

## Capítulo 21

# Métodos de integração direta

Os métodos de integração direta fornecem resposta temporal para históricos temporais de carregamento que variam arbitrariamente no tempo. A princípio, os métodos diretos cumprem a mesma finalidade que o método de sobreposição modal, entretanto diversas diferenças notáveis devem ser apontadas entre a aplicabilidade de um e de outro:

1. O método de sobreposição modal, por ser baseado num procedimento de sobreposição, é restrito a problemas lineares, a menos de alguns artifícios específicos disponíveis na literatura, para situações específicas. Por outro lado, os métodos diretos são perfeitamente aplicáveis tanto a problemas lineares quanto não lineares, sendo que admitem uma ampla gama de tipos e intensidades de não linearidades.
2. No que se refere a problemas lineares, existe uma diferença entre análises de curta e de longa duração ao longo do tempo. A duração da análise é geralmente associada à duração da excitação. Pode-se identificar, grosso modo, dois tipos de análise quanto à duração:
  - (a) Excitação e análise de curta duração. O tempo de análise é associado ao tempo de decaimento do transiente de menor frequência após o fim da excitação. Nesse caso a integração direta é mais interessante (barata).
  - (b) Excitação e análise de longa duração. Por exemplo, são os casos de excitação periódicas e as aleatórias. Nesse caso a análise modal é mais interessante. Já a integração direta se torna muito cara, pois os incrementos do tempo devem ser muito pequenos para reduzir os erros numéricos de alongamento de período e decaimento das amplitudes, que vão se acumulando ao longo do tempo de integração.
3. Todo histórico de excitação pode ser decomposto em seu conteúdo de frequências, como uma combinação linear de muitas ou de infinitas excitações harmônicas, cada uma com sua amplitude e frequência. Em problemas dinâmicos de máquinas rotativas pode ocorrer que a frequência de excitação seja única, igual ao valor da rotação do componente. Em grande quantidade de outras situações, o histórico de carregamento é aleatório, porém definido apenas por uma faixa de frequências limitadas abaixo de certo valor,  $\omega_f$ , sendo que as amplitudes associadas às frequências superiores a essa são bastante pequenas. Deve-se lembrar que cada frequência natural da estrutura possui um amortecimento modal, que faz com que a resposta modal transiente se dissipe ao longo do tempo, conforme o fator  $e^{-\zeta\omega_j t}$ . Ocorre que pode ser provado que problemas com carregamentos de impacto, caracterizados por curta duração, excitam altas frequências da estrutura. Nesse caso, o custo de determinar uma grande quantidade de modos de vibrações torna ineficiente o uso do método de sobreposição modal, sendo mais adequados os métodos de integração direta. Adicionalmente, diversos problemas de impacto envolvem comportamento inelástico do material, além de grandes deslocamentos e deformações, isto é, são problemas não lineares, o que impede o uso de sobreposição modal. Por outro lado, em casos de carregamentos de longa duração, que sejam caracterizados por poucas frequências excitadas na estrutura, são adequados ao método de sobreposição modal.

4. Em resumo, tem-se a seguinte diretriz geral para o uso dos dois métodos:

Tipo de Problema:	Tempo de Excitação:	Método
Linear	De curta duração (tipo impacto elástico)	$\implies$ Métodos diretos
Linear	De longa duração	$\implies$ Sobreposição modal
Não linear	De qualquer duração	$\implies$ Métodos diretos

Apesar dos métodos diretos serem aplicáveis a problemas não lineares, sua formulação básica é melhor descrita num problema linear, quando diversos teoremas de estabilidade e de convergência podem ser mais facilmente deduzidos, e seu comportamento geral pode ser avaliado. Como será visto, em geral esses teoremas são baseados na decomposição modal da solução, o que pressupõe linearidade do problema. O conceito geral de um método de integração direta pode ser entendido sucintamente da seguinte forma. Considere uma equação diferencial ordinária, de coeficientes constantes, de segunda ordem, como por exemplo, a equação de movimento de um sistema massa-mola-amortecedor<sup>1</sup>

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = F(t) \quad \text{para } t > 0, \quad (21.1)$$

submetido às condições iniciais  $u(0) = u_o$  e  $\dot{u}(0) = v_o$  onde  $m$ ,  $c$  e  $k$  são a massa, o amortecimento e a rigidez da mola,  $F(t)$  é o histórico de força externa aplicada,  $u(t)$  é o histórico de deslocamento sofrido pela massa como resposta do carregamento  $F$ , do deslocamento inicial  $u_o$  e da velocidade inicial  $v_o$  aplicada à massa. Em lugar de buscar a solução analítica  $u(t)$ , busca-se obter uma aproximação por integração numérica. Isso é feito, inicialmente, particionando o domínio do tempo em intervalos de comprimento  $\Delta t$ , como na Figura 21.1, de forma que se tem a seqüência de instantes

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_1 &= \Delta t, \\ t_2 &= 2\Delta t, \\ &\vdots \\ t_n &= n\Delta t. \end{aligned} \quad (21.2)$$

Os métodos mais usados são sequenciais, também chamados métodos de marcha no tempo. Significa que a solução é obtida instante a instante ao longo do tempo, a partir dos dados iniciais em  $t_0$ . Então, num dado ponto da solução se tem conhecidas aproximações para a solução desde  $t_0$  até um instante  $t_n$ . Os diferentes métodos proverão procedimentos para aproximar a solução no instante  $t_{n+1}$ , usando as informações já obtidas em um ou em alguns dos instantes anteriores,  $t_n$ ,  $t_{n-1}$ , etc. Numa situação mais geral, os intervalos de tempo não necessitam ser iguais, mas usaremos essa simplificação aqui para facilidade de exposição.

Em cada instante  $t_n$  a equação de movimento deve ser satisfeita:

$$m \ddot{u}_n + c \dot{u}_n + k u_n = F_n. \quad (21.3)$$

Diferentes métodos de integração existem, e todos eles tomam como base o conhecimento da solução em uma certa quantidade de instantes anteriores,  $t_{n-k}$ ,  $\dots$ ,  $t_{n-2}$ ,  $t_{n-1}$  e  $t_n$ , para produzirem a aproximação da solução em  $t_{n+1}$ . Dentre os métodos clássicos, podem-se citar o método de diferenças centrais, o de Newmark e o de Wilson, que descreveremos aqui. Inicialmente faremos uma descrição básica do método mais simples, o de diferenças centrais.

<sup>1</sup>De fato, qualquer equação diferencial ordinária no tempo, com as devidas condições iniciais, pode ter sua solução estimada via um método adequado de integração direta.

## 21.1 Método de diferenças centrais

Considere a Figura 21.1, para um problema unidimensional, onde se designa o deslocamento  $u(t)$  e as velocidades  $\dot{u}(t)$  em três instantes sequenciais,  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  e  $t_{n+1}$ . Pode-se obter uma aproximação das velocidades no instante  $t_{n-1/2}$  (no ponto médio entre  $t_{n-1}$  e  $t_n$ ) e no instante  $t_{n+1/2}$  (no ponto médio entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ ) tomando a velocidade média em cada intervalo:

$$\dot{u}_{n-1/2} \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \dot{u}_{n+1/2} \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t}. \quad (21.4)$$

A aceleração e a velocidade em  $t_n$  são aproximada pela variação das velocidades acima:

$$\ddot{u}_n = \frac{\dot{u}_{n+1/2} - \dot{u}_{n-1/2}}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \dot{u}_n = \frac{\dot{u}_{n+1/2} + \dot{u}_{n-1/2}}{2}. \quad (21.5)$$

Substituindo (21.4), a aceleração e a velocidade ficam em termos dos deslocamentos nos três instantes:

$$\ddot{u}_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (21.6)$$

e

$$\dot{u}_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \quad (21.7)$$

Substituindo as aproximações (21.6) e (21.7) em (21.3), a equação do movimento fica:

$$\underbrace{\left[ \frac{1}{\Delta t^2} m + \frac{1}{2\Delta t} c \right]}_A u_{n+1} = \underbrace{\left[ F_n - k u_n + \frac{1}{\Delta t^2} m (2u_n - u_{n-1}) + \frac{1}{2\Delta t} c u_{n-1} \right]}_{R_n} \Rightarrow \boxed{A u_{n+1} = R_n} \quad (21.8)$$

Observa-se então que a solução  $u_{n+1}$  é obtida a partir de  $A$  e de  $R_n$ , sendo que  $R_n$  é computado em termos de valores previamente determinados,  $u_{n-1}$  e  $u_n$ . Outro aspecto nessa dedução, é que ela é idêntica ao caso de um sistema de equações diferenciais, onde  $K$ ,  $C$  e  $M$  tornam-se matrizes de ordem  $N$ , e  $u_n$  é um vetor de ordem  $N$ . Então, para um problema de  $N$  graus de liberdade, (21.8) fica:

$$\underbrace{\left[ \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right]}_A \mathbf{u}_{n+1} = \underbrace{\left[ \mathbf{F}_n - \underbrace{\mathbf{K} \mathbf{u}_n}_{\mathbf{f}_n} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} (2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}) + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \mathbf{u}_{n-1} \right]}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow \boxed{\mathbf{A} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{R}_n} \quad (21.9)$$

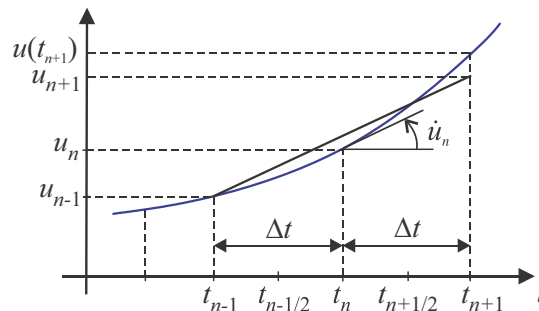


Figura 21.1: Discretização de uma função ao longo do tempo por diferenças centrais.

## 21.2 Método de diagonalização de massa (“mass lumping”)

Claramente, raros são os modelos que possuem matrizes de inércia naturalmente diagonais (os casos em que isso ocorre geralmente são sistemas físicos em série, como o do exemplo da Figura 18.1). Em geral, o MEF produz matrizes não diagonais. Entretanto, desde o início do desenvolvimento do MEF em dinâmica, ocorreu a procura por esquemas que convertessem a **matriz consistente** (completa, obtida diretamente do MEF), em **matrizes diagonalizadas** (“lumped mass matrix”). Qualquer método existente envolve em perda de informação em relação à matriz consistente, de forma que gera um certo erro adicional na resposta dinâmica. Entretanto, um método para ser aceitável deve ser tal que a matriz diagonalizada represente exatamente a massa do elemento. Conforme a malha é refinada, mesmo elementos que contêm graus de liberdade de rotação passam a se comportar apenas em translação, como se fosse uma massa pontual. Assim, para partículas deve ser satisfeita: o produto matricial  $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}$  do MEF deve gerar a força de inércia correta no elemento, conforme a segunda lei de Newton  $m\mathbf{a} = \mathbf{f}$ , quando  $\ddot{\mathbf{u}}$  representar a aceleração de movimento translacional de corpo rígido.

### Procedimento HRZ para diagonalização de matriz de inércia

Um método empírico bastante utilizado é o **procedimento HRZ**, proposto por Hinton, Rock e Zienkiewicz em 1976 [49]. As etapas de cálculo são realizadas durante o cálculo do elemento, antes de ser feita a sobreposição das matrizes globais. As etapas são as seguintes:

<b>Etapa 1</b> -	Calcular a matriz de inércia consistente do elemento, apenas em seus termos diagonais, $m_{jj}$ ;
<b>Etapa 2</b> -	Para cada direção cartesiana $d$ , selecionar os graus de liberdade (g.l.) que contribuem para o movimento naquela direção. Desse conjunto, identifique os g.l. translacionais e os rotacionais.
<b>Etapa 3</b> -	Determinar o valor $s_d$ como a soma de todos os termos na diagonal associados aos g.l. translacionais na direção $d$ . (Ignorar nessa etapa os graus de liberdade de rotação.)
<b>Etapa 4</b> -	Multiplicar todos os valores na diagonal correspondentes a graus de liberdade na direção $d$ por $m/s$ (tanto os translacionais quanto os rotacionais). $m$ é a massa do elemento.

Por exemplo, consideremos a matriz diagonalizada do **elemento de barra** orientado na direção global  $x$ , eq.(18.22), obtida por esse procedimento:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho AL_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (21.14)$$

A diagonal é:  $m/3, m/3$ , onde  $m = \rho AL_e$ . é a massa do elemento. Ambos os graus de liberdade são translacionais, na mesma direção, axial  $x$ .  $s = 2m/3$ . Dividindo temos para a matriz diagonalizada:  $(m/3) \times (m/(2m/3)) = m/2$ , para ambos os termos da diagonal. Assim, a matriz diagonalizada do elemento fica

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho AL_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21.15)$$

Consideremos a matriz diagonalizada do **elemento de viga** orientado na direção global  $x$ , eq.(18.48), página 500. Nesse caso, como o modelo de viga usado ali é de flexão plana, o movimento translacional é apenas de deslocamento transversal em  $y$ , que é definido tanto pelos graus de liberdade de translação ( $v_1, v_2$ ) quanto de rotação ( $\theta_1, \theta_2$ ). A diagonal da matriz consistente é  $\{156m/420, 4mL^2/420, 156m/420, 4mL^2/420\}$ , onde  $m = \rho AL_e$  é a massa do elemento. A soma dos termos translacionais é  $s = 2 \times 156m/420 = 512m/420$ . Dividindo todos os termos da diagonal

por  $s$  se tem para o primeiro termo  $(156m/420) \times (m512m/420) = m/2$ . Para o segundo termo,  $(4mL^2/420) \times (m512m/420) = m/78$ . Assim, a matriz diagonalizada do **elemento de viga** fica

$$\mathbf{M}^e = \rho AL_e \begin{bmatrix} 1/2 & L^2/78 & 1/2 & L^2/78 \end{bmatrix} \quad (21.16)$$

**Observação 1** - Embora a matriz massa consistente obtida pelo MEF seja sempre positiva definida, (se tiver sido obtida usando a quantidade adequada de pontos de integração), diversos métodos de diagonalização geram matrizes que não são positiva definidas. O método HRZ produz matriz diagonal com termos não negativos. É possível o método produzir matrizes com termos nulos na diagonal. Também, o método garante a preservação da massa do elemento em todos os movimentos translacionais.

**Observação 2** - O método HRZ fornece aproximações razoáveis apenas para elementos de baixa ordem.

**Observação 3** - Se as matrizes de rigidez e massa do MEF são obtidas de forma consistente, e sem sub integração, e se a malha representa adequadamente o volume e a geometria do problema, é provado que os autovalores aproximados são superiores aos valores exatos. Entretanto, se alguma das condições acima tiverem sido violadas, não há garantias de limite. Matrizes diagonalizadas geralmente, mas não sempre, subestimam as frequências naturais.

## 21.3 Método implícitos

O método da diferença central com matriz de inércia diagonalizada se caracteriza por não necessitar da fatorização de uma matriz durante os passos de integração. Isso é uma vantagem, porém, como será demonstrado, requer a utilização de intervalos de integração muito pequenos, isto é, é um método apenas “condicionalmente estável”.<sup>3</sup> Em oposição, os métodos implícitos permitem o uso de intervalos de integração centenas de vezes maiores, porém, em problemas não lineares, exigem a fatoração de uma matriz tangente em cada intervalo. Descrevemos a seguir alguns dos principais desses métodos.

### 21.3.1 Método de Houbolt

O método baseia-se em considerar uma **aproximação cúbica** para a variação do deslocamento ao longo do tempo. Considerando um **problema unidimensional**, tem-se

$$u(t) = a + b t + c t^2 + d t^3, \quad (21.17)$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são constantes a serem determinadas. Essa aproximação prevê uma variação linear da aceleração ao longo do intervalo de integração. Consideram-se quatro instantes de tempo  $t_{n-2}$ ,  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  e  $t_{n+1}$ , separados por intervalos uniformes  $\Delta t$ , tal que

$$\begin{aligned} t_{n-2} &= t - 2\Delta t, \\ t_{n-1} &= t - \Delta t, \\ t_n &= t, \\ t_{n+1} &= t + \Delta t. \end{aligned}$$

Nesses instantes, a solução aproximada do problema toma os valores  $u_{n-2}$ ,  $u_{n-1}$ ,  $u_n$  e  $u_{n+1}$  respectivamente. Usando (21.17), esses deslocamentos são:

<sup>3</sup>Uma introdução sobre o conceito de estabilidade é visto na seção 21.4.

A equação do movimento produz

$$\begin{aligned} n = 1 &\rightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{K} \mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_1, \\ n = 0 &\rightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{K} \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}_0. \end{aligned} \quad (21.24)$$

A eq. (21.22) produz (com  $n = 0$ ):

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{M}_1 \mathbf{u}_0 - \mathbf{M}_2 \mathbf{u}_{-1} + \mathbf{M}_3 \mathbf{u}_{-2}. \quad (21.25)$$

Diferenciando (21.17) duas vezes tem-se  $\ddot{u}(t) = 2c + 6d t$ . Para  $t = 0$  tem-se  $\ddot{u}_0 = 2c$ , isto é, usando (21.20),

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_{-1} - 2\mathbf{u}_0). \quad (21.26)$$

As equações (21.23)-(21.26) formam um sistema de seis equações em termos dos seis vetores incógnitos  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_{-1}$ ,  $\mathbf{u}_{-2}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_1$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_1$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_0$ . Uma vez esses vetores tenham sido obtidos, os valores subsequentes,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  etc, são obtidos de (21.22). Outro procedimento mais simples de partida consiste em usar um outro método de integração para obter  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  e em seguida iniciando as iterações em (21.22) com  $n = 2$ .

### 21.3.2 Método $\theta$ de Wilson

O método  $\theta$  de Wilson considera uma **variação cúbica** para o deslocamento ao longo do tempo, através de uma interpolação linear da aceleração. Para um **problema unidimensional**, considera-se um intervalo de tempo  $t$  a  $t + \Delta t$ , como na Figura 21.2, e uma coordenada auxiliar  $\tau$  com origem em  $t$ , crescendo até  $\theta\Delta t$ , onde  $\theta$  é um escalar a ser prescrito (será visto que deve-se ter  $\theta > 1,37$ ). A equação da reta é:

$$\ddot{u}_{t+\tau} = \ddot{u}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{u}_t). \quad (21.27)$$

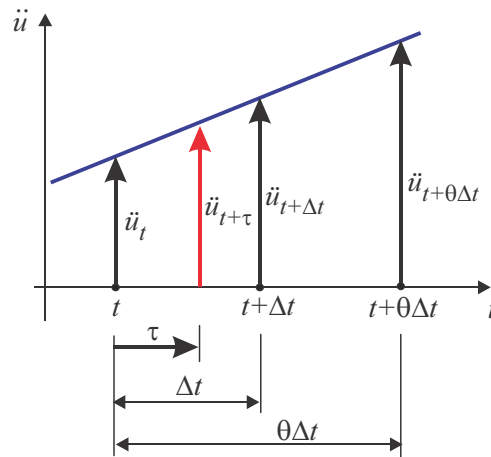


Figura 21.2: Aceleração linear do método  $\theta$  de Wilson.

Integrando (21.27) em  $\tau$  se obtém (note-se que  $\ddot{u}_t$  e o termo entre parênteses são independentes de  $\tau$ )

$$\begin{aligned} \dot{u}_{t+\tau} &= \dot{u}_t + \ddot{u}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{u}_t), \\ u_{t+\tau} &= u_t + \dot{u}_t \tau + \frac{1}{2} \ddot{u}_t \tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{u}_t). \end{aligned} \quad (21.28)$$

Como  $\dot{\mathbf{u}}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  e  $\mathbf{F}_0$  são conhecidos, caso  $\mathbf{M}$  seja diagonalizada, pode-se facilmente obter  $\ddot{\mathbf{u}}_0$ .

A aplicação de condição de contorno fixo,  $u_n^j = 0$  em um certo grau de liberdade  $j$  para qualquer tempo  $t_n$  é imposta aplicando o procedimento visto na seção 18.6, página 500, com uma constante  $c = 0$ .

### 21.3.3 Método de Newmark

O método de integração de Newmark utiliza três equações. Duas delas provenientes de uma hipótese de **aceleração variando linearmente** no intervalo  $[t; t + \Delta t]$ :

$$\begin{aligned} a) & \longrightarrow \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + [(1 - \delta) \ddot{\mathbf{u}}_t + \delta \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}] \Delta t, \\ b) & \longrightarrow \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t \Delta t + [(0,5 - \alpha) \ddot{\mathbf{u}}_t + \alpha \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}] \Delta t^2. \end{aligned} \quad (21.35)$$

$\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros a serem arbitrados, embora estabilidade incondicional seja garantida, em problemas dinâmicos lineares, apenas para  $\delta \geq 0,5$  e  $\alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2$ . A máxima precisão é obtida para  $\alpha = 0,25$  e  $\delta = 0,5$ .

A terceira equação é a equação do movimento para o equilíbrio no instante  $t + \Delta t$ :

$$c) \longrightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}. \quad (21.36)$$

Isolando  $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$  em (21.35)<sub>2</sub> obtém-se uma expressão em termos de uma incógnita,  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ :

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} [\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t - \dot{\mathbf{u}}_t \Delta t] - \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t. \quad (21.37)$$

Essa expressão é usada para eliminar  $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$  de (21.35)<sub>1</sub>, que resulta uma expressão para  $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$  também em termos de apenas uma incógnita,  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ . Essas duas expressões, para  $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ , são substituídas em (21.36), que fica em termos apenas de  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \hat{\mathbf{F}}, \text{ onde} \\ \hat{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} \\ \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} (a_0 \mathbf{u}_t + a_2 \dot{\mathbf{u}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t) + \mathbf{C} (a_1 \mathbf{u}_t + a_4 \dot{\mathbf{u}}_t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_t) \end{aligned} \quad (21.38)$$

onde

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t}, & a_1 &= \delta a_2, & a_0 &= \frac{a_2}{\Delta t}, & a_3 &= \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right), \\ a_4 &= \frac{1}{\alpha} - 1, & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right). \end{aligned} \quad (21.39)$$

A **partida do esquema de integração** requer o cálculo da aceleração inicial  $\ddot{\mathbf{u}}_0$ , a partir das condições iniciais conhecidas  $\dot{\mathbf{u}}_0$  e  $\mathbf{u}_0$ . Essa necessidade pode ser vista observando a expressão de  $\hat{\mathbf{F}}$  em (21.38)<sub>3</sub> para  $t = 0$ . O valor de  $\ddot{\mathbf{u}}_0$  pode ser calculado resolvendo a equação do movimento em  $t = 0$ :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{F}_0 - (\mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{K} \mathbf{u}_0). \quad (21.40)$$

A fatoração de  $\mathbf{M}$  pode ser evitada utilizando uma matriz de inércia diagonalizada através de um método como o HRZ sumarizado na seção 21.2. Nesse caso, a aceleração obtida será uma aproximação do valor correspondente àquele obtido pela matriz consistente.

O **fluxograma geral de cálculo do método de integração de Newmark**, em problemas lineares, é mostrado na Tabela 21.1

Tabela 21.1: Fluxograma geral de cálculo do método de integração de Newmark.

<b>Etapa 1</b>	Definições: $t = 0$ , $\Delta t$ , $\delta \geq 0,5$ e $\alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2$ . Valores usuais: $\alpha = 0,25$ e $\delta = 0,5$ .
<b>Etapa 2</b>	Inicializações: a) $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$ . b) $\ddot{\mathbf{u}}_o = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_o - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_o - \mathbf{K}\mathbf{u}_o)$ . c) Aplicar condições de contorno em $\hat{\mathbf{K}}$ . d) Triangularizar $\hat{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{L}_T$ .
<b>Etapa 3</b>	Início dos incrementos de tempo $t = t + \Delta t$ . a) $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ . b) $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}(a_0\mathbf{u}_t + a_2\dot{\mathbf{u}}_t + a_3\ddot{\mathbf{u}}_t) + \mathbf{C}(a_1\mathbf{u}_t + a_4\dot{\mathbf{u}}_t + a_5\ddot{\mathbf{u}}_t)$ . c) Aplicar condições de contorno em $\hat{\mathbf{F}}$ .
<b>Etapa 4</b>	Resolução do sistema $\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{F}}$ . Obtenção de $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ e $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ de (21.37) e (21.35) <sub>1</sub> . Ir à Etapa 3 se o instante final da análise ainda não foi atingido.

O fluxograma foi organizado supondo que o incremento  $\Delta t$  seja o mesmo em todos os intervalos, o que mantém a matriz  $\hat{\mathbf{K}}$  inalterada. Então, na Etapa 2,  $\hat{\mathbf{K}}$  é triangularizada uma única vez pelo método de Gauss, isto é,  $\mathbf{L}$  é triangular inferior, tal que  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{L}^T\mathbf{DL}$  onde  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal. De fato, como  $\hat{\mathbf{K}}$  é positiva definida, pode ser usado o método de Cholesky. Na Etapa 5 é realizada apenas as etapas de substituição progressiva e retroativa do método de Gauss.

A matriz  $\hat{\mathbf{K}}$ , num problema de dinâmica linear, não varia ao longo dos intervalos de integração, enquanto todos forem do mesmo tamanho  $\Delta t$ . Assim, ela precisa ser montada apenas uma vez, e ser fatorada pelo método de Gauss apenas uma vez, antes do processo de integração.

**Movimentos de corpo rígido** Existem diversos problemas em dinâmica em que o corpo se encontra desvinculado, (corpos em queda, corpos livres no espaço, corpos apoiados sobre superfícies quase sem atrito, etc) e, portanto, não são aplicadas condições de contorno que eliminem todos os seus movimentos de corpo rígido. Mesmo nesse caso, **a matriz  $\hat{\mathbf{K}}$  é sempre não singular**. Isso ocorre porque, mesmo que  $\mathbf{K}$  permaneça singular,  $\mathbf{M}$  é não singular, e positiva definida (se for consistente e tiver sido integrada adequadamente). Note que o mesmo ocorre para os métodos  $\theta$  de Wilson e de Houbolt. O método de diferenças centrais não possui matriz a ser invertida, e também admite tanto corpos vinculados quanto desvinculados.

## 21.4 Estabilidade e precisão

Todas as metodologias clássicas de avaliação de estabilidade e precisão dos métodos de integração direta baseiam-se na correspondência que existe entre esses métodos e o de sobreposição modal quando o problema é linear. Essa relação pode ser vista considerando o sistema matricial de equações diferenciais do MEF

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}. \quad (21.41)$$



menores que o primeiro modo. Essa é uma das fundamentações do método de sobreposição modal, a consideração de que podem-se usar apenas uns poucos modos iniciais (da ordem de 10 a 20, por exemplo), e ignorar todos os demais, mesmo que sejam milhares.

- (a) Como exceção, deve-se fazer a ressalva que em sistemas excitados por carregamentos harmônicos, como máquinas rotativas, os modos de vibrações da estrutura que são excitados são aqueles definidos pelas frequências de excitação, mesmo que não sejam os primeiros.
  - (b) Adicionalmente, carregamentos súbitos, como impacto, tem associados altas frequências de excitação, de forma que o número de modos excitados não são poucos, o que torna pouco eficiente o método de sobreposição modal.
3. O método de elementos finitos tem a característica de exigir uma quantidade “grande” de graus de liberdade para garantir a precisão dos primeiros modos, o que faz gerar uma quantidade correspondentemente “grande” de modos no modelo que não são aproximados corretamente. De fato, dada uma malha, apenas os poucos primeiros modos são aproximados com certa precisão. Os demais são aproximados de forma gradualmente piores, tal que os últimos são basicamente “lixo” numérico.
  4. O uso de intervalos de integração pequenos o suficiente para integrar corretamente o último modo exigiria um esforço computacional intoleravelmente grande, e produziria resultados corretos de modos que pouco contribuiriam para a solução.
  5. O que se busca é a possibilidade de usar um intervalo de integração que integre adequadamente apenas até um certo modo  $m \ll N$ , isto é,  $\Delta t_m < \Delta t_{critico} = 2\pi/20\omega_m$ . A questão que se coloca é sobre que resultados seriam obtidos para os modos  $k > m$ . Note que na maioria desses modos, o  $\Delta t$  adotado será muito maior que o período do modo.
  6. Ora, sabe-se que as amplitudes de resposta dos modos superiores são progressivamente menores. Então o que se deseja de qualquer método direto de integração é que produzam respostas a esses modos que sejam também pequenas, isto é, que não cresçam artificialmente ao longo da integração. Caso isso ocorresse, as amplitudes obtidas para esses modos cresceriam ao ponto de superarem as amplitudes dos modos baixos, gerando uma solução final completamente incorreta.
  7. Como os métodos diretos são progressivos, basta que se analise dois instantes de tempo subsequentes,  $t$  e  $t + \Delta t$ .
  8. Como não há interesse no resultado dos modos superiores, o que se deseja dos métodos diretos é que, dada uma condição inicial em  $t$ , a solução nos modos superiores a  $m$  não seja amplificada artificialmente em  $t + \Delta t$ . Essa é a **definição da condição de estabilidade** de um método.
  9. A estabilidade também significa que qualquer condição inicial no intervalo, gerada artificialmente por erros de arredondamento computacional, não seja amplificado pelo método, mas seja reduzido.

Pode-se resumir a condição de estabilidade da seguinte forma:

Um método de integração é **incondicionalmente estável** se a solução para qualquer condição inicial não cresce ilimitadamente para qualquer intervalo de integração  $\Delta t$  usado. Um método é **condicionalmente estável** se ele é estável para intervalos menores que certo valor,  $\Delta t < \Delta t_{cr}$ . Observe que em qualquer caso, a estabilidade do método não implica em qualquer nível de precisão.

### 21.4.1 Estabilidade do método de diferenças centrais

A análise de estabilidade de qualquer dos métodos tradicionais é baseada num procedimento comum, que parte do estabelecimento de uma relação recursiva matricial entre as soluções de dois instantes subsequentes  $t_n$  e  $t_n + \Delta t$ :

$$\hat{\mathbf{Y}}_{n+1} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{Y}}_n + \mathbf{L} f_{n+1} \quad (21.45)$$

onde  $\hat{\mathbf{Y}}_n$  e  $\hat{\mathbf{Y}}_{n+1}$  são vetores com as soluções nos dois instantes,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{L}$  são matriz e vetor, operadores definidos por cada método, e  $\mathbf{f}_{t+\tau}$  é o vetor carregamento.

Descreveremos a seguir o procedimento de análise usando o método de diferenças centrais como exemplo. Para isso, consideremos as equações básicas do método, eqs. (21.6) e (21.7) e a equação (21.44) no instante  $t_n$ :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_n + 2\omega\xi \dot{y}_n + \omega^2 y_n &= f_n, \\ \ddot{y}_n &= \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta t^2}, \\ \dot{y}_n &= \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta t}. \end{aligned} \quad (21.46)$$

A substituição das duas últimas equações na primeira resulta numa equação algébrica:

$$y_{n+1} = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \omega\xi \Delta t} y_n - \frac{1 - \omega\xi \Delta t}{1 + \omega\xi \Delta t} y_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{1 + \omega\xi \Delta t} f_n. \quad (21.47)$$

Essa equação pode ser suplementada pela relação trivial  $y_n = y_n$ , tal que o sistema de duas equações diferenciais possa tomar a forma geral (21.45):

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{Bmatrix}}_{\hat{\mathbf{Y}}_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \omega\xi \Delta t} & -\frac{1 - \omega\xi \Delta t}{1 + \omega\xi \Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{Bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{Bmatrix}}_{\hat{\mathbf{Y}}_n} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\Delta t^2}{1 + \omega\xi \Delta t} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{L}} f_n. \quad (21.48)$$

A análise de estabilidade é feita examinando apenas o efeito de uma condição inicial no modo, de forma que não é necessário levar em conta o efeito do carregamento, isto é, pode-se fazer  $f_t = 0$ . Então (21.45) fica apenas

$$\hat{\mathbf{Y}}_{n+1} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{Y}}_n \quad (21.49)$$

A análise de estabilidade parte da representação da decomposição espectral de  $\mathbf{A}$ , dada por  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ , onde  $\mathbf{D}$  é a forma canônica de Jordan, uma matriz bi-diagonal, formada pelos autovalores  $\lambda$  de  $\mathbf{A}$ , possivelmente complexos, uma vez que  $\mathbf{A}$  é geralmente não simétrica.  $\mathbf{P}$  é a matriz formada pelos autovetores de  $\mathbf{A}$ . Prova-se que

$$\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_n = \mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}. \quad (21.50)$$

Define-se o **raio espectral** de  $\mathbf{A}$  como

$$\rho_{\mathbf{A}} = \max_{j=1,2,\dots} |\lambda_j|, \quad (21.51)$$

isto é, o raio espectral é o módulo do maior autovalor de  $\mathbf{A}$ , quer  $\lambda$  seja real ou complexo.

O critério de estabilidade de um método é estabelecido como: **o método é estável se  $\rho_{\mathbf{A}} \leq 1$ .**

**Um método direto é estável se é definido por um operador  $\mathbf{A}$  tal que  $\rho_{\mathbf{A}} \leq 1$ .**

(21.52)

Essa condição pode ser entendida considerando (21.49) para  $n$  intervalos de tempo subsequentes. Então, a solução para condições iniciais prescritas é

$$\hat{\mathbf{Y}}_{t+n\Delta t} = \mathbf{A}^n \hat{\mathbf{Y}}_t \quad (21.53)$$

Uma solução limitada consiste numa solução tal que cada componente de  $\hat{\mathbf{Y}}_{t+n\Delta t}$  não tende ao