6)<sub>1</sub> obtemos

Como as frequências são ainda desconhecidas, podemos usar a própria condição (19.14) para determiná-las, isto é, basta que procuremos os valores de  $\omega$  para os quais o determinante de  $\mathbf{A}$  seja nulo. Note que o determinante de  $\mathbf{A}$  é uma função, um polinômio em termos de  $\omega^2$ , isto é

$$p(\omega^2) \equiv \det [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0. \quad (19.15)$$

Este é o chamado **polinômio característico**, associado ao chamado determinante característico, também conhecido por equação de frequência. Devido às características de  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$ , (simétricas e  $\mathbf{M}$  positiva definida), o polinômio é de grau  $N$  e possui todos as raízes reais.

**Observação:** Embora fisicamente se saiba que as frequências naturais do sistema são valores reais, é necessário verificar se os autovalores do sistema (19.14) são de fato reais. Isso será provado na seção 19.2 a seguir.

Um problema algébrico na forma (19.13) é denominado problema de **autovalor** ou **autoproblema**, enquanto que as raízes do polinômio característico, os  $\omega_j^2$ s, são chamados **autovalores** do problema. Calculamos então os  $N$  autovalores  $\lambda_j = \omega_j^2$ . A cada autovalor substituído em (19.13) poderemos resolver e obter um distinto vetor solução  $\phi^j$ , isto é

$$[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] \phi^j = \mathbf{0}. \quad (19.16)$$

Cada vetor solução  $\phi^j$  é chamado **autovetor** do problema, e o par  $(\omega_j; \phi^j)$  é um autopar. O vetor  $\phi^j$  é também denominado **modo de vibração do sistema**. Uma vez que não temos apenas um par de solução do problema de autovalor (19.12a), mas  $N$  autopares, a solução do problema dinâmico (19.1) não é apenas (19.12), mas uma combinação linear de todos os modos na forma:

$$\mathbf{u}(t) = C_1 \phi^1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \phi^2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) + \cdots + C_N \phi^N \cos(\omega t - \phi_N),$$

isto é,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^N C_j \phi^j \cos(\omega_j t - \phi_j) \quad (19.17)$$

As constantes  $C_j$  devem ser determinadas de acordo com as condições iniciais do sistema, como será visto posteriormente.

## 19.2 Propriedades dos autovetores e autovalores

Nos próximos itens exploraremos as características, usos e significados físicos das frequências e modos naturais de um sistema. Antes disso porém, agora vamos tratá-los simplesmente como entidades matemáticas, os autovalores e autovetores, e observar suas propriedades. Outras propriedades são vistas na seção 23.1.

### 19.2.1 Os autovalores do sistema dinâmico algébrico são reais?

Consideremos os dois problemas típicos de autovalores, o chamado problema padrão, que tem a forma  $[\mathbf{A} - s\mathbf{I}] \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , e o generalizado que tem a forma  $[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}] \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Consideremos a situação mais geral de problemas de autovalor de matrizes simétricas reais. Existem dois tipos básicos, os chamados problemas padrão e generalizado de autovalores, definidos respectivamente por

$$\begin{aligned} [\mathbf{E} - \delta\mathbf{I}] \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \text{ e} \\ [\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}] \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (19.18)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}\mathbf{u} &= s\mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{u} &= s\mathbf{B}\mathbf{u},\end{aligned}$$

Faz-se uma transformação  $\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-T}\mathbf{z}$  e pré-multiplica-se a igualdade por  $\mathbf{C}^{-1}$ , o que gera a forma

$$[\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-T}]\mathbf{z} = (1/s)\mathbf{z}. \quad (19.24)$$

Agora esse é um problema padrão de autovalor, e como a matriz  $[\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-T}]$  é simétrica, se tem a garantia que todos os autovalores  $s$  são reais. Como  $a$  e  $b$  são reais, então os autovalores  $\lambda$  do problema generalizado também são todos reais.

Nota-se que essa é uma condição suficiente, não necessária, isto é, é possível haver matrizes que não atendam a essa condição e que mesmo assim tenha os autopares reais.

### 19.2.2 Ortogonalidade

A primeira propriedade que será demonstrada é a ortogonalidade entre autovetores: considere dois distintos autopares de (19.13), isto é,  $(\omega_r; \phi^r)$  e  $(\omega_s; \phi^s)$

$$\mathbf{K}\phi^r = \omega_r^2 \mathbf{M}\phi^r, \quad \mathbf{K}\phi^s = \omega_s^2 \mathbf{M}\phi^s. \quad (19.25)$$

Se multiplicarmos a primeira equação pelo transposto de  $\phi^s$ , isto é,  $\phi^{sT}$ , e a segunda por  $\phi^{rT}$  obtemos<sup>2</sup>

$$\phi^{sT}\mathbf{K}\phi^r = \omega_r^2 \phi^{sT}\mathbf{M}\phi^r, \quad \phi^{rT}\mathbf{K}\phi^s = \omega_s^2 \phi^{rT}\mathbf{M}\phi^s. \quad (19.26)$$

Observe que, enquanto a equação (19.25a) consiste de uma igualdade entre dois vetores, isto é,  $\mathbf{K}\phi^r$  é igual a um certo vetor  $\mathbf{V}^r$  e  $\mathbf{M}\phi^r$  é igual a um certo vetor  $\mathbf{U}^r$ . De forma similar para a eq. (19.25b). Quando pré-multiplicamos (19.25a) por um autovetor  $\phi^{sT}$ , isto equivale a um realizar o produto escalar  $\phi^s \cdot \mathbf{V}^r$ , cujo resultado é um escalar. Podemos transpor uma das duas equações (19.26), a segunda por exemplo, e o sistema fica

$$\phi^{sT}\mathbf{K}\phi^r = \omega_r^2 \phi^{sT}\mathbf{M}\phi^r, \quad \phi^{sT}\mathbf{K}^T\phi^r = \omega_s^2 \phi^{sT}\mathbf{M}^T\phi^r. \quad (19.27)$$

Como  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  são matrizes simétricas, os termos se tornam idênticos entre as duas equações. Se subtrairmos a primeira da segunda equação temos

$$0 = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \phi^{sT}\mathbf{M}\phi^r. \quad (19.28)$$

$\phi^{sT}\mathbf{M}\phi^r$  é um escalar  $a$ . Se as frequências naturais forem distintas,  $\omega_r \neq \omega_s$ , é então necessário que

$$\boxed{\phi^{sT}\mathbf{M}\phi^r = 0 \quad \text{para qualquer } r \neq s \quad \text{se } \omega_r \neq \omega_s} \quad (19.29)$$

Este resultado é chamado de **condição de ortogonalidade** dos vetores modais. A operação  $\phi^{sT}\mathbf{M}\phi^r$  pode ser vista como um tipo de produto escalar entre os vetores  $\phi^s$  e  $\phi^r$ , que é definido com o uso de uma **matriz peso**, no caso a matriz massa, de forma que  $\phi^s \cdot \phi^r \equiv \phi^{sT}\mathbf{M}\phi^r$ , enquanto a forma mais conhecida do produto interno é o chamado **produto Euclidiano**, a matriz peso é a identidade:  $\phi^s \cdot \phi^r \equiv \phi^{sT}\phi^r$ . Observe que, se dois distintos vetores modais  $\phi^r$  e  $\phi^s$  são **M**-ortogonais, isto é, satisfazem (19.29), eles são também **K**-ortogonais. Basta levar (19.29) para o lado direito de (19.27)<sub>1</sub> e temos

$$\phi^{sT}\mathbf{K}\phi^r = 0, \quad (19.30)$$

isto é, se dois vetores são ortogonais em relação à massa também são em relação à rigidez.

<sup>2</sup>O sobre-índice "T" indica transposto de um vetor ou matriz.

autovalores distintos. Se houver um par de autovalores idênticos, os correspondentes autovetores não são naturalmente ortogonais entre si. Nesse caso, eles formam um plano que é ortogonal aos demais autovetores. O conjunto completo de autovetores passa a ser não ortogonal, e torna-se necessário o uso de um processo de ortogonalização. O mais usado é o de Gram-Schmidt, visto na seção 23.4.

Consideremos novamente o autop problema. Em vez de representar um autopar de solução a cada vez, como em (19.25a), aplicamos todos os autopares simultaneamente. Isto é feito da seguinte forma:

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Lambda^2, \quad (19.38)$$

onde  $\Lambda^2$  é uma matriz diagonal composta pelos autovalores:

$$\Lambda^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}. \quad (19.39)$$

Note que (19.38) representam as  $N$  equações associadas a cada autovetor. Então tem-se de fato  $N \times N$  equações algébricas. Podemos em seguida pré-multiplicar (19.38) por  $\Phi^T$  obtendo:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \underbrace{\Phi^T \mathbf{M} \Phi}_{\mathbf{I}} \Lambda^2.$$

Mas com a ortonormalidade dos autovetores em relação à matriz massa, eq. (19.37), o lado direito da equação acima simplifica-se e temos

$$\boxed{\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda^2} \quad (19.40)$$

Já tínhamos visto em (19.30) a ortogonalidade dos vetores em relação à rigidez, isto é,  $\phi^{rT} \mathbf{K} \phi^s = 0$ . Agora temos também que  $\phi^{rT} \mathbf{K} \phi^r = \omega_r^2$ , isto é, a norma de um autovetor em relação a matriz de rigidez é o quadrado da correspondente frequência natural.

#### 19.2.4 Autovetores linearmente independentes

Mostraremos que o conjunto dos  $N$  autovetores associados às matrizes massa e rigidez do sistema mecânico formam um conjunto de vetores linearmente independentes. Um conjunto linearmente independente significa que qualquer um de seus elementos não pode ser escrito como uma combinação linear dos demais. Para a prova consideraremos o contrário, isto é, que o conjunto seja linearmente dependente. Isso significa que, se tomarmos por exemplo o primeiro vetor, supomos que podemos representá-lo como uma combinação dos demais

$$\phi^1 = a_2 \phi^2 + a_3 \phi^3 + \dots + a_N \phi^N, \quad (19.41)$$

com constantes  $a_2, \dots, a_N$  não nulas. Passando os termos da direita para a esquerda e mudando os nomes das constantes temos

$$b_1 \phi^1 + b_2 \phi^2 + \dots + b_N \phi^N = \mathbf{0}.$$

Isto pode ser colocado em forma matricial como  $\Phi \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}^T$ . Pré-multiplicando por  $\Phi^T \mathbf{M}$  temos

$$\underbrace{\Phi^T \mathbf{M} \Phi}_{\mathbf{I}} \mathbf{b} = \mathbf{0} \implies \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

isto é,  $b_1 = b_2 = \dots = b_N = 0$ , devido a ortonormalidade dos vetores. Então (19.41) não pode ser satisfeito. Conclui-se que o conjunto de autovetores  $\Phi$  é linearmente independente.

Da teoria de álgebra linear tem-se então a seguinte consequência: *qualquer vetor  $\phi$  de ordem  $N$  pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores modais  $\phi^r$ , isto é, qualquer  $\phi$  pode ser representado por:*

$$\phi = d_1\phi^1 + d_2\phi^2 + \dots + d_N\phi^N = \sum_{j=1}^N d_j\phi^j,$$

ou ainda, numa forma matricial,

$$\phi = \Phi \mathbf{d}, \quad (19.42)$$

onde  $\mathbf{d}$  é o vetor coluna composto pelos  $N$  coeficiente  $d_j$  tal que  $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}^T$ .

O conjunto  $\Phi$  de autovetores é então dito ser uma **base do espaço de dimensão finita  $N$ -dimensional** gerado pelas matrizes massa e rigidez. A expressão (19.42) caracteriza o chamado **teorema de expansão**. Ele é fundamental ao método de análise modal visto a seguir.

## 19.3 Exemplos

### 19.3.1 Exemplo 19.1 - Frequências naturais

Considere a barra do Exemplo 17.11.1, página 497, engastada na extremidade esquerda, modelada por três elementos. Obtenha a aproximação de elementos finitos para sua primeira e segunda frequência natural. Use  $E = 200$  GPa,  $\rho = 7.800$  kg/m<sup>3</sup>,  $A = 10^{-4}$  m<sup>2</sup>,  $L = 1,0$  m.

*Solução:*

As frequências naturais são as raízes  $\omega_j^2$  do polinômio característico definido em (19.15) pelo determinante  $\det[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}] = \mathbf{0}$ . Da solução do Exemplo 2 o problema de autovalor para um modo  $j$  é:

$$\left\{ \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega_j^2 \frac{\rho AL}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \phi_1^j \\ \phi_2^j \\ \phi_3^j \\ \phi_4^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (19.43)$$

Deve-se primeiramente aplicar as condições de contorno para vincular a barra. Uma vez que ela está engastada pelo nó 1, qualquer que seja seu movimento vibratório este deve ser tal que  $u_1(t) = 0$ . Então todos os modos de vibração devem ser tais que  $\phi_1^j = 0$ . Levando este valor à equação significa eliminar a primeira coluna de cada matriz junto com o termo  $\phi_1^j$ . Em seguida eliminamos a primeira linha, ficando então com matrizes  $3 \times 3$ . Quanto às constantes multiplicativas, dividimos a equação por  $3EA/L$  e definimos

$$\alpha_j = \omega_j^2 \frac{\rho AL/18}{3EA/L} = \omega_j^2 \frac{\rho L^2}{54E} \quad (19.44)$$

O polinômio característico então fica

$$p(\alpha_j) = \det \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha_j \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} = 0, \quad (19.45)$$

que pode ser simplificado para

$$p(\alpha_j) = (2 - 4\alpha_j)^2(1 - 2\alpha_j) - (1 + \alpha_j)^2(1 - 2\alpha_j) - (1 + \alpha_j)^2(1 - 4\alpha_j) = 0,$$

cujas três raízes são

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{11-6\sqrt{3}}{13} = 0,0467458 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-4} &\longrightarrow &\omega_1 = 8.045,0 \text{ /s} = 1.280,4 \text{ Hz}, \\
\alpha_2 &= 0,50 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-4} &\longrightarrow &\omega_2 = 26.311,5 \text{ /s} = 4.187,6 \text{ Hz}, \\
\alpha_3 &= \frac{11+6\sqrt{3}}{13} = 1,64556 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-4} &\longrightarrow &\omega_3 = 47.732,6 \text{ /s} = 7.597,0 \text{ Hz}.
\end{aligned}
\tag{19.46}$$

Observe que usando **dois elementos** as frequências aproximadas são:  $\omega_1 = 1.298,3 \text{ Hz}$  e  $\omega_2 = 4.536,5 \text{ Hz}$ , enquanto que usando **um único elemento** a primeira frequência é aproximada por  $\omega_1 = 1.395,8 \text{ Hz}$ . A solução analítica para frequências naturais de vibrações livres axiais numa, para o  $n$ -ésimo modo, é deduzida no Exemplo 19.4 a seguir, eq. (19.56). A comparação dos resultados com a solução analítica é vista na Tabela 19.1.

Tabela 19.1: Frequências naturais em modelo de barra em balanço.

Freq.	Analítico [Hz]	1 elem. [Hz] (erro %)	2 elem. [Hz] (erro %)	3 elem. [Hz] (erro %)
$\omega_1$	$\frac{1}{4L}\sqrt{E/\rho} = 1.265,9$	1.395,9 (10,3%)	1.298,3 (2,56%)	1.280,4 (1,10%)
$\omega_2$	$\frac{3}{4L}\sqrt{E/\rho} = 3.797,8$		4.536,5 (19,5%)	4.187,6 (10,3%)
$\omega_3$	$\frac{5}{4L}\sqrt{E/\rho} = 6.329,5$			7.597,0 (16,7%)

Observe que os modos iniciais convergem com malhas mais grosseiras e os modos mais altos sempre requerem malha mais refinada para atingir precisões aceitáveis. Isto é regra geral nas aproximações por elementos finitos.

### 19.3.2 Exemplo 19.2 - Modos de vibração

Considere a barra engastada do Exemplo 18.1, página 497, modelada por três elementos finitos. Determine os modos naturais de vibração da barra. As matrizes do problema são dadas em (19.44)).

*Solução:*

O autovetor  $\phi^j$  é obtido substituindo em (19.43) o valor de  $\omega_j$  da Tabela 19.1 e resolvendo o sistema para cada modo  $j$ . Para o modo 1, usamos  $\omega_1 = 1.280,4 \text{ Hz} = 8.045 \text{ s}^{-1}$ , o que corresponde a  $\alpha_1 = 0,04674 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-4}$ . A eq. (19.43) para o modo  $j = 1$  fica

$$\begin{bmatrix} 1,81304 & -1,04674 & 0 \\ -1,04674 & 1,81304 & -1,04674 \\ 0 & -1,04674 & 0,90652 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2^1 \\ \phi_3^1 \\ \phi_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Triangularizando a matriz temos:

$$\begin{bmatrix} 1,81304 & -1,04674 & 0 \\ 0 & 1,20868 & -1,04674 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2^1 \\ \phi_3^1 \\ \phi_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Podemos fazer  $\phi_4^1 = 1,0$ . Neste caso resolvemos  $\phi_2^1 = 0,5$  e  $\phi_3^1 = 0,866$ , isto é,

$$\phi^1 = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,866 \\ 1,0 \end{Bmatrix}.
\tag{19.47}$$

Seguindo procedimento similar tem-se os modos 2 e 3 de vibrações axiais da barra:

autovalores do problema da barra:

$$\beta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2L}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

ou, usando a definição de  $\beta$ , ( $\beta^2 = \omega^2 \rho / E$ ), as **frequências naturais da barra engastada** são:

$$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (19.56)$$

Os correspondentes modos naturais de vibração são obtidos levando as frequências para (19.55) com  $B = 0$ :

$$X_j(x) = A_j \text{sen } \beta_j x, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (19.57)$$

**Parte b)** A solução aproximada para os modos de vibrações obtidas por três elementos é vista na eq. (19.49), normalizados pela massa. Estes são então valores nodais. Os valores de deslocamentos em cada ponto  $x$  da barra é obtido com o uso das funções de interpolação. Uma vez que estas funções são lineares em  $x$  ao longo de cada elemento, obtém-se a distribuição de deslocamentos de forma “quebrada”, como mostrada na Figura 19.2. Os valores de  $\beta_j$  na solução analítica são  $\beta_1 = 1,57$ ,  $\beta_2 = 4,71$  e  $\beta_3 = 7,85$ . A solução analítica foi normalizada de forma a que o deslocamento analítico na extremidade,  $X_j(L)$ , coincida com o valor de elementos finitos  $\phi^j$  em  $x = L$ , isto é, em (19.57) a constante  $A_j$  foi obtida por  $A_j = \phi_4^j / \text{sen } \beta_j L$ . então,  $A_1 = 0,3410$ ,  $A_2 = -0,4082$  e  $A_3 = 0,5422$ .

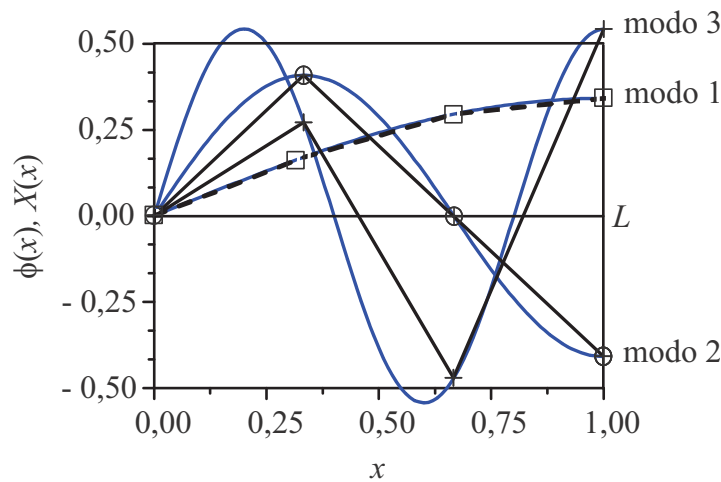


Figura 19.2: Solução analítica  $X_j(x)$  e aproximada  $\phi_j(x)$ , obtida por três elementos finitos de barra, para os três primeiros modos naturais de vibrações.

Observe que a precisão obtida decai progressivamente para os modos mais altos, como ocorreu também para as frequências naturais, como visto no Exemplo 19.2. Isto é regra no método de elementos finitos. Nota-se que, também neste exemplo, os valores nodais foram sempre exatos. **Isto ocorre sempre, mas apenas em alguns tipos de problemas unidimensionais.** Problemas bi- ou tridimensionais como os de placa, casaca ou sólidos apresentam valores nodais apenas aproximativos da solução analítica.

Note que a plotagem da Figura 19.2 representa, na realidade, deslocamentos axiais, (pois é um modelo de barras) e não transversais como a figura possa sugerir.



### 19.3.5 Exemplo 19.4a - Solução analítica de vibrações em flexão - vigas em balanço e biapoiada

Considere os problemas de vibrações livres de uma viga em balanço e biapoiada. Use o modelo de flexão plana de viga de Euler-Bernoulli. Determine as frequências naturais de vibrações transversais. Considere a viga com comprimento  $L$ , e seção uniforme de momento de inércia  $I$ , densidade e módulo de elasticidade  $\rho$  e  $A$ .

*Solução:*

Detalhamos aqui a solução para a viga em balanço. Esse é um problema clássico, cuja solução resumimos aqui. O ponto de partida é o estabelecimento da forma forte do problema, isto é, o conjunto de equações diferenciais e condições de contorno. A equação diferencial é a equação do movimento de viga delgada, deduzida em (6.17), página 111, restringida para o caso de vibrações livres, isto é, com carga transversal nula,  $q(x) = 0$ . As condições de contorno para a viga em balanço são

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -\rho A \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad \forall x \in (0, L) \text{ e } t > 0, \quad (19.58)$$

onde  $v = v(x, t)$  é o deslocamento transversal da linha de referência. As condições de contorno para a viga em balanço são

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, \\ v'(0) &= 0, \\ Q_y(L) &= -EI \left. \frac{d^3 v}{dx^3} \right|_L = 0, \\ M_z(L) &= EI \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_L = 0, \end{aligned} \quad (19.59)$$

onde  $Q_y(L)$  é o esforço cortante e de momento fletor na extremidade livre. A solução  $v(x, y)$  pode ser separada da seguinte forma

$$v(x, y) = X(x)T(t). \quad (19.60)$$

Substituindo na equação diferencial (19.58) se tem

$$EI \frac{d^4 X}{dx^4} T = -\rho A X \frac{d^2 T}{dt^2}.$$

As funções podem ser agrupadas conforme sua dependência de  $x$  ou de  $t$ :

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{1}{X} \frac{d^4 X}{dx^4} = -\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \omega^2. \quad (19.61)$$

Note que esse é um método padrão de solução que funciona para diversos tipos de equações diferenciais parciais lineares. O procedimento prossegue, observando que, uma vez que o primeiro termo só depende de  $x$  e o segundo só de  $t$ , ambos devem ser constantes, iguais a um valor  $\omega^2$  ainda a ser determinado. Isso gera duas equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{d^4 X}{dx^4} - \beta^4 X = 0, & \forall x \in (0, L), \quad \text{onde } \beta^4 = \left( \frac{\omega^2 \rho A}{EI} \right), \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0, & \forall t > 0, \end{cases} \quad (19.62)$$

A solução geral da primeira equação é:

$$X(x) = c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x + c_3 \sinh \beta x + c_4 \cosh \beta x. \quad (19.63)$$

As quatro condições de contorno (19.59) se tornam

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\implies c_2 + c_4 = 0, \\ X'(0) = 0 &\implies c_1 + c_3 = 0, \\ X''(L) = 0 &\implies -c_1 \operatorname{sen} \beta L - c_2 \cos \beta L + c_3 \operatorname{senh} \beta L + c_4 \cosh \beta L = 0, \\ X'''(L) = 0 &\implies -c_1 \cos \beta L + c_2 \operatorname{sen} \beta L + c_3 \cosh \beta L + c_4 \operatorname{senh} \beta L = 0, \end{aligned} \quad (19.64)$$

Esse é um sistema linear de quatro equações e quatro incógnitas  $c_1 - c_4$ . Sendo homogêneo, se a matriz coeficiente for não singular, a única solução é a trivial, que não interessa. Para se ter uma solução não trivial é necessário que a matriz seja singular. Então deve-se buscar os valores de  $\beta$  que tornem a matriz singular. Inicialmente se pode usar as duas primeiras equações para eliminar as constantes  $c_3$  e  $c_4$ , substituindo  $c_3 = -c_1$  e  $c_4 = -c_2$  nas duas últimas equações, que ficam

$$\begin{aligned} c_1(\operatorname{sen} \beta L + \operatorname{senh} \beta L) + c_2(\cos \beta L + \cosh \beta L) &= 0, \\ c_1(\cos \beta L + \cosh \beta L) - c_2(\operatorname{sen} \beta L - \operatorname{senh} \beta L) &= 0. \end{aligned}$$

Esse é um novo sistema algébrico, cuja matriz deve ser singular para se ter solução não trivial. Então, se impõe o determinante nulo:

$$g(\beta L) \equiv (\operatorname{sen} \beta L + \operatorname{senh} \beta L)(\operatorname{sen} \beta L - \operatorname{senh} \beta L) + (\cos \beta L + \cosh \beta L)^2 = 0. \quad (19.65)$$

Fazendo simplificações, chega-se a  $g(\beta L) = \cos \beta L \cosh \beta L + 1 = 0$ . Essa função possui infinitas raízes, que só podem ser obtidas numericamente. As primeiras são listadas na Tabela 19.2. As **frequências naturais de flexão da viga em balanço**, pelo modelo de Euler-Bernoulli são dadas a partir de (19.62)<sub>1</sub>:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (19.66)$$

Tabela 19.2: Raízes para as frequências naturais de flexão da viga em balanço.

$\beta_1 L = 1,875104$	$\beta_5 L = 14,137168$
$\beta_2 L = 4,694091$	$\beta_6 L = 17,278759$
$\beta_3 L = 7,854757$	$\beta_7 L = 20,420352$
$\beta_4 L = 10,995541$	$\beta_8 L = 23,561945$

Para a **viga biapoada**, as frequências naturais são dadas por

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (19.67)$$

## 19.4 Excitação inicial - Sistema não-amortecido

A aplicação do método de análise modal mais simples é no caso em que a única excitação no sistema é aquela aplicada no instante inicial, e ele permanece em movimento ao longo do tempo. Ao longo do tempo o carregamento é nulo, isto é,  $F(t) = 0$  para  $t > 0$ , e a equação de movimento discretizada (18.23) reduz-se à eq. (19.1):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (19.68)$$

Primeiramente formamos o problema de autovalor (19.13) e obtemos sua solução, os  $N$  autovalores  $\Lambda^2$  e os correspondentes autovetores  $\Phi$ . Usamos então o teorema da expansão (19.42), isto é,

se obter informações úteis por uma simulação simplificada, em que o veículo seja modelado como uma simples viga apoiada sobre duas molas que representem toda a flexibilidade dos pneus e do sistema de suspensão. Aplicado um carregamento impulsivo sobre o veículo, cada parte dele se põe a mover. No esquema da Figura 19.3b indicamos uma modelagem de elementos finitos de cinco elementos de viga para modelar o comportamento do modelo inicial. Note que temos dois modelos: o veículo físico foi primeiro modelado pela viga e molas. O segundo modelo, o de elementos finitos visa aproximar o comportamento dinâmico do primeiro modelo, que por sua vez pretende-se que dê informações sobre o comportamento do veículo em si.

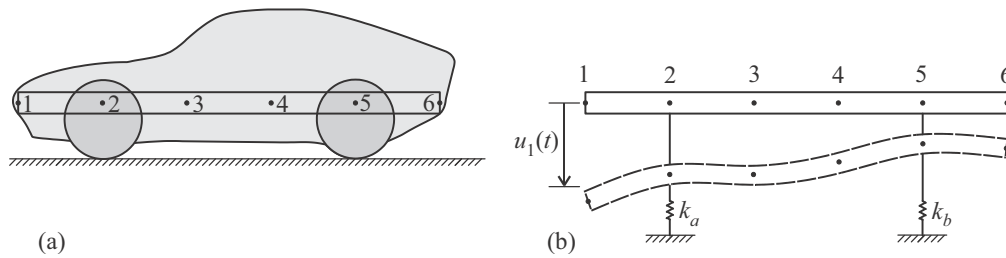


Figura 19.3: (a) Esquema de um veículo, e (b) uma possível representação esquemática.

Buscamos então as seis funções,  $u_1(t)$  a  $u_6(t)$  em cada um dos seis nós da malha da Figura 19.3b, por exemplo. Para a resolução de qualquer problema diferencial que envolve o tempo, é necessário que se tenha um **problema de valor inicial**, dito bem posto. Isto significa que devemos ter a(s) equações diferenciais que regem os problemas. Mas elas não são suficientes. É necessário que conheçamos as **condições de contorno**, que em geral dizem como o sistema está vinculado. Além disso, é necessário que se conheça as **condições iniciais** do sistema, isto é, devemos conhecer os deslocamentos e velocidades de cada ponto do sistema no instante inicial,  $t = 0$ . No exemplo da Figura 19.3b isto significa conhecer os valores de deslocamento em cada um dos nós no instante  $t = 0$ . Frequentemente a origem da medida de deslocamentos é escolhida como a configuração do sistema no instante inicial, ou em sua configuração de equilíbrio. Nestes casos as condições iniciais seriam

$$u_1(0) = u_2(0) = \dots = u_N(0) = 0. \quad (19.74)$$

Observemos também que no instante inicial cada ponto do sistema pode estar se movendo com uma certa velocidade. Estes valores de deslocamentos e velocidades iniciais, quando não nulos, fazem às vezes de excitação no sistema. Observe o veículo do exemplo. Considere que, na Figura 19.3a, ele está em sua posição de equilíbrio estático, imóvel. Se nada for feito, ele continuará parado como é previsto pela segunda lei de Newton. Agora se aplica uma força vertical sobre ele, mas sem que se faça medição ou se conheça esta força. Ampliamos o valor da força até que o deslocamento medido em cada um dos seis nós atinja certos valores, por exemplo,  $u_{01}$ ,  $u_{02}$ ,  $u_{0N}$ . Neste momento removemos a carga e começamos a contar o tempo. Podemos então considerar que o sistema possui uma distribuição de deslocamentos iniciais  $u_i(0) = u_{0i}$  ou, em forma vetorial,

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o. \quad (19.75)$$

É de se esperar que o sistema continue a mover-se, devido às interações entre as forças de inércia e as elásticas. Isto é o que explica por que a equação do movimento (19.68) pode ter solução não nula se nela não aparece carregamento. A excitação aparece em termos de deslocamentos iniciais. O mesmo pode ser dito sobre as velocidades iniciais. Podemos ter a cada nó valores conhecidos de velocidade inicial:

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_o, \quad (19.76)$$

isto é,  $\dot{u}_1(0) = v_{01}$ ,  $\dot{u}_2(0) = v_{02}$ ,  $\dots$ ,  $\dot{u}_N(0) = v_{0N}$ .

Note que, com uso da transformação (19.69), transformamos o conjunto de equações diferenciais

### 19.4.1 Exemplo 19.5 - Resposta para deslocamento inicial pelo MEF

Considere uma barra como a do Exemplo 17.11.1, Figura 18.4 na página 497, de comprimento  $L = 1,0\text{ m}$ , seção transversal de área  $A = 10^{-4}\text{ m}^2$ , densidade  $\rho = 7.800\text{ kg/m}^3$  e módulo de elasticidade  $E = 2 \cdot 10^5\text{ MPa}$ . Inicialmente se aplica uma força axial  $F = 10^5\text{ N}$  como na Figura 19.4. Essa força é aplicada de forma quase-estática, isto é, lentamente, sem gerar acelerações apreciáveis, até que se atinja o deslocamento máximo na barra. Neste instante a força é subitamente removida. O sistema então começa a vibrar axialmente. Determine a resposta dinâmica do sistema. Discretize a barra em três elementos finitos.

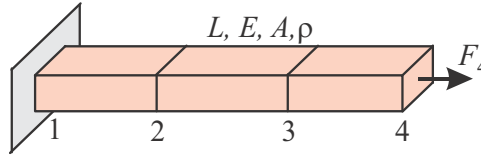


Figura 19.4: Barra discretizada por três elementos, sob deslocamento inicial provocado pela remoção da carga  $F$ .

*Solução:*

Após o instante em que a carga é liberada temos um problema de vibração livre com condição de deslocamento inicial prescrito não nulo. Primeiramente devemos calcular os deslocamentos iniciais nodais  $\mathbf{u}_o$ . No Exemplo 17.11.1 na página 497, já tínhamos obtido as matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  para uma modelagem de três elementos, e do Exemplo 19.3 temos as frequências e modos naturais de vibração na eq. (19.49). Estes valores são os seguintes:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{18} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{18}{\rho AL}} \begin{bmatrix} 0,170518 & 1/\sqrt{6} & 0,271037 \\ 0,295345 & 0 & -0,469536 \\ 0,341035 & -1/\sqrt{6} & 0,542173 \end{bmatrix} \quad (19.85)$$

e as frequências naturais são:

$$\{\omega_1; \omega_2; \omega_3\} = \{8.045, 0; 26.311, 5; 47.733, 4\} \text{ s}^{-1}. \quad (19.86)$$

O problema da determinação de  $\mathbf{u}_o$  é um problema estático, definido por  $\mathbf{K}\mathbf{u}_o = \mathbf{F}$ , isto é,

$$\frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{o2} \\ \mathbf{u}_{o3} \\ \mathbf{u}_{o4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^5 \end{Bmatrix} \text{ N.}$$

A solução é:  $\mathbf{u}_o = \{ 1,667; 3,333; 5,0 \}^T 10^{-3}\text{ m}$ , e a velocidade inicial é  $\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$ .

Passamos a seguir à determinação do sistema desacoplado de equações do movimento, eq. (19.70). Como a matriz modal já está normalizada pela massa, as eqs. (19.85) resultam em

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \\ \ddot{\eta}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,47 \cdot 10^7 & & \\ & 6,92 \cdot 10^8 & \\ & & 2,28 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (19.87)$$

A determinação das condições iniciais  $\boldsymbol{\eta}_o$  e  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_o$  é feita por (19.78), o que resulta em:

$$\boldsymbol{\eta}_o = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{u}_o = \begin{Bmatrix} 25,31 \\ -2,832 \\ 1,146 \end{Bmatrix} 10^{-4}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}_o = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{v}_o = \mathbf{0}. \quad (19.88)$$

da curva pela eliminação da parcela de alta frequência.

### 19.4.2 Exemplo 19.6 - Solução analítica para barra sob deslocamento inicial

Use a solução analítica obtida no Exemplo 19.4 para os modos naturais de uma barra engastada numa das extremidades, e obtenha a solução analítica da resposta dinâmica da barra devida ao deslocamento inicial prescrito, dado no Exemplo 19.5, eq. (19.90). (Observe que este problema usa uma série de resultados da teoria de equações diferenciais parciais. Se o leitor não se sentir confortável com o assunto pode simplesmente pular para a solução, eq. (19.97).)

*Solução:*

O deslocamento  $u(x, t)$  da barra é a solução do problema (19.51) visto no Exemplo 19.4. Ali usamos o método de separação de variáveis, isto é, supusermos que a solução possa ser colocada na forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , o que resultou em duas equações diferenciais ordinárias, eqs. (19.53), uma em termos de  $x$  e outra do tempo. A primeira equação foi já resolvida no Exemplo 19.4, onde obtivemos as frequências naturais  $\omega_j$  e os modos  $X_j(x)$  mostrados nas eqs. (19.56) e (19.57). Temos agora que resolver o problema no tempo, a segunda das eqs. (19.53). Para isto temos que primeiro identificar as **condições iniciais** na barra. Se aplicarmos uma força  $F$  na extremidade, temos um problema estático, onde o deslocamento  $u(x)$  em cada ponto é  $u(x) = Fx/EA$ . A velocidade inicial é nula. Então o problema no tempo é definido por:

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2T(t) = 0, \quad \text{para } t > 0. \quad (19.91)$$

A solução deste problema é conhecida [61] e tem a forma

$$T(t) = C \sen \omega t + D \cos \omega t. \quad (19.92)$$

Da solução do problema em  $x$  temos que infinitas frequências naturais  $\omega$  satisfazem ao problema, como visto em (19.56). Então infinitas soluções existem para (19.92) e cada uma delas tem a forma:

$$T_j(t) = C_j \sen \omega_j t + D_j \cos \omega_j t. \quad (19.93)$$

A solução do problema original da barra tem então a forma  $u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x)T_j(t)$ , isto é,

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sen \frac{(2j-1)\pi x}{2L} \left[ C_j \sen \left( \frac{(2j-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \right) + D_j \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \right) \right]. \quad (19.94)$$

As constantes  $C_j$  e  $D_j$  devem ser determinadas de forma a fazer com que  $u(x, t)$  satisfaça as condições iniciais, que são:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{Fx}{EA}, \\ \left. \frac{du(x, t)}{dt} \right|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (19.95)$$

A única forma de (19.94) satisfazer à segunda condição é que todos os  $C_j$ 's sejam nulos. A primeira condição resulta no seguinte:

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \sen \frac{(2j-1)\pi x}{2L} = \frac{Fx}{EA}. \quad (19.96)$$

A forma de determinar os  $D_j$ 's consiste em multiplicar esta equação por  $\sen (2j-1)\pi x/2L$  e integrar no intervalo  $0 \leq x \leq L$ . Observe que:

$$\int_{x=0}^L \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{(2j-1)\pi x}{2L} dx = \frac{L}{2\pi} \left[ \frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi}{(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n-1)\pi}{(m+n-1)} \right]$$

O segundo termo no colchete é sempre nulo. O primeiro termo também é nulo se  $m \neq j$ . Caso  $m = n$ , o primeiro termo é obtido fazendo  $\lim_{p \rightarrow 0} \operatorname{sen}(p\pi/p) = \pi$ . Multiplicando (19.96) por  $\operatorname{sen}(2j-1)\pi x/2L$  e integrando tem-se

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^L D_j \operatorname{sen}^2 \frac{(2j-1)\pi x}{2L} dx &= \int_{x=0}^L \frac{Fx}{EA} \operatorname{sen} \frac{(2j-1)\pi x}{2L} dx, \\ D_j \frac{L}{2} &= -\frac{F}{EA} \frac{4L^2 \cos(j\pi)}{\pi^2(2j-1)^2}. \end{aligned}$$

o que resulta em

$$D_j = \frac{8FL(-1)^j}{\pi^2 EA(2j-1)^2}.$$

A solução (19.94) para o movimento da barra devido ao deslocamento inicial então fica:

$$u(x, t) = -\frac{8FL}{\pi^2 EA} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^j}{(2j-1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2j-1)\pi x}{2L} \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \right) \right] \quad (19.97)$$

## 19.5 Método de sobreposição modal geral

Consideramos aqui a situação mais geral, do sistema de equações diferenciais de movimento de um sistema com amortecimento viscoso, carregado, com  $N$  graus de liberdade, eq. (18.4), e devidas condições iniciais:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o, \\ \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_o, \end{cases} \quad (19.98)$$

onde  $\mathbf{C}$  é a **matriz de amortecimento** do sistema, de dimensões  $N \times N$ , simétrica. Na seção a seguir veremos métodos para a estimativa da matriz de amortecimento de um sistema, mas no momento consideraremos  $\mathbf{C}$  como dada.

A princípio podemos tentar aplicar o mesmo processo de análise modal usado no caso de vibrações livres não-amortecidas. Primeiro definimos e resolvemos o problema de autovalor

$$[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] \phi^j = \mathbf{0}. \quad (19.99)$$

Conhecidos os  $N$  autovetores formamos a matriz modal  $\Phi$ . Usamos esta matriz para transformar os deslocamentos em novas funções  $\eta(t)$  como na eq. (19.69), isto é, substituímos  $\mathbf{u}(t) = \Phi \eta(t)$  em (19.98). Em seguida pré-multiplicamos o resultado por  $\Phi^T$  e usamos as relações de ortogonalidade (19.37) e (19.40), o que resulta em:

$$\ddot{\eta}(t) + \underbrace{\{\Phi^T \mathbf{C} \Phi\}}_{\mathbf{c}} \dot{\eta}(t) + \Lambda^2 \eta(t) = \underbrace{\{\Phi^T \mathbf{F}(t)\}}_{\mathbf{f}(t)}. \quad (19.100)$$

Lembremos que o objetivo da transformação da equação do movimento com o uso da matriz modal é o de obter um conjunto de equações desacopladas que possam ser resolvidas uma a uma. Em (19.100) as matrizes coeficientes de  $\ddot{\eta}$  e  $\eta$  são diagonais, porém, se  $\mathbf{C}$  for uma matriz arbitrária, o resultado de  $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$  será uma matriz  $N \times N$  não diagonal, o que não facilita em nada a resolução do sistema. Uma forma de contornar este problema consiste em usar uma matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t) \quad (19.106)$$

### 19.5.1 Exemplo 19.7 - Solução pelo MEF de barra sob carga variável no tempo

Considere a barra do Exemplo 19.5, (ver Figura 18.4, página 497), sob condições iniciais nulas, isto é,  $\mathbf{u}_o = \mathbf{v}_o = 0$ , submetida a uma força dinâmica de  $10^5 \text{sen } 4.000t$  aplicada na extremidade, em Newtons. Determine a resposta do sistema. (Dados:  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7.800 \text{ kg/m}^3$ ,  $A = 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $L = 1,0 \text{ m}$ .)

*Solução:*

Devemos formar o sistema desacoplado de equações do movimento, eqs. (19.103). Com o auxílio de (19.85) no Exemplo 19.5, basta calcularmos as forças generalizadas usando (19.101):

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}(t) = \sqrt{\frac{18}{\rho AL}} \begin{bmatrix} 0,170518 & 1/\sqrt{6} & 0,271037 \\ 0,295345 & 0 & -0,469536 \\ 0,341035 & -1/\sqrt{6} & 0,542173 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^5 \end{Bmatrix} \text{sen } \Omega t, \quad (19.107)$$

onde  $\Omega = 4.000 \text{ s}^{-1}$  é a frequência de excitação e  $\sqrt{18/\rho AL} = 4,8038$ . O sistema desacoplado é obtido usando as frequências naturais já obtidas no Exemplo 19.1, página 511:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \\ \ddot{\eta}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,47 \cdot 10^7 & & \\ & 6,92 \cdot 10^8 & \\ & & 2,28 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 163.811 \\ -196.093 \\ 260.464 \end{Bmatrix} \text{sen } \Omega t. \quad (19.108)$$

As condições iniciais dos deslocamentos generalizados vêm de (19.78), que resultam em:  $\boldsymbol{\eta}_o = \dot{\boldsymbol{\eta}}_o = \mathbf{0}$ . A solução para cada equação vem da integral de Duhamel em (19.105). Por exemplo, para  $\eta_1(t)$ , com amortecimento nulo,  $\zeta_j = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{1}{\omega_2} \int_0^t f_2(\tau) \text{sen } \omega_2(t - \tau) d\tau, \\ &= \frac{1,64 \cdot 10^5}{8.045} \int_0^t \text{sen } \Omega \tau \text{sen } 8.045(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Para os demais modos o processo é o mesmo. Podemos colocar o vetor carregamento temporal, eq. (19.107), na forma  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{R} \text{sen } \Omega t$ . Então a solução analítica para um  $\eta_j$  qualquer é:

$$\eta_j(t) = \frac{R_j}{\omega_j(\Omega^2 - \omega_j^2)} [\Omega \text{sen } \omega_j t - \omega_j \text{sen } \Omega t]. \quad (19.109)$$

Observe que apenas em casos bastantes simples a integral de Duhamel poderá ser feita analiticamente como aqui. Em geral ela é estimada por integração numérica. A solução do sistema a cada instante em termos de deslocamentos nodais físicos vem de (19.106),  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t)$ :

$$\begin{Bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{\Phi} \begin{Bmatrix} -16,72 \text{sen } 8.045t + 33,63 \text{sen } 4.000t \\ + 0,441 \text{sen } 26.311t - 2,90 \text{sen } 4.000t \\ -0,0965 \text{sen } 47.733t + 1,151 \text{sen } 4.000t \end{Bmatrix} 10^{-4}.$$

A Figura 19.6 ilustra o movimento descrito pelo nó 4 ao longo do tempo.



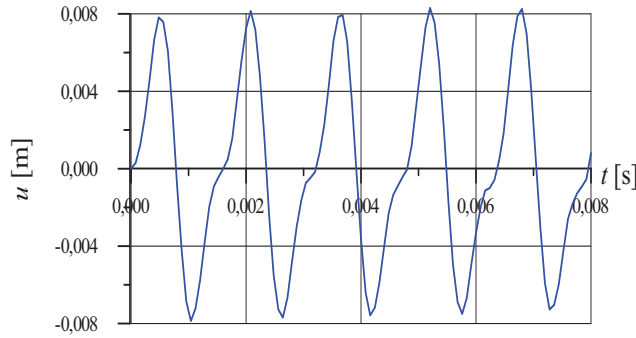


Figura 19.6: Resposta no tempo do movimento do nó 4 na extremidade da barra sob carga harmônica.

### 19.5.2 Resumo do método de sobreposição modal

De um ponto de vista teórico, o processo de cálculo descrito acima, chamado método de sobreposição modal, é capaz de fornecer a resposta dinâmica de um sistema linear. Consideremos, porém, a situação mais comum em que se busca a modelagem de sistemas complexos de forma bastante detalhada por um método numérico como o de elementos finitos. Ocorre que, via de regra, chegam-se a matrizes estruturais ( $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ) de ordens elevadas, podendo variar desde menos de mil até centenas de milhares de graus de liberdade. Quando se observa a transformação (19.69) nota-se que todo o processo de cálculo descrito acima é baseado na prévia solução de um problema de autovalor associado, exigindo a determinação de todos os  $N$  autopares do problema. Na prática esta determinação completa é computacionalmente indesejável.<sup>3</sup>

Por outro lado consideremos que os autopares em  $\mathbf{\Lambda}^2$  e  $\mathbf{\Phi}$  foram organizados em ordem crescente, isto é, segundo  $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_N^2$ . O processo de transformação (19.69) das equações de movimento pode ser visto como uma expansão das funções força e solução em termos da base de vetores definida por  $\mathbf{\Phi}$  no espaço vetorial  $N$ -dimensional definido por  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t) = \eta_1(t)\boldsymbol{\phi}^1 + \eta_2(t)\boldsymbol{\phi}^2 + \dots + \eta_N(t)\boldsymbol{\phi}^N, \\ \mathbf{F}(t) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{g}(t) = g_1(t)\boldsymbol{\phi}^1 + g_2(t)\boldsymbol{\phi}^2 + \dots + g_N(t)\boldsymbol{\phi}^N. \end{aligned} \quad (19.110)$$

Cada termo no somatório representa a contribuição da frequência correspondente no valor de  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{F}(t)$ . Para a maioria dos carregamentos as contribuições das várias frequências geralmente são maiores para os baixos modos e tendem a decrescer para altas frequências.<sup>4</sup> Isto significa que a importância dos termos  $\eta_1(t)\boldsymbol{\phi}^1$  e  $g_1(t)\boldsymbol{\phi}^1$  na composição do deslocamento e da força aplicada são mais importantes que as contribuições do último modo,  $\eta_N(t)\boldsymbol{\phi}^N$  e  $g_N(t)\boldsymbol{\phi}^N$ .

Ao mesmo tempo, a modelagem de um sistema complexo por qualquer método, como o de elementos finitos, sempre produzirá autopares com precisão decrescente para os modos mais altos. Frequentemente, mesmo que se pague o preço de uma determinação completa dos  $N$  autopares, os resultados obtidos pelos últimos 2/3 dos modos podem ser classificados como apenas lixo numérico.

São esses dois fatos que permitem que a análise modal possa ser feita usando não todos os  $N$  modos mas apenas os  $m$  primeiros. Para a determinação de apenas os  $m$  primeiros autopares,  $m \ll N$ , dois métodos principais e suas muitas variações são disponíveis: o **método da iteração subsespacial** e o de **Lanczos**, que serão descritos no Capítulo 23.

As etapas de cálculo do método geral de sobreposição modal são descritas abaixo.

<sup>3</sup>No Capítulo 23 examinaremos alguns métodos para a solução de problemas de autovalor de grande porte provenientes de modelagens de elementos finitos. Tornar-se-á evidente o alto tempo computacional envolvido, mesmo nos melhores métodos.

<sup>4</sup>De fato, existem situações importantes que fogem a essa “regra”. Dependendo da relação rigidez/massa da estrutura e do tipo de carregamento podem ser excitadas com mais intensidade modos de vibração intermediários. Para uma dada estrutura, uma maneira eficaz de identificar a faixa de frequências mais excitadas é efetuando e analisando a transformada de Fourier do carregamento.



### Observações - decisões do analista

Existem aspectos que são de responsabilidade do analista para que os resultados obtidos pelo MEF, via sobreposição modal, possa fornecer resposta realista sobre o comportamento da estrutura. A seguir apontam-se apenas alguns aspectos de uma lista bastante mais longa.

1. A quantidade  $m$  de autovetores a ser utilizada na análise por sobreposição modal é uma decisão do analista. O valor  $m$  deve ser superior à maior frequência de excitação importante na estrutura.
2. Do carregamento físico aproximado pelo MEF, apenas a parcela contida no subespaço definido pelos autovetores, conforme (19.116), é retido no método de sobreposição modal. A parcela do carregamento ortogonal a esse espaço é ignorada na análise. Então, a quantidade de modos escolhidas deve ser tal que represente adequadamente o carregamento aplicado.
3. O analista deve verificar se a malha utilizada no MEF é suficientemente refinada para representar todos os  $m$  modos desejados, com precisão adequada. Deve-se lembrar que quanto mais alto o modo, mais “complicada” é a forma assumida pela estrutura, portanto necessitando mais refino global e/ou local para sua correta representação. Isso foi ilustrado no caso simples do exemplo de elementos de barra na Figura 19.2. A correta representação dos modos é importante porque a qualidade dos modos define o quanto o vetor força reduzido poderá representar bem o vetor força real.

## 19.6 Estimativa do amortecimento

### 19.6.1 Um grau de liberdade

Consideremos a equação de movimento para um sistema de um grau de liberdade, em **vibração livre**, na forma (17.19) com sua solução (17.30):  $e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_d t - \phi)$ . O termo exponencial é responsável pela redução na amplitude das oscilações ao longo do tempo. Quanto maior o quociente de amortecimento  $\zeta$ , mais rápida a atenuação. Pode-se buscar uma relação entre o quociente entre as amplitudes em distintos picos com o valor de  $\zeta$ .

Tomemos a eq. (17.30). O  $p$ -ésimo pico ocorre no instante  $t_p$ . Os picos podem ser identificados pelos instantes em que  $\cos \theta_p$  atinge valor +1, isto é,  $\theta_p = 2\pi p$ . Então,

$$\omega_d t_p - \phi = 2\pi p \quad \longrightarrow \quad t_p = \frac{2\pi p + \phi}{\omega_d}, \quad (19.121)$$

como esquematizado na Figura 17.8, página 473. Tomemos agora a amplitude  $x_p$  no pico  $p$  e a amplitude  $x_{p+q}$ ,  $q$  picos a frente. A relação entre eles é obtida usando (17.30) e simplificando usando  $t_p$  de (19.121):

$$\frac{x_p}{x_{p+q}} = \frac{e^{-\zeta\omega t_p}}{e^{-\zeta\omega t_{p+q}}} = \frac{e^{-\frac{\zeta\omega}{\omega_d}(2\pi p + \phi)}}{e^{-\frac{\zeta\omega}{\omega_d}(2\pi(p+q) + \phi)}} = e^{\frac{2q\pi\zeta\omega}{\omega_d}}.$$

Define-se o **decremento logarítmico total**  $\delta_{pq}$  entre os ciclos  $p$  e  $q$  como:

$$\delta_{pq} = \ln \frac{x_p}{x_{p+q}} = \frac{2q\pi\zeta\omega}{\omega_d} = \frac{2q\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (19.122)$$

Então  $\delta_{pq}$  é a “porcentagem” de decremento nas amplitudes após  $q$  ciclos. Para  $\zeta = 8\%$  por exemplo, o decremento é de  $\delta = 50\%$  em apenas 1 ciclo. Para um decremento de 50% pode-se obter uma relação entre o amortecimento  $\zeta$  e o número necessário de ciclos  $q$ :

$$q = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{4\pi\zeta}. \quad (19.123)$$

Esta relação é plotada na Figura 19.7.

O **decremento logarítmico**  $\delta$  é o decremento entre dois ciclos subsequentes. Tomando (19.122) para  $q = 1$  tem-se

$$\delta = \ln \frac{x_p}{x_{p+1}} = \frac{2\pi\zeta\omega}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (19.124)$$

O significado do termo “quociente de amortecimento” para  $\zeta$  pode ser entendido da seguinte forma. Para baixos valores de amortecimento, o último termo de (19.124) pode ser aproximado por

$$\ln \frac{x_p}{x_{p+1}} \approx 2\pi\zeta \quad \longrightarrow \quad \frac{x_p}{x_{p+1}} \approx e^{2\pi\zeta}.$$

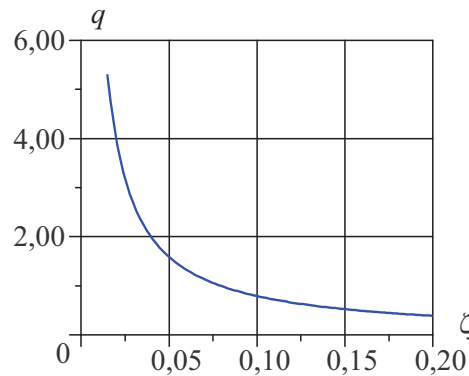


Figura 19.7: Número necessário de ciclos para um decremento total  $\delta_{pq} = 0,5$  para dado valor de amortecimento  $\zeta$ .

O exponencial pode ser expandido em série de Taylor, tomando apenas os dois primeiros termos, os lineares. Então, entre dois ciclos subsequentes,

$$\frac{x_p}{x_{p+1}} \approx 1 + 2\pi\zeta \quad \longrightarrow \quad \zeta \approx \frac{x_p - x_{p+1}}{2\pi x_{p+1}} \quad (19.125)$$

Então  $\zeta$  tem aproximadamente o significado da variação da amplitude sofrida entre dois ciclos subsequentes, dividido pela amplitude do segundo ciclo.

A equação (19.122) é a base de um dos métodos experimentais mais simples e mais usados na determinação do quociente de amortecimento  $\zeta$ . É o chamado **método do decaimento em vibrações livres**, que consiste no seguinte. Coloca-se a estrutura sob vibrações livres usando um procedimento qualquer e mede-se a amplitude do movimento em um intervalo de  $m$  ciclos. De (19.122) calcula-se então o amortecimento:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi m)^2}} \quad \longrightarrow \quad \delta = \ln \frac{x_p}{x_{p+m}} \quad (19.126)$$

Uma série de outros métodos experimentais são disponíveis, como o da **amplificação ressonante**, o **método da largura de banda**, da **perda de energia por ciclo** e do **amortecimento histerético**, e podem ser vistos em textos padrão de vibrações.

### 19.6.2 Métodos experimentais

A prática de modelagem numérica, entretanto, raramente utiliza o procedimento acima. A determinação do amortecimento em cada região da estrutura, para cada grau de liberdade não é algo simples de ser feito como o é a determinação de densidade e propriedades elásticas do material.

Além disto, de fato, em estruturas metálicas o amortecimento de material é em geral desprezível, e a fonte principal de dissipação de energia se dá nas interfaces das junções entre diferentes partes. Desta forma, em lugar do procedimento visto na seção acima, o quociente de amortecimento  $\zeta_j$  para alguns modos  $j$  são escolhidos ou determinados experimentalmente. Numa etapa de projeto, onde evidentemente não há ainda uma estrutura construída, os amortecimentos podem ser “escolhidos”. Para a maioria das estruturas metálicas ou de concreto  $\zeta$  fica na faixa 0,01 a 0,20. Resultados experimentais de modelos semelhantes já construídos podem ser usados como referência.

Quando se usa o método de sobreposição modal, a determinação prévia da matriz  $\mathbf{C}$  de amortecimento não é essencial, uma vez que os valores de  $\zeta_j$  estimados para cada modo são aplicados diretamente nas equações de movimento desacopladas (19.103). Por outro lado, quando se deve usar um método como o de integração direta por exemplo, necessário num problema não linear, devemos ter alguma forma de estimar a matriz  $\mathbf{C}$  a partir dos quocientes de amortecimento usados  $\zeta_j$ . A determinação de  $\mathbf{C}$  é o assunto seguinte, onde apresentaremos dois métodos clássicos adequados a baixos amortecimentos.

### 19.6.3 Método analítico 1 para determinação de $\mathbf{C}$ - Rayleigh

O problema consiste no seguinte. Suponha que sejam conhecidos os valores de  $\zeta_j$  para alguns dos poucos primeiros  $p$  modos do sistema, digamos 1, 2 ou 3. Como obter a matriz  $\mathbf{C}$  correspondente, isto é, aquela que, quando diagonalizada por (19.101), resulte no amortecimento previsto  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$  nestes  $p$  modos e nos demais modos apresente amortecimentos compatíveis (embora não iguais) a estes?

Rayleigh [68] apresentou uma solução a este problema. Compare a aproximação de elementos finitos em (18.39) para a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}^e$  com a definição da matriz massa  $\mathbf{M}^e$  em (18.20). Nota-se claramente que ambas as matrizes são proporcionais, na forma  $\mathbf{C}^e = \alpha \mathbf{M}^e$ . De forma geral isto não é exato, devido à complexidade dos diversos processos de amortecimento. Numa primeira aproximação entretanto, pode-se considerar que  $\mathbf{C}$  teria também uma contribuição da rigidez  $\mathbf{K}$ , isto é

$$\boxed{\mathbf{C} = a_o \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}} \tag{19.127}$$

que é a **expansão de Rayleigh**. Estamos buscando uma estimativa para  $\mathbf{C}$ , de preferência uma que seja diagonalizável. De fato, esta expansão é diagonalizável. Para verifica-lo basta levamos esta expansão a (19.101), e usar as relações de ortonormalidade da matriz modal  $\Phi$ , o que dá:

$$\mathbf{c} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi = \mathbf{a}_o \mathbf{I} + a_1 \Lambda^2, \tag{19.128}$$

portanto  $\mathbf{c}$  é diagonal. Representando  $c_{jj}$  em termos do amortecimento modal a expressão tem a forma

$$2 \begin{bmatrix} \zeta_1 \omega_1 & & & \\ & \zeta_2 \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta_m \omega_m \end{bmatrix} = \mathbf{a}_o \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_m^2 \end{bmatrix} \tag{19.129}$$

Como existem duas constantes a determinar,  $a_o$  e  $a_1$ , é possível impor quocientes de amortecimento para dois modos,  $\zeta_p$  e  $\zeta_q$ , associados às frequências naturais  $\omega_p < \omega_q$ , (19.129) gera um sistema de duas equações,

$$\begin{aligned} 2\zeta_p \omega_p &= a_o + a_1 \omega_p^2, \\ 2\zeta_q \omega_q &= a_o + a_1 \omega_q^2. \end{aligned}$$

cuja solução é

onde  $\mathbf{I}_m$  é a matriz identidade de ordem  $m$ . Se  $m = N$ , e  $\Phi$  é não singular, a pseudoinversa é igual à inversa usual. Alguns detalhes são vistos nas seções 23.8.2 e 23.8.3.

Os casos 1, 2 e 3 são visualizados na Figura 19.8, com as constantes obtidas de (19.130) para amortecimento combinado e eqs. (19.138) e (19.141) para amortecimento proporcionais à individualmente à massa e à rigidez. As três curvas foram plotadas usando  $\zeta = [a_0 + a_1\omega^2] / 2\omega$ , tomando valores nulos de  $a_0$  ou  $a_1$  quando necessário. Verifica-se que no caso 1, onde  $\mathbf{C} = a_0\mathbf{M}$ , o amortecimento será maior nos primeiros modos e será mínimo nos mais altos. No caso 2,  $\mathbf{C} = a_1\mathbf{K}$ , ocorre o inverso, o amortecimento será maior nos modos mais altos.

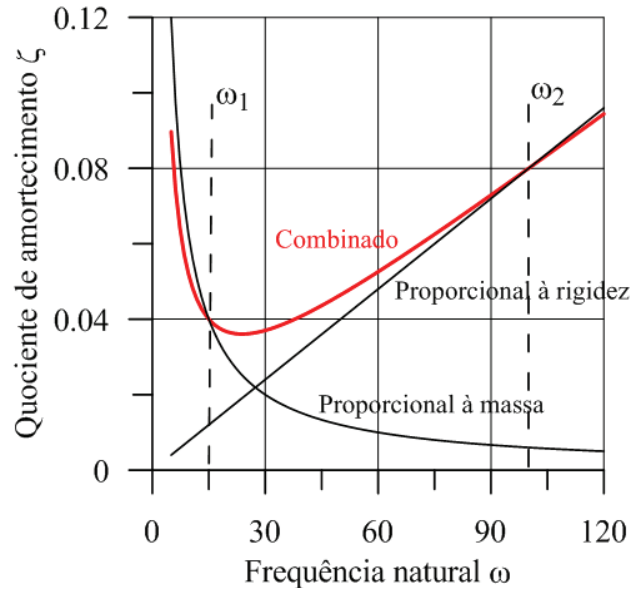


Figura 19.8: Amortecimento crítico para amortecimento proporcional à massa e à rigidez. Dados:  $\zeta_1 = 0,04$ ,  $\omega_1 = 15 \text{ s}^{-1}$ ,  $\zeta_2 = 0,08$  e  $\omega_2 = 100 \text{ s}^{-1}$ . O amortecimento proporcional produz  $a_0 = 5,3994 \text{ s}^{-1}$  e  $2,4097$ . Os amortecimentos proporcionais apenas à massa e à rigidez foram obtidos pelo ponto 1 e pelo ponto 2, respectivamente. Para a massa,  $a_0 = 7,53982 \text{ s}^{-1}$  e  $a_1 = 0$ . Para a rigidez,  $a_0 = 0$  e  $a_1 = 2,5465 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

#### 19.6.4 Método analítico 2 para determinação de $\mathbf{C}$

Um segundo método, diferente daquele baseado no método de Rayleigh, é disponível. Consideremos as eqs. (19.101) e (19.104)

$$\mathbf{c} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi = 2 \begin{bmatrix} \zeta_1 \omega_1 & & & \\ & \zeta_2 \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta_N \omega_N \end{bmatrix}. \quad (19.147)$$

Se **alguns dos**  $\zeta'$ s forem disponíveis,  $\mathbf{C}$  pode ser obtido invertendo a matriz modal:

$$\mathbf{C} = \Phi^{-T} \mathbf{c} \Phi^{-1}. \quad (19.148)$$

A pseudoinversa de  $\Phi$  é tomada de (19.144), o que dá:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \Phi \mathbf{c} \Phi^T \mathbf{M}. \quad (19.149)$$

Note que esta matriz contém amortecimento apenas nos modos especificados. Se apenas  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  e  $\zeta_3$  forem especificados em (19.147),  $\mathbf{C}$  não apresentará nenhum amortecimento nos demais modos,

diferentemente do método anterior, eq. (19.131). Normalmente, apenas os  $m$  primeiros modos serão disponíveis, e (19.149) pode ser usado com  $\bar{\Phi}$  em lugar de  $\Phi$ , isto é,  $\mathbf{C}$  é estimado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\bar{\Phi}\bar{\mathbf{c}}\bar{\Phi}^T\mathbf{M}. \quad (19.150)$$

onde  $\bar{\Phi}$  is pelos primeiros  $m$  autovetores ortonormalizados, e  $\bar{\mathbf{c}}$  é de ordem  $m \times m$  apenas com os modos amortecidos.

### 19.6.5 Exemplo 19.8 - Determinação experimental da matriz de amortecimento

Considere a barra do Exemplo 19.5, página 521, modelada por três elementos, com as matrizes de rigidez  $\mathbf{K}$ , massa  $\mathbf{M}$  e modal  $\Phi$  dadas em (19.85). (ver a malha na Figura 18.4, página 497.) a) Determine a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  usando o método de Rayleigh, usando (19.127) e as constantes  $a_o$  e  $a_1$ ; b) Determine a matriz de amortecimento diagonalizada (19.128). Use  $\xi_1 = \xi_2 = 0,010 = \xi$ .

*Solução:*

As constantes  $a_o$  e  $a_1$  vem de (19.130). As duas primeiras frequências naturais foram obtidas no Exemplo 2 como:  $\omega_1 = 8.045 \text{ s}^{-1}$  e  $\omega_2 = 26.311,5 \text{ s}^{-1}$ . Então,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_o \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} a_o \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 123,22 \\ 5,8214 \cdot 10^{-7} \end{Bmatrix}.$$

A matriz de amortecimento vem de (19.127), usando  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  de (19.85), na página 521. Então,  $\mathbf{C} = a_o\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}$ , o que resulta

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 91,215 & -29,589 & 0 \\ -29,589 & 91,215 & -29,589 \\ 0 & -29,589 & 45,608 \end{bmatrix}. \quad (19.151)$$

A matriz diagonalizada é dada por (19.128),  $\mathbf{c} = \Phi^T\mathbf{C}\Phi$ , isto é,  $\mathbf{c} = \mathbf{a}_o\mathbf{I} + a_1\Lambda^2$ :

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 160,9 & & \\ & 526,22 & \\ & & 1.449,6 \end{bmatrix}. \quad (19.152)$$

Mas, de (19.104), cada termo de amortecimento  $c_j$ , se relaciona com o correspondente fator  $\xi_j$  e frequência  $\omega_j$  na forma  $c_j = 2\zeta_j\omega_j$ . Pode-se comparar que a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  gerada em (19.151) corresponde a  $\xi_1 = \xi_2 = 0,010$ , conforme tinha sido diretamente imposto, e também obtemos o amortecimento indiretamente imposto ao modo 3 como  $\xi_3 = 0,0152$ .

### 19.6.6 Exemplo 19.9 - Vibração amortecida de barra sob deslocamento inicial

Refaça o Exemplo 19.5, página 521, de vibrações livres de uma barra sob deslocamento inicial prescrito usando o método de elementos finitos, incluindo agora os efeitos de amortecimento. Faça com que  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,010$  e use a matriz  $\mathbf{C}$  obtida no Exemplo 19.8. (ver a malha na Figura 18.4, página 497.)

*Solução:*

Por comodidade repetimos aqui os dados já obtidos para este problema, que tem sido desenvolvido em diversos exemplos desde o Exemplo 18.1 (ver eqs. (19.85), (19.86) e (19.152) nas páginas (521) e (535)):

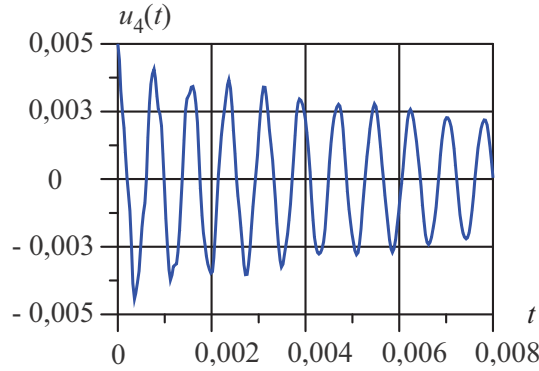


Figura 19.9: Vibração livre amortecida da extremidade da barra do Exemplo 19.9: aproximação por elementos finitos de  $u_4 \times t$ .

como na Figura 18.4 na página 18.4.

*Solução:*

As matrizes de MEF, os modos e frequências naturais da barra foram determinados nos exemplos anteriores, eqs. (18.33), (19.46)-(19.47) e os resultados estão sumarizados nas eqs. (19.153), página 536, enquanto as forças generalizadas  $f_j(t)$  em cada nó  $j$ , do sistema desacoplado, foram calculados na eq. (19.107), e valem:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}(t) = \sqrt{\frac{18}{\rho AL}} \begin{bmatrix} 0,170518 & 1/\sqrt{6} & 0,271037 \\ 0,295345 & 0 & -0,469536 \\ 0,341035 & -1/\sqrt{6} & 0,542173 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^5 \end{Bmatrix} \text{sen } \Omega t, \quad (19.157) \\ &= \begin{Bmatrix} 163.811 \\ -196.093 \\ 260.469 \end{Bmatrix} \text{sen } \Omega t. \end{aligned}$$

Temos assim todos os termos da equação completa do movimento desacoplada, eq. (19.103). A solução é dada por (19.105), página 525, onde apenas o termo da integral de Duhamel é não nulo, uma vez que as condições iniciais são nulas. Cada um dos termos tem a seguinte forma:

$$\eta_j(t) = \frac{1}{\omega_{dj}} \int_0^t a_j \text{sen } \Omega \tau e^{-\zeta_j \omega_j (t-\tau)} \text{sen } \omega_{dj} (t-\tau) d\tau, \quad (19.158)$$

onde  $a_j$  é a amplitude da força generalizada  $\mathbf{f}(t)$  em cada modo dada em (19.157). A integração analítica é

$$\begin{aligned} \eta_j(t) &= \frac{a_j}{\omega_{dj}} \frac{g_j e^{-\zeta_j \omega_j t} + h_j \omega_{dj}}{\left[ (\zeta_j^2 \omega_j^2 + \omega_{dj}^2)^2 + 2\Omega^2 (\zeta_j^2 \omega_j^2 - \omega_{dj}^2) + \Omega^4 \right]}, \\ \text{onde } g_j &= [2\zeta_j \omega_j \Omega \cos(\omega_{dj} t) + \Omega (\zeta_j^2 \omega_j^2 - \omega_{dj}^2 + \Omega^2) \text{sen}(\omega_{dj} t)] \text{ e} \\ h_j &= [-2\zeta_j \omega_j \Omega \cos(\Omega t) + (\zeta_j^2 \omega_j^2 + \omega_{dj}^2 - \Omega^2) \text{sen}(\Omega t)]. \quad (19.159) \end{aligned}$$

A solução para o histórico dos deslocamentos físicos nodais é dada por  $u_i(t) = \sum_{j=1}^N \Phi_{ij} \eta_j(t)$ . O deslocamento no nó 4 na extremidade da barra é dado por:

$$\begin{aligned}
 u_4(t) = & -8,117 \cdot 10^{-5} c_0 + 7,270 \cdot 10^{-5} e^{-80,46t} c_1 + 1,7697 \cdot 10^{-6} e^{-263t} c_2 & (19.160) \\
 & + 6,696 \cdot 10^{-6} e^{-7255t} c_3 + 6,354 \cdot 10^{-3} s_0 - 2,737 \cdot 10^{-3} e^{-80,45t} s_1 \\
 & - 8,641 \cdot 10^{-5} e^{-263t} s_2 - 2,190 \cdot 10^{-5} e^{-7255t} s_3,
 \end{aligned}$$

onde  $c_0 = \cos \Omega t$ ,  $c_1 = \cos 8.046t$ ,  $c_2 = \cos 26.313t$ ,  $c_3 = \cos 48.862t$ ,  $s_0 = \sin \Omega t$ ,  $s_1 = \sin 8.046t$ ,  $s_2 = \sin 26.313t$ ,  $s_3 = \sin 48.862t$ .

A Figura 19.10 mostra a plotagem de  $u_4(t)$  conforme (19.160), no intervalo de tempo de 0 a 0,06 s. Pode-se visualizar um leve decaimento da amplitude devido ao amortecimento. Da equação nota-se que, no limite para  $t \rightarrow \infty$ , todos os termos que contem exponencial tendem a zero, deixando apenas os termos em  $c_o$  e  $s_o$ , de forma que  $u_4(t)$  tende a

$$u_4(t)|_{\infty} = -8,117 \cdot 10^{-5} \cos \Omega t + 6,354 \cdot 10^{-3} \sin \Omega t, \quad (19.161)$$

isto é, um movimento com amplitude constante igual a  $6,355 \cdot 10^{-3}$  m, harmônico, com a mesma frequência do carregamento,  $\Omega = 4.000 \text{ s}^{-1}$ . O presente cálculo foi realizado utilizando 3 modos na sobreposição modal. caso se utilize apenas 2 modos obtém-se amplitude  $6,07 \cdot 10^{-3}$  m.

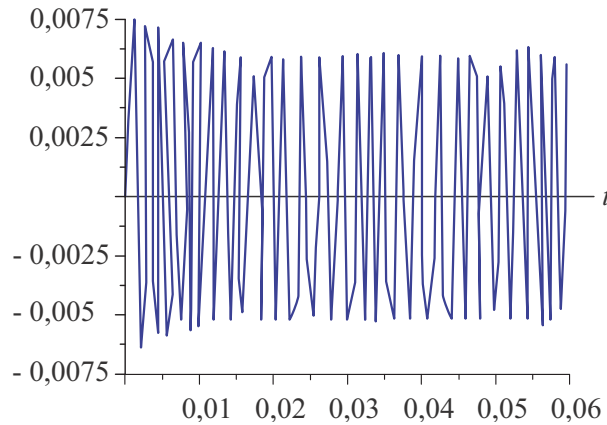


Figura 19.10: Solução de elementos finitos para o movimento do nó na extremidade da barra no Exemplo 13, sob vibração forçada amortecida.

## 19.7 Exercícios

### Seções 19.1-19.5.

19.1 Determine as frequências naturais para a barra em balanço no Exemplo 19.1, para 4, 5, ..., 10 elementos. Complete a Tabela 19.1, página 512, e plote os erros relativos para cada modo versus o número de nós do modelo. (Solução analítica:  $\omega_j = (2j - 1)\pi\sqrt{E/\rho}/2L$  para o modo  $j$ .)

19.2 Considere o sistema da Figura 19.11.

(a) Mostre que as matrizes do sistema são:

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Calcule as frequências naturais do sistema.

(c) Calcule os modos de vibração. (Resposta:  $w_{1,2} = [3(1 \mp 1/\sqrt{3})/2]^{1/2} \sqrt{k/m}$ ;  $\phi^1 = \{1, 0; 1, 366025\}^T$ ,  $\phi^2 = \{1, 0; 0, 366025\}^T$ .)