

## **Parte II**

# **O MEF Aplicado à Mecânica dos Sólidos**

## Capítulo 5

# Análise matricial - modelo de barras

Estudaremos neste capítulo o modelo de barras, utilizado tanto em estruturas de construção civis, nas treliças de pontes, viadutos, torres de transmissão elétrica, quanto em mecanismos e estruturas aeronáuticas. Em qualquer dos casos, o modelo de barras considera que o componente desenvolve exclusivamente esforços axiais. *De fato, a designação “treliça” é formalmente definida como uma estrutura constituída por barras unidas apenas pelas extremidades, sendo essas uniões feitas através de rótulas (denominadas “nós” da treliça) perfeitamente articuladas. Também, o carregamento é considerado aplicado apenas nos nós, sendo vedada a aplicação de cargas concentradas no vão de alguma barra ou de cargas distribuídas.* Como consequência dessas restrições, nenhuma barra sofre flexão ou esforços cortantes, isto é, sabe-se de antemão que todas as barras estão sujeitas apenas a esforços axiais de tração ou compressão. Estruturas que não se adequam a esta condição deverão ser simuladas com modelos de vigas que incorporam, além de esforços axiais, os de flexão, de torção e de cisalhamento. Este é o caso dos modelos de vigas, tema do próximo capítulo.

Note-se, por outro lado, que a construção de estruturas mecânicas rotuladas foi abandonada nos primeiros anos do século 20 devido aos problemas de corrosão entre as superfícies de contato, originadas pelo movimento relativo de deslizamento e atrito sob altas forças compressivas. Assim, as estruturas são construídas através de uniões rígidas entre as barras, usando rebites, solda ou chapas auxiliares. Dessa forma, praticamente não existem (rigorosamente falando) treliças reais. Entretanto, muitas das estruturas usadas em engenharia, como certos tipos de pontes, viadutos e torres de transmissão elétrica, são construídos com barras cuja relação entre seu comprimento e dimensão da seção transversal é suficientemente grande para que, embora exista flexão nas barras, esta seja pequena o bastante para ser desprezada. É nesse ponto então que se usa atualmente um modelo de elementos finitos de barras para analisar a estrutura como uma treliça. Do ponto de vista de esforço computacional ou esforço do analista para a geração de dados, é quase indiferente a opção por usar um modelo de barras ou de viga. O modelo baseado em vigas, como será visto nos capítulos seguintes, exige do usuário a identificação da orientação da seção no espaço, o que, em caso de estruturas espaciais pode resultar razoavelmente trabalhoso. A etapa de análise dos resultados também torna-se mais longa no caso de vigas. Isso faz com que, caso o problema permita, pode-se, com vantagem, usar o modelo de treliça. Evidentemente, entretanto, existirá toda uma classe de problemas em que a flexão ou torção nos elementos será fundamental, e não se terá então possibilidade de opção entre modelos.

O comportamento mecânico de barras sob tração é física e matematicamente muito simples, o que o torna adequado de ser utilizado como problema de base na descrição de aspectos básicos do MEF. O método também pode ser introduzido usando o problema simples de condução de calor, como é feito no Capítulo 13.

A abordagem utilizada neste e no próximo capítulo se denomina **análise matricial** e se caracteriza pela sua simplicidade e forte relação com conceitos mecânicos. Esta forma de começar o estudo permitirá compreender de uma forma simples certos aspectos conceituais e operacionais do Método de Elementos Finitos (MEF) tais como os conceitos de **graus de liberdade**, **matriz de rigidez**, processo de sobreposição, sistema de **equações algébricas de equilíbrio**, imposição de **condições de contorno**, solução e **pós-processamento**, etc. Por outro lado, um enfoque

excessivamente mecanicista como esse não é capaz de descrever o método de elementos finitos para problemas mais complexos, como os de elementos sólidos, de placas, cascas, fluidos, etc., além de outros fenômenos físicos (acústica, escoamentos de fluidos, campos elétricos, etc.). Assim, após a descrição inicial do MEF para barra e vigas vistos neste e no próximo capítulos, a fundamentação mais geral do MEF é introduzida no Capítulo 7, usando novamente o problema de barras como pano de fundo. Os demais capítulos aplicam o método a diversos outros problemas de mecânica dos sólidos.

## 5.1 Equilíbrio de uma barra

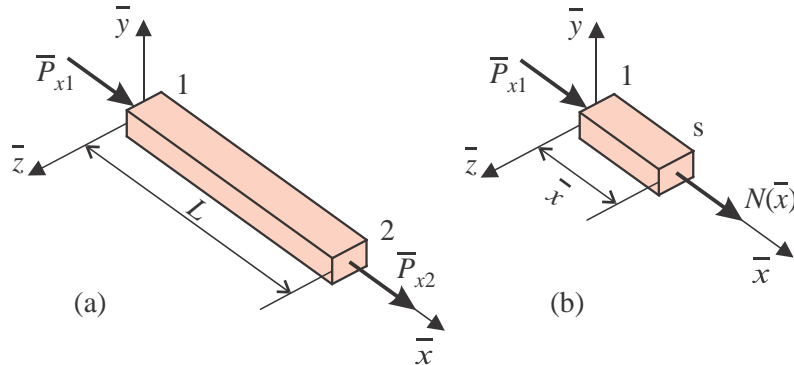


Figura 5.1: (a) Barra submetida a esforços nodais axial; (b) diagrama de corpo livre à esquerda de uma seção arbitrária  $s$ .

Consideremos, por simplicidade, uma barra reta de comprimento  $L$  e seção transversal uniforme de área  $A$ , como na Figura 5.1(a). As extremidades da barra são denominadas **nós locais 1 e 2** (ou I e J). É definido um **sistema local de coordenadas**  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  com origem no centroide da seção do nó 1, e com o eixo  $\bar{x}$  orientado na direção do nó 2. Considere a barra submetida apenas aos esforços normais  $\bar{P}_{x1}$  e  $\bar{P}_{x2}$  aplicados nos **nós do elemento**. Formulando o equilíbrio de forças externas, temos que:

$$\bar{P}_{x1} + \bar{P}_{x2} = 0. \quad (5.1)$$

Note que os **esforços nodais**  $\bar{P}_{x1}$  e  $\bar{P}_{x2}$  são definidos como positivos quando atuam no sentido positivo do eixo local  $\bar{x}$ , diferentemente do esforço normal numa seção arbitrária,  $N_{\bar{x}}$ , (Figura 5.1b.) que é definido como positivo se atua gerando tração no material.

Uma outra forma para a **equação de equilíbrio** pode ser obtida, agora relacionando  $\bar{P}_{x1}$  com o esforço normal  $N_{\bar{x}}$  que atua internamente no material numa seção arbitrária  $s$ , como indicado no diagrama de corpo livre da Figura 5.1b. Considera-se que as tensões se distribuem uniformemente na seção (não há efeitos de concentração de tensões), tal que o esforço normal é dado em qualquer seção por

$$N_{\bar{x}} = -\bar{P}_{x1} = \sigma_{\bar{x}}A. \quad (5.2)$$

Em seguida devemos considerar as **equações constitutivas** no equacionamento. Nesse caso, consideramos que o comportamento do material da barra é elástico-linear, de forma que a relação tensão-deformação é a **lei de Hooke**, em sua forma unidimensional:

$$\sigma_{\bar{x}} = E\varepsilon_{\bar{x}}, \quad (5.3)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $\varepsilon_{\bar{x}}$  a deformação axial da barra<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Observe que num problema usual de mecânica dos sólidos, tanto as tensões quanto as deformações variam de ponto a ponto. O presente problema, ao contrário, é uma exceção, em que tensão e deformação são uniformes em toda a barra.

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x1} = 0 \\ \bar{u}_{x2} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{x1} = R = ? \\ \bar{P}_{x2} \end{Bmatrix}.$$

A primeira equação não pode ser utilizada pois contém a reação  $R$  também desconhecida. Por outro lado, como resta apenas um deslocamento incógnito, basta usar uma única equação para resolver o problema, que é a segunda equação. Nesta, o termo que multiplica  $\bar{u}_{x1} = 0$  se anula. Assim, o problema se reduz a

$$-\frac{AE}{L} \times 0 + \frac{AE}{L} \bar{u}_{x2} = \bar{P}_{x2} \quad \implies \quad \bar{u}_{x2} = \frac{\bar{P}_{x2}L}{AE}.$$

Uma vez obtido o deslocamento  $\bar{u}_{x2}$ , é possível calcular as outras grandezas de interesse: deformações e tensões nos elementos, usando as equações correspondentes (5.3) e (5.6):

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\bar{u}_{x2} - \bar{u}_{x1}}{L}, \quad \sigma_{\bar{x}} = E\varepsilon_{\bar{x}}.$$

Observa-se que, de fato, não precisaríamos de um método como o de elementos finitos, ou de qualquer método matricial para resolver o problema de **uma** barra como aquele da Figura 5.3. Este tipo de problema é o mais simples que existe em engenharia e possui solução analítica fechada:  $\sigma_{\bar{x}} = F/A$ ,  $\varepsilon_{\bar{x}} = u_2/L = \sigma_{\bar{x}}/E$ ,  $u_{x2} = \bar{P}_{x2}L/EA$ . Entretanto, como se mostrará em seguida, a forma (5.8) serve de base para uma formulação que permite resolver, de forma automatizada, sistemas planos ou espaciais com grande número barras. Sendo automatizado, o procedimento se presta a implementação computacional, o que permite tratar de sistemas de centenas ou milhares de barras de forma eficiente.

## 5.2 Sistema de barras

### 5.2.1 Exemplo 5.1 - barra 1D

Observemos agora um problema algo mais complexo que o anterior, envolvendo três barras conectadas através de nós, como na Figura 5.4.

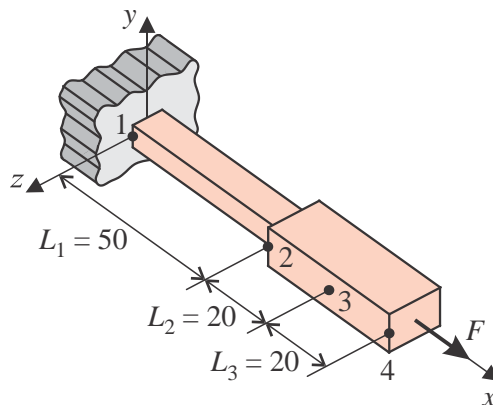


Figura 5.4: Modelo de barra modelada por três elementos finitos de barra.

Cada nó é identificado por um número e caracterizado por sua posição em relação a um sistema de coordenadas global, único para toda a estrutura, gerando uma **tabela de coordenadas** dos nós. Os elementos (barras) são também identificados por um número e caracterizados através dos nós

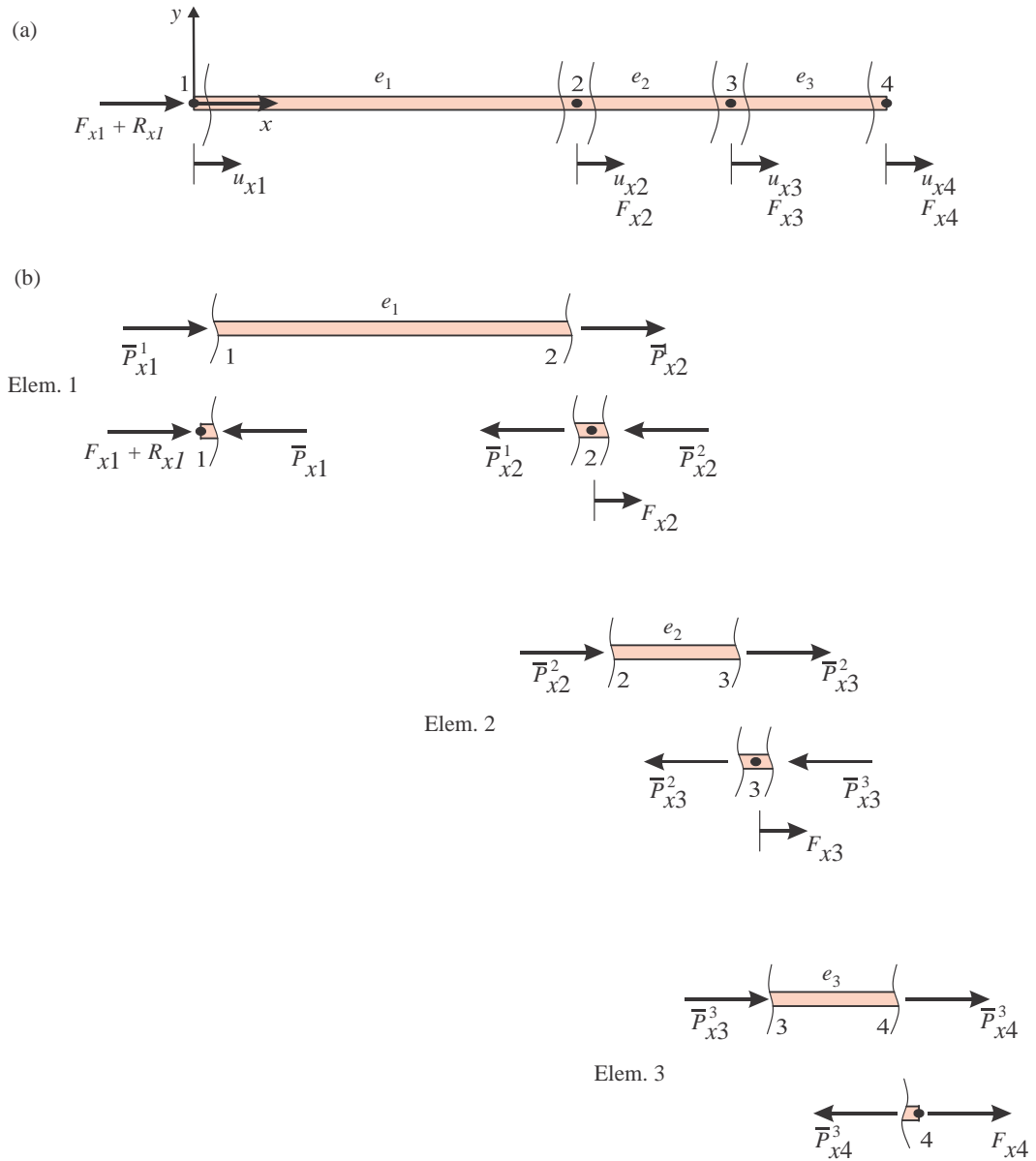


Figura 5.5: (a) deslocamentos e forças externas nodais; (b) diagramas de corpo livre dos elementos e nós.

### Fase de pós-processamento

O cálculo das **tensões e esforços** nas barras a partir deste ponto é muito simples. O cálculo é feito elemento a elemento. Por exemplo, para o **elemento 2**, inicialmente deve-se identificar **no vetor de deslocamentos nodais globais, os valores de deslocamentos associados ao elemento 2**. Isso é feito com a ajuda dos dados de conectividade dos elementos. Os deslocamentos do elemento são  $u_{x2}$  e  $u_{x3}$ . Uma vez que o sistema local de coordenada do elemento é paralelo ao sistema global, tem-se que na direção global  $x$ , os deslocamentos nodais no elemento 2 são  $\bar{u}_{x2} = u_{x2}$  e  $\bar{u}_{x3} = u_{x3}$ .

Em seguida, calcula-se a deformação no elemento 2, a tensões normal na direção axial  $\bar{x}$  do elemento, e finalmente se obtém o esforço normal na barra:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\bar{u}_{x3} - \bar{u}_{x2}}{L_2}, \quad \sigma_{\bar{x}} = E\varepsilon_{\bar{x}}, \quad N_{\bar{x}} = A_2\sigma_{\bar{x}}. \quad (5.19)$$

### Cálculos

Para ilustrar todas as operações descritas acima, vamos substituir nestas os valores numéricos dos dados do exemplo. As componentes da matriz de rigidez global modificada da eq. (5.18) são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{A_1 E_1}{L_1} &= \frac{5 \times 2,0 \cdot 10^5}{50} = 0,2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}, \\ \frac{A_2 E_2}{L_2} &= \frac{10 \times 2,0 \cdot 10^5}{20} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}, \\ \frac{A_3 E_3}{L_3} &= \frac{10 \times 2,0 \cdot 10^5}{20} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}. \end{aligned}$$

Assim, o sistema de equações de equilíbrio modificado fica

$$1,0 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1,2 & -1,0 & 0 \\ -1,0 & 2,0 & -1,0 \\ 0 & -1,0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \end{Bmatrix}.$$

Esse sistema pode ser resolvido usando, por exemplo, o método de Gauss para solução de sistemas algébricos simétricos. O resultado são os seguintes deslocamentos nodais:

$$\begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{x4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,025 \\ 0,030 \\ 0,035 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (\text{lembremos que } u_{x1} = 0).$$

As deformações, tensões e esforços em cada elemento são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\bar{x}}^1 &= \frac{\bar{u}_{x2} - \bar{u}_{x1}}{L_1} = 0,00050, & \sigma_{\bar{x}}^1 &= E\varepsilon_{\bar{x}}^1 = 100 \text{ N/mm}^2, & N_{\bar{x}}^1 &= A_1\sigma_{\bar{x}}^1 = 500 \text{ N}, \\ \varepsilon_{\bar{x}}^2 &= \frac{\bar{u}_{x3} - \bar{u}_{x2}}{L_2} = 2,5 \times 10^{-4}, & \sigma_{\bar{x}}^2 &= E\varepsilon_{\bar{x}}^2 = 50 \text{ N/mm}^2, & N_{\bar{x}}^2 &= A_2\sigma_{\bar{x}}^2 = 500 \text{ N}, \\ \varepsilon_{\bar{x}}^3 &= \frac{\bar{u}_{x4} - \bar{u}_{x3}}{L_3} = 2,5 \times 10^{-4}, & \sigma_{\bar{x}}^3 &= E\varepsilon_{\bar{x}}^3 = 50 \text{ N/mm}^2, & N_{\bar{x}}^3 &= A_3\sigma_{\bar{x}}^3 = 500 \text{ N}. \end{aligned}$$

#### 5.2.2 Exemplo 5.2 - Barras em paralelo

Consideremos o problema apresentado na Figura 5.6. Trata-se de um sistema de barras construídas com tubos de aço montados um internamente ao outro. Neste caso os dois tubos possuem propriedades diferentes, trabalham em paralelo, e transmitem cargas em nós internos do sistema. A princípio a ordem de numeração de nós e elementos num modelo pode ser arbitrariamente definidas

pelo analista. No exemplo foi usada a numeração de nós e de elementos não sequencial de forma a tornar evidente que isto não influi nos resultados dos cálculos (embora altere as matrizes). Um outro aspecto incorporado é a aplicação de um deslocamento conhecido não nulo num dos nós, modelando, por exemplo, um erro de montagem ou uma interferência de montagem. Os dados necessários são de mesmos tipos do exemplo anterior: coordenadas, conectividade, propriedades de material, propriedades geométricas e condições de carregamento e vínculo, com valores dados a seguir.

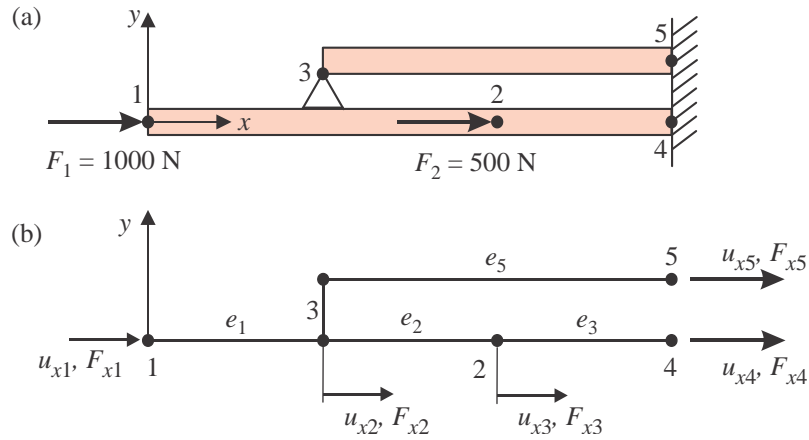


Figura 5.6: (a) dados do Exemplo 5.2. (b) modelo de EF.

### Fase de pré-processamento

Os elementos 1, 2 e 3 possuem diâmetro interno  $d = 10$  mm e espessura de parede de 2 mm, o que resulta em área de seção transversal de  $75,398 \text{ mm}^2$ . Já o tubo 4 possui diâmetro interno  $d = 12$  mm e espessura de parede de 3 mm, o que resulta em área de seção transversal de  $141,37 \text{ mm}^2$ .

Nó	Coord. $x$ [mm]
1	0.0
2	400.0
3	200.0
4	600.0
5	600.0

Tabela de conectividade		
Elemento	Nó I	Nó J
1	1	3
2	3	2
3	2	4
4	3	5

Propriedades de material e geométricas		
Elemento	$E$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$A$ [mm <sup>2</sup> ]
1	$2,0 \cdot 10^5$	75,398
2	$2,0 \cdot 10^5$	75,398
3	$2,0 \cdot 10^5$	75,398
4	$2,0 \cdot 10^5$	141,372

Condição de contorno	
Nó	
1	$F_{x1} = 1000 \text{ N}$
2	$F_{x2} = -500 \text{ N}$
4	$u_{x4} = 0,0$
5	$u_{x5} = -0,2 \text{ mm}$

Destes dados se depreende que o número de deslocamentos nodais ou **graus de liberdade** do modelo é 5, um deslocamento axial por nó. Destes, dois já são conhecidos, restando apenas 3 como incógnitas ( $u_{x1}$ ,  $u_{x2}$  e  $u_{x3}$ ). Assim, podemos concluir que o sistema de equações fará uso de uma matriz de rigidez de dimensões  $5 \times 5$ , mas que após incorporação de condições de contorno (número de graus de liberdade conhecidos) se reduzirá a  $3 \times 3$ . Assim, começamos calculando as matrizes de

e quinta linha da matriz  $\mathbf{K}$  da equação (5.20) pelo vetor de deslocamento completo:

$$\begin{aligned} K_{41}u_{x1} + K_{42}u_{x2} + K_{43}u_{x3} + K_{44}u_{x4} + K_{45}u_x^5 &= F_4 + R_4 = 0 + 4.906, 4, \\ K_{51}u_{x1} + K_{52}u_{x2} + K_{53}u_{x3} + K_{54}u_{x4} + K_{55}u_x^5 &= F_5 + R_5 = 0 - 5.406, 4. \end{aligned}$$

A multiplicação de  $\mathbf{U}$  pelas tres primeiras linhas de  $\mathbf{K}$  resultam exatamente nos valores prescritos de carregamentos nos nós 1, 2 e 3, isto é,  $F_{x1} = 1.000 \text{ N}$ ,  $F_{x2} = -500 \text{ N}$ ,  $F_{x3} = 0$ .

### Etapa de cálculo das tensões nos elementos

As deformações, as tensões normais axiais e os esforços em cada elemento são obtidos usando o mesmo procedimento usado no Exemplo 1.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\bar{x}}^1 &= \frac{u_{x3} - u_{x1}}{L_1} = -6,34 \cdot 10^{-5}, & \sigma_{\bar{x}}^1 &= E\varepsilon_{\bar{x}1} = -13,27 \text{ N/mm}^2, & N_{\bar{x}}^1 &= A_1\sigma_{\bar{x}1} = -1000 \text{ N}, \\ \varepsilon_{\bar{x}}^2 &= \frac{u_{x2} - u_{x3}}{L_2} = 2,92 \cdot 10^{-4}, & \sigma_{\bar{x}}^2 &= E\varepsilon_{\bar{x}2} = 58,45 \text{ N/mm}^2, & N_{\bar{x}}^2 &= A_2\sigma_{\bar{x}2} = 4406 \text{ N}, \\ \varepsilon_{\bar{x}}^3 &= \frac{u_{x4} - u_{x2}}{L_3} = 3,25 \cdot 10^{-4}, & \sigma_{\bar{x}}^3 &= E\varepsilon_{\bar{x}3} = 65,07 \text{ N/mm}^2, & N_{\bar{x}}^3 &= A_3\sigma_{\bar{x}3} = 4906 \text{ N}, \\ \varepsilon_{\bar{x}}^4 &= \frac{u_{x5} - u_{x3}}{L_4} = -1,91 \cdot 10^{-4}, & \sigma_{\bar{x}}^4 &= E\varepsilon_{\bar{x}4} = -38,24 \text{ N/mm}^2, & N_{\bar{x}}^4 &= A_3\sigma_{\bar{x}3} = -5406 \text{ N}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Assim, o primeiro e quarto elemento se encontram submetidos a compressão, enquanto o segundo e terceiro a tração.

## 5.3 Estruturas planas de barras

Na seção anterior foi formulado o problema de equilíbrio de uma estrutura de barras em que todas elas possuem a mesma orientação do eixo global  $x$  do sistema de coordenadas. Entretanto, numa treliça plana, tem-se barras orientadas em varias direções, não apenas na direção do eixo global  $x$ . Assim torna-se necessário desenvolver a formulação apresentada para simular a rigidez de um elemento orientado numa direção arbitrária no espaço em relação aos eixos  $xyz$ . Inicialmente veremos o caso 2D como na Figura 5.7, em que a barra está contida no plano  $xy$ . Agora deve-se considerar dois sistemas de coordenadas, o **sistema local de coordenadas**,  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , que possui o eixo  $\bar{x}$  colinear com o elemento, e o **sistema global de coordenadas**,  $xyz$ , utilizado para descrever a estrutura como um todo. Todo o equacionamento visto nas seções anteriores continua válido em relação ao sistema local, de forma que apenas se torna necessário rotacionar a formulação para o sistema global, como será descrito na presente seção.

Segundo o modelo descrito na seção anterior, a rigidez da barra é relacionada somente aos deslocamentos axiais. Em outras palavras, deslocamentos transversais à barra não provocam esforços. De fato, a barra, por natureza, é incapaz de suportar deslocamentos transversais (esforços cortantes).

Se o comportamento de uma barra for aproximado por um único elemento, a condição de equilíbrio na direção local  $\bar{x}$  é dada pelas equações (Figura 5.7):

$$\begin{bmatrix} AE/L & -AE/L \\ -AE/L & AE/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x1} \\ \bar{u}_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{x1} \\ \bar{P}_{x2} \end{Bmatrix}.$$

Abrindo as equações,

$$\begin{aligned} \frac{AE}{L}\bar{u}_{x1} - \frac{AE}{L}\bar{u}_{x2} &= \bar{P}_{x1}, \\ -\frac{AE}{L}\bar{u}_{x1} + \frac{AE}{L}\bar{u}_{x2} &= \bar{P}_{x2}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

O fato da barra não possuir rigidez quanto aos deslocamentos transversais significa que sua rigidez



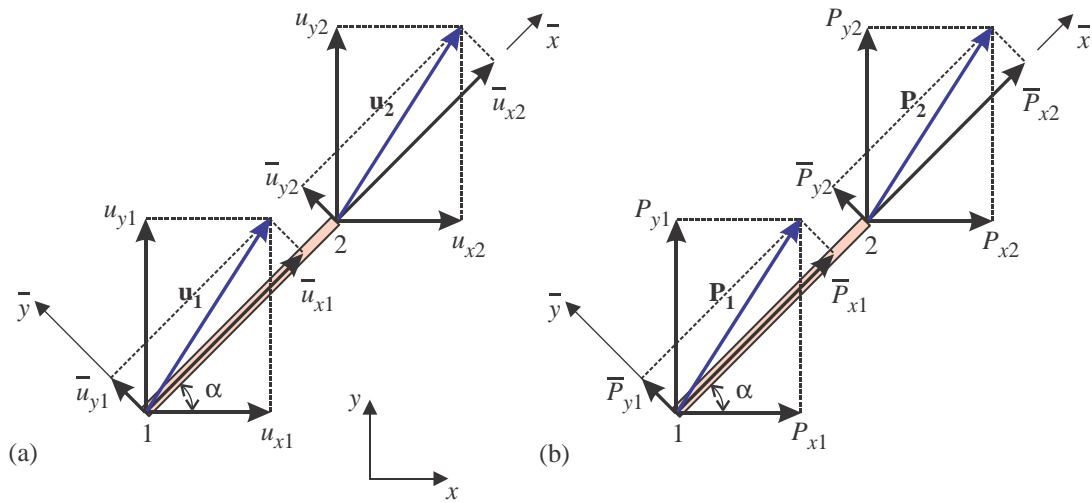


Figura 5.7: (a) deslocamentos nodais nos sistemas de coordenadas local e global; (b) esforços nos mesmos sistemas.

transversal é nula, o que pode ser descrito como

$$\begin{aligned} 0 \bar{u}_{y1} - 0 \bar{u}_{y2} &= \bar{P}_{y1} = 0, \\ -0 \bar{u}_{y1} + 0 \bar{u}_{y2} &= \bar{P}_{y2} = 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Juntando estas equações em forma matricial temos que

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x1} \\ \bar{u}_{y1} \\ \bar{u}_{x2} \\ \bar{u}_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{x1} \\ \bar{P}_{y1} \\ \bar{P}_{x2} \\ \bar{P}_{y2} \end{Bmatrix}, \text{ isto é, } \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{P}} \quad (5.26)$$

Observamos que nesta última expressão não foi feita outra coisa que agregar à matriz de rigidez  $(2 \times 2)$  original, os graus de liberdade associados aos deslocamentos transversais dos nós. Assim, estas equações descrevem o equilíbrio da barra no seu sistema local de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

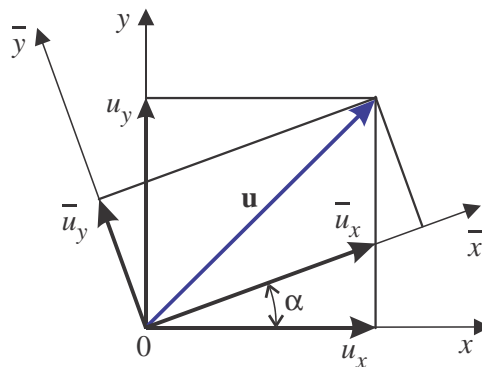


Figura 5.8: Componentes de deslocamento nodal no sistema de coordenadas  $xy$  e  $\bar{x}\bar{y}$ .

Seja assim o sistema local de coordenadas bidimensional associadas aos vetores unitários  $\bar{\mathbf{e}}_x$  e  $\bar{\mathbf{e}}_y$  e seja o sistema global com vetores  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_y$ . Um vetor  $\mathbf{u}$  qualquer pode ser descrito pelas suas componentes locais  $(\bar{u}_x, \bar{u}_y)$ , assim como pelas suas componentes globais  $(u_x, u_y)$ . A transformação de componentes de um sistema para outro segue a seguinte regra de rotação vista na eq.(1.54): (ver

Figura 5.8)

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

A matriz de mudança de sistema é chamada **matriz de rotação**  $\mathbf{T}$ . Com o objetivo de rotacionar as componentes dos dois nós da barra simultaneamente, definimos a matriz de rotação  $\mathbf{R}$  como:

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x1} \\ \bar{u}_{y1} \\ \bar{u}_{x2} \\ \bar{u}_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (5.27)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{R}\mathbf{P} \quad (5.28)$$

Note que as componentes de força são rotacionadas da mesma forma que as de deslocamentos, uma vez que, por definição, qualquer vetor se transforma da mesma maneira.

Substituindo (5.27) e (5.28) em (5.26) obtemos

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{P}. \quad (5.29)$$

Mas note-se que as matrizes rotação tem a propriedade<sup>2</sup> que  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ . Assim pre-multiplicamos (5.29) por  $\mathbf{R}^T$  obtendo

$$\underbrace{\mathbf{R}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{R}}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{U}^e = \mathbf{P}^e \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{P}^e} \quad (5.30)$$

Nessa expressão introduziu-se o sobre índice “e” para indicar que se referem a um elemento arbitrário  $e$ .  $\mathbf{K}^e$  é a **matriz de rigidez do elemento nas direções globais**,  $\mathbf{U}^e$  e  $\mathbf{P}^e$  são os vetores de deslocamentos nodais do elemento nas direções globais e o vetor de esforços nodais nas mesmas direções, como mostrado na Figura 5.7.

Devido à sua simplicidade da definição de  $\mathbf{K}^e$  em (5.30), pode-se obter explicitamente a matriz de rigidez de um elemento finito de barra orientado no plano  $xy$ :

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

### 5.3.1 Exemplo 5.3 - Treliça plana simples

Considera-se o problema de uma estrutura bidimensional de três barras (a estrutura plana mais simples que existe) com dois nós fixados à parede e uma força concentrada atuando no nó 2, como mostrado na Figura 5.9. Como o modelo de barras não considera momentos de flexão deve-se ter rótulas nos nós. O primeiro passo consiste em definir um sistema global de coordenadas, que pode ser aquele indicado na figura. Para simular este problema vamos seguir a seguinte sequência padrão de operações.

<sup>2</sup>Isto pode ser visto invertendo  $\mathbf{R}$  e comparando com  $\mathbf{R}^T$ . Mas a própria inversa de  $\mathbf{R}$  pode ser obtida de maneira simples. Observamos que  $\mathbf{R}$  é a matriz associada a uma rotação  $\alpha$  tomada como positiva quando medida anti-horário em torno do eixo  $z$  para definir o novo eixo  $\tilde{x}$  a partir de  $x$ . A matriz  $\mathbf{R}^{-1}$ , por outro lado, é a matriz associada à rotação do eixo  $\tilde{x}$  no sentido de  $x$ , isto é, fazendo um ângulo  $\alpha$  horário em torno de  $z$ , isto é, com sinal negativo. Assim,  $\mathbf{R}^{-1}$  pode ser diretamente obtido de  $\mathbf{R}$ , apenas trocando o sinal de  $\alpha$ . Como cosseno não troca de sinal, mas o seno sim, temos o resultado final  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ .

## Fase de pré-processamento

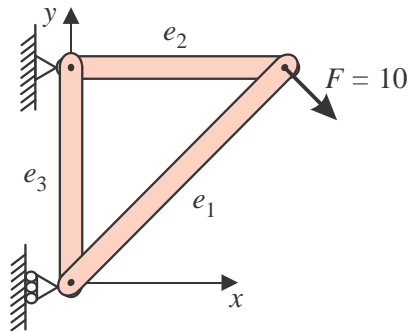


Figura 5.9: Treliça plana do Exemplo 5.3.

## 1. Dados de Coordenadas nodais:

Tabela de coordenadas

Nó	$x$ [m]	$y$ [m]
1	0,0	0,0
2	1,5	1,5
3	0,0	1,5

(5.32)

## 2. Dados de conectividade dos elementos:

Tabela de conectividade

Elemento	Nó local 1	Nó local 2
1	1	2
2	3	2
3	1	3

(5.33)

## 3. Dados de propriedades geométricas. O comprimento do elemento é calculado pelo programa a partir das conectividades dos elementos e das coordenadas dos nós. Porém, a área deve entrar como parâmetro no modelo diretamente dado pelo analista:

Tabela de prop. geométricas

Elemento	Área
1,2,3	$3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

(5.34)

## 4. Dados de propriedades de material. A única propriedade de material usada no modelo de barras é o módulo de elasticidade. Admitimos neste exemplo que todas as barras são construídas do mesmo material:

Tabela de propriedades do material

Elemento	Módulo de elasticidade
1,2,3	$2,07 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

(5.35)

## 5. Construção da tabela de graus de liberdade. Esse não é um conjunto de dados, mas uma tabela auxiliar que ajuda no entendimento dos processos de sobreposição das matrizes. Essa tabela identifica os graus de liberdade ou equações totais do sistema. Cada nó contribui com

$\alpha = 90^\circ$ ,  $\text{sen } \alpha = 1$ ,  $\text{cos } \alpha = 0$ ,  $A_3 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $E_1 = 2,07 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $L_3 = 1,5 \text{ m}$ .

$$\mathbf{K}_3 = 4,14 \cdot 10^7 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

**Etapa 2 - Sobreposição da matriz global.** A dimensão da matriz de rigidez global depende do número de incógnitas do problema. No presente exemplo tem-se três nós com duas incógnitas associadas a cada um: os deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$ . Conseqüentemente tem-se, em princípio, 6 graus de liberdade no modelo. A matriz de rigidez tem tamanho  $6 \times 6$ , originalmente com zeros nas suas componentes:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A sobreposição de cada matriz elementar na matriz global se faz usando a informação da tabela de indexação. Para o elemento 1 a tabela de indexação fornece as linhas (equações) e colunas em que será inserida a matriz elementar:

Elemento	Nó1		Nó2	
	$u_x$	$u_y$	$u_x$	$u_y$
1	1	2	3	4

Inserindo na matriz do elemento 1 em  $\mathbf{K}$ , segundo esta ordem, se tem

$$\mathbf{K} = 1 \cdot 10^7 \begin{bmatrix} 1,464 & 1,464 & -1,464 & -1,464 & 0 & 0 \\ 1,464 & 1,464 & -1,464 & -1,464 & 0 & 0 \\ -1,464 & -1,464 & 1,464 & 1,464 & 0 & 0 \\ -1,464 & -1,464 & 1,464 & 1,464 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O processo se repete para as demais matrizes. Após a inserção da matriz  $\mathbf{K}_2$  temos

$$\mathbf{K} = 1 \cdot 10^7 \begin{bmatrix} 1,464 & 1,464 & -1,464 & -1,464 & 0 & 0 \\ 1,464 & 1,464 & -1,464 & -1,464 & 0 & 0 \\ -1,464 & -1,464 & 5,604 & 1,464 & -4,14 & 0 \\ -1,464 & -1,464 & 1,464 & 1,464 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,14 & 0 & 4,14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e após a inserção da matriz  $\mathbf{K}_3$ , a matriz de rigidez global toma sua forma final:

$$\mathbf{K} = 1 \cdot 10^7 \begin{bmatrix} 1,464 & 1,464 & -1,464 & -1,464 & 0 & 0 \\ 1,464 & 5,604 & -1,464 & -1,464 & 0 & -4,14 \\ -1,464 & -1,464 & 5,604 & 1,464 & -4,14 & 0 \\ -1,464 & -1,464 & 1,464 & 1,464 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,14 & 0 & 4,14 & 0 \\ 0 & -4,14 & 0 & 0 & 0 & 4,14 \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

**Etapa 3 - Sobreposição do vetor de carregamento.** Neste exemplo tem-se apenas um

elasticidade, e o esforço normal é calculado também de forma simples. Por exemplo, para o elemento 1,

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}}^1 &= E\varepsilon_{\bar{x}}^1 = 2,07 \cdot 10^{11} \times (-1,6098 \cdot 10^{-5}) = -3,332 \times 10^6 \text{ N/m}^2, \\ N_{\bar{x}}^1 &= A_1 \sigma_{\bar{x}}^1 = 3 \cdot 10^{-4} \times (-3,332 \times 10^6) = -1000 \text{ N}.\end{aligned}$$

## 5.4 Barras em 3D - treliças espaciais

Para simular treliças espaciais, deve-se rotacionar a equação de equilíbrio do elemento no espaço tridimensional. O conceito é idêntico àquele usado no caso de treliças planas. O equilíbrio da barra em relação ao sistema local  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  se escreve, em forma matricial, como:

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x1} \\ \bar{u}_{y1} \\ \bar{u}_{z1} \\ \bar{u}_{x2} \\ \bar{u}_{y2} \\ \bar{u}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{x1} \\ \bar{P}_{y1} \\ \bar{P}_{z1} \\ \bar{P}_{x2} \\ \bar{P}_{y2} \\ \bar{P}_{z2} \end{Bmatrix}, \text{ isto é,}$$

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{P}}. \quad (5.39)$$

As equações relevantes são a primeira e quarta, dado que as outras são idênticamente nulas (não existe rigidez nas direções transversais à barra). Estas equações, escritas no sistema local, podem ser rotacionadas para o sistema global mediante o uso de uma matriz de rotação, agora de dimensões  $6 \times 6$ . Para se obter esta matriz de rotação (que fornece as componentes de coordenadas locais a partir das globais) parte-se da eq. (1.52):

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

Essa matriz rotaciona as componentes de um vetor qualquer. Assim, é usada para rotacionar as componentes dos vetores força e deslocamentos nodais nos dois nós. Por comodidade, isso é feito de forma simultânea, montando a matriz de rotação  $\mathbf{R}$  numa forma tal que

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{x1} \\ \bar{u}_{y1} \\ \bar{u}_z \\ \bar{u}_{x2} \\ \bar{u}_{y2} \\ \bar{u}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & & & \\ & R_{21} & R_{22} & R_{23} & & \\ & R_{31} & R_{32} & R_{33} & & \\ & & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & & & & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ & & & & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \end{Bmatrix}, \quad (5.40)$$

e, de forma análoga para os esforços nodais. Em forma simbólica essas rotações são

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{R}\mathbf{P}. \quad (5.41)$$

A matriz  $\mathbf{R}$  é ortogonal ( $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ). Então, substituindo (5.41) em (5.39) e em seguida pré-multiplicando o resultado por  $\mathbf{R}^T$  obtém-se a equação de equilíbrio do elemento no sistema global como

$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{P}^e, \quad \text{onde} \quad \mathbf{K}^e = \mathbf{R}^{eT} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{R}^e. \quad (5.42)$$

$\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do elemento de barra orientado de forma arbitrária em relação ao sistema global. Incluiu-se aqui o sobre índice “e” para indicar que essa relação se refere ao elemento arbitrário

e.

Um ponto importante a ser notado é o seguinte. É fácil verificar que a matriz global  $\mathbf{K}^e$ , resultado da operação (5.42), é uma matriz que depende apenas dos cossenos diretores do vetor unitário local  $\bar{\mathbf{e}}_1$ , (ao longo do elemento, com origem no nó local 1) que são  $R_{11}$ ,  $R_{12}$  e  $R_{13}$ . As demais componentes de  $\mathbf{R}$  não são usadas, devido aos zeros contidos em  $\bar{\mathbf{K}}$ .

Os vetores que definem as coordenadas globais dos dois nós do elemento são designados por  $\mathbf{x}_2 = (x_2; y_2; z_2)$  e  $\mathbf{x}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ . Então, o comprimento  $L_e$  do elemento e os cossenos diretores de  $\bar{\mathbf{e}}_1$  são calculados por:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{11} = l &= \frac{x_2 - x_1}{L}, & R_{12} = m &= \frac{y_2 - y_1}{L}, & R_{13} = n &= \frac{z_2 - z_1}{L}, \\ L_e &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}} \quad (5.43)$$

Assim, a matriz de rigidez de uma barra com orientação arbitrária no espaço é dada de forma explícita como:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}^{eT} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{R}^e, \text{ isto é,}$$

$$\boxed{\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix}} \quad (5.44)$$

Os procedimentos para sobreposição do sistema, incorporação das condições de contorno e resolução do sistema algébrico são idênticas aos do caso plano. Veremos isto no exemplo abaixo.

#### 5.4.1 Exemplo 5.4 - treliça espacial

Consideramos a estrutura 3D ilustrada na Figura 5.10. Os nós 1 a 4 estão contidos no plano  $xy$  e definem um retângulo. Os elementos 1e 4 são perpendiculares ao plano  $xy$ . As barras tem área de seção transversal  $A = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , módulo de elasticidade  $E = 2,07 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ . Duas forças atuam nos nós 5 e 6 cujos módulos são  $F = 1.750 \text{ N}$  nas direções indicadas na figura e cujas componentes tem seus valores na eq. (5.45).

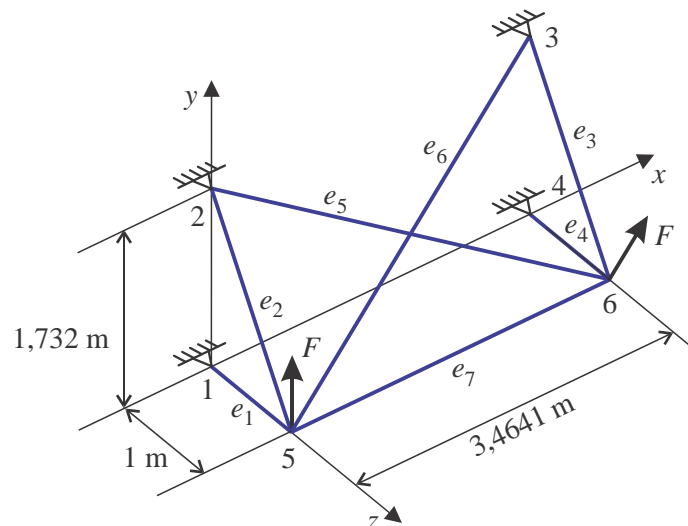


Figura 5.10: Treliça espacial do Exemplo 5.4, com sete elementos.

*Solução:*

Os dados do modelo são os seguintes:

Nó	$x$	$y$	$z$
1	0	0	0
2	0	1,732	0
3	3,4647	1,732	0
4	3,4647	0	0
5	0	0	1,0
6	3,4647	0	1,0

Elem.	No 1	No 2
1	1	6
2	2	6
3	3	5
4	4	5
5	2	5
6	3	6
7	5	6

Existem três graus de liberdade por nó,  $(u_x, u_y, u_z)$ . Os nós do contorno devem ter condições de contorno de deslocamentos dadas:

Nó	$u_x$	$u_y$	$u_z$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0

A resolução do problema se dá de forma semelhante ao anterior. As diferenças básicas são as seguintes:

- São necessários três cossenos diretores,  $(l, m, n)$ , para definir a orientação de cada barras. Como não levamos em conta efeitos de flexão, não é preciso identificar a orientação da seção da barra em relação a seu eixo, nem tão pouco a forma da seção. As coordenadas nodais e os dados de conectividade dos elementos permitem calcular o comprimento e os cossenos diretores de cada elemento por (5.43). Os comprimentos dos elementos 1 e 4 são 1 m, das barras 2 e 3 são 2 m, das barras 5 e 6 é de 4 m e da barra 7 de 3,4641 m. Os cossenos diretores são as seguintes.

Elem.	$l$	$m$	$n$
1	0	1	0
2	0	0,5	-0,866
3	0	0,5	-0,866
4	0	1	0
5	-0,866	0,25	-0,433
6	0,866	0,25	-0,433
7	1	0,25	0

- Existem três graus de liberdade por nó,  $(u_x, u_y, u_z)$ , que devem, portanto, serem relacionados na **tabela de Graus de Liberdade** e obviamente na matriz de rigidez dos elementos e do

## 5.5 Observações Finais

1. O tamanho da matriz de rigidez depende do número de incógnitas a ser determinadas: *Número de incógnitas*  $N = \text{Número de nós } N_{\text{nos}} \times \text{Número de graus de liberdade por nó } n_{\text{gl}}n$  (2 g.l. no caso de treliças planas e 3 g.l. no caso de treliças espaciais)
2. A montagem da matriz de rigidez implica calcular cada matriz elementar e realizar sua posterior sobreposição na matriz global mediante os dados de conectividade.
3. As tensões de um elemento são calculadas a partir do deslocamento axial relativo dos nós do elemento. Para isto é preciso rotacionar os deslocamentos calculados no sistema global para o sistema local do elemento.
4. Os valores de deslocamentos devem ser apreciavelmente menores que as dimensões do sistema. Caso contrário estariam sendo violadas as hipóteses de linearidade admitidas: deslocamentos e deformações suficientemente pequenas. (A expressão “pequenas deformações” não possui um significado preciso em engenharia. Em geral, são considerados pequenos valores de deformações  $\varepsilon \lesssim 0,005$  e rotações menores que aproximadamente  $5^\circ$  para os elementos). Se a solução viola essas hipóteses, os resultados são inválidos, ou são caracterizados por erros acentuados.
5. O modelo considera unicamente esforços axiais. Não levam em conta flexão. Isto significa que serve para simular estruturas treliçadas, com articulações nos nós, ou com uma *razão de esbeltez* ( $L/A$ ) grande para cada barra.
6. O modelo considera que cada elemento possui seção uniforme, sem entalhes, sem nenhuma irregularidade geométrica. Isso significa que as tensões obtidas não levam em conta efeitos de **concentração de tensões**, como aquelas que surgem em furos, ranhuras, mudanças de seção, regiões nas extremidades com pinos, soldagem, etc. As tensões assim obtidas são **tensões nominais**. As tensões nas regiões perturbadas podem ser obtidas corrigindo a tensão nominal por fatores de concentração de tensão, se os entalhes forem de geometria padrão, ou, caso necessário, realizando uma modelagem da barra utilizando elementos finitos de casca ou sólidos tridimensionais.
7. Quando consideramos barras sujeitas apenas a cargas nodais, sem carregamento distribuído, a solução obtida por elementos finitos coincide **exatamente** com a solução exata do modelo que seria obtida das equações diferenciais de barra. Note que esta é uma situação particular. Em qualquer outro problema físico, o método de elementos finitos se propõe apenas a obter uma **aproximação** da resposta exata, e é isso que em geral se obtém.
8. O método descrito nesse capítulo é a forma mais simples do método de elementos finitos (MEF), e só é viável nesse formato devido à grande simplicidade do problema de barras, (também pode ser utilizado na solução do problema de vigas, como será descrito no próximo capítulo). Nos demais problemas de engenharia, mais complexos, um procedimento de aplicabilidade geral é utilizado para a formulação do MEF. Aplicações desse formalismo é descrito e aplicado nos demais capítulos do livro. Entretanto, as etapas gerais de operações computacionais (entrada de dados, sobreposição, imposição de condições de contorno, solução do sistema, pós-processamento) são, em essência, as mesmas etapas do método geral de elementos finitos.

## 5.6 Exercícios

- 5.1 Qual é o significado físico do sistema de equações?
- 5.2 Que significa (fisicamente) cada equação do sistema?
- 5.3 Porque o nome *matriz de rigidez*?



