

Capítulo 13

Teoria de cascas

A teoria de placas de Kirchhoff (1850) é estendida para cascas por Love (1888). A teoria de cascas de Love,¹ como às vezes é conhecida, popularizou-se apesar de inconsistências decorrentes da inclusão ou exclusão indevidas de termos. Várias versões dessa teoria surgiram e diferem entre si com relação a termos de pequena ordem de grandeza oriundos da tentativa de simplificar expressões mais complicadas envolvendo a curvatura. Leissa (1973) faz uma análise comparativa das expressões matemáticas contidas em várias dessas versões e Koiter (1960) mostra, do ponto de vista da precisão, que elas pouco diferem uma das outras. A melhor de todas as versões da teoria de Love, no que diz respeito à simplicidade e consistência, é a de Sanders (1959).

Ao mencionar a teoria clássica de vigas ou a de placas, referimos indubitavelmente à teoria de Euler-Bernoulli ou à de Kirchhoff, respectivamente. No caso de cascas, ao mencionar a teoria clássica, devemos especificar a versão da teoria de Love a que referimos: por exemplo, teoria clássica de cascas segundo Sanders.²

As equações apresentadas neste capítulo podem ser identificadas diretamente com quatro teorias de cascas. Duas delas são as versões de Reissner (1941) e de Sanders (1959) da teoria de Love e as duas outras são formas modificadas dessas versões que incorporam a deformação de cisalhamento transversal segundo a hipótese de Reissner-Mindlin. A versão de Sanders será descrita neste capítulo como sendo a versão de Reissner corrigida. Perceba na leitura como a presença da curvatura faz uma teoria de cascas ser necessariamente mais complicada do que uma teoria de placas.

13.1 Relações deformação-deslocamento

Seja o elemento de casca da Figura 13.1, de espessura h e referido ao sistema de coordenadas curvilíneas $\alpha_1\alpha_2\zeta$. As curvas coordenadas α_1 e α_2 são ortogonais sobre a superfície média e a coordenada ζ mede, na direção da normal \mathbf{n} , a distância de um ponto da casca a essa superfície.

¹August Edward Hough Love, matemático inglês nascido em Weston-super-Mare em 1863, falecido em Oxford em 1940.

²John Lyell Sanders Jr., engenheiro aeronáutico norte-americano nascido em Highland em 1924, falecido em Sudbury em 1998.

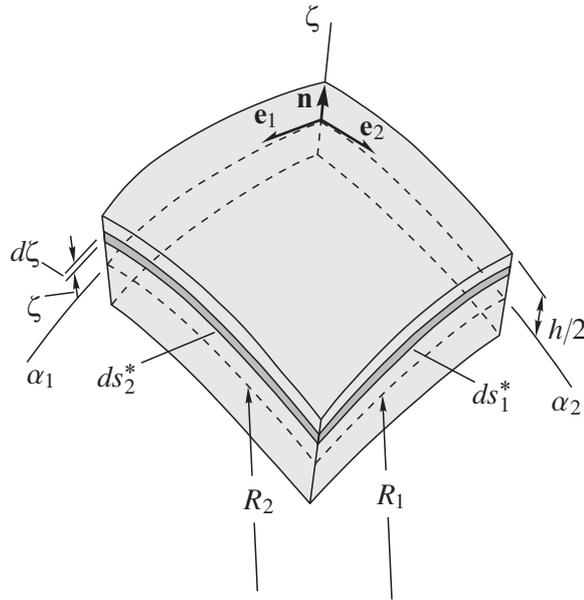


Figura 13.1 Elemento de casca.

Se o vetor posição de um ponto $P(\alpha_1, \alpha_2)$ sobre a superfície média é dado por \mathbf{r} (veja Figura 13.2), o vetor posição de um ponto $P^*(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)$ da casca, distante ζ da superfície média (e de P), será

$$\mathbf{r}^*(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta \mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (13.1)$$

Para ζ fixo, o vetor \mathbf{r}^* torna-se função só de α_1 e α_2 , descrevendo assim uma *superfície paralela* à superfície média. A própria superfície média é um caso particular de uma superfície descrita por \mathbf{r}^* com $\zeta = 0$. O que procuramos com uma teoria de cascas é bidimensionalizar o problema em função das coordenadas α_1 e α_2 .

No ponto P , os vetores unitários tangentes à superfície média na direção das curvas coordenadas e normal à superfície são definidos em (12.20):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{|\partial \mathbf{r} / \partial \alpha_1|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{|\partial \mathbf{r} / \partial \alpha_2|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2. \quad (13.2)$$

Em vista de (13.2) e (12.51),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} + \zeta \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha_1} = A_1 \left[\left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \mathbf{e}_1 + \frac{\zeta}{R_{12}} \mathbf{e}_2 \right] \\ \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} + \zeta \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha_2} = A_2 \left[\frac{\zeta}{R_{12}} \mathbf{e}_1 + \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \mathbf{e}_2 \right] \quad \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \zeta} = \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

No ponto P^* , os vetores unitários tangentes à superfície paralela na direção das curvas coordenadas e normal à superfície são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^* &= \frac{1}{|\partial \mathbf{r}^* / \partial \alpha_1|} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \zeta/R_1)^2 + \zeta^2/R_{12}^2}} \left[\left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \mathbf{e}_1 + \frac{\zeta}{R_{12}} \mathbf{e}_2 \right] \\ \mathbf{e}_2^* &= \frac{1}{|\partial \mathbf{r}^* / \partial \alpha_2|} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \zeta/R_2)^2 + \zeta^2/R_{12}^2}} \left[\frac{\zeta}{R_{12}} \mathbf{e}_1 + \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \mathbf{e}_2 \right] \\ \mathbf{n}^* &= \frac{1}{|\partial \mathbf{r}^* / \partial \zeta|} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \zeta} = \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

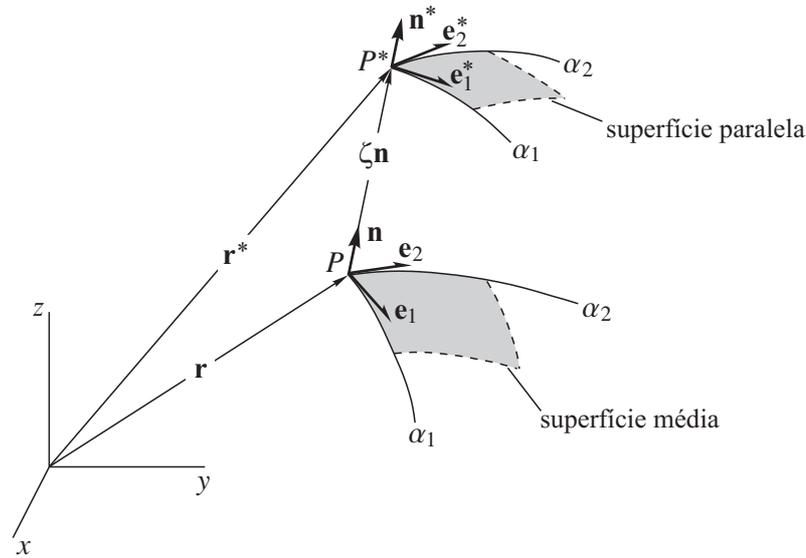


Figura 13.2 Vetores unitários num ponto P da superfície média e num ponto P^* fora dela.

Perceba que \mathbf{n}^* é perpendicular a \mathbf{e}_1^* e \mathbf{e}_2^* , mas

$$\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2^* = \frac{2 + \zeta (1/R_1 + 1/R_2)}{\sqrt{\left[(1 + \zeta/R_1)^2 + \zeta^2/R_{12}^2 \right] \left[(1 + \zeta/R_2)^2 + \zeta^2/R_{12}^2 \right]}} \frac{\zeta}{R_{12}}. \quad (13.5)$$

Ou seja, \mathbf{e}_1^* e \mathbf{e}_2^* só serão perpendiculares entre si quando $1/R_{12} = 0$ (as curvas coordenadas α_1 e α_2 sobre a superfície média coincidem com as linhas de curvatura).

Se $1/R_{12} = 0$, então $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}$. Nessas condições, o sistema $\alpha_1\alpha_2\zeta$ definido como ortogonal sobre a superfície média será também ortogonal em qualquer ponto do domínio. Ou seja, as três superfícies definidas por $\alpha_1 = \alpha_1^0$, $\alpha_2 = \alpha_2^0$ e $\zeta = \zeta^0$ se cruzam ortogonalmente para todos os valores atribuídos a α_1^0 , α_2^0 e ζ^0 . Os vetores unitários serão independentes de ζ , as curvaturas normais $1/R_1$ e $1/R_2$ serão as curvaturas principais e os comprimentos ds_1^* , ds_2^* indicados na Figura 13.1 sobre uma superfície paralela valem

$$ds_1^* = \left| \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha_1} \right| d\alpha_1 = A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) d\alpha_1 \quad ds_2^* = \left| \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha_2} \right| d\alpha_2 = A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) d\alpha_2. \quad (13.6)$$

Qualquer outro sistema ortogonal definido sobre a superfície média não será ortogonal fora dela. Admitiremos neste capítulo que as curvas coordenadas α_1 e α_2 do sistema ortogonal $\alpha_1\alpha_2\zeta$ coincidem com as linhas de curvatura. O uso de um sistema mais geral apontaria para o uso também do cálculo tensorial (Flügge, 1972).

Denominemos u_1 , u_2 e u_3 as componentes do deslocamento de um ponto qualquer da casca nas direções de α_1 , α_2 e ζ , respectivamente:

$$\mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = u_1(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)\mathbf{e}_1 + u_2(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)\mathbf{e}_2 + u_3(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)\mathbf{n}. \quad (13.7)$$

As relações deformação-deslocamento num sistema qualquer de coordenadas curvilineas ortogonais $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ são dadas em (B.39). A linearização dessas relações resulta em

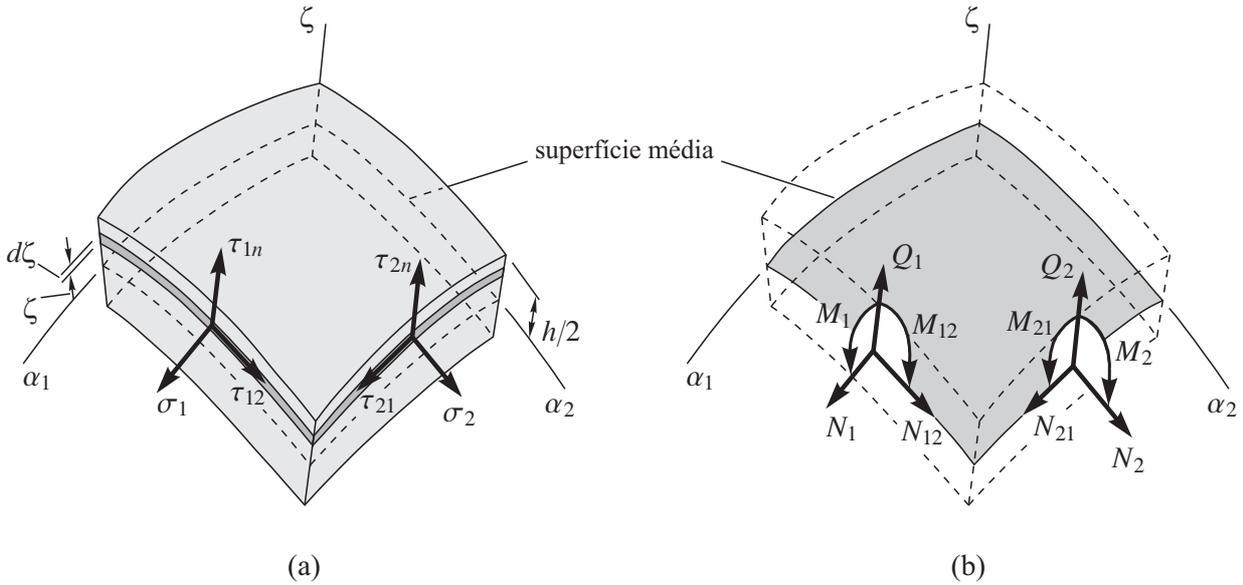


Figura 13.3 Elemento de casca: (a) tensões; (b) esforços (tensões generalizadas).

A Figura 13.3a mostra as tensões que atuam num elemento de casca e a Figura 13.3b mostra os esforços (tensões generalizadas) equivalentes que atuam na superfície média. As forças de membrana N_1, N_2 (normais) e N_{12}, N_{21} (de cisalhamento), os momentos M_1, M_2 (fletores) e M_{12}, M_{21} (torções), e as forças cortantes Q_1, Q_2 são definidos por unidade de comprimento da superfície média. Em geral $N_{12} \neq N_{21}$ e $M_{12} \neq M_{21}$, apesar de $\tau_{12} = \tau_{21}$. A igualdade $N_{12} = N_{21}$ e $M_{12} = M_{21}$ só ocorre em placas ($1/R_1 = 1/R_2 = 0$), cascas esféricas ($1/R_1 = 1/R_2$) e cascas de revolução solicitadas axissimetricamente ($N_{12} = N_{21} = M_{12} = M_{21} = 0$).

Se a expressão simplificada (13.15) for utilizada em (13.21), as tensões generalizadas aparecerão em (13.24) redefinidas por

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} d\zeta \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \zeta d\zeta$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{2n} \\ \tau_{1n} \end{Bmatrix} d\zeta, \quad (13.27)$$

onde $ds_1^* ds_2^* d\zeta \approx A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta$ para cascas suficientemente finas, e as deformações por

$$\epsilon_m = \begin{Bmatrix} \epsilon_1^m \\ \epsilon_2^m \\ \gamma_{12}^m \end{Bmatrix} \quad \kappa = \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \bar{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} \quad \gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{2n}^m \\ \gamma_{1n}^m \end{Bmatrix}. \quad (13.28)$$

O número de tensões generalizadas independentes reduz para oito, visto que $N_{12} = N_{21}$ e $M_{12} = M_{21}$, assim como o número de deformações generalizadas. As expressões (13.27) podem ser obtidas diretamente de (13.26) impondo $\zeta/R_i \ll 1$.

Vamos supor que o carregamento externo que atua sobre a casca seja constituído pela força de volume $[b_1 \ b_2 \ b_n]$ e pelas forças de superfície distribuídas na face inferior

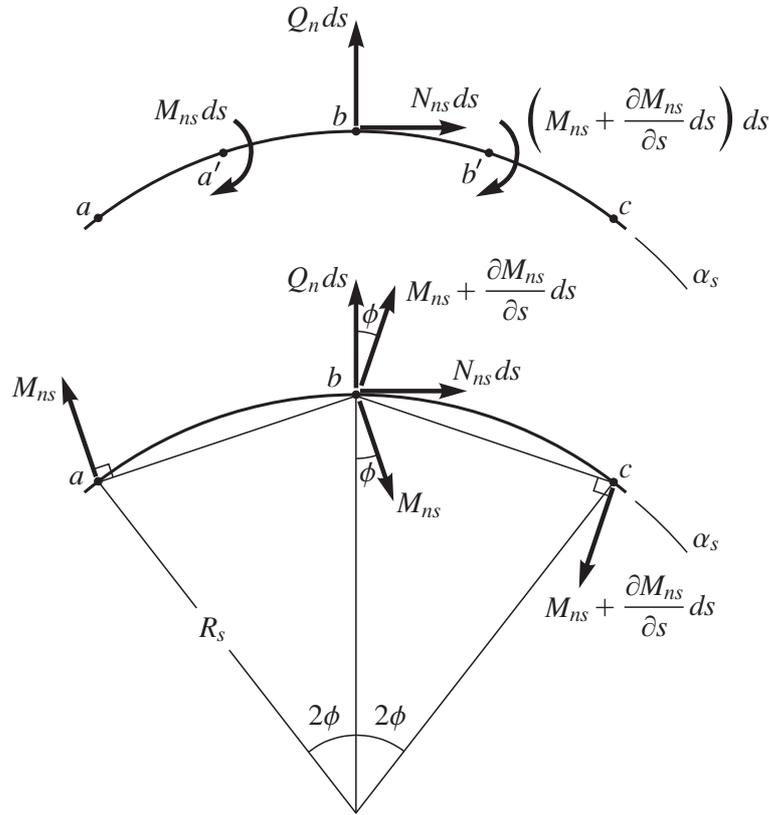


Figura 13.4 Borda da casca definida por $\alpha_n = \text{constante}$.

além da condição de canto $M_{ns} = \bar{M}_{ns}$ nas extremidades de Γ_t . Considerando todo o contorno Γ , percebemos que é necessário especificar um, e somente um, elemento de cada par (u_{0n}, N_n) , (u_{0s}, T_{ns}) , (w, V_n) e (β_n, M_n) em cada ponto do contorno, além das condições de canto em w (em Γ_u) ou em M_{ns} (em Γ_t).

Alguns textos escolhem às vezes $w_{,n}$ na integral de contorno em (13.56) como variável primária no lugar da rotação β_n (Sanders, 1959; Kraus, 1967). Nesse caso, $\delta\beta_n$ dado em (13.50) deve ser substituída em (13.56) tornando a integral de contorno

$$\int_{\Gamma_t} \left[(T_n - \bar{T}_n) \delta u_{0n} + (T_{ns} - \bar{T}_{ns}) \delta u_{0s} + (V_n - \bar{V}_n) \delta w - \frac{1}{A_n} (M_n - \bar{M}_n) \delta w_{,n} \right] ds \quad (13.59)$$

onde

$$T_n = N_n + \frac{M_n}{R_n}. \quad (13.60)$$

Os pares (u_{0n}, N_n) e (β_n, M_n) , identificados anteriormente usando β_n como variável primária, devem ser substituídos por (u_{0n}, T_n) e $(w_{,n}, M_n)$, respectivamente, na prescrição das condições de contorno. Como apontado por Koiter (1966), o uso de β_n ou $w_{,n}$ como variável primária conduz a condições de contorno equivalentes.

Para uma interpretação física de T_{ns} e V_n , considere a Figura 13.4 onde é indicada uma borda da casca definida por $\alpha_n = \text{constante}$. Aproximemos o contorno da superfície média por uma linha poligonal de lados infinitesimais. O comprimento de cada segmento pode ser considerado igual ao comprimento ds do arco correspondente: $ab = bc = ds$.

As equações constitutivas numa teoria de cascas devem relacionar as tensões e deformações generalizadas identificadas. Considerando que $\zeta/R_i \ll 1$, vamos substituir (13.15) e (13.64) nas definições (13.27) para obter

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}_b \begin{Bmatrix} \epsilon_1^m + \zeta \kappa_1 \\ \epsilon_2^m + \zeta \kappa_2 \\ \gamma_{12}^m + \zeta \bar{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} d\zeta = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \epsilon_1^m \\ \epsilon_2^m \\ \gamma_{12}^m \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}_b \begin{Bmatrix} \epsilon_1^m + \zeta \kappa_1 \\ \epsilon_2^m + \zeta \kappa_2 \\ \gamma_{12}^m + \zeta \bar{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} \zeta d\zeta = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \bar{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix} &\approx \int_{-h/2}^{h/2} K \mathbf{Q}_s \begin{Bmatrix} \gamma_{2n}^m \\ \gamma_{1n}^m \end{Bmatrix} d\zeta = K \mathbf{A}_s \begin{Bmatrix} \gamma_{2n}^m \\ \gamma_{1n}^m \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (13.66)$$

Note que $N_{12} = N_{21}$, $M_{12} = M_{21}$, K é o fator de correção do cisalhamento e as matrizes constitutivas \mathbf{A} , \mathbf{D} e \mathbf{A}_s são as mesmas definidas em (11.62). Numa forma compacta,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q} = K \mathbf{A}_s \gamma. \quad (13.67)$$

Kirchhoff Com a hipótese de Kirchhoff, \mathbf{Q} e γ deixam de ser tensões e deformações generalizadas e, assim, $\mathbf{Q} = K \mathbf{A}_s \gamma$ deve ser eliminado de (13.67):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \kappa \end{Bmatrix}. \quad (13.68)$$

13.4 Correções de Sanders

A inconsistência que a simplificação $\zeta/R_i \ll 1$ introduz nas relações deformação-deslocamento (13.15) ou (13.20), no que diz respeito a movimento de corpo rígido, ou na definição dos esforços (13.27) que torna a sexta equação de equilíbrio (13.41) geralmente não satisfeita, pode ser eliminada. Apesar de ser uma inconsistência inócua para a maioria dos problemas práticos, vamos eliminá-la seguindo o procedimento proposto por Sanders (1959).

Reissner-Mindlin Mostramos no Apêndice C que num movimento de corpo rígido

$$\begin{aligned} \epsilon_1^m = \epsilon_2^m = \kappa_1 = \kappa_2 = \gamma_{1n}^m = \gamma_{2n}^m = 0 \\ \epsilon_{12}^m = \beta_n \quad \epsilon_{21}^m = -\beta_n \quad \kappa_{12} = \frac{\beta_n}{R_1} \quad \kappa_{21} = -\frac{\beta_n}{R_2}, \end{aligned} \quad (13.69)$$

onde β_n é a componente da rotação (pequena) da superfície média em torno de \mathbf{n} . O trabalho realizado pelas forças internas deve ser nulo num movimento de corpo rígido. De fato, usando (13.69) escrevemos

13.5 Considerações finais

Podemos identificar, por meio de pequenos ajustes, várias das teorias de cascas existentes na literatura a partir das equações apresentadas neste capítulo. Quatro dessas teorias são listadas a seguir.

Versão de Reissner com cisalhamento transversal A casca é suposta deformar-se sob a hipótese de Reissner-Mindlin:

- campo de deslocamento \Rightarrow (13.12)
- deformação num ponto genérico da casca \Rightarrow (13.15)
- 8 relações deformação-deslocamento \Rightarrow $\begin{cases} \epsilon_1^m, \epsilon_2^m, \kappa_1, \kappa_2, \gamma_{1n}^m, \gamma_{2n}^m \text{ definidas em (13.14)} \\ \gamma_{12}^m, \bar{\kappa}_{12} \text{ definidas em (13.16)} \end{cases}$
- 5 equações de equilíbrio \Rightarrow (13.40) (a equação (13.41) é esquecida)
- 8 equações constitutivas \Rightarrow (13.67)
- total de equações a resolver: 21
- incógnitas: $u, v, w, \beta_1, \beta_2, \epsilon_1^m, \epsilon_2^m, \gamma_{12}^m, \kappa_1, \kappa_2, \bar{\kappa}_{12}, \gamma_{1n}^m, \gamma_{2n}^m, N_1, N_2, N_{12} = N_{21}, M_1, M_2, M_{12} = M_{21}, Q_1, Q_2$
- condições de contorno: \Rightarrow página 400.

Versão de Reissner da teoria de Love A casca é suposta deformar-se sob a hipótese de Kirchhoff (Reissner, 1941):

- campo de deslocamento \Rightarrow (13.12) (β_1 e β_2 não são independentes; relacionam-se a u, v e w por meio de (13.18))
- deformação num ponto genérico da casca \Rightarrow (13.20)
- 6 relações deformação-deslocamento \Rightarrow $\begin{cases} \epsilon_1^m, \epsilon_2^m, \kappa_1, \kappa_2 \text{ definidas em (13.14)} \\ \gamma_{12}^m, \bar{\kappa}_{12} \text{ definidas em (13.16)} \end{cases}$
- 3 equações de equilíbrio \Rightarrow (13.49) (equivalentes às cinco equações (13.40))
- 6 equações constitutivas \Rightarrow (13.68)
- total de equações a resolver: 15
- incógnitas: $u, v, w, \epsilon_1^m, \epsilon_2^m, \gamma_{12}^m, \kappa_1, \kappa_2, \bar{\kappa}_{12}, N_1, N_2, N_{12} = N_{21}, M_1, M_2, M_{12} = M_{21}$
(Q_1 e Q_2 não são independentes; são determinados das equações de equilíbrio $E_{\beta_1} = 0$ e $E_{\beta_2} = 0$)

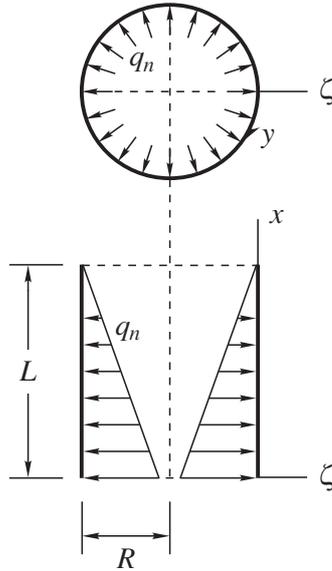


Figura 13.6 Exemplo 13.2: reservatório cilíndrico cheio de um líquido de peso específico γ .

onde

$$A_{11} = A_{22} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} = A \quad A_{12} = \nu A \quad A_{66} = \frac{1 - \nu}{2} A$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{h^2}{12} A \quad D_{12} = \frac{h^2}{12} \nu A \quad D_{66} = \frac{h^2}{24} (1 - \nu) A.$$

Se os termos em h^2/R e h^2/R^2 forem desprezados, tanto as correções de Sanders como alguns termos adicionais na segunda e terceira equações serão eliminados. O que sobra é a versão da teoria de cascas de Love segundo Donnell (veja Kraus, 1967, p. 202). ■

Exemplo 13.2 O reservatório cilíndrico isotrópico da Figura 13.6, de raio R , comprimento L e parede de espessura h , está cheio de um líquido de peso específico γ . Considere as equações do Exemplos 13.1 para determinar o campo de deslocamento e de esforços na parede do reservatório. Suponha que a parede seja longa e engastada na base.

O líquido exerce sobre a parede do reservatório a carga axissimétrica

$$q_n = \gamma (L - x).$$

Devido à axissimetria, $v = 0$ (deslocamento na direção de y) e u, w são funções apenas de x . As equações de equilíbrio do Exemplo 13.1 reduzem-se a

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\nu}{R} \frac{dw}{dx} = 0 \quad \frac{\nu}{R} \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{w}{R^2} - \frac{1 - \nu^2}{Eh} q_n = 0.$$

Veja que a axissimetria faz a sexta equação de equilíbrio (13.41) ser identicamente satisfeita, eliminando assim a necessidade das correções de Sanders.

Integrando a primeira equação, obtemos

$$\frac{du}{dx} + \frac{\nu}{R} w = C$$

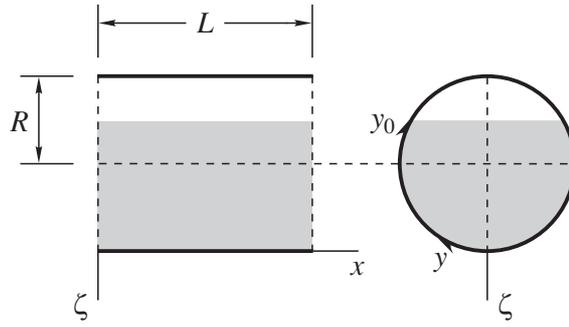


Figura 13.7 Exemplo 13.3: reservatório cilíndrico parcialmente cheio de um líquido de peso específico γ .

obtemos

$$A_3 = -\frac{\gamma R^2}{Eh} \left(L - \frac{1}{\alpha} \right) \quad A_4 = -\frac{\gamma R^2 L}{Eh}.$$

Portanto,

$$w = \frac{\gamma R^2}{Eh} \left\{ L - x - e^{-\alpha x} \left[L \cos \alpha x + \left(L - \frac{1}{\alpha} \right) \text{sen } \alpha x \right] \right\}.$$

Conhecido w , avaliamos

$$u = -\frac{\nu}{R} \int w \, dx + A_5$$

onde a constante A_5 é identificada pela condição de contorno $u = 0$ em $x = 0$. O esforço N_x já foi determinado como sendo nulo e os demais esforços são dados por

$$\begin{aligned} N_y &= A_{12}\epsilon_x^m + A_{22}\epsilon_y^m = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{du}{dx} + \frac{w}{R} \right) = \frac{Ehw}{R} & N_{xy} &= A_{66}\gamma_{xy}^m = 0 \\ M_x &= D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2} & M_y &= D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_y = \nu M_x \\ M_{xy} &= D_{66}\bar{\kappa}_{xy} = 0 & Q_x &= \frac{dM_x}{dx} & Q_y &= 0. \end{aligned}$$

Como o reservatório é impedido de expandir-se no engaste, o esforço N_y é nulo nesse apoio. ■

Exemplo 13.3 O reservatório cilíndrico do Exemplo 13.2 está, agora, horizontalmente posicionado e parcialmente cheio pelo líquido de peso específico γ (veja Figura 13.7). Estabeleça uma solução considerando ainda as equações do Exemplo 13.1, supondo que as bordas do reservatório estejam sob as condições de contorno

$$v = w = N_x = M_x = 0 \quad \text{em } x = 0, x = L.$$

O líquido exerce sobre a parede do reservatório a carga

$$q_n = \gamma R \left(\cos \frac{y}{R} - \cos \frac{y_0}{R} \right),$$

onde a superfície livre do líquido é definida pela coordenada y_0 . Sabendo-se que

$$N_x = A \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) \right] \quad M_x = D \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

onde

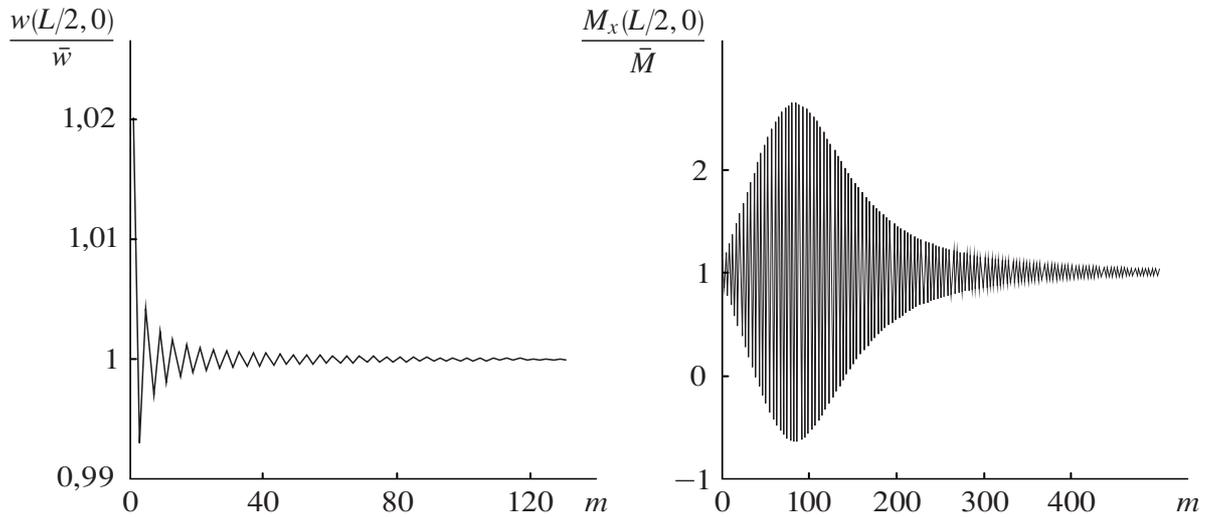


Figura 13.8 Exemplo 13.4: convergência de $w(L/2,0)/\bar{w}$ e de $M_x(L/2,0)/\bar{M}$ ($m = 1, 3, \dots; n = 0, 1$).

Conhecidos U_{mn} , V_{mn} e W_{mn} , conhecemos o campo de deslocamento e, conseqüentemente, os campos de deformação e tensão gerados na parede do reservatório. Na solução do sistema para $n = 0$, os parâmetros $s_{12} = s_{23} = 0$ implicam $V_{m0} = 0$. Isso efetivamente elimina a segunda equação do sistema, como já esperado, pois ela é coeficiente de $\sin m\pi x/L \sin ny/R$.

Note que o procedimento aqui adotado na solução deste exemplo é semelhante ao de Navier. A solução por um procedimento análogo ao de Lévy é deixado como exercício (veja Problema 13.7). ■

Exemplo 13.4 Suponha que o reservatório do exemplo anterior tenha comprimento $L = 15$ m, raio $R = 2$ m, espessura $h = 0,003$ m, seja de um material com

$$E = 205 \text{ GPa} \quad \nu = 0,3$$

e esteja completamente cheio de água ($\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$). Com base na solução apresentada no exemplo anterior, compare o deslocamento radial $w(L/2,0)$ e o momento fletor $M_x(L/2,0)$ obtidos com e sem as correções de Sanders.

Quando o reservatório está completamente cheio ($y_0 = \pi R$), os coeficientes da expansão do carregamento simplificam-se para

$$Q_{m0} = Q_{m1} = \frac{4\gamma R}{m\pi} \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad Q_{mn} = 0 \quad n > 1$$

e os únicos coeficientes não nulos da expansão do deslocamento são U_{m0} , U_{m1} , V_{m1} , W_{m0} , W_{m1} . Considerando como “exatos” os valores $\bar{w} = 7,449 \cdot 10^{-3}$ m e $\bar{M} = 143,381 \cdot 10^{-3}$ N·m/m obtidos na solução do Problema 13.8 para o deslocamento radial $w(L/2,0)$ e momento fletor $M_x(L/2,0)$, a Figura 13.8 ilustra a convergência de $w(L/2,0)/\bar{w}$ e $M_x(L/2,0)/\bar{M}$. No eixo das abscissas $m = 1$ significa que dois termos foram retidos na expansão do carregamento ($m = 1; n = 0, 1$), $m = 3$ significa que quatro termos foram retidos nessa expansão ($m = 1, 3; n = 0, 1$), e assim por diante.

Capítulo 14

Estabilidade do equilíbrio

Um conceito bem intuitivo do que seja a estabilidade de um equilíbrio é ilustrado pelo clássico exemplo da Figura 14.1, em que uma bola é colocada em três diferentes posições de equilíbrio A , B e C sobre uma superfície sem atrito. Por simplicidade, consideramos que a bola só possa mover-se para a esquerda ou direita (bola com um único grau de liberdade). É fácil verificar que as três posições são de equilíbrio porque é nula a resultante das duas únicas forças que atuam sobre a bola nessas posições: a força normal N exercida pela superfície e o peso P . Dizemos que o equilíbrio da posição A é *estável* porque se a bola for levemente deslocada para a esquerda ou direita tenderá a voltar à posição original: existe uma resultante não nula das forças N e P na posição deslocada que é restauradora, acelerando a bola de volta à posição A . Isso não ocorre com as posições B e C que são de equilíbrio *instável*. A posição C é comumente denominada, principalmente na literatura mais antiga, de equilíbrio indiferente ou neutro. Se a bola for levemente deslocada para a esquerda ou para a direita da posição C permanecerá na posição deslocada (força resultante nula), não retornando à posição original. O equilíbrio indiferente é, portanto, um caso particular de equilíbrio instável. O procedimento de se verificar a estabilidade perturbando levemente o sistema em sua posição de equilíbrio é de difícil aplicação prática porque as estruturas reais envolvem, via de regra, vários graus de liberdade.

A configuração de equilíbrio de um sistema conservativo, na ausência de forças giroscópicas (Ziegler, 1977; Bažant e Cedolin, 2010), é estável se, e somente se, corresponder a um mínimo local da energia potencial em relação às coordenadas generalizadas (veja o quarto dos Comentários 7.1 e a Seção 7.5). Esse critério de energia é de fácil sistematização e aplicação prática. Visto que o peso é a única força a realizar trabalho na Figura 14.1 e sua energia potencial é proporcional ao deslocamento vertical da bola, a superfície indicada pode também ser vista como a representação gráfica, numa certa escala, da energia potencial do sistema. Verificamos, assim, pelo critério de energia o equilíbrio estável na posição A (a energia potencial é um mínimo local) e o equilíbrio instável nas posições B e C (a energia potencial não é um mínimo local).

Mostramos no Exemplo 7.12 que a linearização de um problema na mecânica das estruturas (problema com linearidade geométrica e física) restringe a solução a ser única e o equilíbrio a ser

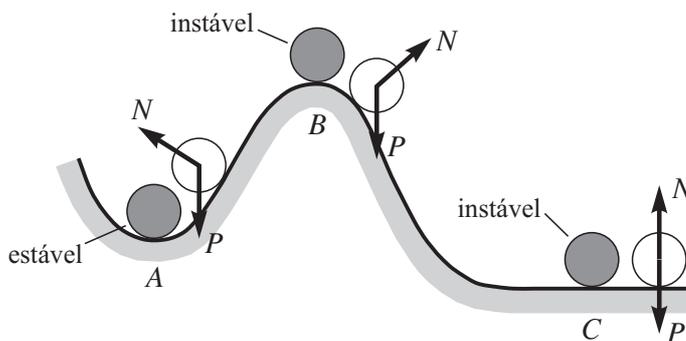


Figura 14.1 Bola sobre uma superfície sem atrito, sujeita à força normal N e ao peso P : o equilíbrio em A é estável e em B e C é instável.

estável, desde que o movimento de corpo rígido seja convenientemente removido por meio de apoios. Se houver possibilidade de movimento de corpo rígido, a solução do problema linear não será única (campo de deslocamento indeterminado) e o equilíbrio não será estável. Ou seja, se a estrutura for deslocada da posição de equilíbrio permanecerá numa posição deslocada, não retornando à posição original.

Mesmo na presença de apoios que restrinjam movimento de corpo rígido, uma estrutura pode apresentar várias configurações de equilíbrio sob um mesmo carregamento, das quais algumas podem ser instáveis. Observe essa situação, por exemplo, ao comprimir entre as mãos uma simples régua escolar, como indicado na Figura 14.2: (a) para valores pequenos da carga P aplicada, a régua permanece reta (essa configuração de equilíbrio é estável e única); (b) para valores maiores da carga, a régua encurva-se para cima ou para baixo em equilíbrio estável, tornando o equilíbrio da forma reta instável e, por isso mesmo, não percebida no experimento.

Insistimos que as equações de equilíbrio não identificam, por si só, se o equilíbrio é estável ou instável. Algum critério precisa ser adotado para verificar a estabilidade, como é o caso do critério de energia para sistemas conservativos. Insistimos também que para uma estrutura devidamente apoiada sob um certo carregamento, não faz sentido procurar por duas ou mais configurações de equilíbrio ou analisar a estabilidade de uma dada configuração empregando um modelo linear. A análise da estabilidade do equilíbrio é fundamentalmente um tópico da mecânica não linear.

Na forma como é tratada na mecânica das estruturas e também neste capítulo, a perda da estabilidade de um equilíbrio decorre necessariamente da não linearidade geométrica sob influência ou não da não linearidade física. Nesse contexto, dizemos que são as estruturas formadas por elementos esbeltos (vigas, placas ou cascas) sob compressão que dão ao assunto significado prático.

14.1 Ponto de bifurcação e ponto limite

Mostremos por meio de modelos estruturais simples, com um único grau de liberdade, conceitos importantes relacionados com a estabilidade do equilíbrio. O objetivo é reduzir o algebrismo ao mínimo, sem afetar os conceitos físicos. Vamos nos restringir a sistemas conservativos, que por sinal

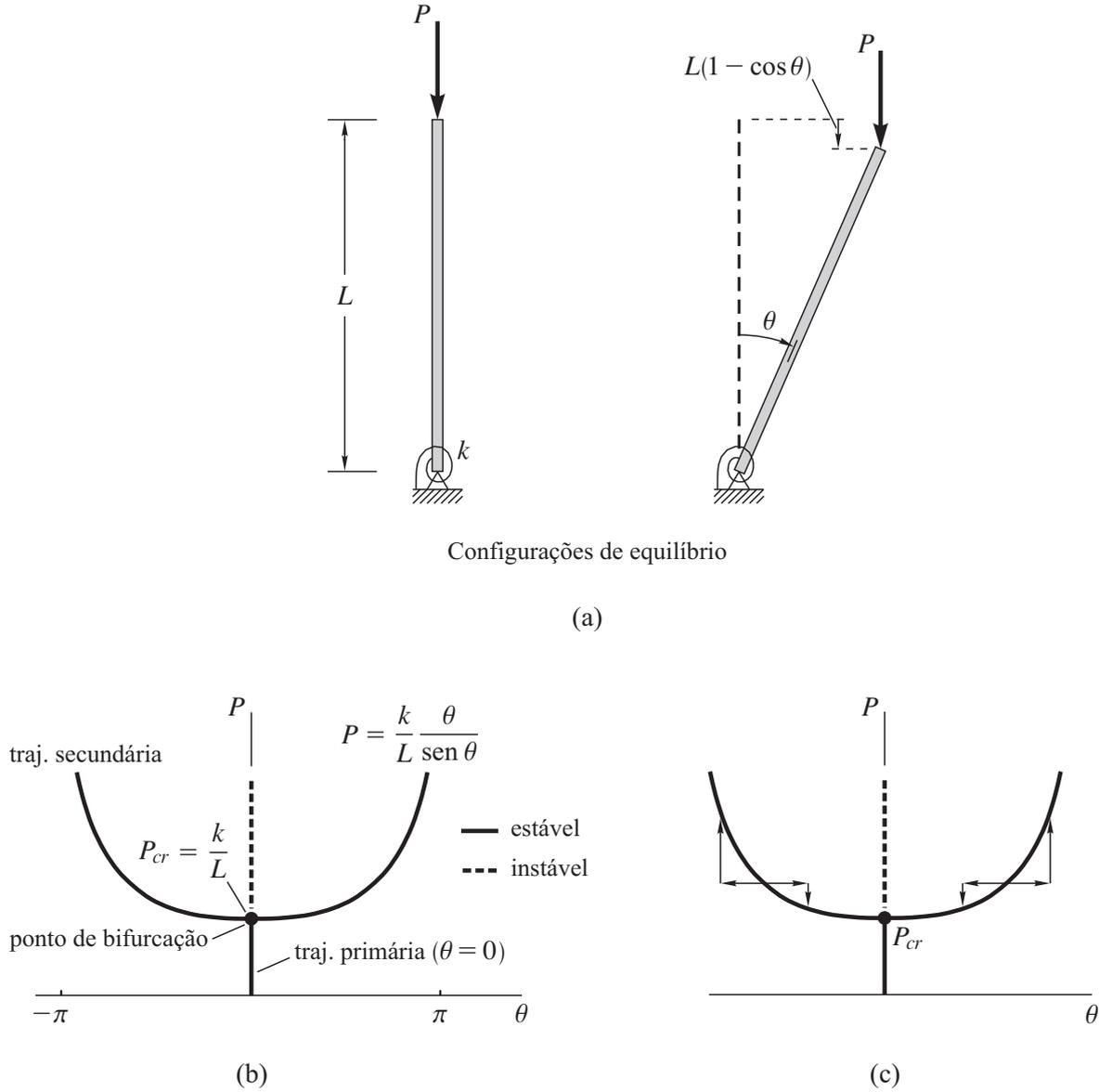


Figura 14.3 Exemplo 14.1: (a) barra rígida com mola linear de rigidez k que restringe rotação; (b) trajetórias de equilíbrio; (c) verificação simples da estabilidade do equilíbrio na trajetória secundária.

a trajetória seguida no processo inicial de carregamento. Qualquer curva que cruze a trajetória primária é uma *trajetória secundária*; qualquer curva que cruze uma trajetória secundária é uma *trajetória terciária*, e assim por diante. Finalmente, uma curva diferente da trajetória primária e que não cruza nenhuma outra trajetória é dita *trajetória complementar* (veja Figura 14.9). O ponto de cruzamento de trajetórias é um *ponto de bifurcação*. Ou seja, a configuração de equilíbrio associada a um ponto de bifurcação pertence a mais de uma trajetória. Enquanto um ponto sobre uma trajetória corresponde a uma possível configuração de equilíbrio, pontos fora dela correspondem a uma situação em que há aceleração (processo dinâmico). Podemos verificar por meio de $\lim_{\theta \rightarrow 0} P = k/L$ que a trajetória secundária não passa na origem, mas no ponto $(0, k/L)$. Analisemos a estabilidade ao longo das trajetórias considerando que

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = k - PL \cos \theta.$$

Para $\theta = 0$ (trajetória primária; barra vertical),

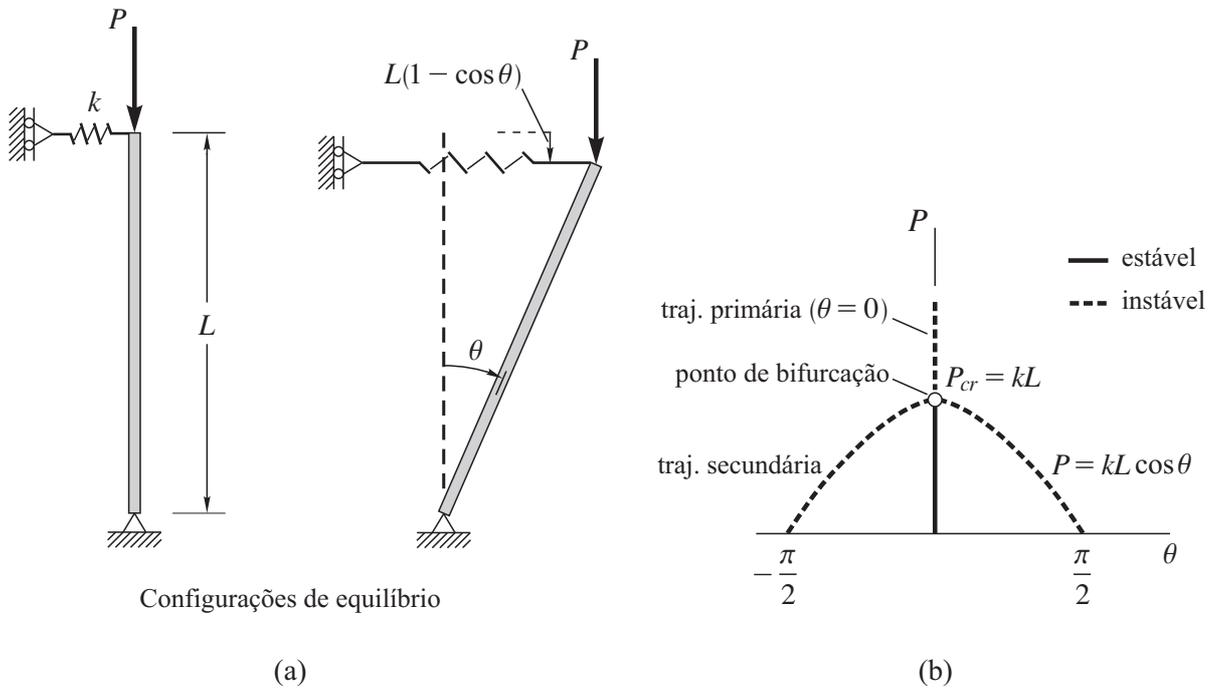


Figura 14.4 Exemplo 14.2: (a) barra rígida com mola linear de rigidez k que restringe translação horizontal; (b) trajetórias de equilíbrio.

A energia de deformação da mola muda para

$$U = \frac{1}{2}k(L \operatorname{sen} \theta)^2.$$

Conhecida a energia potencial do sistema,

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2}kL^2 \operatorname{sen}^2 \theta - PL(1 - \cos \theta),$$

temos que a equação de equilíbrio é

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = (kL \cos \theta - P)L \operatorname{sen} \theta = 0.$$

A solução dessa equação é dada por

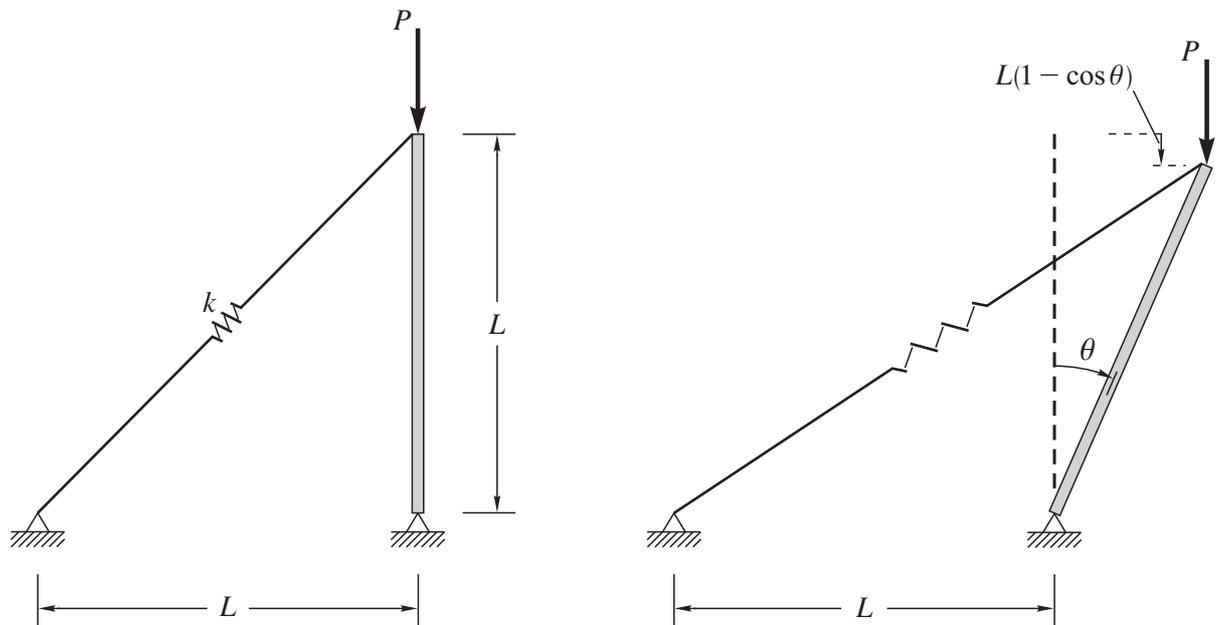
$$\theta = 0 \quad \text{para qualquer } P \qquad P = kL \cos \theta \quad \text{para diferentes pares } (\theta, P)$$

cuja representação no espaço θP , para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, é dada na Figura 14.4b. Analisemos a estabilidade ao longo das trajetórias de equilíbrio, no domínio $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, considerando que

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = kL^2 \cos 2\theta - PL \cos \theta.$$

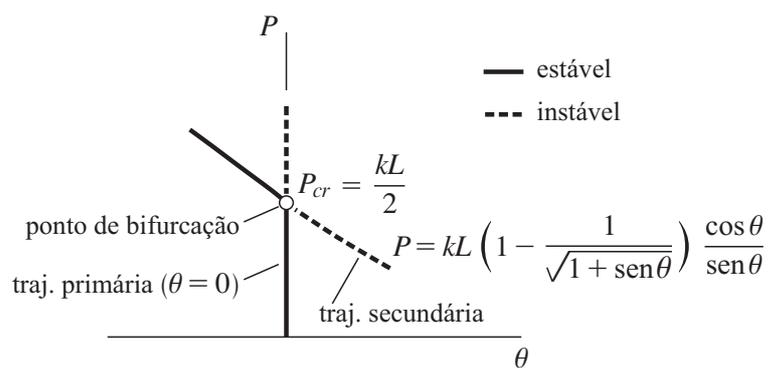
Para $\theta = 0$ (trajetória primária; barra vertical),

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = kL^2 - PL \begin{cases} > 0 & \Rightarrow & P < kL \text{ (equilíbrio estável)} \\ = 0 & \Rightarrow & P = P_{cr} = kL \text{ (ponto crítico)} \\ < 0 & \Rightarrow & P > kL \text{ (equilíbrio instável).} \end{cases}$$



Configurações de equilíbrio

(a)



(b)

Figura 14.5 Exemplo 14.3: (a) barra rígida com mola linear de rigidez k inclinada; (b) trajetórias de equilíbrio.

e comprimento final

$$L_2 = \sqrt{(L + L \operatorname{sen} \theta)^2 + (L \cos \theta)^2} = L\sqrt{2}\sqrt{1 + \operatorname{sen} \theta},$$

sua energia de deformação é

$$U = \frac{1}{2}k(L_2 - L_1)^2 = kL^2 \left(\sqrt{1 + \operatorname{sen} \theta} - 1 \right)^2.$$

Conhecida a energia potencial do sistema,

$$\Pi = U + V = kL^2 \left(\sqrt{1 + \operatorname{sen} \theta} - 1 \right)^2 - PL(1 - \cos \theta),$$

obtemos a equação de equilíbrio

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = kL^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} \theta}} \right) \cos \theta - PL \operatorname{sen} \theta = 0.$$

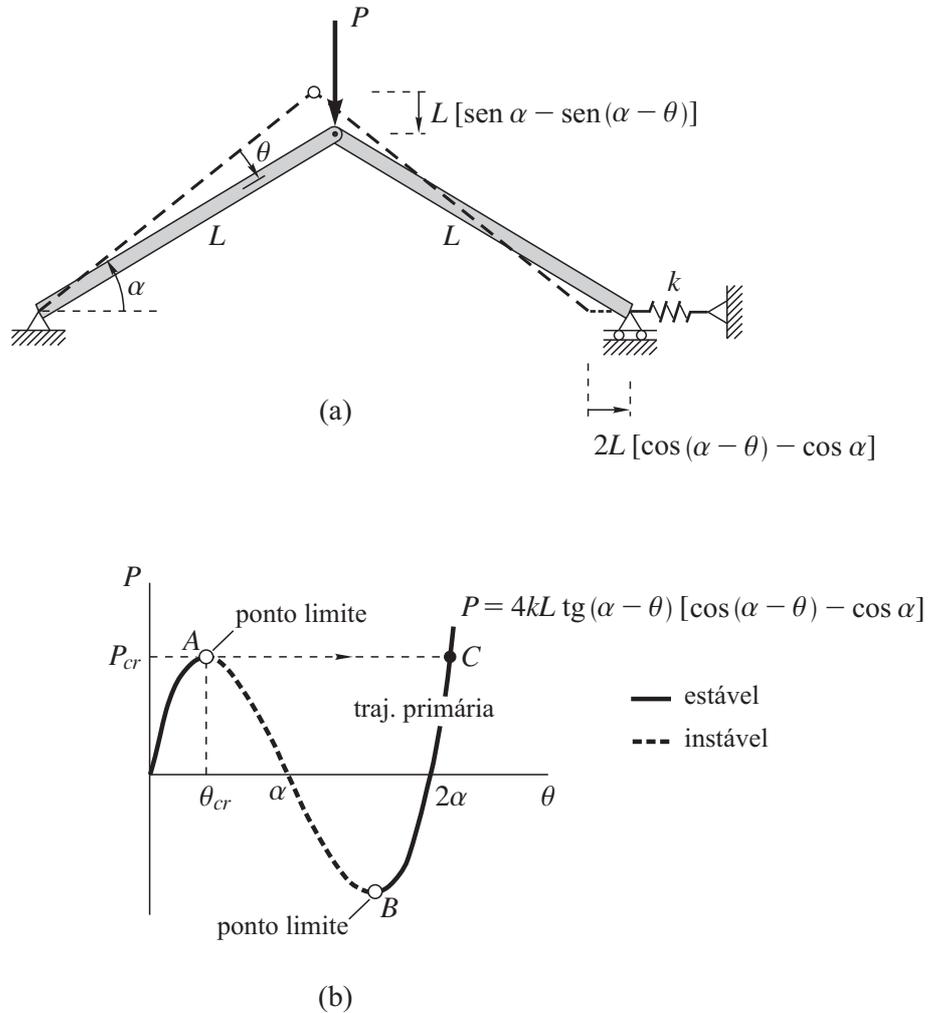


Figura 14.6 Exemplo 14.4: (a) sistema formado por duas barras rígidas conectadas por uma rótula; (b) trajetória de equilíbrio.

Comentários 14.3:

- A estrutura do Exemplo 14.3 flamba num *ponto de bifurcação assimétrico*, que é necessariamente instável. Podemos verificar a “assimetria” do ponto de bifurcação por meio de

$$\left. \frac{dP}{d\theta} \right|_{\theta=0} = -\frac{3kL}{8} \neq 0. \quad (14.4)$$

- A assimetria do ponto de bifurcação se deve ao braço de alavanca da força exercida pela mola aumentar quando a barra inclina-se para a esquerda e diminuir quando a barra inclina-se para a direita. Inclinarse para a esquerda é mais difícil para a barra do que inclinar-se para a direita.

Exemplo 14.4 As barras rígidas de comprimento L mostradas na Figura 14.6a estão conectadas entre si e com os apoios por meio de rótulas. Quando $P = 0$ e a mola linear de rigidez k está indeformada, as barras formam um ângulo α com a horizontal.

A energia potencial de P é

$$V = -PL [\text{sen } \alpha - \text{sen}(\alpha - \theta)]$$

e a energia de deformação da mola é

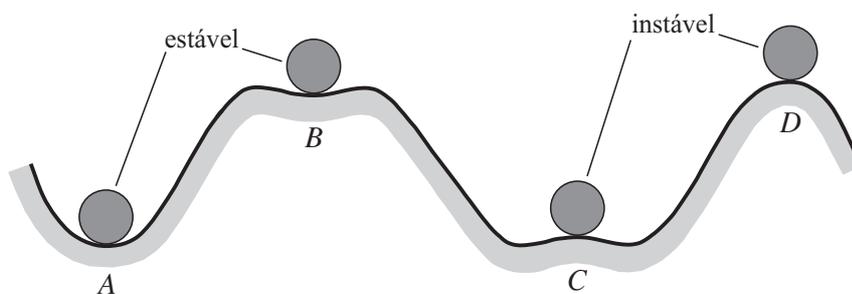


Figura 14.7 Posições de equilíbrio.

ocorre com o equilíbrio instável da bola na posição D . Encontramos casos práticos no projeto estrutural que são semelhantes aos dois casos simples B e C aqui apresentados: um equilíbrio estável que pode ser preocupante e um equilíbrio instável que pode não ser preocupante. O critério de energia para a estabilidade é um critério local, fundamentado exclusivamente em pequenas perturbações quando usa expansões de Π em série de Taylor em torno da posição de equilíbrio (veja Seção 7.5). Sob esse aspecto, o critério não detecta a intensidade da estabilidade ou da instabilidade, mas apenas se o equilíbrio é estável ou não.

- Na mecânica das estruturas existem os sistemas que são discretos por natureza e os sistemas que são artificialmente discretizados por meio de alguma aproximação como faz, por exemplo, o método dos elementos finitos. Assim, podemos imaginar que nessa área é comum a solução de sistemas lineares do tipo

$$\mathbf{KD} = \mathbf{F}, \quad (14.5)$$

envolvendo n equações algébricas e n incógnitas armazenadas em \mathbf{D} . Se a matriz \mathbf{K} é não singular, como se espera, o sistema tem uma, e somente uma, solução, independentemente de seu tamanho. O esforço computacional para se obter a solução pode até ser estimado se a esparsidade de \mathbf{K} for conhecida. No caso de problemas não lineares, a matriz \mathbf{K} deixa de ser independente de \mathbf{D} e o número de soluções pode ser enorme. Quais dessas soluções têm significado físico? Das soluções fisicamente viáveis, quais delas nos interessam? Como encontrá-las sem perder tempo com as demais? Uma resposta razoável é dada pelo próprio algoritmo incremental iterativo, comumente empregado na solução de sistemas não lineares, quando procura seguir a trajetória primária, que é a trajetória naturalmente seguida pela estrutura com o aumento gradativo da carga a partir de zero. Claro, é preciso saber detectar o ponto crítico nessa trajetória e decidir se vale a pena prosseguir além dele (Barroso, 2006).

- De acordo com o *critério dinâmico*, um equilíbrio é estável se, e somente se, uma pequena perturbação fizer o sistema oscilar harmonicamente ou com amplitudes decrescentes em torno da posição de equilíbrio (Altman e Lucena Neto, 1989; Bazant e Cedolin, 2010). É o critério mais geral, e não será por nós abordado. A análise da estabilidade do equilíbrio de sistemas conservativos pode ser igualmente conduzida pelo critério dinâmico ou pelo critério de energia.

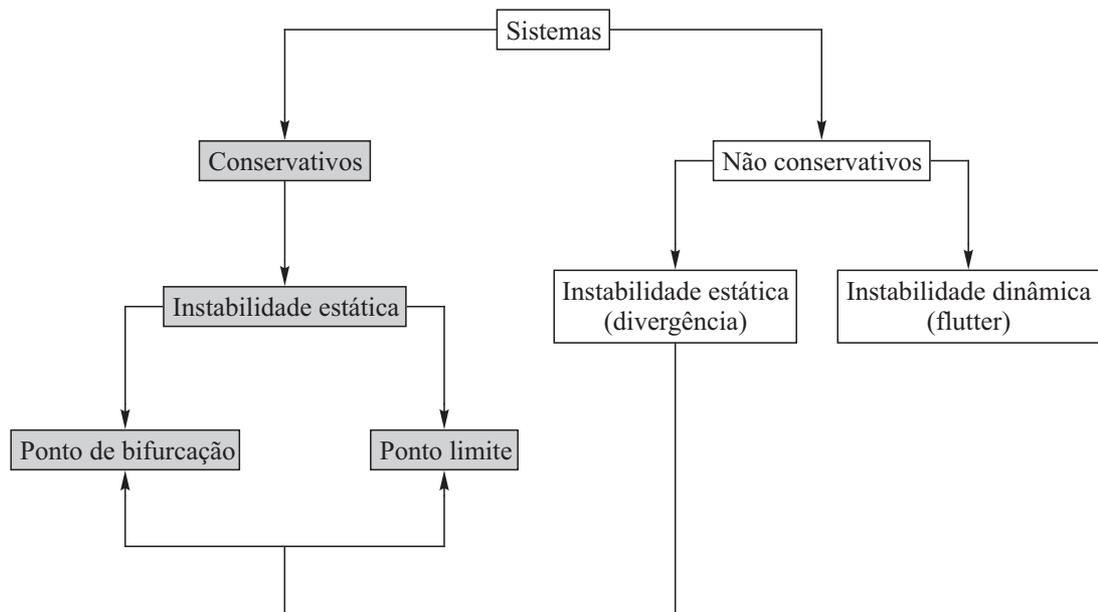


Figura 14.8 Flambagem de sistemas conservativos e não conservativos.

Os dois critérios equivalem-se para esses sistemas. Se o sistema é não conservativo, a análise da estabilidade deverá ser necessariamente conduzida pelo critério dinâmico. Dois tipos de flambagem são possíveis neste caso: (a) *flutter*: a perda de estabilidade manifesta-se pelo sistema oscilar em torno da configuração de equilíbrio com amplitudes crescentes; (b) *divergência*: o sistema afasta-se da configuração de equilíbrio sem oscilar (frequência nula). A verificação de flutter é crucial no projeto de aeronaves. A flambagem por divergência, que é na essência um problema estático no instante da flambagem, é o tipo de flambagem identificado nos sistemas conservativos quando analisados pelo critério dinâmico. Assim, esse critério identifica flutter ou divergência num sistema não conservativo, mas somente divergência num sistema conservativo. O aparecimento de ponto de bifurcação ou de ponto limite no critério dinâmico é próprio de sistemas que flambam por divergência. A Figura 14.8 traz um resumo desse assunto.

14.2 Sensibilidade a imperfeição

As estruturas até agora analisadas são perfeitas, no sentido de que as barras são rigorosamente retas e bem posicionadas, e as cargas são aplicadas sem nenhuma excentricidade. É uma situação que não acontece na prática, devido aos inevitáveis defeitos de fabricação e montagem. Outras imperfeições, como aquelas relacionadas com a distribuição das propriedades do material ou implementação das condições de contorno, podem também manifestar-se. Identificar as imperfeições que ocorrem numa estrutura é algo complicado. Vamos nos limitar a reanalisar as estruturas anteriores, todas com um único grau de liberdade, supondo que apresentam algum desvio na geometria inicial, com o objetivo de enfatizar a influência que uma imperfeição pode ter sobre a carga crítica.

Quando a carga crítica decresce na presença de pequenos defeitos, dizemos que a estrutura é sensível a imperfeição. Algumas estruturas são sensíveis, outras não. A sensibilidade tem muito a

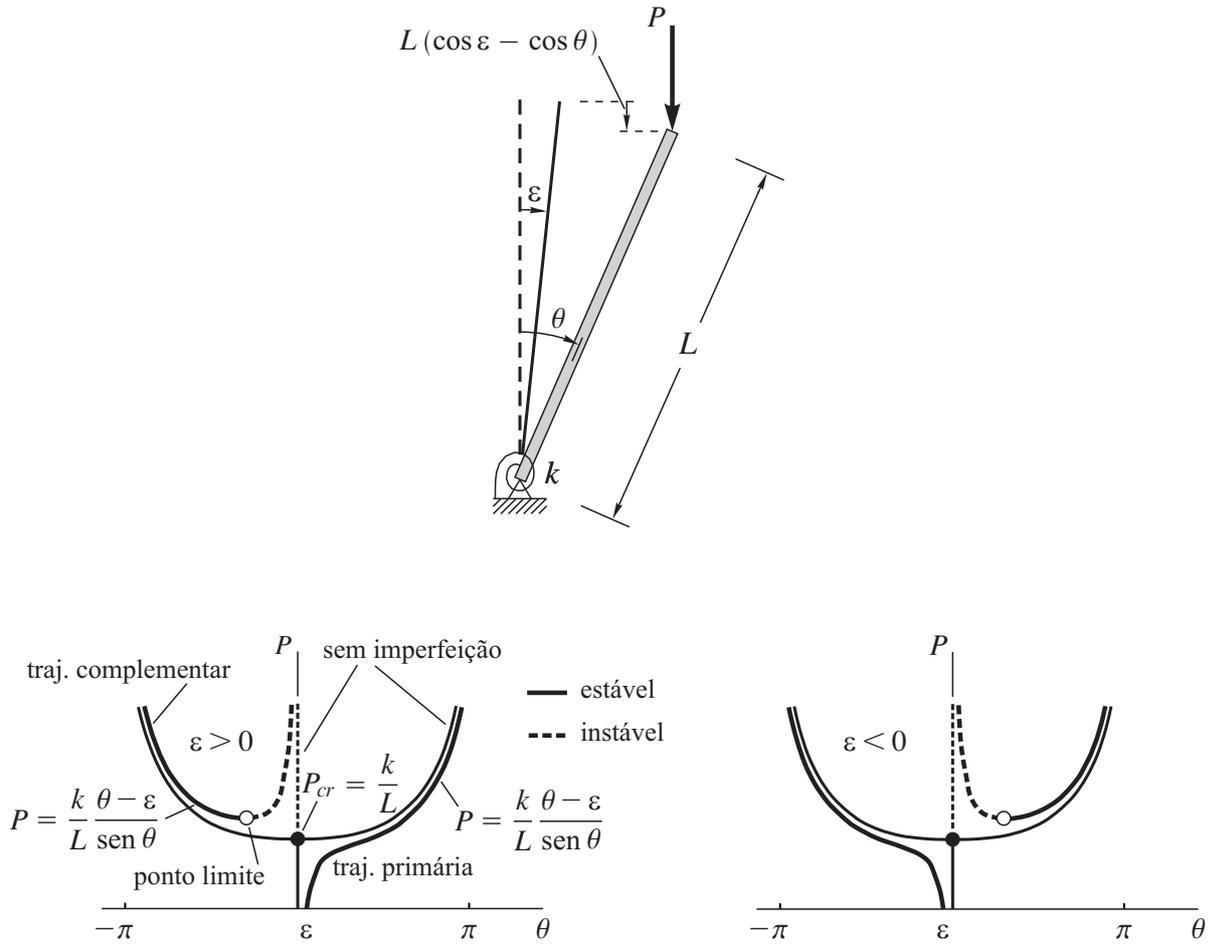


Figura 14.9 Exemplo 14.5: efeito de uma inclinação ε inicial nas trajetórias de equilíbrio da barra cujo ponto crítico, quando a barra é perfeita, é um ponto de bifurcação estável simétrico.

ver com o comportamento não linear da estrutura.

Exemplo 14.5 Considere que a barra rígida do Exemplo 14.1, cujo ponto crítico é um ponto de bifurcação estável simétrico, tenha uma imperfeição geométrica que se manifesta por meio de uma inclinação ε inicial (veja Figura 14.9). Sob essa inclinação da barra, a mola está indeformada e a carga externa aplicada é nula.

A energia potencial de P é

$$V = -PL(\cos \varepsilon - \cos \theta).$$

A energia de deformação da mola é

$$U = \frac{1}{2}k(\theta - \varepsilon)^2.$$

Conhecida a energia potencial do sistema,

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2}k(\theta - \varepsilon)^2 - PL(\cos \varepsilon - \cos \theta),$$

temos que a equação de equilíbrio é

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = k(\theta - \varepsilon) - PL \sin \theta = 0.$$

A solução dessa equação é dada por

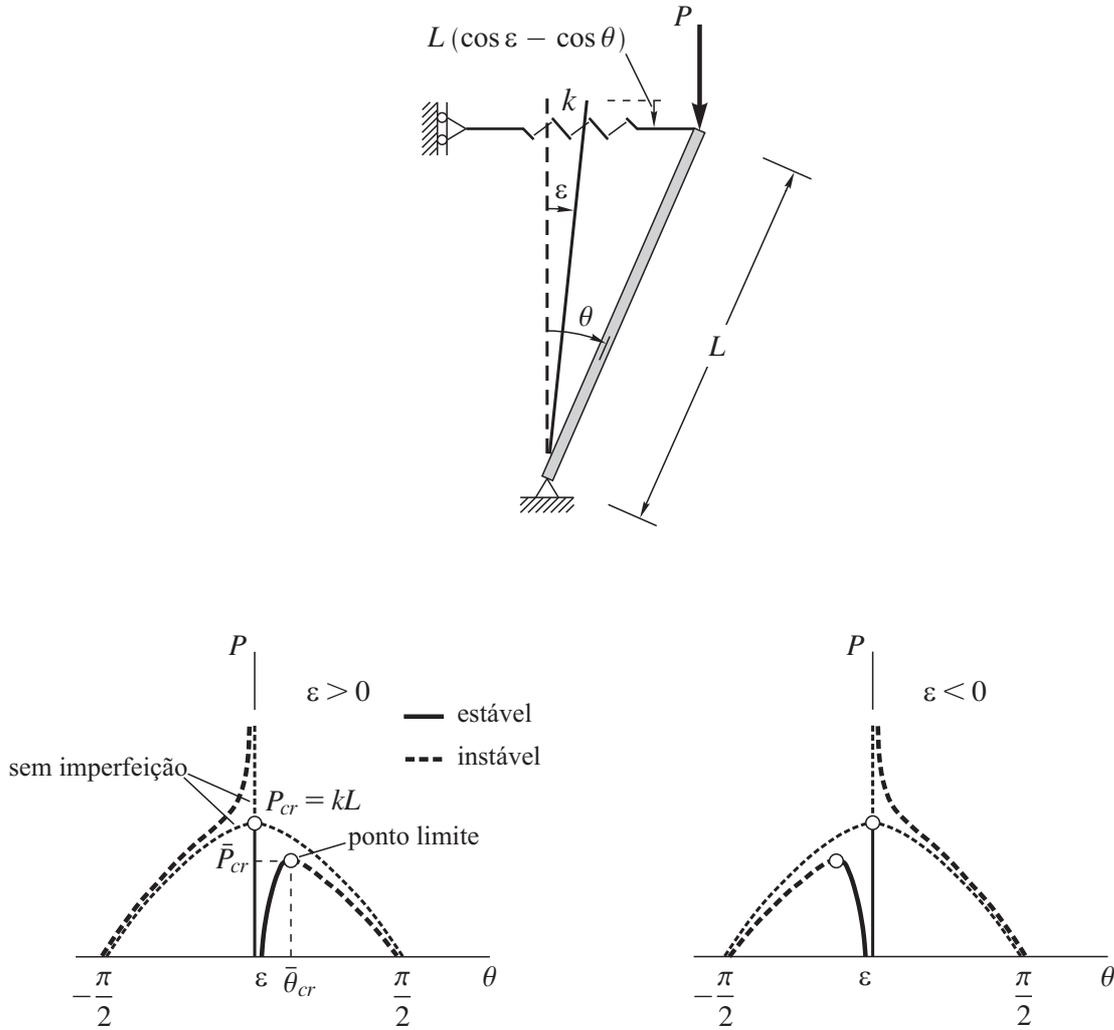


Figura 14.10 Exemplo 14.6: efeito de uma inclinação ε inicial nas trajetórias de equilíbrio da barra cujo ponto crítico, quando a barra é perfeita, é um ponto de bifurcação instável simétrico.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \Big|_{P=kL(1-\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \theta}) \cos \theta} &= kL^2 [\cos^2 \theta - (\text{sen } \theta - \text{sen } \varepsilon) \text{sen } \theta] - PL \cos \theta \\ &= kL^2 [\cos^2 \theta - (\text{sen } \theta - \text{sen } \varepsilon) \text{sen } \theta] - kL \left(1 - \frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \theta}\right) \cos \theta L \cos \theta \\ &= kL^2 \left(\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \theta} - \text{sen}^2 \theta\right). \end{aligned}$$

Quanto menor for a imperfeição, mais próximas estarão as trajetórias das estruturas perfeita e real. Nos trechos em que se aproximam, se o equilíbrio for estável na estrutura perfeita será também estável na estrutura real, e vice-versa.

Na estrutura perfeita, a carga crítica P_{cr} ocorre num ponto de bifurcação instável simétrico. Se existe imperfeição, a carga crítica \bar{P}_{cr} da estrutura real ocorre num ponto limite, que também é instável. Neste ponto,

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \Big|_{P=kL(1-\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \bar{\theta}_{cr}) \cos \bar{\theta}_{cr}} = kL^2 \left(\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \bar{\theta}_{cr}} - \text{sen}^2 \bar{\theta}_{cr}\right) = 0$$

ou

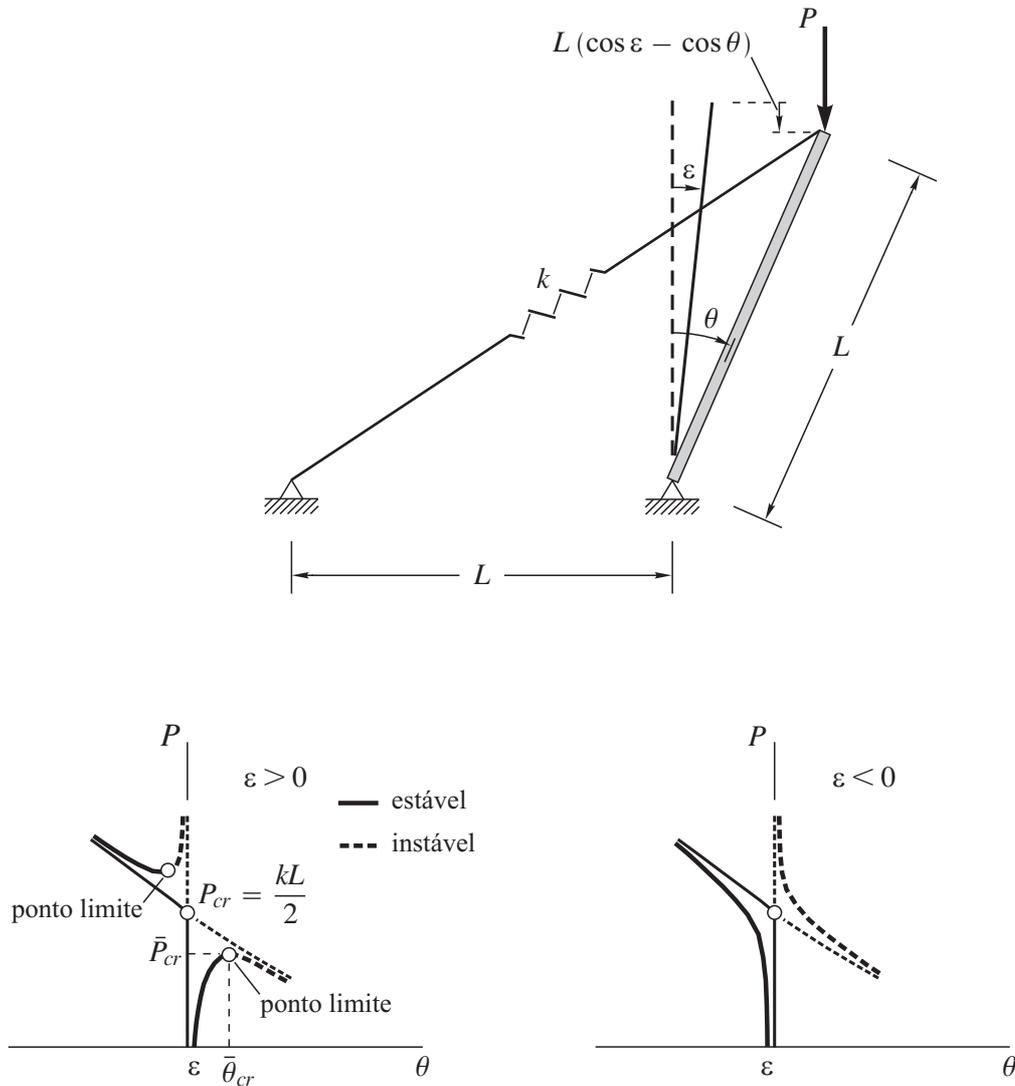


Figura 14.11 Exemplo 14.7: efeito de uma inclinação ε inicial nas trajetórias de equilíbrio da barra cujo ponto crítico, quando a barra é perfeita, é um ponto de bifurcação assimétrico.

$$U = \frac{1}{2}k(L_2 - L_1)^2 = kL^2 \left(\sqrt{1 + \operatorname{sen} \theta} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} \varepsilon} \right)^2.$$

Conhecida a energia potencial do sistema,

$$\Pi = U + V = kL^2 \left(\sqrt{1 + \operatorname{sen} \theta} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} \varepsilon} \right)^2 - PL(\cos \varepsilon - \cos \theta),$$

obtemos a equação de equilíbrio

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = kL^2 \left(1 - \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} \varepsilon}}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} \theta}} \right) \cos \theta - PL \operatorname{sen} \theta = 0.$$

A solução dessa equação é dada por

$$P = kL \left(1 - \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} \varepsilon}}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} \theta}} \right) \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

cujo esboço no espaço θP , para valores de θ que mantenha a barra próxima da posição vertical, é dado na Figura 14.11 para $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon < 0$. Na presença da imperfeição, $\theta = 0$ deixa de ser solução e existem duas trajetórias de equilíbrio. O equilíbrio é estável para valores positivos da derivada

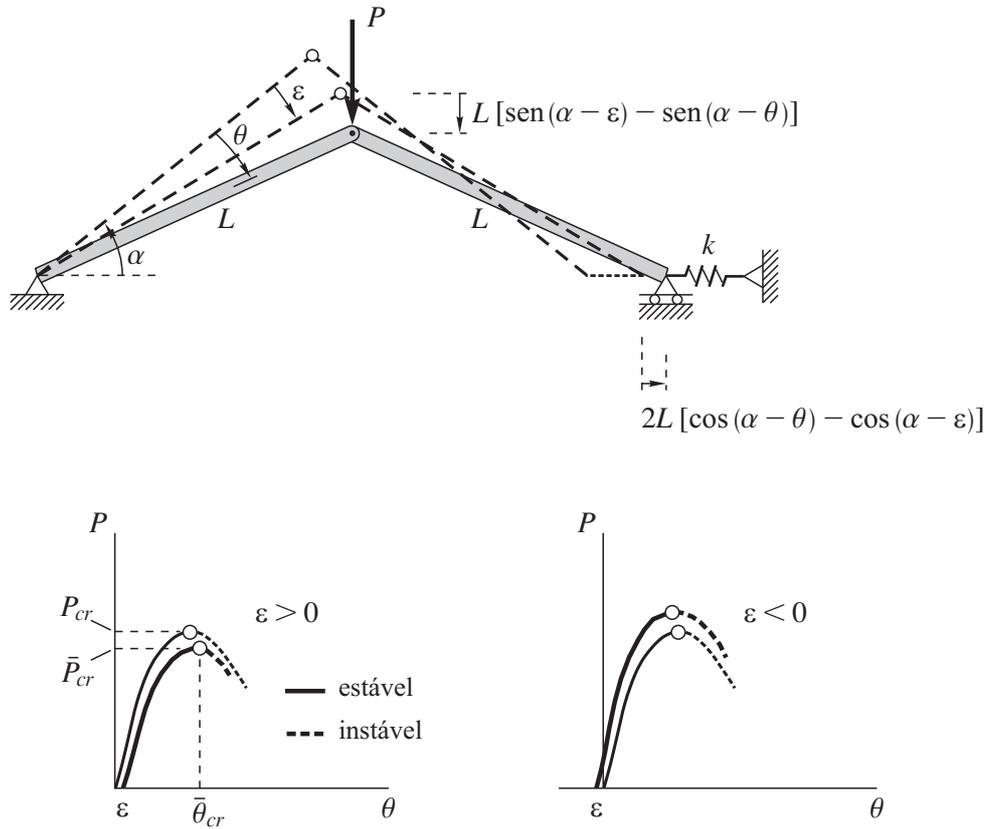


Figura 14.12 Exemplo 14.8: efeito de um desvio ε inicial na trajetória de equilíbrio do sistema cujo ponto crítico, quando o sistema é perfeito, é um ponto limite.

Perceba que a estrutura deste exemplo é bem mais sensível a imperfeição do que a estrutura do exemplo anterior, simplesmente devido à mudança de posição da mola. Essa sensibilidade só existe para $\varepsilon > 0$, visto que o ponto crítico na trajetória primária desaparece completamente para $\varepsilon < 0$. O ponto de bifurcação assimétrico onde ocorre a carga crítica na estrutura perfeita degenera-se num ponto limite sob a imperfeição $\varepsilon > 0$. A derivada $d\bar{P}_{cr}(\varepsilon)/d\varepsilon$ infinita em $\varepsilon = 0$ mostra que há considerável redução no valor de \bar{P}_{cr} para pequenas imperfeições. ■

Exemplo 14.8 Considere que o sistema estrutural do Exemplo 14.4, cujo ponto crítico é um ponto limite, tenha uma imperfeição geométrica que se manifesta por meio do desvio ε inicial indicado na Figura 14.12. Sob esse desvio, a mola está indeformada e a carga externa aplicada é nula.

A energia potencial de P é

$$V = -PL [\text{sen}(\alpha - \varepsilon) - \text{sen}(\alpha - \theta)]$$

e a energia de deformação da mola é

$$U = \frac{1}{2}k \{2L [\text{cos}(\alpha - \theta) - \text{cos}(\alpha - \varepsilon)]\}^2 = 2kL^2 [\text{cos}(\alpha - \theta) - \text{cos}(\alpha - \varepsilon)]^2.$$

Conhecida a energia potencial do sistema,

$$\Pi = U + V = 2kL^2 [\text{cos}(\alpha - \theta) - \text{cos}(\alpha - \varepsilon)]^2 - PL [\text{sen}(\alpha - \varepsilon) - \text{sen}(\alpha - \theta)],$$

temos que a equação de equilíbrio é dada por

- Considerando os exemplos apresentados e que as imperfeições são inevitáveis, somos levados a pensar que a carga crítica nunca ocorre na prática num ponto de bifurcação, mas somente num ponto limite.
- É a sensibilidade a imperfeição que normalmente justifica a dispersão nos valores da carga crítica determinada experimentalmente para estruturas aparentemente iguais.
- No projeto de uma estrutura sensível a imperfeição, é indispensável considerar de alguma forma a influência de uma provável imperfeição. As colunas de concreto armado, tão presentes em nosso dia a dia, ilustram bem um tipo de estrutura cujas normas que regulamentam seu projeto são explicitamente preocupadas com o assunto. A não linearidade do material muito contribui para a sensibilidade a imperfeição dessas colunas.
- A sensibilidade a imperfeição não tem sido totalmente incorporada ao projeto devido principalmente à dificuldade em se identificar as reais imperfeições.

14.3 Consequências da linearização

Com relação aos exemplos apresentados, não tivemos tantas dificuldades na determinação das trajetórias de equilíbrio, análise da estabilidade ou na determinação do ponto crítico porque são modelos estruturais simples. Apesar de não acrescentar quase nenhuma novidade conceitual, modelos mais complexos, como aqueles presentes nos projetos estruturais do dia a dia, são matematicamente bem mais difícil. Por essa razão, é prática corrente nos projetos linearizar as equações de equilíbrio em relação às coordenadas generalizadas na determinação da carga crítica. É um procedimento que pode conduzir a erros, como ilustramos a seguir.

Exemplo 14.9 Refaça o Exemplo 14.1 com a equação de equilíbrio linearizada em θ .

Para obter a equação de equilíbrio linearizada em θ (em torno de $\theta = 0$), a energia potencial

$$\Pi = \frac{1}{2}k\theta^2 - PL(1 - \cos\theta)$$

deverá ser aproximada por uma expressão quadrática em θ . Vamos introduzir a aproximação

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

para obter

$$\Pi = \frac{1}{2}k\theta^2 - \frac{1}{2}PL\theta^2.$$

A equação de equilíbrio é

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = (k - PL)\theta = 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \theta = 0 & \text{para qualquer } P \\ P = \frac{k}{L} & \text{para qualquer } \theta \text{ (limitado a ser pequeno)}. \end{array} \right.$$

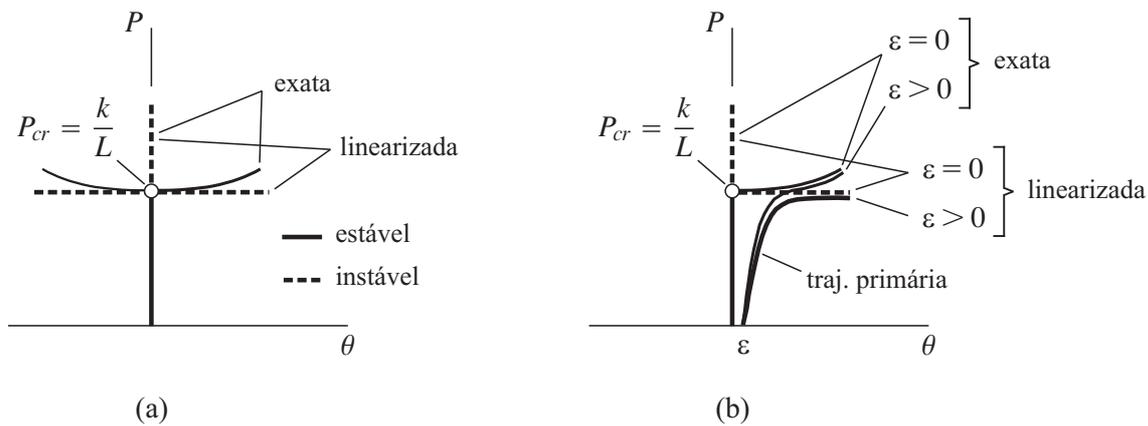


Figura 14.13 Exemplo 14.9: trajetórias de equilíbrio obtidas com as equações de equilíbrio exata e linearizada em θ : (a) barra sem imperfeição; (b) barra com imperfeição.

Note que a não linearidade geométrica está presente no termo $PL\theta$ (é um termo quadrático se imaginarmos que P é tão incógnito quanto θ ; existe interação entre a carga axial e o deslocamento transversal). Os pares (θ, P) que satisfazem a equação de equilíbrio estão representados na Figura 14.13a, usando ambas as equações exata e linearizada. Analisemos a estabilidade ao longo das trajetórias de equilíbrio considerando que

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = k - PL.$$

Para $\theta = 0$ (trajetória primária; barra vertical),

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0} = k - PL \begin{cases} > 0 & \Rightarrow & P < \frac{k}{L} \text{ (equilíbrio estável)} \\ = 0 & \Rightarrow & P = P_{cr} = \frac{k}{L} \text{ (ponto crítico)} \\ < 0 & \Rightarrow & P > \frac{k}{L} \text{ (equilíbrio instável)}. \end{cases}$$

Como $d^2\Pi/d\theta^2 = 0$ em $P = P_{cr}$, então essa é a carga crítica. Em $P = P_{cr}$, qualquer valor de θ define uma configuração de equilíbrio (θ deve ser limitado a valores pequenos por causa da linearização). Dado que a derivada $d^2\Pi/d\theta^2$ é nula nesta carga, assim como todas as demais derivadas de ordem mais elevada (Π não varia com θ para $P = P_{cr}$), as configurações são todas de equilíbrio instável (indiferente).

A linearização reduz a equação de equilíbrio original $k\theta - PL\sin\theta = 0$ ao problema linear de autovalor $(k - PL)\theta = 0$ de solução bem mais simples. No caso específico dessa barra, a correta identificação da carga crítica pela linearização já era esperada porque a carga ocorre em $\theta = 0$. O autovalor está associado à carga P de flambagem e o autovetor à forma em que a barra flamba ($\theta = \theta_1$, digamos, neste problema simples). O autovetor que determinamos do problema linearizado é também chamado de *modo de flambagem*. A linearização comete, no entanto, dois erros:

- (a) o equilíbrio instável (indiferente) para $P = P_{cr}$ não existe;

14.4 Flambagem de vigas

As equações de equilíbrio

$$\begin{aligned} (N \cos \theta - Q \sin \theta)' &= 0 & (N \sin \theta + Q \cos \theta)' &= 0 \\ M' - N [(1 + u') \sin \theta - v' \cos \theta] - Q [(1 + u') \cos \theta + v' \sin \theta] &= 0 \end{aligned} \quad (14.9)$$

são as mesmas equações (8.125) para o caso de uma viga sob pequenas deformações, mas grandes deslocamentos e rotações, submetida a cargas externas aplicadas apenas nas extremidades. Na teoria de Timoshenko, a rotação $\theta(X)$ da seção transversal é independente das componentes $u(X)$ e $v(X)$ do deslocamento do eixo da viga. Lembramos que $(\)' = d(\)/dX$.

Vamos particularizar (14.9) para o instante da flambagem da viga em relação à trajetória primária (viga ainda reta), admitindo que $u', v', \theta \ll 1$ e que a força cortante é pequena comparada à força normal ($Q \ll N$):

$$N' = 0 \quad (N\theta + Q)' = 0 \quad M' - N(\theta - v') - Q = 0. \quad (14.10)$$

Note, por exemplo, que o termo $Q \sin \theta \approx Q\theta$ que apareceria na primeira equação, representando uma interação não linear entre a força cortante e a rotação, é desprezado na presença de N .

A primeira das equações (14.10) indica que N permanece constante durante a flambagem. Se em cada uma das extremidades da viga atua uma força axial P que a comprime, então $N = -P$ conforme a primeira ou a quarta das condições de contorno (8.126) após linearização em θ . Assim, as equações de equilíbrio reduzem-se a

$$(-P\theta + Q)' = 0 \quad M' + P(\theta - v') - Q = 0 \quad (14.11)$$

onde a coordenada euleriana x será adotada no lugar da coordenada lagrangiana X , por mera conveniência, como explicado na Seção 5.1.

Euler-Bernoulli Na teoria de vigas de Euler-Bernoulli devemos introduzir $\theta = v'$ na equação (14.11),

$$(-Pv' + Q)' = 0 \quad M' - Q = 0, \quad (14.12)$$

e eliminar Q pela substituição da segunda equação na primeira:

$$M'' - Pv'' = 0. \quad (14.13)$$

Como as deformações devem ser pequenas, vamos adotar a relação constitutiva linear $M = EI\kappa$ e, adicionalmente, fazer $\kappa = -v''$ para linearizar a equação resultante em v :

$$EIv'''' + Pv'' = 0 \quad (14.14)$$

onde a rigidez EI é admitida constante.

No texto adotaremos a representação

$$v'''' + \alpha^2 v'' = 0 \quad \alpha^2 = \frac{P}{EI} \quad (14.15)$$

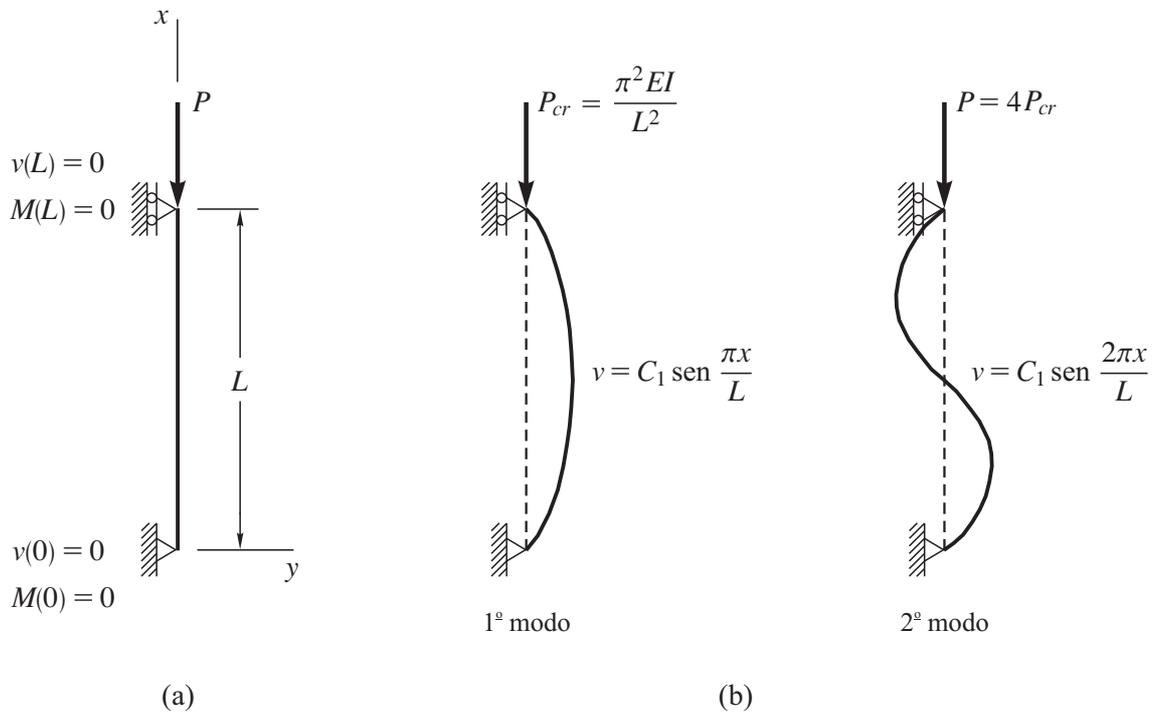


Figura 14.14 Exemplo 14.11: (a) coluna biapoada; (b) 1º e 2º modos de flambagem.

para descrever o problema de flambagem linear de vigas de Euler-Bernoulli axialmente comprimidas de rigidez EI constante. Essa equação diferencial é, a rigor, não linear por ser quadrática nas variáveis (incógnitas) P e v (a não linearidade contida em Pv'' é de natureza geométrica). O problema tem claramente a solução trivial $v(x) = 0$, mas para alguns valores de α^2 existem soluções não triviais (o termo “trivial” refere-se aqui a solução nula para a qual a equação é sempre satisfeita). Tais α^2 são chamados de autovalores e as correspondentes soluções não triviais são chamadas de autofunções.

A solução geral de (14.15) é uma combinação linear de quatro soluções particulares, linearmente independentes, dessa equação. Fazendo a busca dessas soluções particulares na forma e^{sx} , como explicado no Exemplo 8.5, obtemos a equação característica

$$s^4 + \alpha^2 = 0 \quad (14.16)$$

com duas raízes nulas e as outras duas dadas por $\pm i\alpha$. Assim, a solução geral da equação é

$$\begin{aligned} v &= c_1 e^{-i\alpha x} + c_2 e^{i\alpha x} + c_3 x + c_4 = c_1 (\cos \alpha x - i \operatorname{sen} \alpha x) + c_2 (\cos \alpha x + i \operatorname{sen} \alpha x) + c_3 x + c_4 \\ &= (c_1 + c_2) \cos \alpha x - i(c_1 - c_2) \operatorname{sen} \alpha x + c_3 x + c_4. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Como $\cos \alpha x$ e $\operatorname{sen} \alpha x$ são soluções particulares, linearmente independentes, da equação, podemos ainda reescrever a solução na forma

$$v = C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 x + C_4 \quad (14.18)$$

onde as constantes C_i absorvem as constantes c_i .

Exemplo 14.11 Determine a carga crítica e o correspondente modo de flambagem (modo crítico) da coluna biapoada indicada na Figura 14.14a, de comprimento L e rigidez EI constante.

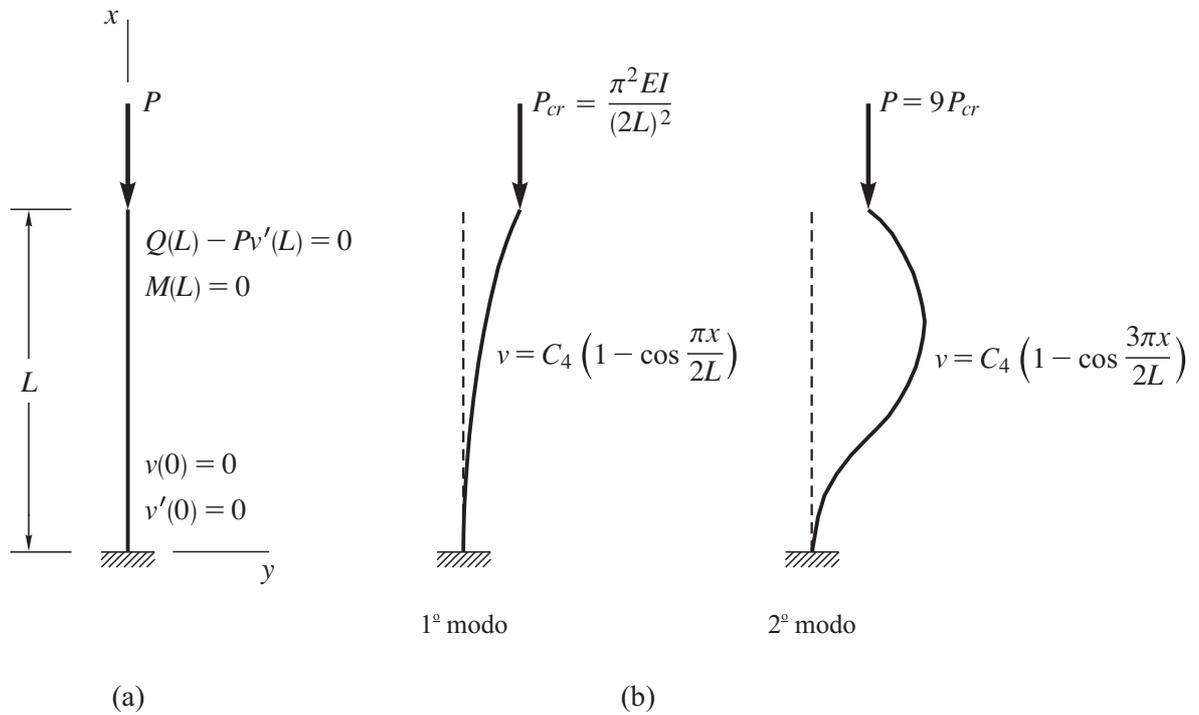


Figura 14.15 Exemplo 14.12: (a) coluna engastada-livre; (b) 1º e 2º modos de flambagem.

Portanto, a coluna flamba na forma representada na Figura 14.14b (1º modo), onde C_1 é uma constante arbitrária mas restrita a ser pequena.

Para $n = 2$, obtemos para o 2º modo

$$P = 4P_{cr} \quad v = C_1 \sin \frac{2\pi x}{L}$$

que também está representado na Figura 14.14b (2º modo). A coluna flamba no modo $v = C_1 \sin \pi x/L$ ao ser atingida a carga $P = P_{cr}$. Para ocorrer a flambagem no modo $v = C_1 \sin 2\pi x/L$, a carga precisa atingir $P = 4P_{cr}$. Ou seja, a flambagem só ocorre no 2º modo se for adicionado algum tipo de restrição que iniba a flambagem no 1º modo. Generalizando, diríamos que a flambagem num dado modo só ocorre se as flambagens nos modos com cargas inferiores forem todos suprimidos. ■

Exemplo 14.12 Refaça Exemplo 14.11 supondo que a coluna seja engastada-livre (veja Figura 14.15a).

Sabendo-se que $Q = M' = -EIv'''$, as condições de contorno podem ser escritas na forma

$$v = v' = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad v''' + \alpha^2 v' = 0 \quad v'' = 0 \quad \text{em } x = L.$$

Observe que na extremidade livre a força cortante é igual a $Pv'(L)$, por se tratar do equilíbrio da coluna numa posição levemente deformada. De fato, a linearização em θ da quinta condição de contorno natural dada em (8.126) escreve-se

$$N\theta + Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = Pv' \quad \text{em } x = L$$

onde $N = -P$, como já explicado anteriormente, e $\theta = v'$ pela hipótese de Euler-Bernoulli.

Substituindo (14.18) nas condições de contorno, obtemos o sistema homogêneo

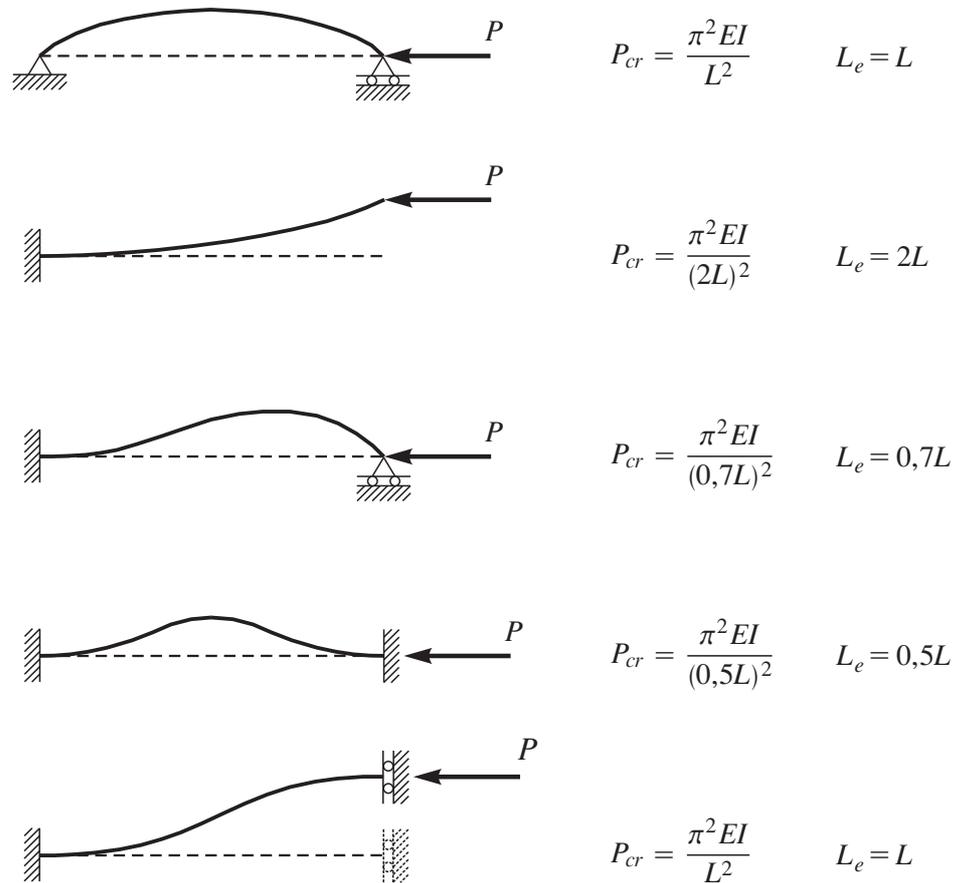


Figura 14.16 Influência das condições de contorno na flambagem de colunas de comprimento L e rigidez EI constante.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}, \quad (14.19)$$

onde o *comprimento efetivo* L_e representa o comprimento da coluna simplesmente apoiada que flamba com a mesma carga da coluna sob análise.

Comentários 14.6:

- A equação diferencial de quarta ordem (14.15) transforma-se na equação diferencial de segunda ordem

$$v'' + \alpha^2 v = c_1 x + c_2, \quad (14.20)$$

efetuando-se duas integrações consecutivas. Supondo que a coluna seja biapoiada (veja Exemplo 14.11), as constantes de integração c_1 e c_2 são nulas:

$$v(0) = v''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \quad v(L) = v''(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0. \quad (14.21)$$

O problema reduz-se então à solução de

$$v'' + \alpha^2 v = 0 \quad (14.22)$$

sujeito às condições de contorno

$$v(0) = 0 \quad v(L) = 0. \quad (14.23)$$

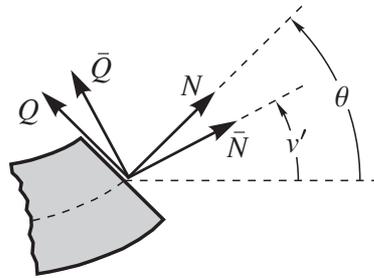


Figura 14.17 Força interna resultante decomposta nas forças: normal N e paralela Q à seção transversal; tangente \bar{N} e perpendicular \bar{Q} ao eixo da viga na configuração de equilíbrio.

Se a coluna não for biapoiada, podemos associar c_1 e c_2 a deslocamentos, rotações ou reações nas extremidades da coluna tornando ainda possível o uso da forma reduzida (14.20).

- Brush e Almroth (1975) mostram como linearizar um problema de flambagem, introduzindo pequenos incrementos no campo de deslocamento em torno do ponto de bifurcação ao longo da trajetória secundária. Mostram também um procedimento variacional de se efetuar essa linearização usando o *critério de Trefftz*.

Timoshenko Quando uma viga flamba, a força axial aplicada nas extremidades provoca força cortante numa seção transversal, além de momento fletor. A deformação devido à força cortante é desprezada na teoria de Euler-Bernoulli, mas considerada na de Timoshenko. As equações de equilíbrio linearizadas em v e θ aparecem na literatura de duas formas levemente diferentes para a teoria de Timoshenko.

Na primeira delas, empregam-se diretamente as equações (14.11):

$$(-P\theta + Q)' = 0 \quad M' + P(\theta - v') - Q = 0. \quad (14.24)$$

Na segunda forma, a força interna resultante é decomposta nas forças \bar{N} e \bar{Q} que são, respectivamente, tangente e perpendicular ao eixo da viga na configuração de equilíbrio (veja Figura 14.17). Neste caso, a rotação θ da seção transversal deve ser substituída nas equações de equilíbrio pela rotação v' do eixo da viga (veja Problema 14.18), simplificando (14.24) para

$$(-Pv' + \bar{Q})' = 0 \quad M' - \bar{Q} = 0. \quad (14.25)$$

Veja a semelhança entre (14.12) e (14.25).

A literatura traz várias discussões sobre a precisão da carga crítica obtida de (14.24) usando as relações constitutivas $M = EI\kappa$ e $Q = KG_A\gamma$, onde $\kappa = -\theta'$ e $\gamma = v' - \theta$, e da carga crítica obtida de (14.25) usando as mesmas relações mas trocando Q por \bar{Q} . Tais cargas ficaram conhecidas por cargas de Haringx e de Engesser, respectivamente. Após várias controversas, Bažant (2003) demonstra que as cargas de Haringx e de Engesser são, na verdade, idênticas desde que se usem corretamente as relações constitutivas $Q = KG_H A\gamma$ e $\bar{Q} = KG_E A\gamma$ onde os módulos de cisalhamento estão relacionados por

$$G_H = G_E - \frac{P}{KA}. \quad (14.26)$$

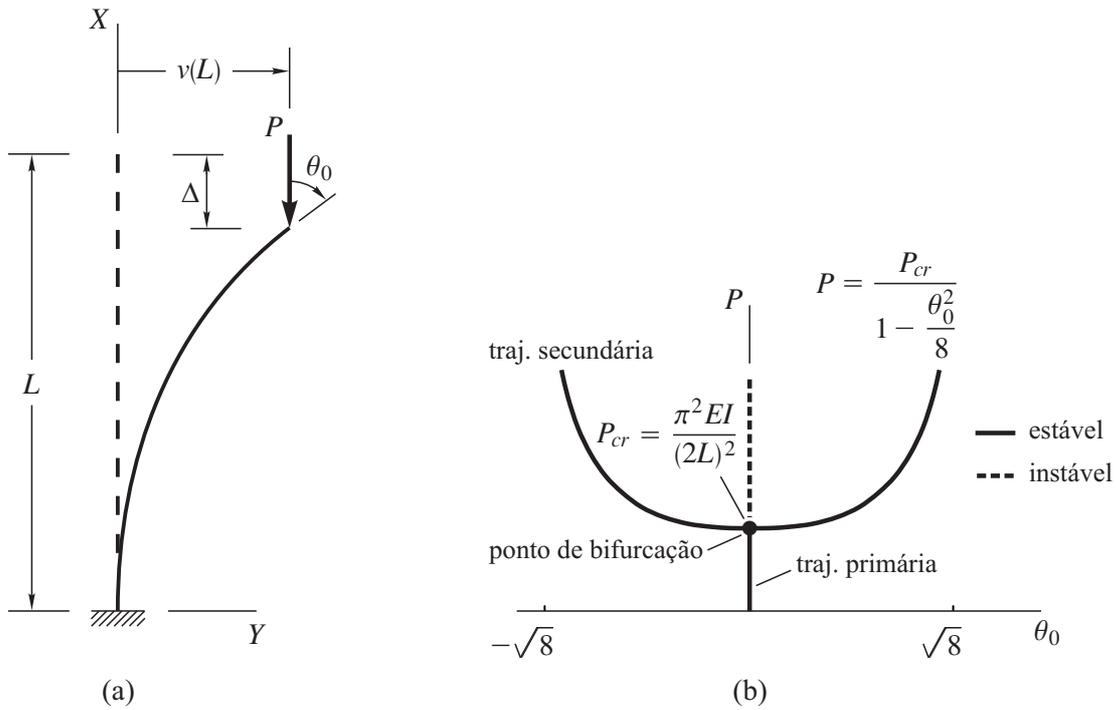


Figura 14.18 Exemplo 14.14: (a) coluna engastada-livre sob pequenas deformações, mas grandes deslocamentos e rotações; (b) trajetórias de equilíbrio.

Exemplo 14.14 Suponha que a coluna do Exemplo 14.12 possa sofrer grandes deslocamentos e rotações com a flambagem. Analise, nessas condições, a estabilidade do equilíbrio da trajetória primária e da trajetória secundária que emana de $P_{cr} = \pi^2 EI / 4L^2$, após transformar o problema num modelo discreto com um único grau de liberdade usando o método de Ritz.

Vamos primeiro identificar a energia de deformação U da coluna, supondo que é de Euler-Bernoulli ($\gamma = 0$) e tem eixo inextensível ($\epsilon_m = 0$). De (8.121),

$$\delta W_i = - \int_0^L M \delta \kappa dX.$$

Com a substituição de $M = EI\kappa$ e $\kappa = -\theta'$,

$$\delta W_i = - \int_0^L EI\theta' \delta \theta' dX = -\delta \int_0^L \frac{EI}{2} \theta'^2 dX \quad \Rightarrow \quad U = \int_0^L \frac{EI}{2} \theta'^2 dX.$$

A energia potencial de P é dada pelo trabalho realizado pela força quando a coluna se move da configuração de equilíbrio para a configuração inicial (veja Seção 7.5). Ou seja,

$$V = -P\Delta$$

onde a quantidade positiva $\Delta = -u(L)$ é o deslocamento na direção de X da extremidade livre da coluna, como indicado na Figura 14.18a. Fazendo $\epsilon_0 = 0$ (eixo inextensível) no elemento infinitesimal da Figura 8.21, escrevemos

$$(dX)^2 = (1 + u')^2 (dX)^2 + v'^2 (dX)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = (1 + u')^2 + v'^2 \quad \Rightarrow \quad u' = \sqrt{1 - v'^2} - 1$$

cuja integração fornece

$$u(L) = \int_0^{u(L)} du = \int_0^L (\sqrt{1 - v'^2} - 1) dX \quad \Rightarrow \quad \Delta = \int_0^L (1 - \sqrt{1 - v'^2}) dX.$$

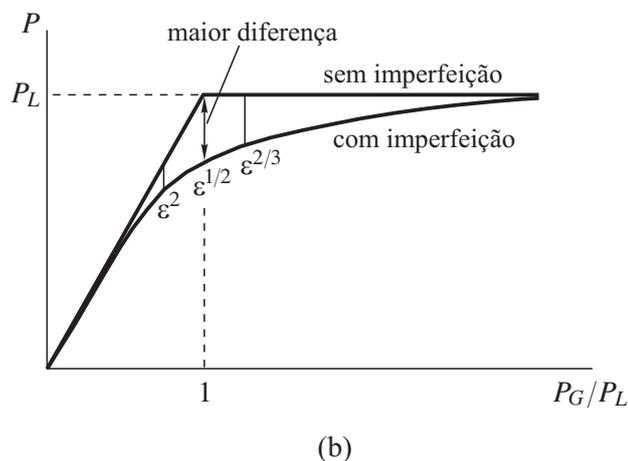
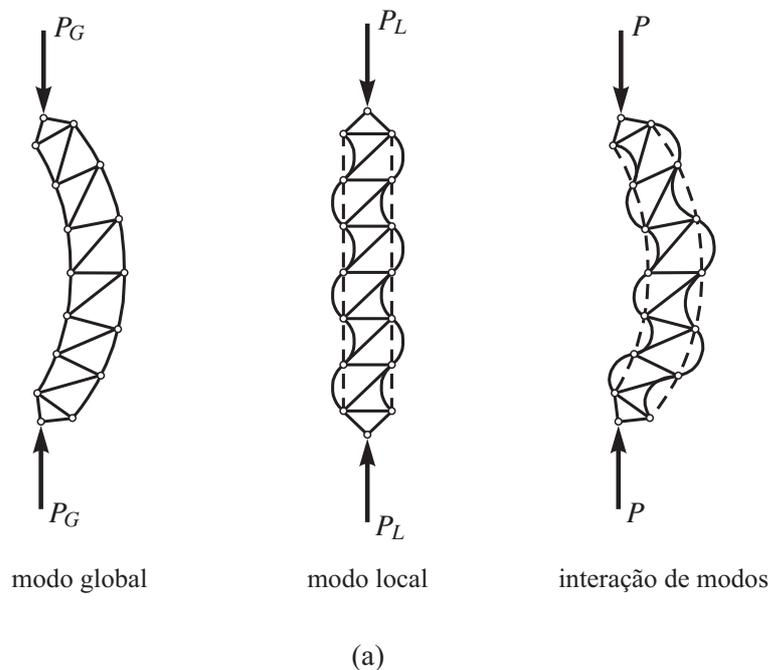


Figura 14.19 Coluna treçada: (a) modos global e local de flambagem, e interação não linear desses modos; (b) evolução da carga de flambagem da coluna com e sem imperfeição.

- A Figura 14.19 mostra dois dos possíveis modos de flambagem de uma coluna treçada, simplesmente apoiada, axialmente comprimida. Um dos modos, identificado como “global” (flambagem da coluna como um todo), ocorre para $P = P_G$; o outro modo, identificado como “local” (flambagem das barras verticais da treliça), ocorre para $P = P_L$. Esses modos, com suas correspondentes cargas, são obtidos do problema linearizado. Dependendo da geometria, a carga crítica da coluna é dada por $P_G < P_L$ ou por $P_L < P_G$. Imediatamente após a flambagem, a não linearidade faz os modos interagirem numa intensidade que depende do quanto as cargas P_G e P_L estão próximas uma da outra. Um esboço dessa interação é também indicado na figura. Bažant e Cedolin (2010) mostram que a sensibilidade da coluna a uma imperfeição na forma do modo local depende da interação dos modos. Para $P_G < P_L$ (mas próximo de P_L), a coluna tem uma sensibilidade branda a imperfeição, caracterizada pelo expoente 2 da amplitude ε

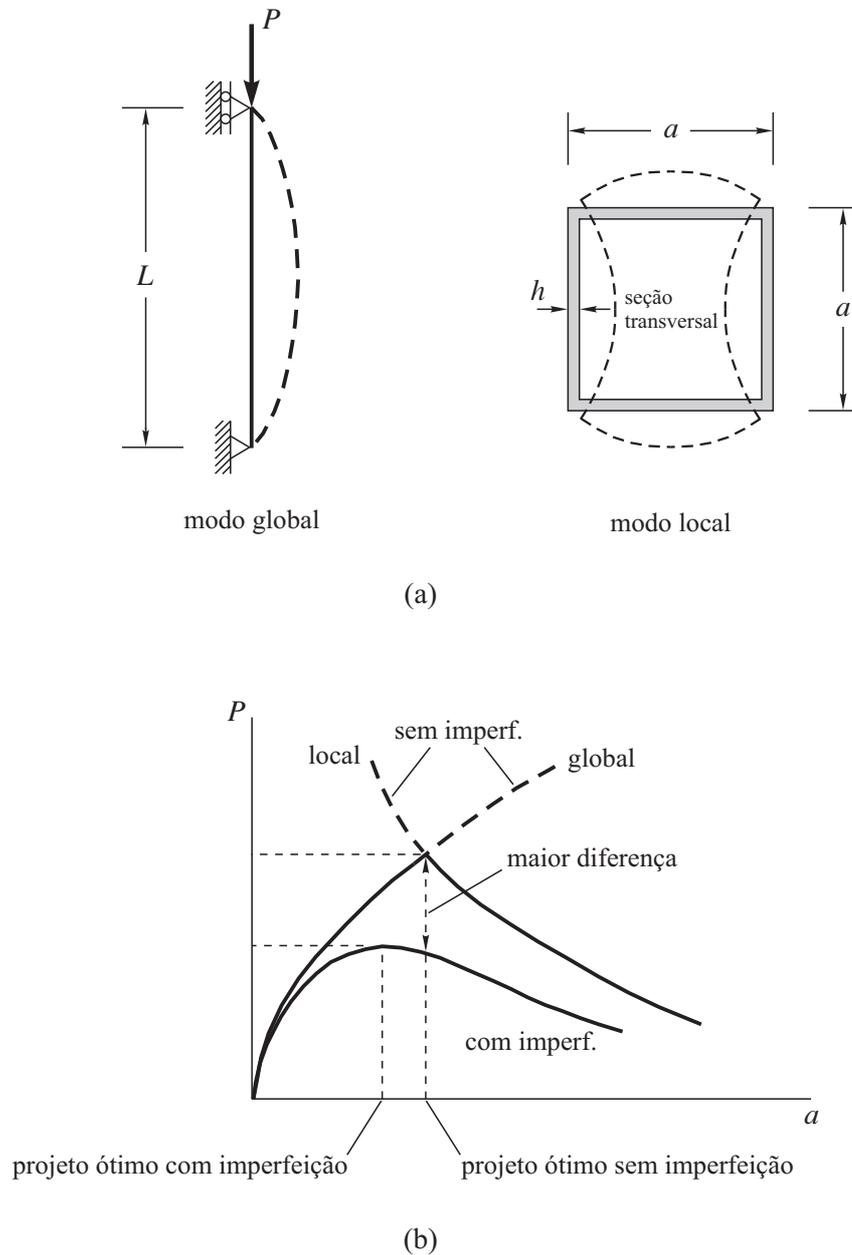


Figura 14.20 Coluna tubular: (a) modos global e local de flambagem; (b) projetos ótimos com e sem imperfeição.

da imperfeição; para $P_G > P_L$ (mas próximo de P_L), a coluna tem uma sensibilidade forte a imperfeição, caracterizada pelo expoente $2/3$; para $P_G = P_L$, ou seja, quando as cargas em que a coluna flamba nos modos global e local coincidem, a sensibilidade a imperfeição é severa, caracterizada pelo expoente $1/2$.

- Um exemplo semelhante ao da coluna treliçada e que merece ser comentado é o da otimização da coluna tubular, simplesmente apoiada, axialmente comprimida, mostrada na Figura 14.20 (Maquoi e Massonnet, 1976). A coluna tem seção transversal quadrada de lado a e paredes de espessura h . Fixando-se o peso da coluna, por manter constantes seu comprimento L e a área $4ah$ da seção transversal, a carga aplicada P é maximizada em relação à dimensão a e sob a restrição de não haver flambagem. Com o aumento de a , a rigidez de flexão da coluna aumenta

Apêndice A

Série de Fourier

A inclusão desse apêndice se deve à importância da série de Fourier, e de alguns conceitos que ela envolve, em várias passagens do livro.

A.1 Preliminares

Os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são *linearmente independentes* se

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0. \quad (\text{A.1})$$

Caso contrário, são *linearmente dependentes*.

Um *espaço vetorial* tem dimensão n quando nele existe um número máximo de n vetores linearmente independentes. Quaisquer $n+1$ vetores desse espaço serão linearmente dependentes. Considere, especificamente, o espaço vetorial de dimensão 3 do qual extraímos os vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ linearmente independentes, não necessariamente ortogonais ou unitários. Se \mathbf{r} é um elemento do espaço, então $\mathbf{r}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ são linearmente dependentes:

$$a\mathbf{r} + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \quad a \neq 0 \quad (\text{A.2})$$

ou

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 \quad r_i = -\frac{a_i}{a}. \quad (\text{A.3})$$

Assim, qualquer vetor do espaço pode ser expresso por uma combinação linear de \mathbf{e}_i . Dizemos que os vetores \mathbf{e}_i formam uma *base* para o espaço e que os números r_i são as *componentes* de \mathbf{r} nessa base (às vezes r_i são chamados de *componentes escalares* e $r_i\mathbf{e}_i$ de *componentes vetoriais*). A Figura A.1 traz uma representação geométrica do vetor.

Esse mesmo conceito usado para vetores pode ser estendido a funções. Considere, por exemplo, o espaço formado pelos polinômios de terceiro grau ou inferior na variável x . É um espaço de dimensão 4 por conter um máximo de quatro funções linearmente independentes. Se escolhermos $1, x, x^2, x^3$ como sendo essas funções, percebemos que formam uma base para o espaço pois qualquer elemento é expresso pela combinação linear

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3. \quad (\text{A.4})$$

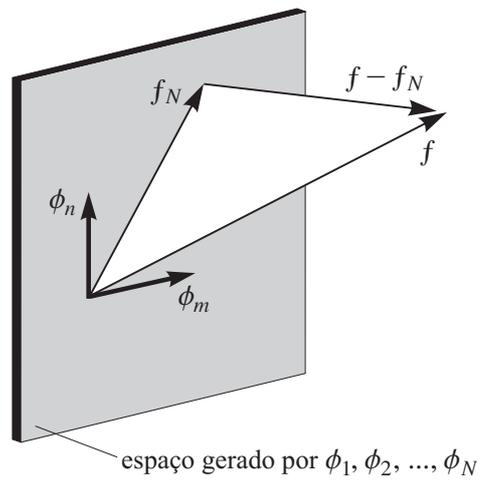


Figura A.2 Esboço de $f(x)$ e $f_N(x)$ como vetores.

direção de \mathbf{e}_1 , por exemplo, A_1 é a componente de $f_A(x)$ na direção de $\phi_1(x)$ ($a_1 = \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{e}_1$; $A_1 = \int_a^b f_A(x)\phi_1(x)dx$). ■

Exemplo A.2 Mostre que os elementos de um conjunto ortogonal $\{\phi_i\}$ são linearmente independentes.

De fato,

$$a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b (a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots) \phi_m(x)dx = 0.$$

Usando (A.6) e (A.7),

$$a_m \int_a^b \phi_m^2(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad a_m = 0. \quad \blacksquare$$

Considere uma função $f(x)$, definida no mesmo intervalo $a \leq x \leq b$ do conjunto $\{\phi_i\}$, e o espaço gerado pelas N primeiras funções desse conjunto. Pergunta-se: que elemento do espaço mais se aproxima de $f(x)$? Noutras palavras, que elemento

$$f_N(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_N\phi_N(x) = \mathbf{c}^T \bar{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{A.8})$$

faz o “vetor erro” $f(x) - f_N(x)$ ser o de menor comprimento? Definimos aqui $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N]^T$ e $\bar{\boldsymbol{\phi}} = [\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \dots \ \phi_N(x)]^T$.

Um esboço de $f(x)$ e $f_N(x)$ é mostrado na Figura A.2. Minimizar o comprimento implica minimizar o quadrado do comprimento, também conhecido como *erro quadrático*

$$\Delta_N = \int_a^b (f(x) - f_N(x))^2 dx \quad (\text{A.9})$$

da aproximação de $f(x)$ por $f_N(x)$. No ponto de mínimo local,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_N}{\partial c_m} &= \frac{\partial}{\partial c_m} \int_a^b (f(x) - f_N(x))^2 dx = -2 \int_a^b (f(x) - f_N(x)) \frac{\partial f_N(x)}{\partial c_m} dx \\ &= -2 \int_a^b f(x)\phi_m(x)dx + 2 \sum_{i=1}^N c_i \int_a^b \phi_i(x)\phi_m(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Com a ortogonalidade das componentes de $\bar{\boldsymbol{\phi}}$, obtemos

obtemos

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx - \sum_{i=1}^N c_i \int_a^b \phi_i(x)\phi_m(x)dx = 0$$

que equivale a (A.10). ■

Perceba do exemplo anterior que os coeficientes c_m podem ser diretamente obtidos multiplicando ambos os membros de

$$f(x) \approx f_N(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_N\phi_N(x) \quad (\text{A.17})$$

por $\phi_m(x)$ e integrando, em seguida, o resultado no domínio. A ortogonalidade permite que a determinação de c_m seja simples como em (A.12), evitando assim a solução do sistema de equações (A.13).

Dizemos que a aproximação (A.17), com coeficientes dados em (A.12), contém os N primeiros termos da *série de Fourier* de $f(x)$ em relação ao conjunto $\{\phi_i\}$. Apesar de ser a melhor aproximação de $f(x)$ no sentido dos *mínimos quadrados* (minimiza Δ_N), nada podemos afirmar por enquanto sobre a convergência de $f_N(x)$ para $f(x)$ com a inclusão de mais elementos de $\{\phi_i\}$. Esperamos, no entanto, que a ampliação do espaço, ou seja, a inclusão de mais elementos de $\{\phi_i\}$ em (A.17), resulte numa melhor aproximação.

Se a série converge segundo o erro quadrático

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0 \quad (\text{A.18})$$

para um certo espaço de funções, o conjunto $\{\phi_i\}$ utilizado é dito *completo* em $a \leq x \leq b$ para o espaço de funções considerado. Isto não significa que as funções ϕ_i formem uma base para o espaço a que $f(x)$ pertence, pois se formassem não seriam em número infinito envolvendo questões de convergência. Por um conjunto $\{\phi_i\}$ completo devemos apenas entender que é um conjunto suficientemente rico em funções capaz de prover uma convergência segundo (A.18).

A.2 Série trigonométrica

É tradicional usar o conjunto de funções trigonométricas

$$1, \cos m\pi x/L, \sin m\pi x/L \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.19})$$

na expansão em série de Fourier de $f(x)$ definida em $-L \leq x \leq L$. Esse conjunto é ortogonal em qualquer intervalo de comprimento $2L$. A expansão

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right), \quad (\text{A.20})$$

em vista de (A.12), tem coeficientes

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\int_{-L}^L f(x)(1)dx}{\int_{-L}^L (1)^2 dx} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)dx \quad a_m = \frac{\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx}{\int_{-L}^L \cos^2 \frac{m\pi x}{L} dx} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx$$

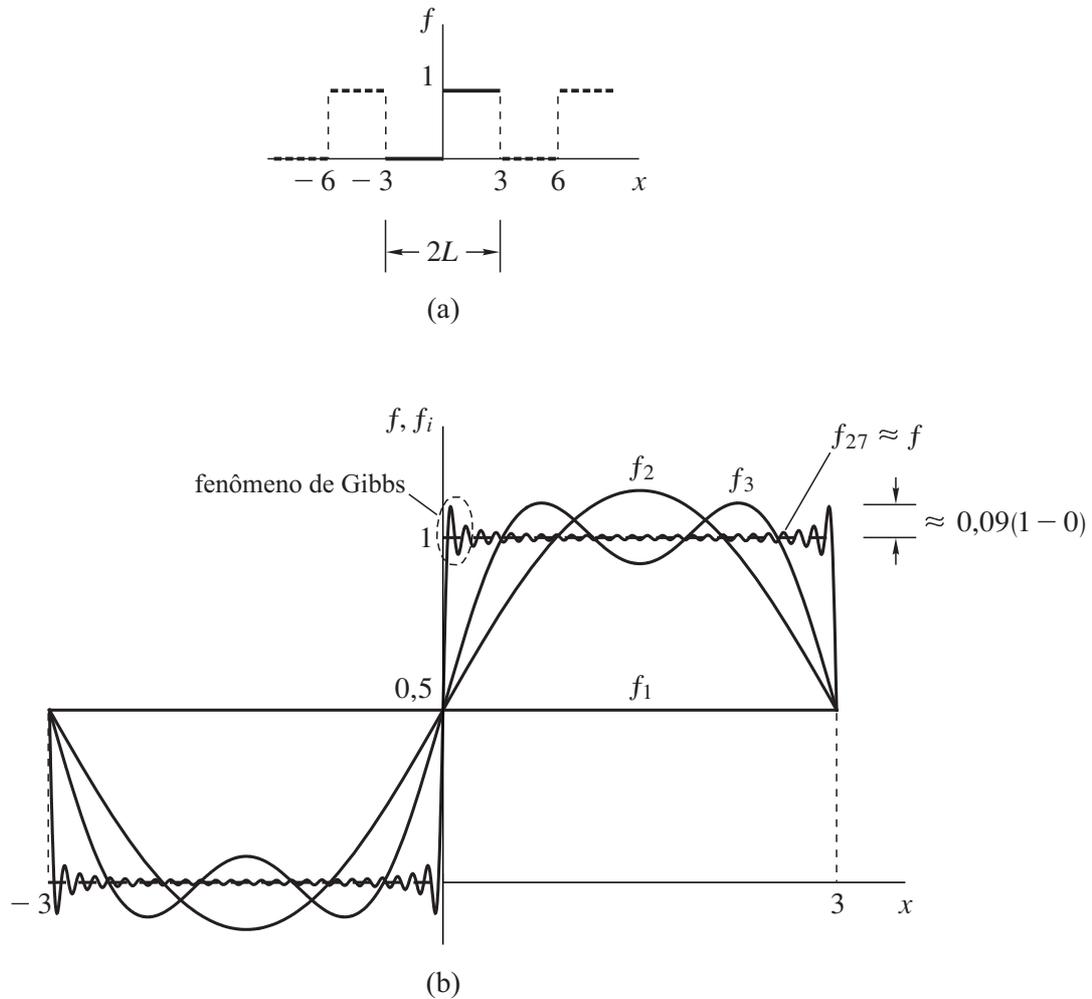


Figura A.3 Exemplo A.4: (a) função estendida para a esquerda e para a direita do intervalo $-3 \leq x \leq 3$, repetindo-se igualmente com período $2L = 6$; (b) convergência da série de Fourier para $f(x)$ e o efeito Gibbs em torno das descontinuidades.

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \quad f_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} \quad f_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{3} \right)$$

$$f_{27}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{3} + \dots + \frac{1}{51} \operatorname{sen} \frac{51\pi x}{3} \right)$$

está na Figura A.3b. Os erros quadráticos relativos associados a f_2 , f_3 e f_{27} são, respectivamente,

$$e_2 = \sqrt{\frac{\int_{-3}^3 (f_2 - f)^2 dx}{\int_{-3}^3 f^2 dx}} = 30,78\% \quad e_3 = 22,29\% \quad e_{27} = 6,24\%$$

Observe que a série converge para onde a função estendida é contínua e para a média $(0 + 1)/2 = 0,5$ de seus valores à esquerda e à direita nos pontos de descontinuidade (veja, por exemplo, $x = -3$, $x = 0$ e $x = 3$). Observe também que a série oscila muito na vizinhança das descontinuidades com a inclusão de mais termos, como mostra $f_{27}(x)$. O aumento do número de termos estreita a região onde ocorre as oscilações, mas não reduz o pico que se forma adjacente à descontinuidade. Em vez disso, o valor da série no pico estabiliza-se numa diferença para o correspondente valor da função em torno

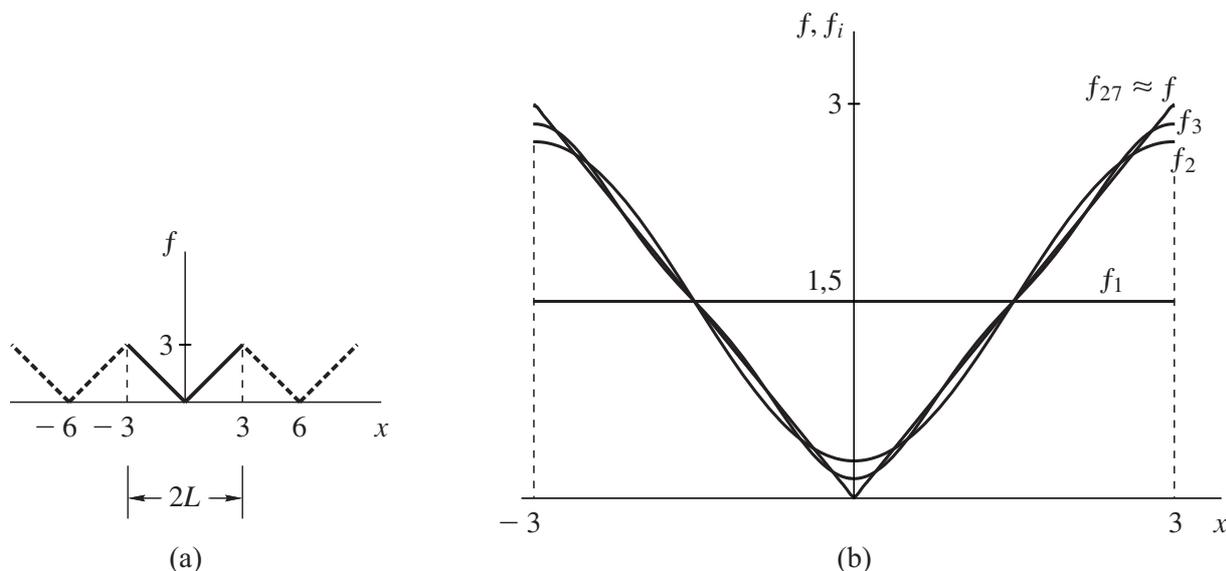


Figura A.4 Exemplo A.5: (a) função estendida para a esquerda e para a direita do intervalo $-3 \leq x \leq 3$, repetindo-se igualmente com período $2L = 6$; (b) convergência da série de Fourier para $f(x)$.

de 9% do valor da descontinuidade. À medida que o pico passa por uma abscissa ao aproximar-se da descontinuidade, ocorrerá convergência naquela abscissa. Esse comportamento, também comum a outros tipos de série (Jerri, 1998), é conhecido por *fenômeno de Gibbs*¹ e pode ser visto como um defeito de convergência. ■

Exemplo A.5 Refaça o Exemplo A.4 supondo

$$f(x) = |x| \quad \text{para } -3 \leq x \leq 3.$$

A representação gráfica da função e de sua extensão periódica com período $2L = 6$ está na Figura A.4a. De (A.21),

$$a_0 = \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^0 (-x) dx + \int_0^3 x dx \right) = 3$$

$$a_m = \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^0 (-x) \cos \frac{m\pi x}{3} dx + \int_0^3 x \cos \frac{m\pi x}{3} dx \right)$$

$$= -\frac{6(1 - \cos m\pi)}{m^2\pi^2} = \begin{cases} -\frac{12}{m^2\pi^2} & m = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$b_m = \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^0 (-x) \sin \frac{m\pi x}{3} dx + \int_0^3 x \sin \frac{m\pi x}{3} dx \right) = 0.$$

O resultado $b_m = 0$ já era esperado pois $f(x)$ é par. A série de Fourier procurada é

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{3}.$$

¹Josiah Willard Gibbs, físico-matemático norte-americano nascido em New Haven em 1839, falecido na mesma cidade em 1903.

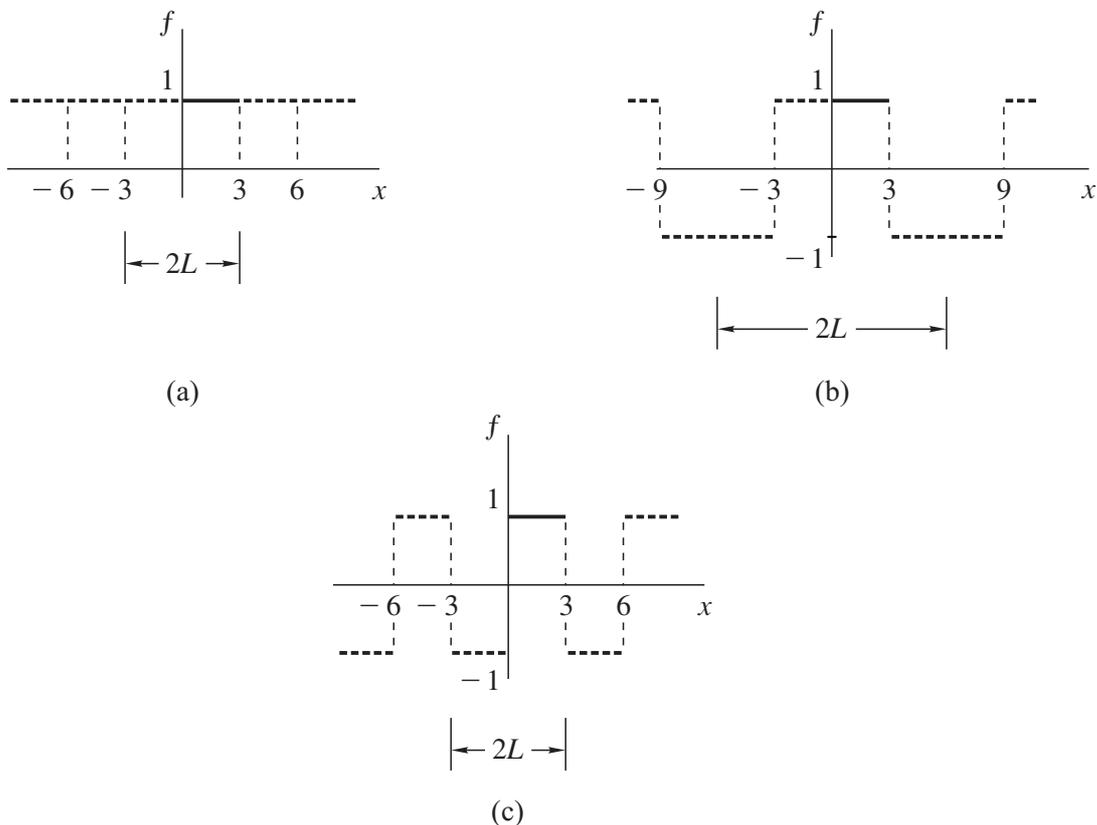


Figura A.5 Exemplo A.6: a função $f(x) = 1$, definida no domínio $0 \leq x \leq 3$, é periodicamente expandida como uma função: (a) par de período $2L = 6$; (b) par de período $2L = 12$; (c) ímpar de período $2L = 6$.

e

$$a_0 = a_m = 0 \quad b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx. \quad (\text{A.25})$$

Exemplo A.6 Obtenha a expansão da função

$$f(x) = 1 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 3$$

em série só de cossenos e em série só de senos.

Na expansão em série de cossenos, vamos primeiro tratar a extensão periódica de $f(x)$ como a função par mostrada na Figura A.5a, com período $2L = 6$. De (A.23), $b_m = 0$ e

$$a_0 = \frac{2}{3} \int_0^3 1 dx = 2 \quad a_m = \frac{2}{3} \int_0^3 1 \cdot \cos \frac{m\pi x}{3} dx = 0.$$

A série resultante

$$f(x) = 1$$

contém apenas um termo não nulo e é exata.

Se a extensão de $f(x)$ for ainda tratada como uma função par, mas na forma indicada na Figura A.5b, com período $2L = 12$, então $b_m = 0$ e

$$a_0 = \frac{2}{6} \left[\int_0^3 1 dx + \int_3^6 (-1) dx \right] = 0$$

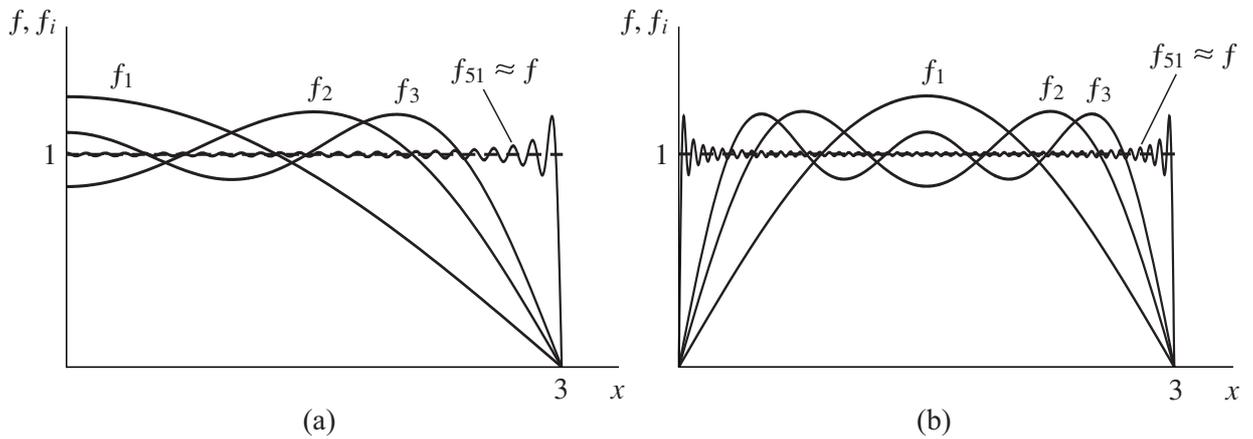


Figura A.6 Exemplo A.6: aproximação da função $f(x) = 1$, definida no domínio $0 \leq x \leq 3$, em: (a) série de cossenos; (b) série de senos.

$$\begin{aligned}
 a_m &= \frac{2}{6} \left[\int_0^3 1 \cdot \cos \frac{m\pi x}{6} dx + \int_3^6 (-1) \cos \frac{m\pi x}{6} dx \right] \\
 &= \frac{4}{m\pi} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} = \begin{cases} \frac{4}{m\pi} & m = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{4}{m\pi} & m = 3, 7, 11, \dots \\ 0 & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{m\pi} (-1)^{(m-1)/2} & m = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

A série de Fourier procurada é

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi x}{6}.$$

A representação gráfica das aproximações

$$f_1(x) = \frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi x}{6} \quad f_2(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{6} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{6} \right)$$

$$f_3(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{6} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{6} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{6} \right)$$

$$f_{51}(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{6} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{6} + \dots + \frac{1}{101} \cos \frac{101\pi x}{6} \right)$$

está na Figura A.6a. A aproximação f_{51} exhibe claramente o fenômeno de Gibbs nas proximidades de $x = 3$.

Na expansão em série de senos, vamos tratar a extensão de $f(x)$ como a função ímpar de período $2L = 6$ indicada na Figura A.5c. De (A.25), $a_0 = a_m = 0$ e

$$b_m = \frac{2}{3} \int_0^3 (1) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{3} dx = \frac{2(1 - \cos m\pi)}{m\pi} = \begin{cases} \frac{4}{m\pi} & m = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

A série de Fourier procurada é

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{3}.$$

As representação gráfica das aproximações

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} & f_2(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{3} \right) \\ f_3(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{3} + \frac{1}{5} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{3} \right) \\ f_{51}(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{3} + \dots + \frac{1}{101} \operatorname{sen} \frac{101\pi x}{3} \right) \end{aligned}$$

é mostrada na Figura A.6b. O fenômeno de Gibbs aparece em f_{51} , nas proximidades de $x = 0$ e $x = 3$, como já esperado. ■

A série identificada no Exemplo A.4 e as duas séries identificadas no Exemplo A.6 são três diferentes aproximações, igualmente válidas em $0 \leq x \leq 3$, para a função $f(x) = 1$.

A.3 Série em duas variáveis

A idéia da expansão em série de Fourier para uma função de uma única variável pode ser estendida para funções de duas ou mais variáveis. Por exemplo, se o conjunto de funções $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$, $\phi_3(x, y)$, ... é ortogonal em $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, então

$$\int_c^d \int_a^b \phi_m(x, y) \phi_n(x, y) dx dy = 0 \quad \text{para } m \neq n. \quad (\text{A.26})$$

Com base nesta propriedade, a representação

$$f(x, y) = c_1 \phi_1(x, y) + c_2 \phi_2(x, y) + \dots + c_N \phi_N(x, y) \quad (\text{A.27})$$

para $f(x, y)$, definida em $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, tem coeficientes

$$c_m = \frac{\int_c^d \int_a^b f(x, y) \phi_m(x, y) dx dy}{\int_c^d \int_a^b \phi_m^2(x, y) dx dy} \quad (\text{A.28})$$

onde supõe-se que nenhuma das funções é identicamente nula ($\int_c^d \int_a^b \phi_m^2(x, y) dx dy > 0$).

A expansão em série trigonométrica de $f(x, y)$, definida em $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, é feita por meio do conjunto

Apêndice B

Deformação em coordenadas curvilíneas

Um conjunto de coordenadas curvilíneas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pode ser empregado para localizar um ponto no espaço tridimensional, em vez das coordenadas cartesianas (retilíneas) (X_1, X_2, X_3) . Se $\alpha_1 = c_1$, $\alpha_2 = c_2$ e $\alpha_3 = c_3$ definem um ponto P , qualquer mudança nos valores das constantes c_i definirá um outro ponto no espaço (veja Figura B.1a). As relações deformação-deslocamento deduzidas no Capítulo 2 com relação a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $X_1 X_2 X_3$ serão, agora, deduzidas com relação a um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

Se $\mathbf{X}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é o vetor posição de um ponto no espaço tridimensional, então os vetores unitários tangentes às curvas coordenadas α_i que passam pelo ponto são dados por

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{X} / \partial \alpha_i}{|\partial \mathbf{X} / \partial \alpha_i|} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.1})$$

onde

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha_i} \right| \quad (\text{B.2})$$

são os parâmetros de Lamé. Diferentemente do que ocorre num sistema de coordenadas retilíneas, os vetores unitários \mathbf{e}_i não são constantes porque variam de direção de ponto para ponto. Localmente, num ponto fixo, os vetores definem a base de um sistema cartesiano. As componentes da diferencial

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 = h_1 d\alpha_1 \mathbf{e}_1 + h_2 d\alpha_2 \mathbf{e}_2 + h_3 d\alpha_3 \mathbf{e}_3, \quad (\text{B.3})$$

segundo as direções de \mathbf{e}_i no ponto P , estão indicadas na Figura B.1b. Podemos expressá-la na forma matricial

$$d\mathbf{X} = [h_1 d\alpha_1 \quad h_2 d\alpha_2 \quad h_3 d\alpha_3]^T \quad (\text{B.4})$$

para se tirar proveito nas manipulações algébricas futuras, visto que adotaremos um sistema $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ ortogonal ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ para $i \neq j$).

Sejam $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $Q(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2, \alpha_3 + d\alpha_3)$ dois pontos materiais vizinhos na configuração inicial de um sólido, identificados pelos vetores posições \mathbf{X} e $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$. Quando as forças

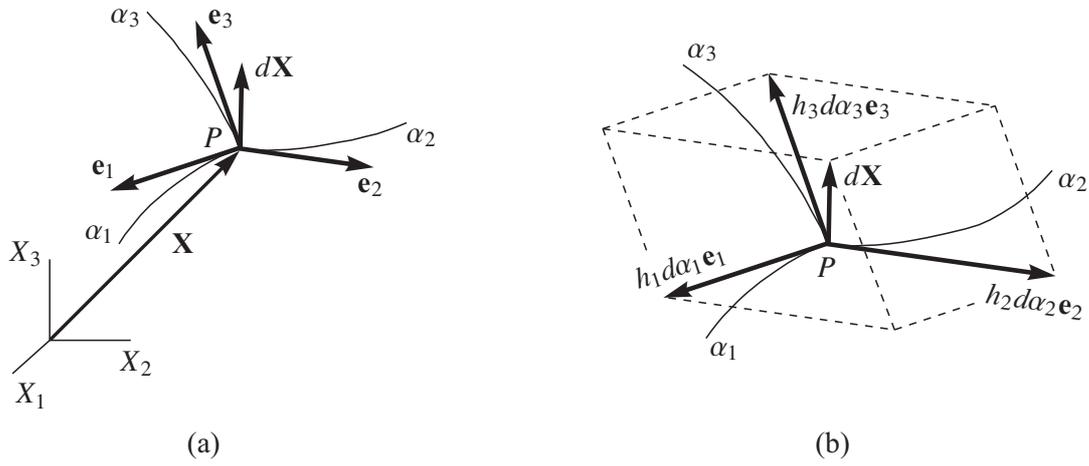


Figura B.1 (a) Ponto P localizado no espaço tridimensional pelo vetor posição $\mathbf{X}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; (b) componentes de $d\mathbf{X}$ segundo as direções de \mathbf{e}_i no ponto P .

externas são aplicadas, o sólido deforma-se e os pontos P e Q deslocam-se de \mathbf{u} e $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ ocupando as novas posições p e q , respectivamente. Os vetores posições de p e q são \mathbf{x} e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$. Da Figura 2.3,

$$\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{X}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (\text{B.5})$$

ou

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + d\mathbf{u}. \quad (\text{B.6})$$

Para explicitar os vetores unitários na expressão

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_3} d\alpha_3, \quad (\text{B.7})$$

a exemplo do que é feito em (B.3) com $d\mathbf{X}$, vamos escrever o deslocamento

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{B.8})$$

do ponto P em função das componentes u_1 , u_2 e u_3 segundo as direções de \mathbf{e}_i . Como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_1 + u_1 \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_2 + u_2 \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_3 + u_3 \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \alpha_i}, \quad (\text{B.9})$$

percebemos que existe uma tarefa intermediária a ser cumprida que é obter as derivadas $\partial \mathbf{e}_i / \partial \alpha_j$ dos vetores unitários. Executemos essa tarefa a seguir.

Determinemos as componentes de $\partial \mathbf{e}_1 / \partial \alpha_1$ segundo \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 . A componente segundo \mathbf{e}_1 é nula, pois $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ implica $\mathbf{e}_1 \cdot \partial \mathbf{e}_1 / \partial \alpha_i = 0$. A projeção segundo \mathbf{e}_2 é

$$\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_1} = -\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_1}. \quad (\text{B.10})$$

Da identidade

$$\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (h_2 \mathbf{e}_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (h_1 \mathbf{e}_1), \quad (\text{B.11})$$

temos que

$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (h_1 \mathbf{e}_1) - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} \mathbf{e}_2. \quad (\text{B.12})$$

Apêndice C

Deformação e movimento de corpo rígido

O Exemplo 2.4 mostra que um sólido sob movimento de corpo rígido satisfaz

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_P) + \mathbf{x}_p, \quad (\text{C.1})$$

onde \mathbf{X}_P e \mathbf{x}_p são os vetores posições de um ponto P nas configurações inicial e atual, enquanto \mathbf{X} e \mathbf{x} são os vetores posições de um ponto qualquer nessas configurações. Quando os gradientes do deslocamento são pequenos em módulo comparados à unidade, o gradiente \mathbf{F} da transformação num movimento de corpo rígido pode ser expresso, segundo (2.64), na forma

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{I} + \mathbf{\Omega} \quad (\text{C.2})$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade e $\mathbf{\Omega}$ é o tensor pequena rotação. Substituindo (C.2) em (C.1),

$$\underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{X}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\mathbf{x}_p - \mathbf{X}_P}_{\mathbf{\Delta}} + \mathbf{\Omega} \underbrace{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_P)}_{\mathbf{r}}. \quad (\text{C.3})$$

Vemos que o deslocamento $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ do sólido compõe-se de duas parcelas: uma parcela $\mathbf{\Delta} = \mathbf{x}_p - \mathbf{X}_P$ oriunda da translação do ponto P e uma outra parcela $\mathbf{\Omega}\mathbf{r}$ oriunda da rotação do sólido em torno desse ponto. Denotamos por $\mathbf{r} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_P$ o vetor posição do sólido na configuração inicial em relação a P .

Considere, agora, uma casca submetida a um movimento de corpo rígido, para o qual os vetores

$$\mathbf{\Delta} = \Delta_1 \mathbf{e}_1 + \Delta_2 \mathbf{e}_2 + \Delta_n \mathbf{n} \quad \boldsymbol{\omega} = -\beta_2 \mathbf{e}_1 + \beta_1 \mathbf{e}_2 + \beta_n \mathbf{n} \quad (\text{C.4})$$

representam a translação e a rotação (pequena) referidas a um sistema ortogonal $\alpha_1 \alpha_2 \zeta$ arbitrário e o vetor posição da superfície média seja

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_n \mathbf{n}. \quad (\text{C.5})$$

Sabendo-se $\mathbf{\Omega}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (veja equação (2.65)), o campo de deslocamento da superfície média devido ao movimento de corpo rígido é

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Delta} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + w \mathbf{n} \quad (\text{C.6})$$

Índice remissivo

- Área
 - mudança de, 72
 - vetorial, 6, 37, 80
- Base, 469
 - condicionamento, 245
 - global, 268
 - local, 258, 283
 - mudança de, 10, 90, 379
 - ortogonalização, 244
 - ortonormal, 1, 470
- Bicortante, 194, 201
- Bimomento, 194, 204
- Braquistócrona, 133
- Cálculo variacional
 - lema fundamental, 129
 - operador, 127, 132
- Camada limite, 316
- Carga crítica, 427, 430, 432, 435, 440, 443, 446, 449, 452, 454, 464–467
- Cauchy
 - fórmula de, 8
 - tensor tensão, 9, 13
 - vetor tensão, 2, 13
- Centróide, 115, 198
- Cisalhamento
 - área efetiva, 179
 - centro de, 114
 - fator de correção, 178, 184, 198, 202, 319, 356
 - módulo de, 95
- Codazzi, relações de, 385, 386, 392, 393
- Colocação, método da, 227
- Compatibilidade, equações de, 58, 67
- Condição de contorno
 - essencial, 130, 231, 237, 310, 314, 400
 - geométrica, 105, 176, 196, 208, 310, 314, 400
 - mecânica, 105, 176, 196, 208, 310, 314, 400
 - natural, 130, 231, 237, 310, 314, 400
- Condicionamento, 245
- Configuração, 39
 - atual (ou corrente), 39
 - inicial, 39
- Constantes de engenharia, 94
- Constitutivas, equações
 - casca, 406, 410, 411
 - placa de Kirchhoff, 320
 - placa de Reisser-Mindlin, 319
 - sólido, 84, 86
 - viga de Euler-Bernoulli, 179, 199
 - viga de Timoshenko, 179, 199
- Continuidade C^r , 292
- Coordenada
 - euleriana (ou espacial), 39
 - generalizada, 143, 237
 - lagrangiana (ou material), 39
- Curva coordenada, 372, 381, 384, 391, 402