

## Capítulo 4

# Equações constitutivas

Das equações de equilíbrio (1.87) ((3.48) ou (3.50) quando referidas à configuração inicial) e das relações deformação-deslocamento (2.24), percebemos que existem poucas equações para muitas incógnitas: as equações (1.87) apresentam as seis componentes independentes de  $\boldsymbol{\sigma}$  como incógnitas e, de uma forma implícita, apresentam também as três componentes de  $\mathbf{u}$  (veja introdução do Capítulo 3); as relações (2.24) acrescentam mais seis incógnitas que são as componentes independentes de  $\boldsymbol{\epsilon}$ . São, portanto, um total de quinze incógnitas para nove equações. Precisamos de equações adicionais, como a própria intuição nos adverte. Se não, vejamos.

Imaginemos dois sólidos geometricamente idênticos, porém um de aço e o outro de gelatina. Se os dois forem submetidos ao mesmo carregamento, o bom senso nos diz que eles sofrerão diferentes deformações. Entretanto, onde isso é refletido nas equações apresentadas? A resposta é simples: em lugar nenhum. Precisamos, claramente, de equações que tragam para o problema a constituição do material.

As equações constitutivas são, assim, modelos matemáticos que descrevem o comportamento dos materiais. São equações que contêm parâmetros que precisam ser identificados em ensaios experimentais para distinguir um material de outro. Vários modelos podem ser atribuídos a um mesmo material, dependendo do rigor desejado. Todos esses modelos, porém, devem ter em comum a propriedade de não violar observações físicas, como as que estão embutidas na primeira e segunda leis da termodinâmica.

As equações de equilíbrio e as relações deformação-deslocamento são de caráter geral, válidas para qualquer sólido, sem nenhuma restrição quanto ao material que o constitui, a não ser o fato de o meio ser contínuo. Um modelo constitutivo, no entanto, é específico, com parâmetros identificados experimentalmente e, por isso mesmo, culpado normalmente pelas imprecisões dos resultados teóricos na solução de um problema.

Os modelos constitutivos podem ser agrupados em classes, dependendo se descrevem o comportamento de um material elástico, plástico, viscoelástico, viscoplástico, dentre outros. Da classe dos materiais elásticos, destacamos neste capítulo os materiais hiperelásticos, de comportamento linear, sob pequenos gradientes do deslocamento em módulo comparados à unidade. É uma subclasse

equações de equilíbrio e as relações deformação-deslocamento poderão ainda ser fortemente não lineares. Entretanto, no que diz respeito às equações constitutivas, a hipótese permite o emprego do modelo linear (4.10), mesmo em grandes transformações, desde que ele relacione a segunda tensão de Piola-Kirchhoff com a deformação de Green (Washizu, 1982; Bathe, 1996; Bonet *et al.*, 2016), pois são medidas não afetadas por movimento de corpo rígido. O modelo constitutivo que daí resulta é conhecido por *modelo de Saint-Venant Kirchhoff*.

## 4.2 Mudança de base

Sabendo-se que

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T \quad \boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{L}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{L}^T \quad (4.17)$$

em dois sistemas ortogonais  $X_1X_2X_3$  e  $X'_1X'_2X'_3$ , podemos rearranjar essas relações de modo que

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = \mathbf{L}_\sigma \{\boldsymbol{\sigma}\} \quad \{\boldsymbol{\epsilon}'\} = \mathbf{L}_\epsilon \{\boldsymbol{\epsilon}\} \quad (4.18)$$

na notação de Voigt. A matriz  $\mathbf{L}_\epsilon$  é identificada em função da matriz

$$\mathbf{L}_\sigma = \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{12}^2 & L_{13}^2 & 2L_{12}L_{13} & 2L_{11}L_{13} & 2L_{11}L_{12} \\ L_{21}^2 & L_{22}^2 & L_{23}^2 & 2L_{22}L_{23} & 2L_{21}L_{23} & 2L_{21}L_{22} \\ L_{31}^2 & L_{32}^2 & L_{33}^2 & 2L_{32}L_{33} & 2L_{31}L_{33} & 2L_{31}L_{32} \\ L_{21}L_{31} & L_{22}L_{32} & L_{23}L_{33} & L_{22}L_{33} + L_{23}L_{32} & L_{21}L_{33} + L_{23}L_{31} & L_{21}L_{32} + L_{22}L_{31} \\ L_{11}L_{31} & L_{12}L_{32} & L_{13}L_{33} & L_{12}L_{33} + L_{13}L_{32} & L_{11}L_{33} + L_{13}L_{31} & L_{11}L_{32} + L_{12}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{12}L_{22} & L_{13}L_{23} & L_{12}L_{23} + L_{13}L_{22} & L_{11}L_{23} + L_{13}L_{21} & L_{11}L_{22} + L_{12}L_{21} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

a seguir.

Como o trabalho realizado pelas forças internas (veja Seção 7.1) é um escalar e, portanto, uma quantidade invariante sob uma transformação do sistema de coordenadas,

$$\{d\boldsymbol{\epsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} = \{d\boldsymbol{\epsilon}'\}^T \{\boldsymbol{\sigma}'\} = (\mathbf{L}_\epsilon \{d\boldsymbol{\epsilon}\})^T \{\boldsymbol{\sigma}'\} = \{d\boldsymbol{\epsilon}\}^T \mathbf{L}_\epsilon^T \{\boldsymbol{\sigma}'\} \quad (4.20)$$

ou

$$\{d\boldsymbol{\epsilon}\}^T (\{\boldsymbol{\sigma}\} - \mathbf{L}_\epsilon^T \{\boldsymbol{\sigma}'\}) = 0. \quad (4.21)$$

A validade da expressão para qualquer  $\{d\boldsymbol{\epsilon}\}$  implica

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{L}_\epsilon^T \{\boldsymbol{\sigma}'\} \quad \Rightarrow \quad \{\boldsymbol{\sigma}'\} = \mathbf{L}_\epsilon^{-T} \{\boldsymbol{\sigma}\}. \quad (4.22)$$

De (4.18) e (4.22), concluímos que

$$\mathbf{L}_\sigma = \mathbf{L}_\epsilon^{-T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_\epsilon = \mathbf{L}_\sigma^{-T}. \quad (4.23)$$

Suponha que as representações da equação constitutiva de um material hiperelástico linear nos dois sistemas sejam

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\epsilon}\} \quad \{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\mathbf{C}'] \{\boldsymbol{\epsilon}'\}. \quad (4.24)$$

Pré-multiplicando a primeira das equações por  $\mathbf{L}_\sigma$ ,

$$\mathbf{L}_\sigma \{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{L}_\sigma [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\epsilon}\}, \quad (4.25)$$

obtemos usando (4.18)

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = \mathbf{L}_\sigma [\mathbf{C}] \mathbf{L}_\epsilon^{-1} \{\boldsymbol{\epsilon}'\}. \quad (4.26)$$

Portanto,

$$[\mathbf{C}'] = \mathbf{L}_\sigma [\mathbf{C}] \mathbf{L}_\epsilon^{-1} \quad (4.27)$$

ou, numa forma computacionalmente mais econômica,

$$[\mathbf{C}'] = \mathbf{L}_\sigma [\mathbf{C}] \mathbf{L}_\sigma^T. \quad (4.28)$$

Observe que o uso da notação de Voigt traz como uma primeira consequência a necessidade de se estabelecer uma nova relação entre as componentes do tensor tensão armazenadas em  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  e  $\{\boldsymbol{\sigma}'\}$ . Como uma segunda consequência dessa notação, as componentes do tensor deformação armazenadas em  $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$  e  $\{\boldsymbol{\epsilon}'\}$  relacionam-se de maneira diferente daquela apresentada pelas componentes do tensor tensão, ou seja,  $\mathbf{L}_\epsilon \neq \mathbf{L}_\sigma$ , pelo fato de  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  e  $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$  serem definidos de maneira distinta. Observe também que o tensor constitutivo na notação de Voigt transforma-se, segundo (4.28), de maneira semelhante aos tensores tensão e deformação em (4.17), apenas trocando  $\mathbf{L}$  por  $\mathbf{L}_\sigma$ . No entanto, a matriz  $\mathbf{L}_\sigma$ , diferentemente de  $\mathbf{L}$ , não é ortogonal.

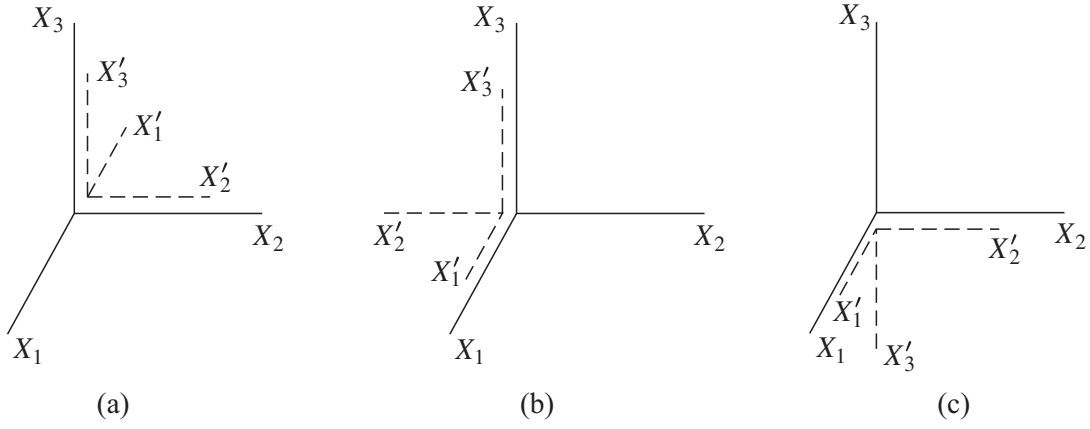
### 4.3 Simetria do material

Um material pode apresentar simetria de suas propriedades mecânicas em relação a planos bem definidos. O material hiperelástico linear (4.10), com os 21 coeficientes independentes, não apresenta nenhum plano de simetria e por isso é denominado *anisotrópico*. Noutras palavras, amostras geometricamente idênticas colhidas do material num mesmo ponto apresentariam respostas distintas a um mesmo carregamento se as amostras forem colhidas com diferentes orientações em relação a um sistema fixo de coordenadas. Existem, no entanto, materiais cujas amostras apresentariam a mesma resposta se forem colhidas com certas orientações. Para esses materiais nem todos os coeficientes  $C_{ij}$  são independentes.

#### Material monoclinico

Quando as propriedades mecânicas num ponto são simétricas em relação a um único plano, o material é dito *monoclinico*. Dizer que existe simetria em relação ao plano  $X_2X_3$ , por exemplo, significa que os coeficientes  $C_{ij}$  permanecem inalterados se o eixo  $X_1$  for invertido (veja Figura 4.2a). Vamos obter os coeficientes  $C_{ij}$  que caracterizam tal material.

Considere o sistema  $X'_1X'_2X'_3$  obtido de  $X_1X_2X_3$  pela inversão do eixo  $X_1$ , como mostra a Figura 4.2a. Os cossenos dos ângulos formados pelos eixos são



**Figura 4.2** Posições do sistema  $X'_1 X'_2 X'_3$  em relação ao sistema  $X_1 X_2 X_3$  para a caracterização da simetria em relação aos planos: (a)  $X_2 X_3$ ; (b)  $X_1 X_3$ ; (c)  $X_1 X_2$ .

$$\begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X'_1 & -1 & 0 & 0 \\ X'_2 & 0 & 1 & 0 \\ X'_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

De (4.19), obtemos

$$\mathbf{L}_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

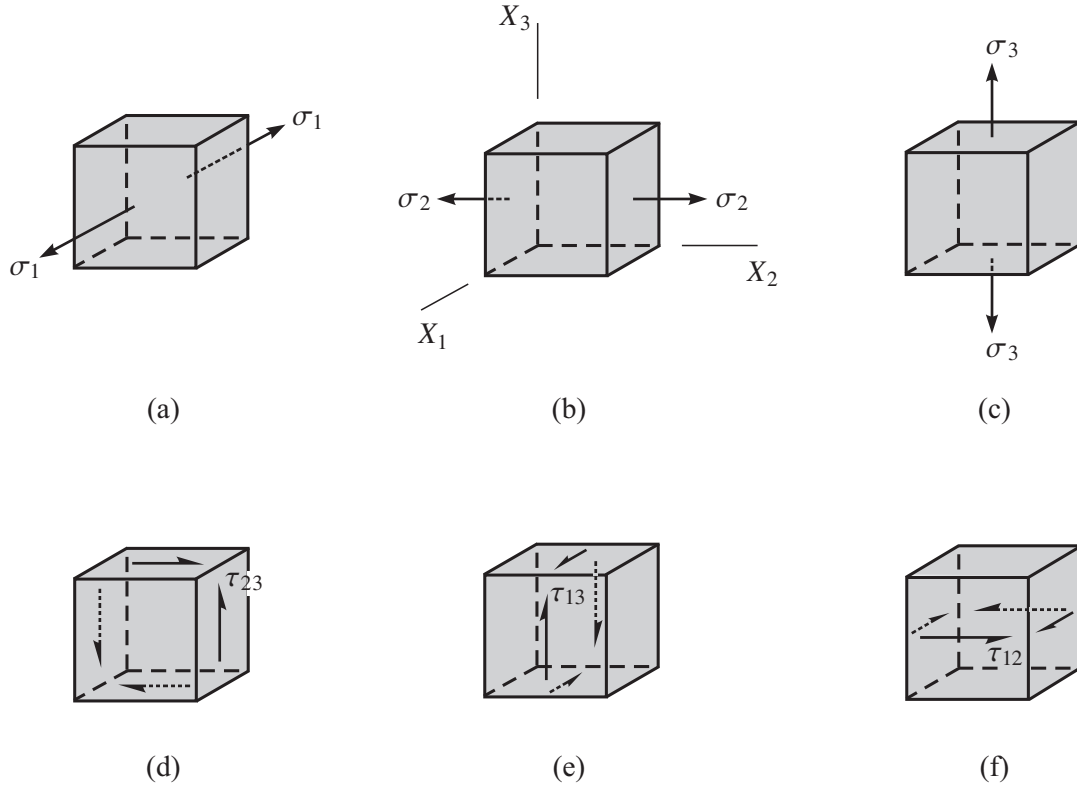
Substituindo em (4.28),

$$[\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & -C_{15} & -C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & -C_{25} & -C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & -C_{35} & -C_{36} \\ & & & C_{44} & -C_{45} & -C_{46} \\ \text{sim.} & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Se o material apresenta simetria em relação ao plano  $X_2 X_3$ , então os coeficientes  $C'_{ij}$  deveriam ser idênticos a  $C_{ij}$  com a inversão do eixo  $X_1$ ,

$$[\mathbf{C}'] = [\mathbf{C}], \quad (4.32)$$

o que só é possível para  $C_{15} = C_{16} = C_{25} = C_{26} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = 0$ . Como  $X'_1 X'_2 X'_3$  é a imagem especular de  $X_1 X_2 X_3$  em relação ao plano  $X_2 X_3$ , o material



**Figura 4.3** Experimentos simples para relacionar os coeficientes constitutivos  $C_{ij}$  com as constantes de engenharia. Tração na direção de: (a)  $X_1$ ; (b)  $X_2$ ; (c)  $X_3$ . Cisalhamento no plano: (d)  $X_2X_3$ ; (e)  $X_1X_3$ ; (f)  $X_1X_2$ .

que atua. Portanto, se o carregamento for tal que as direções principais do tensor deformação coincidam com as direções principais do material, então as direções principais do tensor tensão coincidirão com as do tensor deformação ( $\gamma_{ij} = 0 \Rightarrow \tau_{ij} = 0$ ).

As propriedades do material são determinadas em laboratório em termos das “constantes de engenharia”: módulo de Young, coeficiente de Poisson e módulo de cisalhamento. Devido ao seu significado físico óbvio, as constantes de engenharia são usadas no lugar dos coeficientes abstratos  $C_{ij}$ . Para expressar  $C_{ij}$  em termos das constantes de engenharia, vamos primeiramente escrever as equações constitutivas na ordem inversa,

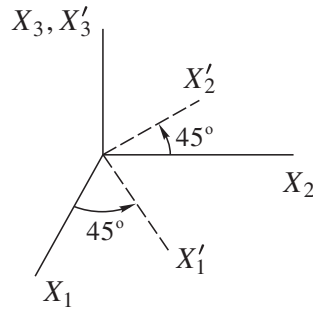
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.36)$$

e simular os testes simples indicados na Figura 4.3.

Se o estado de tensão num ponto é de tração  $\sigma_1$  (veja Figura 4.3a), então

$$\epsilon_1 = S_{11}\sigma_1 \quad \epsilon_2 = S_{12}\sigma_1 \quad \epsilon_3 = S_{13}\sigma_1 \quad \gamma_{23} = \gamma_{13} = \gamma_{12} = 0. \quad (4.37)$$

Das conhecidas definições



**Figura 4.4** O sistema  $X'_1X'_2X'_3$  é obtido de  $X_1X_2X_3$  por uma rotação de  $45^\circ$  em torno do eixo  $X_3$ .

Vamos mostrar que existem apenas dois coeficientes independentes em (4.53).

De fato, considere o sistema  $X'_1X'_2X'_3$ , indicado na Figura 4.4, obtido de  $X_1X_2X_3$  por uma rotação de  $45^\circ$  em torno do eixo  $X_3$ . Os cossenos dos ângulos formados pelos eixos são

$$\begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X'_1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ X'_2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ X'_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

De (4.19), obtemos

$$\mathbf{L}_\sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Substituindo (4.53) e (4.55) em (4.28), verificamos com a imposição de  $[\mathbf{C}'] = [\mathbf{C}]$  que

$$C_{44} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}. \quad (4.56)$$

O material isotrópico é, assim, caracterizado apenas por dois coeficientes independentes:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

# Capítulo 5

## Teoria linear da elasticidade

Nas aplicações práticas, todas as equações devem ser antes escritas em relação à configuração inicial, quer sejam as transformações pequenas ou grandes. Resolver as equações escritas em relação à configuração atual é impossível, visto que essa configuração é desconhecida até que se determine o campo de deslocamento ( $x_i = X_i + u_i$ ). Para linearizar as equações escritas em relação à configuração inicial é fundamental que os gradientes do deslocamento sejam pequenos em módulo comparados à unidade ( $|H_{ij}| \ll 1$ ). A teoria linear da elasticidade que assim resulta é a base de todas as teorias lineares da mecânica das estruturas, de amplo emprego na engenharia.

### 5.1 Linearização das equações

Obter as equações da teoria linear a partir da linearização das equações gerais tem a vantagem de evidenciar simplificações que uma dedução direta, como se faz nos textos clássicos, esconderia.

#### Equações de equilíbrio

A relação entre o operador  $\nabla_X$  escrito nas coordenadas lagrangianas e o mesmo operador  $\nabla_x$  escrito nas coordenadas eulerianas é dada em (3.34):

$$\nabla_X = \mathbf{F}_c^T \nabla_x. \quad (5.1)$$

Sob a hipótese  $|H_{ij}| \ll 1$ , podemos introduzir a seguinte simplificação:

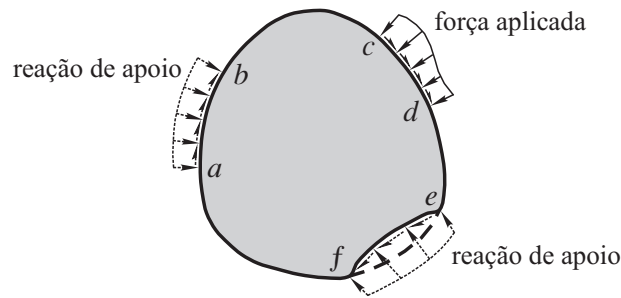
$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} \approx \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \nabla_X \approx \nabla_x. \quad (5.2)$$

As equações de equilíbrio, escritas originalmente como

$$\boldsymbol{\sigma} \nabla_x + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (5.3)$$

tornam-se aproximadamente

$$\boldsymbol{\sigma} \nabla_X + \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$



**Figura 5.1** Sólido com deslocamento especificado nas regiões de apoio *ab* e *ef* (as reações de apoio indicadas são incógnitas) e força especificada nas demais regiões da superfície.

## 5.2 Condições de contorno

A solução das equações definidas no domínio, representadas pelas equações de equilíbrio (5.6), relações deformação-deslocamento (2.25) e equações constitutivas (4.10), é de natureza geral. A adaptação dessa solução a um problema específico se dá por meio das *condições de contorno*, que são as informações (deslocamentos ou forças) conhecidas na superfície do sólido. O problema definido pelas equações (5.6), (2.25), (4.10) e pelas condições de contorno é chamado de *problema de valor de contorno* da teoria linear da elasticidade.

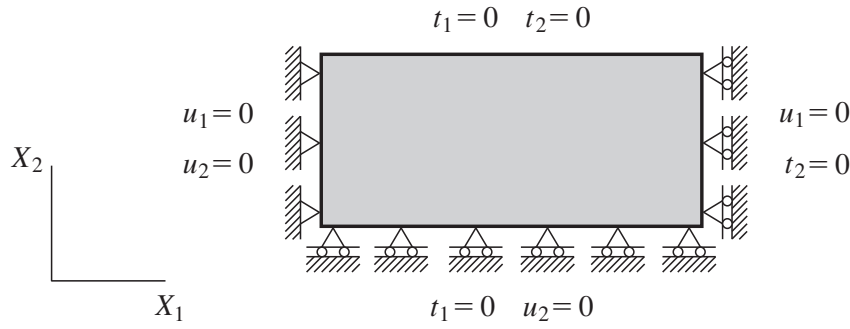
A Figura 5.1 ilustra, esquematicamente, um sólido com as forças que atuam em sua superfície. Vamos supor que conhecemos na superfície do sólido: o deslocamento nas regiões de apoio *ab* (deslocamento nulo; reação de apoio incógnita) e *ef* (deslocamento não nulo; reação de apoio incógnita); a força nas regiões *bc*, *de*, *af* (força nula; deslocamento incógnito) e *cd* (força não nula; deslocamento incógnito). O fato de se especificar num ponto da superfície o deslocamento ou a força correspondente, nunca os dois simultaneamente, é conhecido como sendo um dos princípios fundamentais da mecânica dos sólidos. É óbvio que todas as informações tornam-se conhecidas após a solução do problema.

Se a superfície *s* do sólido for dividida na região  $s_u$ , onde uma dada componente  $u_i$  do deslocamento é especificada, e na região  $s_t$ , onde a força  $t_i$  correspondente a  $u_i$  é especificada, podemos afirmar que

$$s_u \cup s_t = s \quad s_u \cap s_t = \emptyset. \quad (5.7)$$

Ou seja, num dado ponto da superfície temos uma *condição de contorno geométrica* (ponto em  $s_u$ ) ou uma *condição de contorno mecânica* (ponto em  $s_t$ ) em relação a uma dada componente  $u_i$  do deslocamento. Nada impede que um mesmo ponto pertença à região  $s_u$  em relação a uma componente  $u_i$ , enquanto pertence à região  $s_t$  em relação a uma outra componente  $u_j$ , como ilustra a Figura 5.2 para um sólido visto no plano  $X_1X_2$ . Os pontos da borda esquerda pertencem à região  $s_u$  com relação às componentes  $u_1$  e  $u_2$  do deslocamento ( $u_1$  e  $u_2$  especificados), enquanto os da borda superior pertencem à região  $s_t$  ( $t_1$  e  $t_2$  especificados); os pontos da borda direita pertencem à região  $s_u$  com relação a  $u_1$  ( $u_1$  especificado) e à região  $s_t$  com relação a  $u_2$  ( $t_2$  especificado), enquanto os





**Figura 5.2** Condições de contorno para um sólido visto no plano  $X_1X_2$ .

da borda inferior pertencem à região  $s_t$  com relação a  $u_1$  ( $t_1$  especificado) e à região  $s_u$  com relação a  $u_2$  ( $u_2$  especificado).

De uma maneira geral, as condições de contorno geométricas são dadas por

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } s_u \quad (5.8)$$

e as condições de contorno mecânicas, com o auxílio da fórmula de Cauchy (1.17), são dadas por

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } s_t. \quad (5.9)$$

A barra sobre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  é para enfatizar que são quantidades especificadas em  $s_u$  e  $s_t$ , respectivamente, e  $\mathbf{n}$  denota o vetor unitário normal à superfície  $s_t$  apontando para fora da superfície. O vetor tensão  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  identifica-se com a força distribuída  $\bar{\mathbf{t}}$  aplicada por um agente externo.

Seja  $\bar{\mathbf{T}}$  a força de superfície, por unidade de área na configuração inicial, definida na mesma direção e sentido de  $\bar{\mathbf{t}}$ :

$$\bar{\mathbf{T}} dS = \bar{\mathbf{t}} ds. \quad (5.10)$$

Usando a relação (3.19),

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}_1 \frac{dS}{ds}, \quad (5.11)$$

podemos expressar as condições (5.9) em relação à configuração inicial da seguinte forma:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}_1 \frac{dS}{ds} = \bar{\mathbf{t}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_1 dS = \bar{\mathbf{t}} ds = \bar{\mathbf{T}} dS \quad (5.12)$$

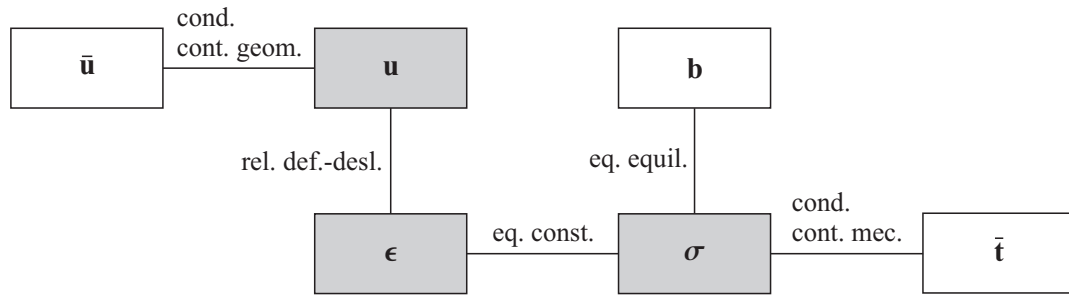
ou, usando (3.18),

$$\mathbf{P} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{em } S_t. \quad (5.13)$$

Em vista de (3.26), as condições (5.13) poderiam também ser expressas em termos do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff:

$$\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{em } S_t. \quad (5.14)$$

Como a restrição  $|H_{ij}| \ll 1$  permite a simplificação  $\mathbf{P} \approx \boldsymbol{\sigma}$ , além de  $\bar{\mathbf{T}} \approx \bar{\mathbf{t}}$  ( $dS \approx ds$ ) e  $\mathbf{N} \approx \mathbf{n}$ , as condições (5.9) e (5.13) confundem-se. Portanto, na teoria linear as condições de contorno (5.9) podem ser diretamente empregadas como se referissem à configuração inicial.



**Figura 5.3** Inter-relações entre as quantidades incógnitas (em cinza) e as quantidades especificadas.

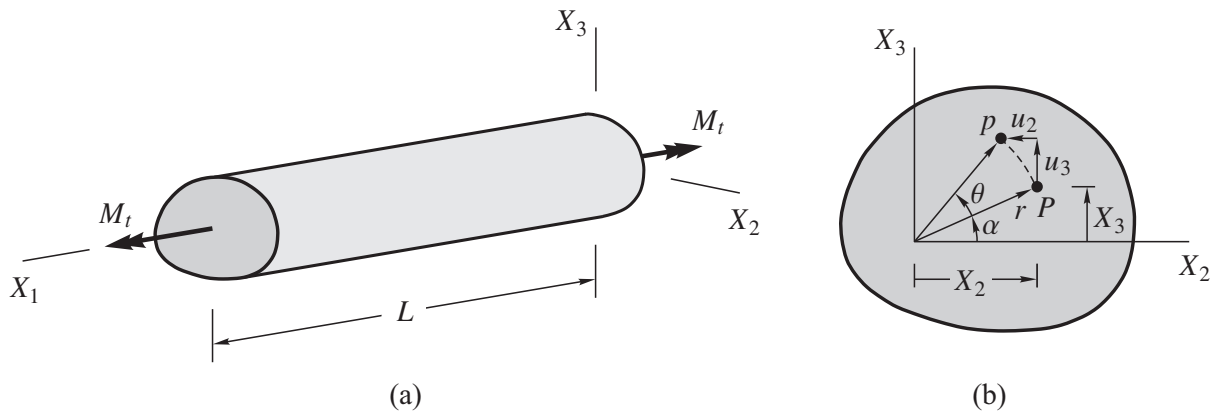
O domínio  $v$  do sólido é um domínio aberto por não incluir seu contorno  $s$ , ou seja,  $v$  e  $s$  são regiões distintas:

$$v \cap s = \emptyset. \quad (5.15)$$

A solução de um problema na teoria linear resume-se, basicamente, na determinação dos campos de deslocamento, deformação e tensão no domínio  $v$  (solução de (5.6), (2.25) e (4.10)), uma vez conhecidos a força de volume distribuída em  $v$  e o deslocamento no contorno  $s_u$ , além da especificação da força no contorno  $s_t$ . As condições de contorno nos dizem como o sólido interage com o meio externo. A Figura 5.3 sintetiza as inter-relações entre as quantidades incógnitas  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  e as quantidades especificadas  $\mathbf{b}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{\mathbf{t}}$ .

*Comentários 5.1:*

- Ao se fazer a substituição da configuração atual pela configuração inicial, da maneira habitual como se faz na teoria linear da elasticidade, é crucial que os gradientes do deslocamento sejam pequenos em módulo comparados à unidade, assim como o próprio deslocamento seja pequeno comparado à dimensão do sólido.
- Quando as equações de equilíbrio e as relações deformação-deslocamento são lineares, dizemos que o problema apresenta *linearidade geométrica*; quando as equações constitutivas são lineares, dizemos que o problema apresenta *linearidade física* ou *do material*. Numa teoria consistentemente formulada (veja Capítulos 8, 11 e 13), uma não linearidade nas equações de equilíbrio está necessariamente associada a uma não linearidade nas relações deformação-deslocamento. Os problemas tratados pela teoria linear são geométrica e fisicamente lineares. A teoria resume-se às três equações de equilíbrio (5.6), às seis relações deformação-deslocamento (2.25) e às seis equações constitutivas (4.10), totalizando quinze equações em termos de quinze incógnitas:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{23}$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{23}$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ . Para a solução desse sistema de equações devemos impor as condições de contorno geométricas (5.8) e mecânicas (5.9) existentes. As equações de compatibilidade (2.45) não devem ser contadas como equações adicionais porque são automaticamente satisfeitas pela solução.
- As consequências mais importantes da linearização da teoria são:



**Figura 5.4** (a) Barra cilíndrica sob o momento  $M_t$  aplicado às extremidades; (b) seção transversal: um ponto  $P$ , de coordenadas  $(X_2, X_3)$  ou  $(\alpha, r)$ , move-se para  $p$  com a rotação  $\theta$  da seção.

que o problema de valor de contorno é reduzido a uma forma mais simples; (b) exemplificar algumas situações de fácil obtenção da solução exata; (c) antecipar resultados que serão úteis à teoria de vigas apresentada no Capítulo 8.

### Formulação de Saint-Venant

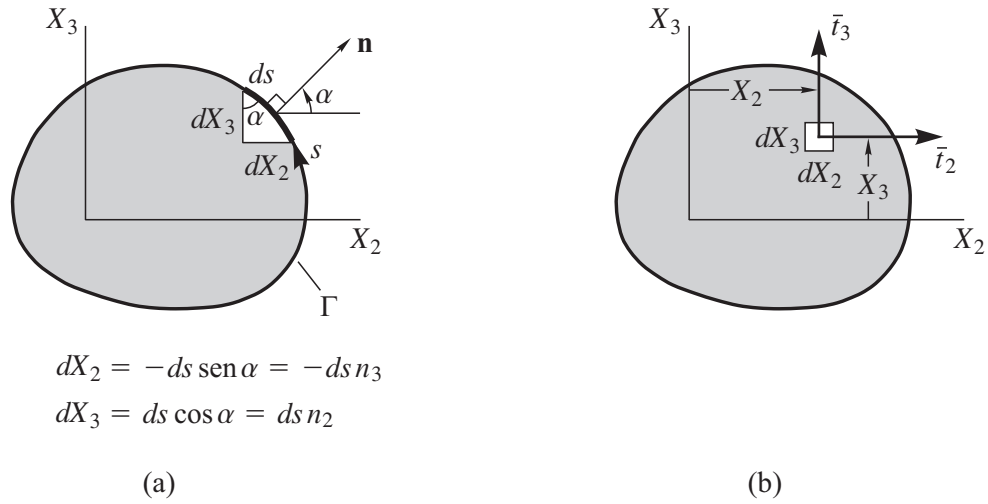
Em 1855 Saint-Venant formulou o problema de valor de contorno para barras cilíndricas (barras com seção transversal de geometria arbitrária mas constante ao longo do comprimento) sob torção uniforme, empregando o que ficou conhecido como *método semi-inverso*. Com esse método, Saint-Venant estabeleceu o problema de uma forma bem mais simples do que o original, após especificar, parcialmente, o campo de deslocamento com base em intuições físicas ou evidências experimentais.

**Campo de deslocamento** Considere a barra cilíndrica da Figura 5.4a sob a ação exclusiva de um momento  $M_t$  que atua nas extremidades  $X_1 = 0$  e  $X_1 = L$ . Saint-Venant observou que a projeção de uma seção transversal no plano  $X_2X_3$  gira como um corpo rígido e que o ângulo de torção por unidade de comprimento  $\theta'$  ( $= d\theta/dX_1$ ) é constante, justificando dessa maneira o nome *torção uniforme*. Arbitrando  $\theta = 0$  em  $X_1 = 0$ ,

$$\theta = \theta' X_1. \quad (5.19)$$

A projeção no plano  $X_2X_3$  de um ponto  $P$  da seção, definido na Figura 5.4b pela distância  $r$  e pelo ângulo  $\alpha$ , desloca-se para  $p$  com a rotação  $\theta$  da seção em torno do eixo  $X_1$ . Supondo que a rotação seja pequena ( $\sin \theta \approx \theta$ ;  $\cos \theta \approx 1$ ), visto que o problema deverá ser formulado como linear,

$$\begin{aligned} u_2 &= r \cos(\alpha + \theta) - r \cos \alpha = r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) - r \cos \alpha \\ &\approx -\theta r \sin \alpha = -X_3 \theta = -X_1 X_3 \theta' \\ u_3 &= r \sin(\alpha + \theta) - r \sin \alpha = r(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) - r \sin \alpha \\ &\approx \theta r \cos \alpha = X_2 \theta = X_1 X_2 \theta'. \end{aligned} \quad (5.20)$$



**Figura 5.5** (a) Seção transversal; (b) extremidade da barra em  $X_1 = L$ .

na torção uniforme. As outras duas componentes  $\bar{t}_2$  e  $\bar{t}_3$  deverão ser estaticamente equivalentes ao momento  $M_t$ :

$$\int_A \bar{t}_2 dA = 0 \quad \int_A \bar{t}_3 dA = 0 \quad \int_A (\bar{t}_3 X_2 - \bar{t}_2 X_3) dA = M_t \quad (5.27)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal.

Como  $\mathbf{n} = [1 \ 0 \ 0]^T$  na extremidade em  $X_1 = L$ ,

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \bar{t}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \bar{t}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Dado que  $\sigma_1 = 0$ , a condição  $\bar{t}_1 = 0$  é verificada.

Considerando (5.24),

$$\begin{aligned} \int_A \bar{t}_2 dA &= \int_A \tau_{12} dA = G\theta' \int_A (\omega_{,2} - X_3) dA = G\theta' \int_A \left\{ [X_2 (\omega_{,2} - X_3)]_{,2} + [X_2 (\omega_{,3} + X_2)]_{,3} \right\} dA \\ &= G\theta' \int_{\Gamma} X_2 [(\omega_{,2} - X_3) n_2 + (\omega_{,3} + X_2) n_3] ds \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde a conversão da integral de área numa integral no contorno da seção se dá usando a versão bidimensional do teorema da divergência. Nessa integral, a coordenada curvilínea  $s$  percorre o contorno  $\Gamma$  no sentido da rotação de  $X_2$  para  $X_3$ . Em vista de (5.26), verificamos que

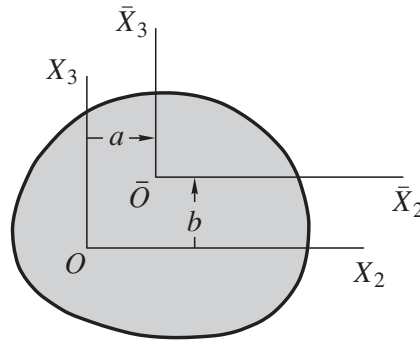
$$\int_A \bar{t}_2 dA = 0. \quad (5.30)$$

De maneira análoga, podemos também verificar que  $\int_A \bar{t}_3 dA = 0$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (\bar{t}_3 X_2 - \bar{t}_2 X_3) dA = \int_A (\tau_{13} X_2 - \tau_{12} X_3) dA = G\theta' \int_A [X_2 (\omega_{,3} + X_2) - X_3 (\omega_{,2} - X_3)] dA \\ &= G\theta' \int_A (X_2 \omega_{,3} - X_3 \omega_{,2} + X_2^2 + X_3^2) dA \end{aligned} \quad (5.31)$$

ou

$$M_t = GJ\theta', \quad (5.32)$$



**Figura 5.6** Mudança do centro de rotação de  $O$  para  $\bar{O}$ .

onde

$$X_{2c} = \frac{1}{A} \int_A X_2 dA \quad X_{3c} = \frac{1}{A} \int_A X_3 dA \quad (5.46)$$

são as coordenadas do centróide da seção.

A mudança do centro de rotação provoca mudança na função de empenamento, como indicado em (5.43), mas nada altera na constante de torção. De fato,

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \int_A \left( \bar{X}_2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{X}_3} - \bar{X}_3 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{X}_2} + \bar{X}_2^2 + \bar{X}_3^2 \right) dA \\ &= \int_A \left[ (X_2 - a)(\omega_{,3} + a) - (X_3 - b)(\omega_{,2} - b) + (X_2 - a)^2 + (X_3 - b)^2 \right] dA \\ &= \int_A (X_2 \omega_{,3} - X_3 \omega_{,2} + X_2^2 + X_3^2) dA + \int_A [b(\omega_{,2} - X_3) - a(\omega_{,3} + X_2)] dA. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Em vista da propriedade (5.38),

$$\bar{J} = \int_A (X_2 \omega_{,3} - X_3 \omega_{,2} + X_2^2 + X_3^2) dA = J. \quad (5.48)$$

A constante de torção depende exclusivamente da geometria da seção transversal. Ela não depende do momento aplicado, das propriedades do material, ou mesmo da escolha do centro de rotação.

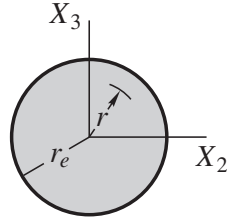
- Se o centro de rotação  $\bar{O}$  fizer a função de empenamento gozar das propriedades

$$\int_A \bar{X}_2 \bar{\omega} dA = 0 \quad \int_A \bar{X}_3 \bar{\omega} dA = 0, \quad (5.49)$$

então ele será o *centro de cisalhamento* (Wunderlich e Pilkey, 2002), pois uma força nele aplicada não provocará nenhuma torção. Assim como o centróide e a constante de torção, a posição do centro de cisalhamento é uma propriedade geométrica da seção transversal.

Substituindo (5.39) e (5.43) em (5.49),

$$\begin{aligned} & \int_A (X_2 - a)(\omega - bX_2 + aX_3 + c) dA \\ &= \int_A [X_2 \omega - bX_2^2 + aX_2 X_3 - a\omega + abX_2 - a^2 X_3 + c(X_2 - a)] dA = 0 \\ & \int_A (X_3 - b)(\omega - bX_2 + aX_3 + c) dA \\ &= \int_A [X_3 \omega + aX_3^2 - bX_2 X_3 - b\omega + b^2 X_2 - abX_3 + c(X_3 - b)] dA = 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$



**Figura 5.7** Exemplo 5.1: seção transversal circular cheia.

Ou seja,  $\Phi$  é constante ao longo do contorno da seção transversal.

As componentes não nulas da deformação em (5.22) são

$$\gamma_{12} = \theta' \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} \quad \gamma_{13} = -\theta' \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \quad (5.59)$$

e da tensão em (5.23) são

$$\tau_{12} = G\theta' \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} \quad \tau_{13} = -G\theta' \frac{\partial \Phi}{\partial X_2}. \quad (5.60)$$

A substituição de (5.55) em (5.33) resulta em

$$J = - \int_A \left( X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} + X_3 \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} \right) dA. \quad (5.61)$$

Numa seção *simplesmente conexa* (seção sem furos), o valor constante de  $\Phi$  ao longo do contorno é irrelevante, pois na mudança de variável (5.55) só importa a derivada da superfície definida por  $\Phi(X_2, X_3)$ . A condição de contorno (5.58) poderia, então, ser substituída por uma forma mais simples dada por

$$\Phi = 0 \quad \text{em } \Gamma. \quad (5.62)$$

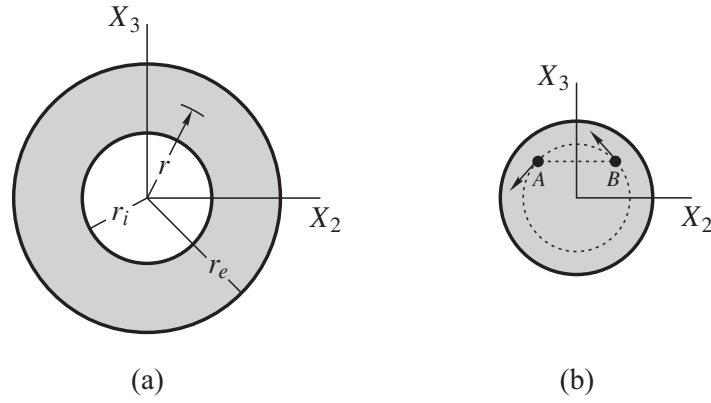
Para essa mesma seção, a expressão (5.61) poderia também ser simplificada, usando o teorema da divergência e (5.62):

$$\begin{aligned} J &= - \int_A \left( X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} + X_3 \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} \right) dA = - \int_A \left[ \frac{\partial}{\partial X_2} (X_2 \Phi) + \frac{\partial}{\partial X_3} (X_3 \Phi) - 2\Phi \right] dA \\ &= - \int_{\Gamma} \Phi (X_2 n_2 + X_3 n_3) ds + 2 \int_A \Phi dA = 2 \int_A \Phi dA. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Na formulação de Prandtl, o problema da torção uniforme resume-se em determinar a função  $\Phi(X_2, X_3)$  que satisfaz (5.56) sujeita à condição de contorno (5.58) (ou (5.62) nas seções simplesmente conexas). A literatura traz a solução exata do problema para alguns poucos casos de seções de geometria simples.

Numa tarefa de pós-processamento, determinamos  $J$  usando (5.61) (ou (5.63) nas seções simplesmente conexas) e, em seguida,  $\theta'$  em função de  $M_t$  usando (5.32). As componentes não nulas da deformação e tensão são dadas por (5.59) e (5.60), respectivamente. Após a identificação da função de empenamento  $\omega$  usando (5.36) e (5.55), as componentes  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  do deslocamento são determinadas usando (5.20) e (5.21).

**Exemplo 5.1** Determine a constante de torção para a barra com seção transversal circular cheia, indicada na Figura 5.7.



**Figura 5.8** Exemplo 5.2: (a) seção transversal circular vazada; (b) problema antissimétrico.

Neste problema a função  $\Phi$  pode ser determinada diretamente da equação que define o contorno da seção simplesmente conexa. De fato, como o contorno é descrito por

$$X_2^2 + X_3^2 = r_e^2,$$

a escolha da função

$$\Phi = k (X_2^2 + X_3^2 - r_e^2)$$

satisfaz  $\Phi = 0$  em todos os pontos do contorno, independentemente da constante  $k$ . Substituindo a função em (5.56), obtemos

$$k = -\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\Phi = -\frac{1}{2} (X_2^2 + X_3^2 - r_e^2)$$

é a solução do problema visto que satisfaz (5.56) e (5.62). Substituindo  $\Phi$  em (5.63),

$$J = 2 \int_A \Phi dA = - \int_A (X_2^2 + X_3^2 - r_e^2) dA = - \int_0^{2\pi} \int_0^{r_e} (r^2 - r_e^2) r dr d\theta = \frac{\pi r_e^4}{2}.$$

Observe de (5.55) que

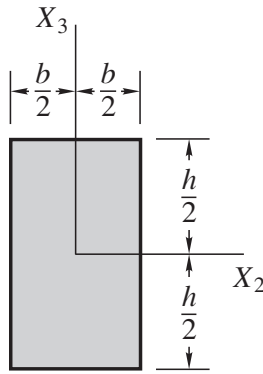
$$\omega_{,2} = \omega_{,3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(X_2, X_3) = \text{constante}.$$

No entanto, (5.36) impõe  $\omega = 0$ . A seção circular não sofre empenamento com a torção, confirmando que sua constante de torção coincide com o momento de inércia polar, como mostra a relação (5.35). ■

**Exemplo 5.2** Determine a constante de torção para a barra com seção transversal circular vazada, indicada na Figura 5.8a.

Pela geometria da seção, a escolha da função

$$\Phi = k (X_2^2 + X_3^2)$$



**Figura 5.9** Exemplo 5.3: seção transversal retangular.

satisfaz  $d\Phi/ds = 0$  nos contornos, independentemente da constante  $k$ : no contorno interno  $\Phi = kr_e^2$  é constante e no contorno externo  $\Phi = kr_e^2$  é também constante. Substituindo a função em (5.56), obtemos

$$k = -\frac{1}{2}$$

e, conseqüentemente,

$$\Phi = -\frac{1}{2}(X_2^2 + X_3^2)$$

é a solução do problema. De (5.61),

$$J = - \int_A \left( X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} + X_3 \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} \right) dA = \int_A (X_2^2 + X_3^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r^2 r dr d\theta = \frac{\pi (r_e^4 - r_i^4)}{2}.$$

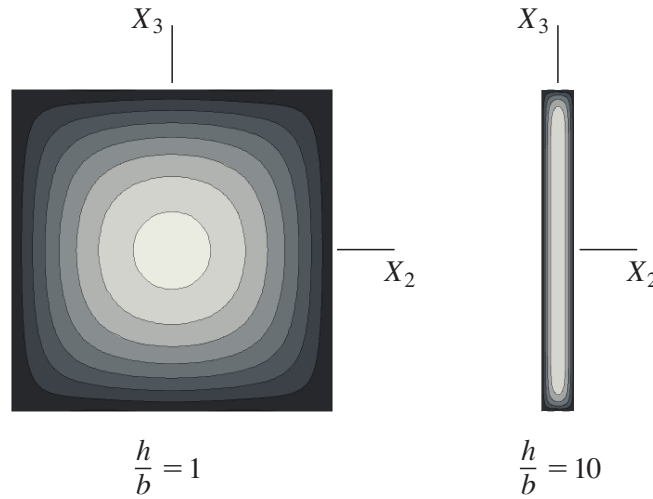
Com base na solução do problema anterior, também concluímos que a seção circular vazada não empena sob torção. ■

O empenamento nulo numa seção circular, cheia ou vazada, poderia ser antecipado por considerações de simetria. Dizemos que a seção circular é simétrica em relação ao plano  $X_1X_3$  porque as duas partes da seção, separadas pelo plano, coincidirão se uma delas for rotacionada de  $180^\circ$  em torno do eixo  $X_3$  (veja Figura 5.8b). Dizemos que o “carregamento” que atua na seção, representado pelo vetor tensão que varia de ponto para ponto, é antissimétrico em relação ao plano porque a mesma rotação faria os vetores tensões que atuam em dois pontos simétricos, digamos  $A$  e  $B$ , não coincidirem unicamente por terem sentidos opostos.

O problema é, então, dito antissimétrico em relação ao plano  $X_1X_3$  porque a seção é simétrica mas o “carregamento” é antissimétrico. Se o deslocamento axial do ponto  $A$  for  $u_1^A$ , o deslocamento axial do ponto  $B$  será  $u_1^B = -u_1^A$ . Sobre o plano de simetria o deslocamento  $u_1$  é nulo, pois é a única forma de conciliar os deslocamentos axiais de  $A$  e  $B$  no caso limite em que coincidem sobre o plano. Como o problema é antissimétrico em relação a qualquer outro plano perpendicular à seção contendo o eixo  $X_1$ , concluímos que o deslocamento axial é nulo em todos os pontos da seção (a seção permanece plana com a torção).

**Exemplo 5.3** Determine a constante de torção para a barra com seção transversal retangular, indicada na Figura 5.9.





**Figura 5.10** Função  $\Phi(X_2, X_3)$ , obtida no Exemplo 5.3, representada pelas suas curvas de nível.

cuja solução é

$$\Phi(X_2) = -X_2^2 + C_1 X_2 + C_2. \quad (5.65)$$

Usando as condições de contorno  $\Phi(\pm b/2) = 0$ , determinamos

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{b^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \Phi(X_2) = \frac{b^2}{4} - X_2^2 \quad (5.66)$$

e, conseqüentemente,

$$J = 2 \int_A \Phi dA = 2 \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{b^2}{4} - X_2^2 \right) h dX_2 = \frac{1}{3} b^3 h. \quad (5.67)$$

Verifique a precisão desse resultado comparando-o com o do Exemplo 5.3 para uma seção retangular com  $h \gg b$ .

- Supondo que a seção circular vazada do Exemplo 5.2 tenha parede fina ( $r_e \approx r_i$ ), então

$$J_{\text{fechada}} = \frac{\pi (r_e^4 - r_i^4)}{2} = \frac{\pi (r_e^2 + r_i^2) (r_e + r_i) (r_e - r_i)}{2} \approx \frac{\pi \cdot 2r_m^2 \cdot 2r_m \cdot b}{2} = 2\pi r_m^3 b \quad (5.68)$$

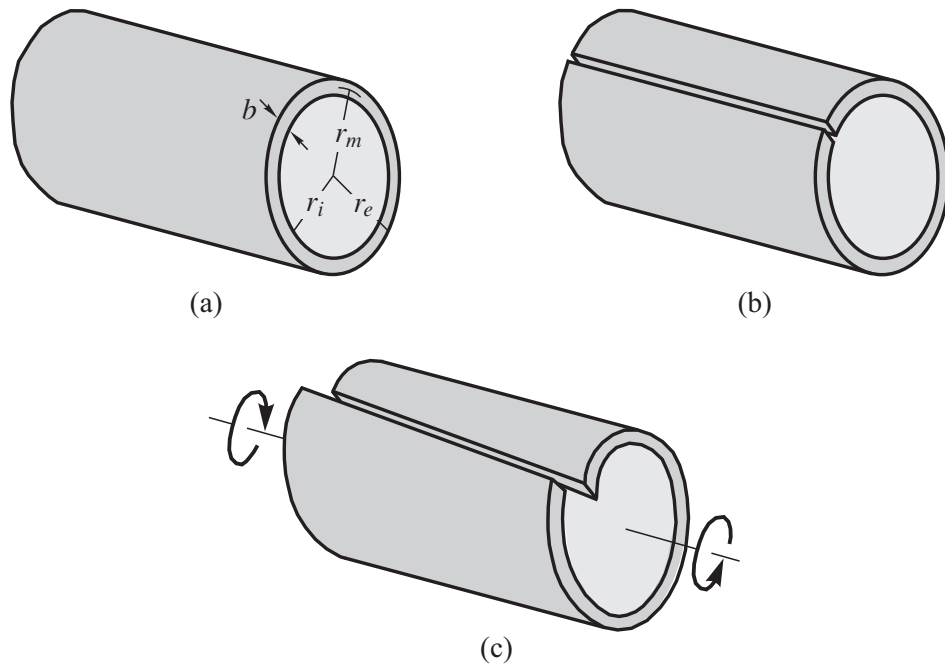
onde  $r_m = (r_e + r_i)/2$  e  $b = r_e - r_i$  (veja Figura 5.11a). Se a seção for aberta, como indicado na Figura 5.11b, a constante de torção pode ser avaliada aproximadamente imaginando a seção como sendo retangular alongada com  $h = 2\pi r_m$ :

$$J_{\text{aberta}} \approx \frac{1}{3} b^3 h = \frac{1}{3} b^3 \cdot 2\pi r_m = \frac{2}{3} \pi r_m b^3. \quad (5.69)$$

Assim,

$$\frac{J_{\text{fechada}}}{J_{\text{aberta}}} = 3 \left( \frac{r_m}{b} \right)^2. \quad (5.70)$$

Para  $r_e = 10$  cm e  $r_i = 9,6$  cm, por exemplo,  $J_{\text{fechada}}/J_{\text{aberta}} = 1806$ . Ou seja, a barra seria em torno de 1800 vezes mais rígida à torção com a seção fechada. A grande redução na constante de torção da seção aberta se deve ao seu fácil empenamento, como ilustra a Figura 5.11c.



**Figura 5.11** Barra com seção transversal circular de parede fina: (a) seção fechada; (b) seção aberta; (c) seção aberta após torção.

**Problemas**

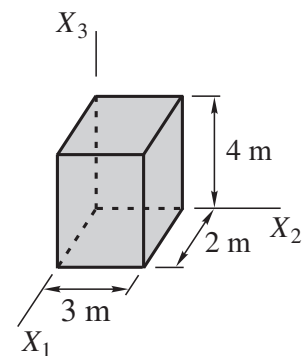
**5.1** Suponha que o Exemplo 2.7 trata de um sólido com  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  e  $\nu = 0,3$  e que não existe carga aplicada no ponto onde é colada a roseta. Determine no ponto as demais componentes do tensor deformação e todas as componentes do tensor tensão no sistema  $X_1X_2X_3$ .

**5.2** Se um sólido em equilíbrio está sob o campo de tensão

$$\sigma = \begin{bmatrix} X_1^2 X_2 & X_1(1 - X_2^2) & 0 \\ X_1(1 - X_2^2) & \frac{X_2^3 - 3X_2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2X_3^2 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

determine:

- (a) a distribuição da força de volume;
- (b) as forças que atuam na sua superfície, sabendo-se que o sólido é o paralelepípedo indicado na figura.



**5.3** Mostre que as tensões (5.23) são independentes da escolha do centro de rotação.

**5.4** A constante de torção para a seção transversal retangular é dada no Exemplo 5.3 pela expressão

$$J = k_1 b^3 h$$

$$k_1 = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{192 b}{\pi^5 h} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{tgh} \frac{m\pi h}{2b} \right).$$

Os valores de  $J$  para  $h/b = 4$  e  $h/b = 1/4$  estão indicados na tabela a seguir.