

Capítulo 11

Formulação do problema de placas laminadas

Observa-se que nos capítulos anteriores nos limitamos a trabalhar os casos nos quais podíamos obter os esforços por equilíbrio global do componente, de forma que a solução dos deslocamentos e tensões se obtinha pelo uso das relações constitutivas e cinemáticas. Raramente se fez uso das equações diferenciais de equilíbrio. Neste capítulo apresentamos as equações do movimento e cinemática não-lineares para placas anisotrópicas. A formulação é desenvolvida tanto em forma diferencial quanto integral através do princípio dos trabalhos virtuais, de forma a permitir o subsequente tratamento de problemas de flexão estática, de dinâmica e de estabilidade. Nos capítulos seguintes, buscaremos a solução analítica para alguns problemas clássicos de placa laminada, de forma a identificar alguns efeitos importantes. Uma coletânea mais completa dos casos com solução analítica conhecida, geralmente flexão, flambagem e vibrações livres de placas laminadas retangulares, encontra-se compilada, por exemplo, em [213], [194] e [195].

11.1 Equações de movimento e cinemáticas

As equações desenvolvidas no Capítulo 2 são as equações de equilíbrio em termos das componentes de tensão de Cauchy. Quando há problemas de grandes deslocamentos, ou mesmo deslocamentos apenas moderadamente grandes, como no caso das análises clássicas de estabilidade, aquelas equações de equilíbrio são exatas, desde que aplicadas à configuração deformada do corpo. Em corpos sólidos, porém, é geralmente incômodo o trabalho desta forma, sendo usual o trabalho com equações adaptadas à configuração original indeformada do corpo. Usa-se então uma descrição material, Lagrangeana, em vez da descrição espacial, Euleriana. Apenas nesta seção se fará referência mais direta a diversos itens da teoria de mecânica do contínuo. Isto geralmente é assunto de um curso próprio e pode ser visto em livros clássicos como [129]. Leitores não familiarizados com o assunto podem passar diretamente à eq.(11.38), página 300.

Consideremos inicialmente a Figura 11.1, onde identificamos um corpo em sua configuração de referência, inicial, e o mesmo corpo em uma configuração deformada num instante t . Consideramos um elemento de massa genérico, inicialmente na posição P definida pelo vetor posição $\mathbf{X} = X_i \hat{\mathbf{i}}_i$.¹ Esse elemento material, no instante t , ocupa a posição p definida pelo vetor $\mathbf{x} = x_i \hat{\mathbf{i}}_i$, com componentes

¹Note que nesta seção faremos uso de uma notação para vetores e tensores, através de símbolos em negrito, como \mathbf{X} . Distinguímos este símbolo de $\{X\}$, que representa aqui o arranjo formado pelas componentes nas direções dos vetores unitários $\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3$, isto é, $\{X\} = \{X_1; X_2; X_3\}^t$. Os subscritos numéricos, apenas nesta seção, serão usados para referir os eixos ordenados em vez das direções principais de ortotropia de material. Assim, 1, 2 e 3 indicam x, y e z , respectivamente. Também nesta seção usaremos a chamada regra do somatório, que diz que

sempre que um índice aparecer duas vezes de um mesmo lado da igualdade indica somatório, por exemplo:

$$X_i \hat{\mathbf{i}}_i = \sum_{i=1}^3 X_i \hat{\mathbf{i}}_i = X_1 \hat{\mathbf{i}}_1 + X_2 \hat{\mathbf{i}}_2 + X_3 \hat{\mathbf{i}}_3.$$

$\{x\} = \{x_1; x_2; x_3\}^T$. Sua densidade é ρ no instante inicial e ρ^1 no instante t . Nesse elemento atua a força de corpo por unidade de massa $\mathbf{b}^1 = b_i^1 \hat{\mathbf{i}}_i$, aplicada na configuração deformada.

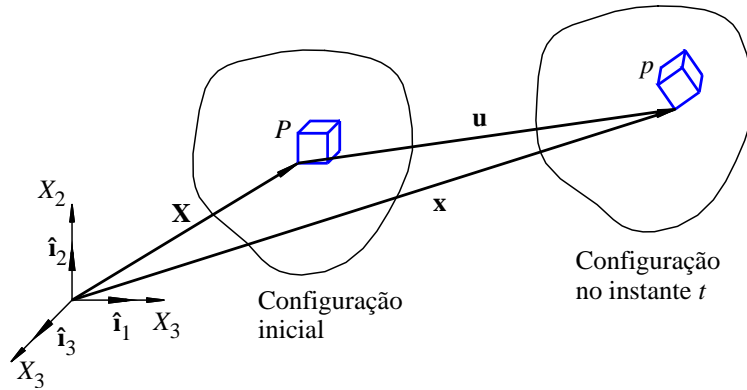


Figura 11.1: Configurações inicial e final de um corpo.

Tomamos um ponto Q na vizinhança de P , de forma que Q tenha coordenadas $\{X_1 + dX_1; X_2 + dX_2; X_3 + dX_3\}^T$. O vetor \overrightarrow{PQ} é dado por

$$d\mathbf{X} = dX_j \hat{\mathbf{i}}_j, \quad \text{com componentes cartesianas } \{dX\} = \{dX_1; dX_2; dX_3\}^T. \quad (11.1)$$

dX_1, dX_2 e dX_3 são as dimensões do paralelepípedo inicial, orientado segundo as direções coordenadas 1-2-3. Estes três segmentos são tomados inicialmente ortogonais. Após a deformação, sofrerão variação de comprimento e de orientação e formarão um novo paralelepípedo que em geral não mais será retangular, como ilustrado na Figura 11.2b.

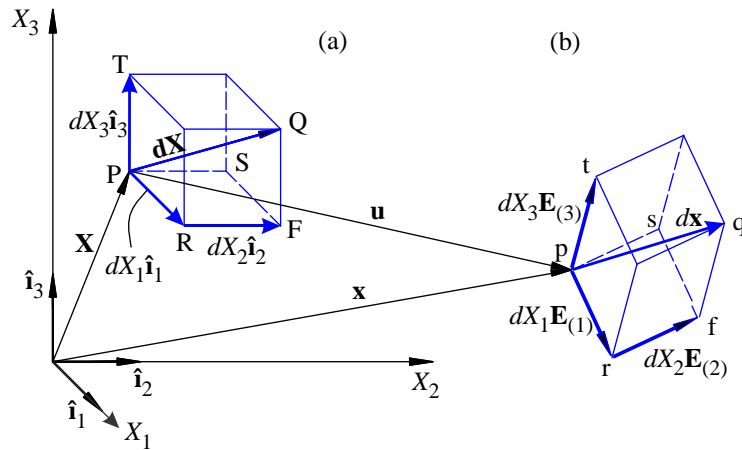


Figura 11.2: Geometria de um elemento diferencial material: (a) indeformado e (b) deformado.

Observe que as coordenadas x_i da posição deformada são função da posição inicial X_j que a partícula material ocupava, isto é,

$$x_i = x_i (X_1; X_2; X_3; t). \quad (11.2)$$

Consideremos o segmento \overline{PR} na Figura 11.2a, de comprimento inicial dX_1 , definido pelo vetor $d\mathbf{X}_{(1)}$ de componentes cartesianas $\{dX_{(1)}\} = \{dX_1; 0; 0\}^T$. A configuração deformada do segmento, \overline{pr} , é dada por

$$d\mathbf{x}_{(1)} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} dX_1 = \underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \hat{\mathbf{i}}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \hat{\mathbf{i}}_3 \right)}_{\mathbf{E}_{(1)}} dX_1. \quad (11.3)$$

$$\mathbf{E}_{(j)} = \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}_{(j)}, \quad \text{com componentes } E_{i(j)} = F_{ik}N_{k(j)}. \quad (11.13)$$

Uma vez que $N_{k(j)} = \delta_{kj}$, $\Rightarrow \mathbf{E}_{(j)} = F_{ij}\hat{\mathbf{i}}_i$.

11.1.1 Tensões

Consideremos agora as forças e tensões que atuam no elemento diferencial deformado. A força atual $d\mathbf{P}$ que atua numa superfície deformada de área dS pode ser representada por

$$d\mathbf{P} = \mathbf{t}^o dS_o, \quad (11.14)$$

onde \mathbf{t}^o é vetor força por unidade de área *inicial*, aquela área correspondente ao dS *atual*. Identificamos três elementos de área iniciais, orientados nas direções cartesianas 1-2-3, como

$$dS_{o(1)} = dX_2 dX_3, \quad dS_{o(2)} = dX_1 dX_3, \quad dS_{o(3)} = dX_1 dX_2. \quad (11.15)$$

A área indeformada $dS_{o(j)}$ corresponde a uma área deformada $dS_{(j)}$ onde atua um vetor de tração $\mathbf{t}_{(j)}^o$, isto é, nas áreas deformadas $j = 1, 2$ e 3 atuam as trações $\mathbf{t}_{(1)}^o$, $\mathbf{t}_{(2)}^o$ e $\mathbf{t}_{(3)}^o$, respectivamente. A Figura 11.3 mostra as forças atuando num elemento diferencial deformado. Aplicando a segunda lei de Newton, temos a equação vetorial de movimento:

$$\frac{\partial \mathbf{t}_{(j)}^o}{\partial X_j} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}. \quad (11.16)$$

Observe que neste ponto devemos escolher um conjunto de eixos para representar as componentes dos vetores de tensão $\mathbf{t}_{(j)}^o$. Duas formas são comuns para representar essas trações. A menos usada consiste em usar as projeções de $\mathbf{t}_{(j)}^o$ nas direções $\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3$, isto é, em cada face j temos:

$$\mathbf{t}_{(j)}^o = \mathbf{T}^{oT} \cdot \widehat{\mathbf{N}}_{(j)}, \quad \text{com componentes } t_{i(j)}^o = T_{ki}^o N_{k(j)}, \quad (11.17)$$

onde o índice superior “ T ” indica transposto como usual. Como de (11.12) $N_{k(j)} = \delta_{kj}$, as trações nas faces $j = 1, 2, 3$ têm componentes cartesianas T_{ji}^o , isto é,

$$\mathbf{t}_{(j)}^o = T_{ji}^o \hat{\mathbf{i}}_i, \quad \text{com componentes cartesianas } \{T_{j1}^o; T_{j2}^o; T_{j3}^o\}^T. \quad (11.18)$$

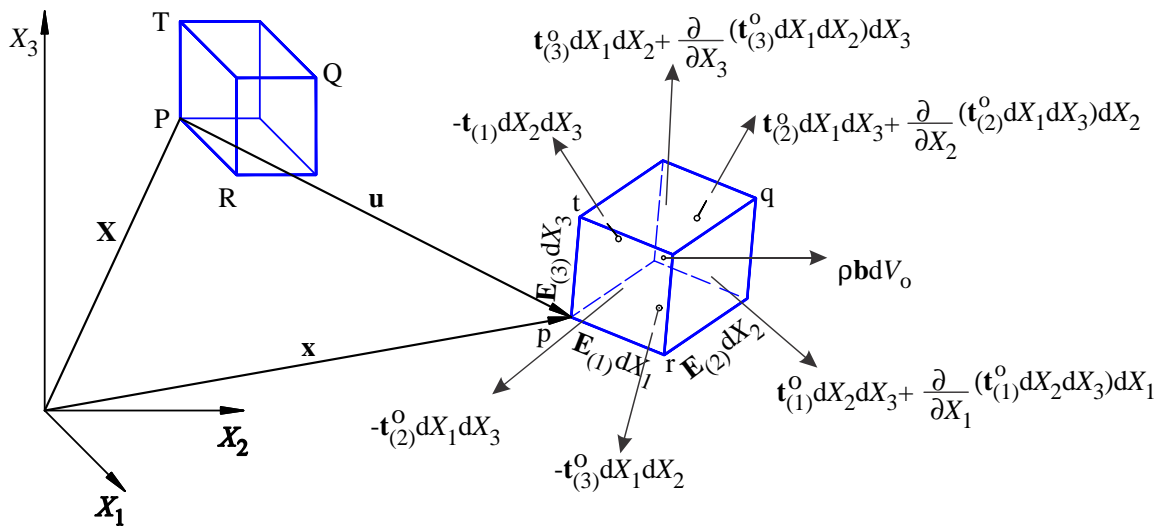


Figura 11.3: Diagrama de corpo livre de um elemento diferencial deformado. $\mathbf{t}_{(j)}^o$ são vetores de tração por unidade de área inicial.

A Figura 11.4 ilustra num caso bidimensional as componentes do vetor de trações no ponto \mathbf{x} , na face deformada 3, em suas componentes nas direções 1-2-3.

$$\mathbf{t}_{(j)} = \mathbf{T}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}_{(j)}, \text{ com componentes } t_{i(j)} = T_{ki} n_{k(j)}. \quad (11.24)$$

$\hat{\mathbf{n}}_{(j)}$ são três vetores ortogonais definidos por $\hat{\mathbf{n}}_{(j)} = \delta_{ij} \hat{\mathbf{i}}_i$. Assim, as trações nas três faces serão

$$\mathbf{t}_{(j)} = T_{ji} \hat{\mathbf{i}}_i, \text{ com componentes } \{T_{j1}; T_{j2}; T_{j3}\}^T. \quad (11.25)$$

De forma geral, \mathbf{T} define o vetor de tensão numa face definida por uma normal $\hat{\mathbf{n}}$ qualquer da seguinte forma:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}, \text{ com componentes } t_i = T_{ki} n_k. \quad (11.26)$$

Relação $\mathbf{T}^o - \mathbf{T}$ (Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e tensor de Cauchy)

Se compararmos (11.17) a (11.26), observaremos que as expressões são semelhantes, porém \mathbf{t} e \mathbf{T} são forças por unidade de área deformada enquanto \mathbf{t}^o e \mathbf{T}^o são por unidade de área original. Consideremos agora uma mesma área material, isto é, um elemento de área de valor dS_o , com normal inicialmente orientada por $\hat{\mathbf{N}}$, que se deforma numa área de módulo dS e direção $\hat{\mathbf{n}}$. Neste caso é possível obter uma relação entre as componentes dos tensores de Cauchy \mathbf{T} e do primeiro de Piola-Kirchhoff \mathbf{T}^o . Substituindo (11.26) em (11.23) e eliminando $\hat{\mathbf{n}} dS$ com o uso de (11.21), temos

$$\hat{\mathbf{N}} \cdot [\mathbf{T}^o - J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}] = 0.$$

Como a identidade deve ser satisfeita para qualquer $\hat{\mathbf{N}}$, obtemos a relação entre o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{T}^o e o tensor de Cauchy \mathbf{T} como:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{T}^o &= J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}, & \text{com componentes } T_{ij}^o &= J \frac{\partial X_i}{\partial x_k} T_{kj}, \\ & & \text{ou, em forma matricial, } [\mathbf{T}^o] &= J [\mathbf{F}]^{-1} [\mathbf{T}] \end{aligned}} \quad (11.27)$$

onde $J = \det \mathbf{F} = \rho/\rho^1$.

Note que, como \mathbf{T} é simétrico no caso não-polar, \mathbf{T}^o é em geral não-simétrico. Isto é incômodo, principalmente no relacionamento com o tensor de deformação, que é simétrico. Desta forma as equações do movimento são mais usadas quando expressas em termos do chamado **segundo tensor tensão do Piola-Kirchhoff** σ que passamos a trabalhar em seguida.

11.1.2 Segundo tensor tensão do Piola-Kirchhoff σ

Consideremos o vetor força $d\mathbf{P}$ na superfície deformada, dado em termos do vetor de tensão por unidade de área inicial \mathbf{t}^o como em (11.14). Como esta tração é um vetor, pode ser representada por componentes em diversos sistemas de eixos. Em (11.17) foi usado o sistema global fixo $\hat{\mathbf{i}}_1 - \hat{\mathbf{i}}_2 - \hat{\mathbf{i}}_3$, o que resultou em \mathbf{T}^o . Agora serão usados os próprios eixos locais em que a tríade $\hat{\mathbf{i}}_1 - \hat{\mathbf{i}}_2 - \hat{\mathbf{i}}_3$ se deformou, as direções $\mathbf{E}_{(j)}$ definidas em (11.4) ou (11.13) como

$$\mathbf{E}_{(j)} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_j} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{(j)} = F_{ij} \hat{\mathbf{i}}_i. \quad (11.28)$$

Note que os vetores $\mathbf{E}_{(j)}$ não são necessariamente unitários e nem formam um conjunto ortogonal. Representamos então cada vetor de tensão $\mathbf{t}_{(j)}^o$ em termos de componentes nas direções $\mathbf{E}_{(j)}$ da seguinte forma:

$$\boxed{\mathbf{t}_{(j)}^o = \sigma_{jk} \mathbf{E}_{(k)}, \quad \text{soma em } k} \quad (11.29)$$

Os termos σ_{jk} são as componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff. A Figura 11.5 ilustra o vetor de tensão $\mathbf{t}_{(1)}^o$ aplicada na face 1 e suas componentes σ_{1j} nas direções $\mathbf{E}_{(j)}$ conforme (11.29). Podemos agora substituir (11.29) nas equações de movimento (11.16):

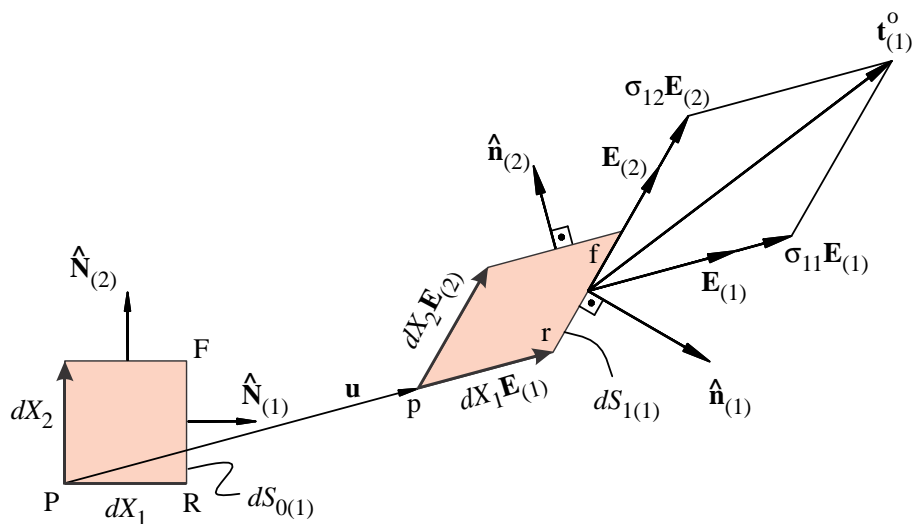


Figura 11.5: Vetor tração \mathbf{t}^o por unidade de área indeformada e suas componentes σ_{1j} nas direções deformadas $\mathbf{E}_{(j)}$, aplicadas na face 1 de normal inicial $\hat{\mathbf{N}}_{(1)}$ e final $\hat{\mathbf{n}}_{(1)}$.

$$\frac{\partial}{\partial X_j} [\sigma_{jk} \mathbf{E}_{(k)}] + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}, \quad \text{soma em } j \text{ e } k. \quad (11.30)$$

De (11.28), estas equações apresentam a forma

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[\sigma_{jk} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \hat{\mathbf{i}}_i \right] + \rho b_i \hat{v}_i = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} \hat{v}_i \quad (11.31)$$

Note que, como $x_i = X_i + u_i$, segue-se que $\partial x_i / \partial X_k = \delta_{ik} + \partial u_i / \partial X_k$. Com isso, obtemos as componentes das **equações do movimento em termos das componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff**:

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[\sigma_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] + \rho b_i = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad (11.32)$$

ou, de forma estendida,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \sigma_{13} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial X_2} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \sigma_{23} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial X_3} \left[\sigma_{31} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) + \sigma_{32} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \sigma_{33} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right] + \rho b_1 = \rho \frac{d^2 u_1}{dt^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) + \sigma_{13} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial X_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) + \sigma_{23} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial X_3} \left[\sigma_{31} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \sigma_{32} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) + \sigma_{33} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right] + \rho b_2 = \rho \frac{d^2 u_2}{dt^2}, \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3}, \\ 2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3}, \\ 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2}. \end{array} \right. \quad (11.36)$$

Observe que $u_i = u_i(X_1; X_2; X_3; t)$, portanto $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(X_1, X_2, X_3, t)$, isto é, as componentes de deformação são Lagrangeanas. Para o caso de deformação e deslocamentos suficientemente pequenos estas relações podem ser linearizadas, eliminando os termos quadráticos, o que resulta nas mesmas relações mostradas no Capítulo 2:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, & \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3}, \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2}, & \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3}, \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3}, & \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2}. \end{array}} \quad (11.37)$$

11.2 Equações diferenciais para placas laminadas

Na seção anterior detalhamos as equações do movimento e as relações cinemáticas Lagrangeanas em termos do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, de componentes $[\sigma]$, e das deformações de Green-St.Venant, eqs.(11.33) e (11.36), respectivamente. Interessa agora a particularização para o caso de placas laminadas. Esta forma particular do corpo e do carregamento permite que se introduzam simplificações na formulação tridimensional. Desta forma usamos dois conjuntos gerais de hipóteses:

1. *Hipótese de von Kármán. Esta hipótese lida com os termos não-lineares nas equações de movimento e nas equações cinemáticas. Para vigas e placas sob deslocamentos apenas moderadamente grandes, mantêm-se apenas os termos não-lineares envolvendo $\partial u_3/\partial X_1$ e $\partial u_3/X_2$. Todos os demais termos não-lineares são eliminados. Esta hipótese inicialmente é enunciada para placas finas, mas pode ser estendida para placas semi-espessas através da hipótese seguinte.*
2. *Hipóteses de placa semi-espessa de Mindlin/Reissner. São as hipóteses da teoria de primeira ordem que considera que qualquer segmento inicialmente reto e normal à superfície de referência indeformada da placa permanece reto e inextensível, porém não necessariamente normal à superfície de referência deformada. Essa não-perpendicularidade permite um certo grau de aproximação ao cisalhamento transversal.*

A restrição de “deslocamentos moderadamente grandes” significa que, conquanto a presença dos termos não-lineares permita o tratamento de deslocamentos algo maiores que os permitidos na teoria linearizada, esse deslocamento transversal não pode ser arbitrariamente grande. Por exemplo, são admitidos deslocamentos da ordem da espessura da placa, porém não é admitido que a placa se deforme até tornar-se um cilindro circular, por exemplo. Uma das principais utilizações desta teoria se dá na estimativa de carga crítica de flambagem. Outro uso consiste na solução de deslocamentos e tensões levando em conta os efeitos de enrijecimento por tensões, (*stress stiffening*).

Na Figura 11.6 temos ilustradas algumas componentes de tensão de Piola-Kirchhoff num ponto genérico de uma placa sob flexão. O campo de deformações foi tomado segundo a hipótese de von Kármán. Considerou-se a placa inicialmente sobre o plano $X_1 - X_2$, e tomou-se uma seção inicialmente normal ao eixo X_1 . Observa-se que a componente de tensão σ_{11} acompanha a direção tangente à superfície de referência deformada, enquanto a componente σ_{13} é tangente à seção deformada. Essas orientações podem ser comparadas ao caso geral ilustrado na Figura 11.5.

Com as hipóteses de von Kármán, podemos simplificar as equações do movimento (11.33) e cinemáticas (11.36), que tomam as seguintes formas:

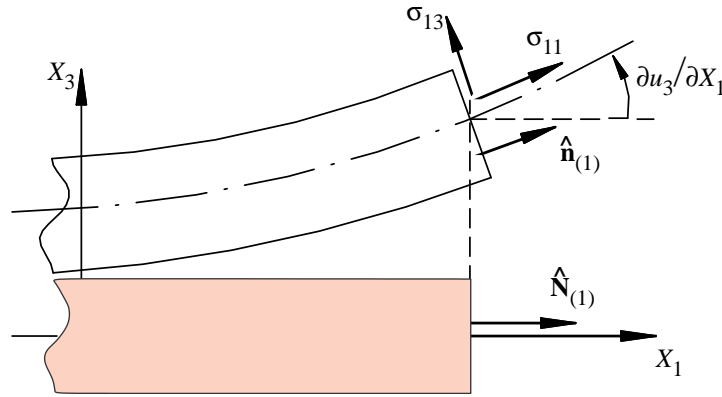


Figura 11.6: Tensões de Piola-Kirchhoff na seção transversal de uma placa, associadas às hipóteses de von Kármán.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x^{lk}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{lk}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{lk}}{\partial z} + \rho^k b_x = \rho^k \frac{d^2 u}{dt^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}^{lk}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{lk}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{lk}}{\partial z} + \rho^k b_y = \rho^k \frac{d^2 v}{dt^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\tau_{xz}^{lk} + \sigma_x^{lk} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy}^{lk} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\tau_{yz}^{lk} + \tau_{xy}^{lk} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y^{lk} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma_z^{lk} + \tau_{xz}^{lk} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz}^{lk} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \rho^k b_z = \rho^k \frac{d^2 w}{dt^2}. \end{array} \right. \quad (11.38)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{array} \right. \quad (11.39)$$

Observe que apenas na seção anterior tínhamos usado as notações especiais de $\{X_1; X_2; X_3\}$, $\{x_1; x_2; x_3\}$ e $\{u_1; u_2; u_3\}$ para indicar coordenadas inicial e final e deslocamentos de uma partícula material. Agora voltamos à notação usada em todo o restante do texto, isto é, $\{x; y; z\}$ e $\{u; v; w\}$ para indicar as coordenadas materiais e deslocamentos do ponto. Em (11.38) σ_{ij} indica as componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff. Aqui voltamos a usar σ_x , τ_{xy} etc. em vez de σ_{11} , σ_{12} etc. Note que, na ausência dos termos não lineares envolvendo $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$, essas equações se revertem nos casos lineares usuais vistos no Capítulo 2.

11.2.1 Equações de movimento do laminado

Passamos agora à determinação das equações de movimento do laminado. Integramos cada uma das três equações (11.38) ao longo da espessura e usamos as definições dos esforços \mathbf{N} e \mathbf{M} das equações (6.12), e dos esforços cortantes

$$\mathbf{Q} = \{Q_y; Q_x\}^T := \int_{z=-H/2}^{H/2} \left\{ \tau_{yz}^{lk}; \tau_{xz}^{lk} \right\}^T dz. \quad (11.40)$$

Usam-se além disto as hipóteses cinemáticas de placas semi-espessas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \tau_{xz}|_{-H/2} &= \rho_0 \frac{d^2 u^o}{dt^2} + \rho_1 \frac{d^2 \psi_x}{dt^2}, \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \tau_{yz}|_{-H/2} &= \rho_0 \frac{d^2 v^o}{dt^2} + \rho_1 \frac{d^2 \psi_y}{dt^2}, \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + q(x, y) \\
&= \rho_0 \frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \left[\rho_0 \frac{\partial^2 u^o}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \tau_{xz}|_{-H/2} \right] - \frac{\partial w}{\partial y} \left[\rho_0 \frac{d^2 v^o}{dt^2} + \rho_1 \frac{d^2 \psi_y}{dt^2} - \tau_{yz}|_{-H/2} \right], \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + z \tau_{xz}|_{-H/2} + \int_{-H/2}^{H/2} z \rho b_x dz &= \rho_1 \frac{d^2 u^o}{dt^2} + \rho_2 \frac{d^2 \psi_x}{dt^2}, \\
\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + z \tau_{yz}|_{-H/2} + \int_{-H/2}^{H/2} z \rho b_y dz &= \rho_1 \frac{d^2 v^o}{dt^2} + \rho_2 \frac{d^2 \psi_y}{dt^2}
\end{aligned} \tag{11.51}$$

Estas equações de movimento são apresentadas em termos dos deslocamentos para laminados simétricos nas eqs.(13.17), página 352. As eqs.(11.51) correspondem à teoria de primeira ordem de Mindlin. Para a teoria de Kirchhoff, as equações de movimento são mostradas na Seção (11.3.1).

Os esforços cortantes podem ser eliminados da terceira equação com o uso das duas últimas, resultando num sistema de três equações em termos dos seis esforços coplanares N_x , N_y , N_{xy} , M_x , M_y e M_{xy} :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u^o}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= \rho_0 \frac{\partial^2 v^o}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + q(x, y) &= \\
&= \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_1 \left(\frac{\partial^3 u^o}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v^o}{\partial y \partial t^2} \right) + \rho_2 \left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y \partial t^2} \right) - \\
&- \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(\rho_0 \frac{\partial^2 u^o}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\rho_0 \frac{\partial^2 v^o}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{11.52}$$

Nestas equações consideramos o caso de superfícies livres de cargas cisalhantes, isto é, $\tau_{xz}(x, y, \pm H/2) = \tau_{yz}(x, y, \pm H/2) = 0$. Observe que apenas os termos entre colchetes são não-lineares. As equações (11.52) são válidas tanto para placas homogêneas quanto para as laminadas.

Tanto para placas quanto para vigas isotrópicas homogêneas, sabe-se que os termos de inércia rotacional, aqueles proporcionais a ρ_1 e ρ_2 , têm o mesmo peso que a aproximação da rotação do segmento normal pelo uso das funções ψ_x e ψ_y . Em problemas dinâmicos, a inclusão do cisalhamento transversal obriga à inclusão dos termos de inércia rotacional. A inclusão de apenas um deles costuma ter resultados piores que a exclusão de ambos [137]. Desta forma, para a teoria de placas finas, onde $\gamma_{xz} = \psi_x + w_{,x} = 0$ e $\gamma_{yz} = \psi_y + w_{,y} = 0$, o conjunto de equações a ser usado é também (11.51), ou (11.52), eliminando todos os termos em ρ_1 e ρ_2 .

As **condições de contorno** são as seguintes. Considere primeiramente que o contorno Γ da placa seja dividido em duas partes, Γ_u onde são prescritos os valores dos deslocamentos, e Γ_f onde são prescritos os esforços, isto é,

11.3 Método dos Resíduos Ponderados e condições de contorno

O conteúdo desta e das próximas seções é apresentado neste ponto do texto apenas com vistas a manter os assuntos agrupados por tipo. Na realidade, a primeira aplicação do Método de Galerkin somente se fará na Seção 16.7 e em capítulos seguintes, como base ao Método de Elementos Finitos. Assim, o leitor pode simplesmente decidir adiar a leitura do resto desta seção e ir diretamente para a Seção 11.6. De qualquer forma, os conteúdos desta seção e da próxima são apresentados aqui apenas como referência e pressupõem que o leitor já tenha sido exposto ao assunto de forma consistente, em disciplinas apropriadas de elementos finitos e métodos variacionais, ou tenha utilizado textos como [103], [210], [37], [62] ou [70].

O comportamento de uma placa laminada pode ser modelado pelo conjunto das 5 equações de movimento (11.51), as 8 equações constitutivas (11.56) e (11.61), e 8 relações cinemáticas (11.54) e (11.55), que envolvem 21 equações e 21 incógnitas, quais sejam, os esforços N_x , N_y , N_{xy} , M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y , as deformações ε_x^o , ε_y^o , γ_{xy}^o , κ_x , κ_y , κ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} , e os deslocamentos de placa u^o , v^o , w , ψ_x e ψ_y . Este conjunto de equações, juntamente com as condições de contorno, é o que, em terminologia matemática, é chamado **forma forte** do problema. A mesma solução, entretanto, pode ser obtida por outras vias, as denominadas **formas fracas** do problema, que são formas integrais provenientes do uso do **Método dos Resíduos Ponderados**. Em problemas de mecânica dos sólidos, a forma fraca frequentemente usada é o chamado **princípio dos trabalhos virtuais**. Além das formas forte e fraca, em deformação elástica existe ainda uma terceira forma de onde se pode obter a solução, a partir da minimização da **energia potencial de deformação**. Observe que as **três formas são equivalentes no sentido em que a solução obtida por qualquer uma delas é, sob algumas condições, a mesma, e que qualquer uma das três formas pode ser usada para deduzir as outras duas**. As equações diferenciais de movimento podem ser obtidas usando as leis de Newton sobre um corpo adaptadas à mecânica do contínuo. Obtidas as equações associadas a um elemento diferencial tridimensional, uma integração ao longo da espessura produz as equações de placa, método usado na Seção 11.1. Outro procedimento existe, como o usado no Capítulo 5, onde se utiliza um diagrama de corpo livre de um elemento diferencial de placa e aplica-se diretamente o equilíbrio.

As eqs.(11.51) formam o conjunto de equações diferenciais de movimento do problema de placa para deslocamentos moderadamente grandes. Podemos tomar cada uma delas e multiplicar por uma função peso, isto é, a primeira equação por uma função $\hat{u}(x, y)$, a segunda por $\hat{v}(x, y)$ etc., adicionar umas às outras e integrar sobre o domínio Ω da placa. Com isso, formamos a função escalar V dada por

$$\begin{aligned}
 V = \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - F_x \right] \hat{u} + \left[\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - F_y \right] \hat{v} \right. \\
 + \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_z + q \right] \hat{w} \\
 \left. + \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - F_{mx} \right] \hat{\psi}_x + \left[\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - F_{my} \right] \hat{\psi}_y \right\} d\Omega = 0.
 \end{aligned} \tag{11.62}$$

F_x , F_y , F_z , F_{mx} e F_{my} são forças de inércia por unidade de área e incluem os termos do lado direito de (11.51), isto é, para a teoria de primeira ordem, e na ausência de forças de corpo de outras fontes, temos apenas as forças de origem inercial:

$$\begin{aligned}
 F_y(x, y, t) &= \rho_o \frac{d^2 v^o}{dt^2} + \rho_1 \frac{d^2 \psi_y}{dt^2}, & F_{mx}(x, y, t) &= \rho_1 \frac{d^2 u^o}{dt^2} + \rho_2 \frac{d^2 \psi_x}{dt^2}, \\
 F_x(x, y, t) &= \rho_o \frac{d^2 v^o}{dt^2} + \rho_1 \frac{d^2 \psi_y}{dt^2}, & F_{my}(x, y, t) &= \rho_1 \frac{d^2 v^o}{dt^2} + \rho_2 \frac{d^2 \psi_y}{dt^2}, \\
 F_z(x, y, t) &= \rho_o \frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{\partial w}{\partial x} F_x - \frac{\partial w}{\partial y} F_y, & &
 \end{aligned} \tag{11.63}$$

onde $\rho_0(x, y)$, $\rho_1(x, y)$ e $\rho_2(x, y)$ são definidos em (11.44), (11.45) e (11.50). Para a teoria de placas delgadas as forças de corpo se simplificam como mostrado em (11.94).

Até este ponto apenas exigimos que as funções peso sejam diferenciáveis uma vez. Em seguida integramos (11.62) por partes. Como temos aqui funções de várias variáveis, usamos uma versão do **teorema do divergente** para uma função $f(x, y)$, na forma

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_x ds, \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_y ds, \quad (11.64)$$

onde n_x e n_y são os cossenos diretores do vetor unitário \hat{n} , isto é, $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j}$, normal ao contorno no ponto $(x, y) \in \Gamma$. Aqui Γ representa o conjunto de pontos do contorno da superfície de referência da placa, enquanto Ω representa o domínio, o conjunto de pontos da superfície de referência. Caso tenhamos $f(x, y) = g(x, y)h(x, y)$, o teorema resulta em

$$\boxed{\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x} g d\Omega = \int_{\Gamma} g h n_x ds - \int_{\Omega} h \frac{\partial g}{\partial x} d\Omega} \quad (11.65)$$

e, de forma análoga, tem-se o mesmo para a derivada em y . Por exemplo, um dos termos de (11.62) pode ser integrado uma vez, resultando

$$\int_{\Omega} N_x \hat{w} w_{,xx} d\Omega = \int_{\Gamma} N_x w_{,x} \hat{w} n_x ds - \int_{\Omega} (N_x \hat{w})_{,x} w_{,x} d\Omega.$$

Fazendo derivada em cadeia no terceiro termo, temos

$$\int_{\Omega} N_x \hat{w} w_{,xx} d\Omega = \int_{\Gamma} N_x w_{,x} \hat{w} n_x ds - \int_{\Omega} N_{x,x} w_{,x} \hat{w} d\Omega - \int_{\Omega} N_x w_{,x} \hat{w}_{,x} d\Omega.$$

De forma semelhante integramos os demais termos de (11.62) que contêm derivadas, tal que:

$$\begin{aligned} V = \int_{\Gamma} & \left\{ \underbrace{[N_x n_x + N_{xy} n_y]}_X \hat{u} + \underbrace{[N_{xy} n_x + N_y n_y]}_Y \hat{v} + \right. \\ & + \left[\underbrace{Q_x n_x + Q_y n_y}_{Q_n} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} n_x + N_y \frac{\partial w}{\partial y} n_y + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} n_y + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} n_x \right] \hat{w} \\ & \left. + \underbrace{[M_x n_x + M_{xy} n_y]}_{X_m} \hat{\psi}_x + \underbrace{[M_y n_y + M_{xy} n_x]}_{Y_m} \hat{\psi}_y \right\} d\Gamma \end{aligned}$$

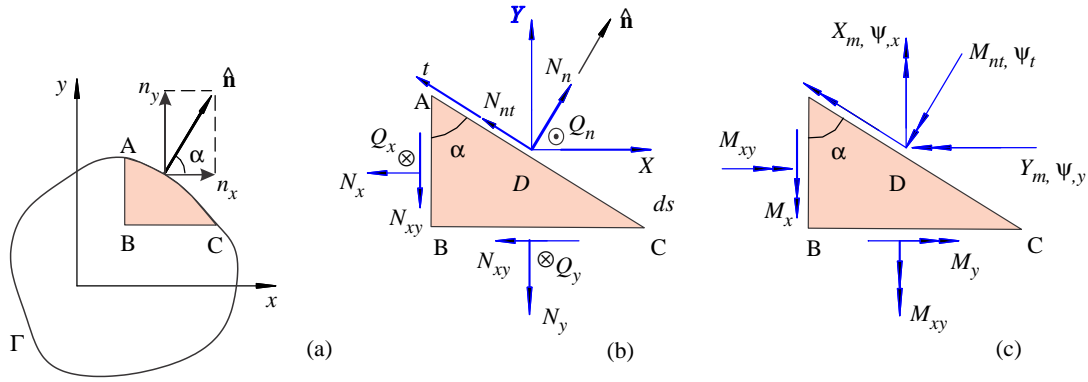


Figura 11.8: Ilustração dos esforços normais e cortantes no contorno da placa em (b) e de momentos em (c).

Operações semelhantes podem ser realizadas para os momentos, usando a Figura 11.8c, o que resulta em

$$\boxed{X_m = M_x n_x + M_{yx} n_y, \quad Y_m = M_{xy} n_x + M_y n_y} \quad (11.70)$$

Para o esforço cortante, a transformação pode ser obtida por equilíbrio de forças na direção z , resultando em

$$\boxed{Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y} \quad (11.71)$$

Voltemos então à eq.(11.66). O segundo colchete na integral de área tem a soma dos termos entre parênteses iguais às forças de corpo F_x e F_y em razão das duas primeiras equações do movimento em (11.51). As diversas funções definidas em (11.67) a (11.71) podem ser identificadas nos termos do contorno e do domínio, como indicado nas entrelinhas de (11.66). Foram usadas também as definições dos vetores dos esforços mostrados em (11.56) a (11.61). Com isso, (11.66) pode ser compactado na forma

$$\begin{aligned} V = & - \int_{\Omega} \left\{ \left\{ \begin{matrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}} \end{matrix} \right\} + \mathbf{Q}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_c + F_x \hat{u} + F_y \hat{v} + F_{mx} \hat{\psi}_x + F_{my} \hat{\psi}_y \right. \\ & \left. - \left[q - F_z + \frac{\partial w}{\partial x} F_x + \frac{\partial w}{\partial y} F_y \right] \hat{w} + \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ X \hat{u} + Y \hat{v} + \underbrace{\left[Q_n + \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_x + \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_y \right]}_{Q_n^*} \hat{w} \right. \\ & \left. + X_m \hat{\psi}_x + Y_m \hat{\psi}_y \right\} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (11.72)$$

Definimos as forças cortantes em faces orientadas em $+x$ e $+y$ como

$$\boxed{Q_x^* = Q_x + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad Q_y^* = Q_y + N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}} \quad (11.73)$$

e, numa face orientada numa direção \hat{n} qualquer, como

$$\boxed{Q_n^* = Q_x^* n_x + Q_y^* n_y} \quad (11.74)$$

exemplo, não será possível a aplicação de condições sobre estes cinco esforços mas apenas sobre quatro outros esforços, conforme virão a ser definidos na Seção 11.3.1.

Com (11.79) ou (11.80) temos uma formulação que representa as equações de movimento e condições de trações homogêneas em Γ_f . Entretanto, desejamos obter uma formulação que permita a imposição de **condições de contorno não-homogêneas**, isto é, desejamos poder prescrever $X = \bar{X}$, $Y = \bar{Y}$ etc., como em (11.53). Basta então usar (11.53) para formar resíduos no contorno e formar um funcional na forma semelhante a (11.79):

$$\begin{aligned}
 V := & - \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - F_x \right] \hat{u} + \left[\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - F_y \right] \hat{v} \right. \\
 & + \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_z + q \right] \hat{w} \\
 & + \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - F_{mx} \right] \hat{\psi}_x + \left[\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - F_{my} \right] \hat{\psi}_y \left. \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma_f} \left\{ [X - \bar{X}] \hat{u} + [Y - \bar{Y}] \hat{v} + [Q_n^* - \bar{Q}_n^*] \hat{w} + [X_m - \bar{X}_m] \hat{\psi}_x + [Y_m - \bar{Y}_m] \hat{\psi}_y \right\} d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma_u} [X \hat{u} + Y \hat{v} + Q_n^* \hat{w} + X_m \hat{\psi}_x + Y_m \hat{\psi}_y] d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{11.83}$$

Os termos F_x , F_y , F_z , F_{mx} e F_{my} são forças e momentos de inércia e correspondem ao lado direito das equações do movimento (11.51) e são explicitados em (11.63).

Como a soma dos termos é nula, multiplicamos todos os termos por -1 . Como \hat{u} , \hat{v} , etc. são arbitrários, $V = 0$ implica que $X = \bar{X}$, $Y = \bar{Y}$, etc., em Γ_f , isto é, as condições de contorno de força são satisfeitas com a primeira integral no contorno. Na segunda integral do contorno, os pontos em Γ_u têm deslocamentos impostos e os esforços X , Y , etc. são incógnitas desejadas. Nesta parte do contorno as funções peso foram escolhidas como nulas, isto é, $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = \hat{\psi}_x = \hat{\psi}_y = 0$ em qualquer $(x, y) \in \Gamma_u$. Assim, a última integral em (11.83) é identicamente nula, e foi adicionada apenas para levar a uma simplificação nas operações mostradas a seguir.

A partir da expressão (11.83) realizamos as mesmas operações vistas em (11.62), basicamente integrações por partes com o uso do teorema da divergência, o que resultará em (11.72), com sinais trocados, mais as duas integrais de contorno de (11.83). Simplificando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ \left\{ \begin{matrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}} \end{matrix} \right\} + \mathbf{Q}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_c \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right. \\
 & + \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} F_x + \frac{\partial w}{\partial y} F_y \right) \hat{w} \left. \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left\{ -q \hat{w} + F_x \hat{u} + F_y \hat{v} + F_z \hat{w} + F_{mx} \hat{\psi}_x + F_{my} \hat{\psi}_y \right\} d\Omega \\
 & - \int_{\Gamma_f} \left\{ \bar{X} \hat{u} + \bar{Y} \hat{v} + \bar{Q}_n^* \hat{w} + \bar{X}_m \hat{\psi}_x + \bar{Y}_m \hat{\psi}_y \right\} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{11.84}$$

Esta equação é conhecida como **equação da forma fraca**, ou do **princípio dos trabalhos virtuais** associado ao problema de placas laminadas. Os esforços $\{N\}$, $\{M\}$ e $\{Q\}$ podem ser postos em termos dos deslocamentos u^o , v^o , w , ψ_x e ψ_y usando as relações constitutivas (11.56) a (11.61) e cinemáticas (11.54) e (11.55). As funções peso \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} , $\hat{\psi}_x$ e $\hat{\psi}_y$ são frequentemente conhecidas por variações ou **deslocamentos virtuais**. $\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o\}$, $\{\hat{\boldsymbol{\kappa}}\}$ e $\{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_c\}$ são chamadas **deformações virtuais** e se relacionam aos deslocamentos virtuais por (11.67)-(11.68). Sem dúvida, estes não são deslocamentos ou deformações físicas, apenas funções derivadas a partir das funções peso.

A expressão (11.84) é bastante geral, podendo ser aplicada a problemas estáticos ou dinâmicos, lineares ou não-lineares, dependendo de quais termos sejam retidos ou eliminados.

11.3.1 Formulação de Kirchhoff para placas delgadas

A formulação apresentada corresponde à teoria de primeira ordem ou de Mindlin para placas ditas semi-espessas. Para o caso de placas delgadas devemos usar as hipóteses de Kirchhoff, o que resulta em certas modificações, mostradas a seguir.

Equações do movimento

Uma vez que a teoria de Kirchhoff não admite deformações cisalhantes transversais, as equações do movimento são obtidas simplificando (11.51). As inércias rotacionais são desprezadas e os produtos das forças de inércia pelas inclinações são de ordem superior. Assim, as equações de movimento tornam-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho_o \frac{d^2 u^o}{dt^2}, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho_o \frac{d^2 v^o}{dt^2}, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + q = \rho_o \frac{d^2 w}{dt^2}, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \end{array} \right. \quad (11.85)$$

Usando as duas últimas equações para eliminar os esforços cortantes na terceira equação obtemos o conjunto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_o \frac{\partial^2 u^o}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho_o \frac{\partial^2 v^o}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + q = \rho_o \frac{d^2 w}{dt^2} \end{array} \right. \quad (11.86)$$

As hipótese de Kirchhoff para placas finas implica fazer $\psi_x = -w_{,x}$ e $\psi_y = -w_{,y}$ em (11.41). Isso reduz de cinco para três os deslocamentos incógnitos: u^o , v^o e w .

Usando as relações constitutivas do laminado e as relações cinemáticas, as equações do movimento podem ser postas em termos dos deslocamentos u^o , v^o e w da superfície de referência. Além disso, simplificamos as equações para o caso linear de pequenos deslocamentos. Isto corresponde a ignorar o termo entre colchetes em (11.86). Assim obtemos o conjunto de **equações de movimento para placas finas laminadas sob pequenos deslocamentos**:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}u_{,xx}^o + 2A_{16}u_{,xy}^o + A_{66}u_{,yy}^o + A_{16}v_{,xx}^o + (A_{12} + A_{66})v_{,xy}^o + A_{26}v_{,yy}^o \\ -B_{11}w_{,xxx} - 3B_{16}w_{,xxy} - (B_{12} + 2B_{66})w_{,xyy} - B_{26}w_{,yyy} = \rho_o u_{,tt}^o \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{16}u_{,xx}^o + (A_{12} + A_{66})u_{,xy}^o + A_{26}u_{,yy}^o + A_{66}v_{,xx}^o + 2A_{26}v_{,xy}^o + A_{22}v_{,yy}^o \\ -B_{16}w_{,xxx} - (B_{12} + 2B_{66})w_{,xxy} - 3B_{26}w_{,xyy} - B_{22}w_{,yyy} = \rho_o v_{,tt}^o \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{16}w_{,xxyy} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xyyy} + 4D_{26}w_{,yyyy} \\ + D_{22}w_{,yyyy} - B_{11}u_{,xxx}^o - 3B_{16}u_{,xxy}^o - (B_{12} + 2B_{66})u_{,xyy}^o \\ - B_{26}u_{,yyy}^o - B_{16}v_{,xxx}^o - (B_{12} + 2B_{66})v_{,xxy}^o - 3B_{26}v_{,xyy}^o \\ - B_{22}v_{,yyy}^o + \rho_o w_{,tt} = q(x, y) \end{array} \right. \quad (11.87)$$

Observe que, mesmo que se refiram a um problema linear, essas equações têm **acoplados os esforços de membrana e flexão**. Isto pode ser visto nas duas primeiras equações, que representam equilíbrio de forças nas direções x e y respectivamente. Elas envolvem não apenas os deslocamentos coplanares u^o e v^o , mas também os deslocamentos transversais w . Isto se deve ao acoplamento membrana-flexão representado pelos termos da matriz \mathbf{B} . Pode-se ver claramente que, no caso de um **laminado simétrico**, onde $B_{ij} = 0$, essas equações tornam-se

$$\left\| \begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial v^o}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{d^2 v^o}{dy^2} &= \rho_o \frac{d^2 v^o}{dt^2}, \\ A_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial v^o}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{d^2 v^o}{dy^2} &= \rho_o \frac{d^2 v^o}{dt^2}, \end{aligned} \right. \quad (11.88)$$

$$\left\| D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{d^4 w}{dy^4} + \rho_o \frac{d^2 w}{dt^2} = q. \quad (11.89)$$

Assim, para o laminado simétrico, o problema de membrana pode ser resolvido apenas pelas duas primeiras equações, separadamente do problema de flexão, que é resolvido pela terceira equação apenas, constituindo dois problemas desacoplados. Devemos lembrar que essas equações incluem também o problema de **placa isotrópica homogênea**. Basta neste caso fazer $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$, $A_{11} = A_{22} = A = EH/(1 - \nu^2)$, $A_{12} = \nu A$, $A_{66} = A(1 - \nu)/2$, $D_{11} = D_{22} = D = EH^3/12(1 - \nu^2)$, $D_{12} = \nu D$, $D_{66} = D(1 - \nu)/2$, donde resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + \frac{(1 - \nu)}{2} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + (1 + \nu) \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} &= \frac{\rho_o}{A} \frac{d^2 u^o}{dt^2}, \\ (1 + \nu) \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + \frac{(1 - \nu)}{2} \frac{\partial v^o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} &= \frac{\rho_o}{A} \frac{d^2 v^o}{dt^2}, \end{aligned} \quad (11.90)$$

$$D \nabla^4 w + \rho_o \frac{d^2 w}{dt^2} = q. \quad (11.91)$$

A representação das equações de movimento (11.51) em termos de deslocamentos para a teoria de Mindlin é apresentada no Capítulo 13.

Forma fraca para a placa de Kirchhoff

A equação da forma fraca para a placa de Kirchhoff é obtida diretamente dos resíduos ponderados a partir das equações do movimento (11.86), ou, simplificando a forma da teoria de primeira ordem (11.83):

$$\begin{aligned} V := & - \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - F_x \right] \hat{u} + \left[\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - F_y \right] \hat{v} \right. \\ & + \left. \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - F_z + q \right] \hat{w} \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_f} \left\{ [X - \bar{X}] \hat{u} + [Y - \bar{Y}] \hat{v} + [Q_n^* - \bar{Q}_n^*] \hat{w} - [X_m - \bar{X}_m] \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} - [Y_m - \bar{Y}_m] \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \right\} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_u} \left[X \hat{u} + Y \hat{v} + Q_n^* \hat{w} - X_m \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} - Y_m \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \right] d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (11.92)$$

$$\begin{array}{l}
V_n^* = V_x^* n_x + V_y^* n_y \quad \text{onde} \quad \triangleright V_x^* = Q_x^* + M_{xy,y} \\
\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \triangleright V_y^* = Q_y^* + M_{xy,x} \\
\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \triangleright Q_x^* = Q_x + N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y} \\
\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \triangleright Q_y^* = Q_y + N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y}
\end{array} \quad (11.100)$$

A notação $[\cdot]_{\Gamma_f}$ em I indica a diferença entre os valores nas extremidades do segmento de Γ_f ao longo do qual a integral de contorno foi realizada. Então M_{nt} permanece em I como forças concentradas nas extremidades de Γ_f .

As equações (11.92) e (11.93) podem então ser colocadas nas seguintes formas, mais apropriadas à teoria de Kirchhoff: [210]

$$\begin{array}{l}
V = - \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - F_x \right] \hat{u} + \left[\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - F_y \right] \hat{v} \right. \\
\quad \left. + \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - F_z + q \right] \hat{w} \right\} d\Omega \\
+ \int_{\Gamma_f} \left\{ [X - \bar{X}] \hat{u} + [Y - \bar{Y}] \hat{v} + [V_n^* - \bar{V}_n^*] \hat{w} - [M_n - \bar{M}_n] \frac{\partial \hat{w}}{\partial n} \right\} d\Gamma_f \\
+ \int_{\Gamma_u} \left\{ X \hat{u} + Y \hat{v} + V_n^* \hat{w} - M_n \frac{\partial \hat{w}}{\partial n} \right\} d\Gamma = 0
\end{array} \quad (11.101)$$

e

$$\begin{array}{l}
\int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}} \end{array} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right. \\
\quad \left. + \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} F_x + \frac{\partial w}{\partial y} F_y \right) \hat{w} \right\} d\Omega \\
+ \int_{\Omega} \left\{ -q \hat{w} + F_x \hat{u} + F_y \hat{v} + F_z \hat{w} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \left\{ \bar{X} \hat{u} + \bar{Y} \hat{v} + \bar{V}_n^* \hat{w} - \bar{M}_n \frac{\partial \hat{w}}{\partial n} \right\} d\Gamma
\end{array} \quad (11.102)$$

As condições de contorno que podem ser impostas são, portanto:

$$\begin{array}{ll}
u^o = \bar{u}^o, & X = \bar{X}, \\
v^o = \bar{v}^o, & Y = \bar{Y}, \\
w = \bar{w}, & V^* = \bar{V}^*, \\
\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}, \quad \forall (x, y) \in \Gamma_u, & M_n = \bar{M}_n, \quad \forall (x, y) \in \Gamma_f
\end{array} \quad (11.103)$$

Pode-se demonstrar que em segmentos de contornos curvilíneos a soma $X \hat{u} + Y \hat{v}$ é igual a $X_n \hat{u}_n + X_t \hat{u}_t$, onde os termos são definidos nas direções normal e tangencial, respectivamente. Desta forma, essas condições de contorno podem ser reescritas de forma correspondente. As componentes dos esforços N_n e N_{nt} são ilustradas na Figura 11.8b e são obtidas por

$$\begin{array}{ll}
N_n = X n_x + Y n_y, & N_{nt} = -X n_y + Y n_x
\end{array} \quad (11.104)$$

Usando (11.69) temos a transformação dos esforços entre as direções x - y e n - t :

satisfeita. Observe que a forma forte requer maior diferenciabilidade das soluções. (As equações de equilíbrio envolvem derivadas segundas dos deslocamentos, enquanto a forma integral (11.84) envolve no máximo primeiras derivadas.) Esta maior diferenciabilidade requerida pela forma forte é muitas vezes extremamente restritiva para a solução de muitos problemas práticos. A forma fraca, requerendo continuidade inferior, é portanto frequentemente mais adequada.

Uma maneira de entender essa forma fraca é considerar que temos a expressão (11.84) e tomamos uma função qualquer e a testamos, isto é, a aplicamos e verificamos se o resultado do lado esquerdo é nulo. Não sendo satisfeita a igualdade, escolhemos outra e outra função, sucessivamente, até obter uma que será então a solução fraca. No enunciado da forma fraca, nota-se que buscamos u^o , v^o etc. $\in \mathbb{U}$, isto é, testamos apenas funções de certo tipo, isto é, funções pertencentes a $H^1(\Omega)$. Isto garante que os termos em (11.84) sejam números finitos. Normalmente seria suficiente requerer apenas que as funções pertencessem a $C^0(\Omega)$, isto é, que fossem funções contínuas. O espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$ é um espaço “um pouco” maior que C^0 , isto é, engloba todas as funções contínuas, porém inclui ainda outras que satisfazem a definição (11.108).

11.5 Soluções aproximadas – Método de Galerkin

Consideremos as equações do movimento (11.51). É possível eliminar os esforços em termos das funções de deslocamento de forma que o conjunto completo de equações possa ser escrito de forma simbólica como

$$\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (11.110)$$

onde \mathbf{L} é uma matriz 5×5 cujos termos são operadores diferenciais. Por exemplo, num caso uniaxial, a equação $d^2g/dx^2 + d^2g/dy^2$ pode ser escrita como $\mathbf{L}\mathbf{g}$, com \mathbf{L} sendo $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. O arranjo \mathbf{u} é o conjunto de funções de deslocamentos generalizados

$$\mathbf{u}(x, y) = \{u^o, v^o, w, \psi_x, \psi_y\}^T \quad (11.111)$$

e \mathbf{F} é o conjunto de termos do lado direito de (11.51). As condições de contorno em (11.53) também podem ser escritas em forma simbólica como

$$\mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Gamma, \quad (11.112)$$

onde \mathbf{B} é um operador diferencial e \mathbf{g} é composto pelos valores prescritos de força e deslocamentos.

Observe que, se conhecêssemos a solução \mathbf{u} do problema, quando ela fosse introduzida em (11.110) se obteria efetivamente um vetor nulo à direita. Porém, qualquer outra função aplicada lá resultará num vetor de funções não-nulas à direita, isto é, um **resíduo** será formado. Usamos então um conjunto de funções $\mathbf{u}_h(x, y)$, diferente da solução do problema:

$$\mathbf{u}_h(x, y) = \{u_h, v_h, w_h, \psi_{xh}, \psi_{yh}\}^T. \quad (11.113)$$

Em lugar de (11.110) e (11.112), teremos então o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{u}_h - \mathbf{F} &= \mathbf{R} && \text{em } \Omega, \\ \mathbf{B}_f\mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{r}_f && \text{em } \Gamma_f, \\ \mathbf{B}_u\mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{r}_u && \text{em } \Gamma_u, \end{aligned} \quad (11.114)$$

onde \mathbf{R} é um arranjo 5×1 formado por funções que representam o resíduo, isto é, o erro nas equações de movimento num ponto do domínio Ω . Os arranjos \mathbf{r}_f e \mathbf{r}_u são os resíduos em pontos do contorno pertencentes a Γ_f e Γ_u , respectivamente. Também,

$$\bar{\mathbf{X}} = \{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Q}_n^*, \bar{X}_m, \bar{Y}_m\}^T \quad (11.115)$$

são os esforços impostos na parte Γ_f do contorno. As funções \mathbf{u}_h devem, pelo menos, satisfazer

$$\begin{cases} u_u(x, y) = \bar{u}(x, y), \\ v_u(x, y) = \bar{v}(x, y), \\ w_u(x, y) = \bar{w}(x, y), \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_{xu}(x, y) = \bar{\psi}_x(x, y), \\ \psi_{yu}(x, y) = \bar{\psi}_y(x, y) \end{cases} \quad (11.129)$$

para $\forall(x, y) \in \Gamma_u$. As funções $\tilde{\mathbf{u}}_h = \{\tilde{u}_h, \tilde{v}_h, \tilde{w}_h, \tilde{\psi}_{xh}, \tilde{\psi}_{yh}\}$ devem ser tais que $\tilde{u}_h = 0$ em Γ_u , isto é, $\tilde{u}_h \in \mathbb{V}_h(\Omega)$ da mesma forma que as funções peso \hat{v}_h, \hat{w}_h etc. O método de Galerkin se caracteriza por interpolar $\tilde{\mathbf{u}}_h$ pela mesma base de funções ϕ usada para as funções peso $\hat{\mathbf{u}}_h$, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_h(x, y) &= \mathbf{c}\phi(x, y), \\ \hat{\mathbf{u}}_h(x, y) &= \hat{\mathbf{c}}\phi(x, y). \end{aligned} \quad (11.130)$$

De forma expandida, as funções são:

$$\begin{cases} \tilde{u}_h(x, y) = \sum_{m=1}^n c_{1m}\phi_m(x, y), \\ \tilde{v}_h(x, y) = \sum_{m=1}^n c_{2m}\phi_m(x, y), \\ \tilde{w}_h(x, y) = \sum_{m=1}^n c_{3m}\phi_m(x, y), \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{\psi}_{xh}(x, y) = \sum_{m=1}^n c_{4m}\phi_m(x, y), \\ \tilde{\psi}_{yh}(x, y) = \sum_{m=1}^n c_{5m}\phi_m(x, y). \end{cases} \quad (11.131)$$

com $\phi_m(x, y) \in \mathbb{V}_h(\Omega)$. Assim, \mathbf{u}_h também satisfaz as condições de contorno de deslocamento, isto é, $\mathbf{u}_h = \bar{\mathbf{u}}$ em Γ_u e,

$$\begin{cases} u_u \in U_h(\Omega), \\ v_u \in U_h(\Omega), \\ w_u \in U_h(\Omega), \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_{xu} \in U_h(\Omega), \\ \psi_{yu} \in U_h(\Omega), \end{cases} \quad (11.132)$$

de forma que (11.127) constitui a definição do espaço $\mathbb{U}_h(\Omega)$. Observe que, exceto pelas funções $\mathbf{u}_u(x, y)$, os espaços \mathbb{U}_h e \mathbb{V}_h são definidos pelas mesmas funções ϕ_m . Isto é o que caracteriza o método de Bubnov-Galerkin, e o distingue, por exemplo, do método de Petrov-Galerkin, onde as funções base dos dois conjuntos são distintas.

O enunciado da forma de Bubnov-Galerkin é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Dados} & q(x, y) : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}, \\ & \bar{\mathbf{X}} : \Gamma_f \rightarrow \mathfrak{R}, \\ & \mathbf{u}_u \in \mathbb{U}_h, \\ \text{Determinar} & \mathbf{u}_h = \tilde{\mathbf{u}}_h + \mathbf{u}_u \quad \text{com } \tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbb{V}_h \\ \text{tal que} & a(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h) = (\bar{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{u}}_h)_{\Gamma_f} + (\mathbf{F}, \hat{\mathbf{u}}_h)_{\Omega}, \quad \text{para } \forall \hat{\mathbf{u}}_h \in \mathbb{V}_h. \end{array} \right. \quad (11.133)$$

Quando se usa um método como o de Galerkin espera-se que a solução aproximada convirja para a solução exata, isto é, $\mathbf{u}_h \rightarrow \mathbf{u}$, conforme aumentemos o número m_1 de funções da aproximação, isto é, a dimensão do espaço vetorial das aproximações. Dentro de uma série de condições e restrições, é provado que isso ocorre.

11.6 Formas integrais em flexão

O comportamento de um laminado sob carregamento estático ou dinâmico é regido pelo problema diferencial, (11.51), e por condições de contorno, (11.53), ou pela equação da forma fraca (11.84). Soluções aproximadas podem ser obtidas, por exemplo, pelo método de Galerkin, entre outros métodos deriváveis a partir de (11.83). Além disso, é possível mostrar que a equação da forma fraca (11.84) pode também dar origem a princípios energéticos. Um princípio energético pode ser definido de forma bastante descuidada como um funcional (função de funções), cujo mínimo define a solução do problema.

11.6.1 Energia potencial elástica

Consideramos o problema **elástico, linear, estático** de um laminado **semi-espesso**. Então, a energia potencial elástica é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{matrix} \right\}^T \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{matrix} \right\} + \gamma_c^T \mathbf{E} \gamma_c \right\} d\Omega, \quad (11.134)$$

onde $\gamma_c = \{\gamma_{yz}; \gamma_{xz}\}^T$ e \mathbf{E} é a matriz de rigidez de cisalhamento transversal, (11.84). Para um **laminado delgado, simétrico**,

$$U = U_m + U_f,$$

onde U_m e U_f são as parcelas da membrana e flexão de (11.134), dadas pelas duas integrais em:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[A_{11} \left(\frac{\partial u^o}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u^o}{\partial x} \frac{\partial v^o}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v^o}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. 2 \left(A_{16} \frac{\partial u^o}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v^o}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} \right)^2 \right] d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (11.135)$$

Neste caso, o comportamento de membrana, na primeira integral, é desacoplado da flexão, na segunda integral.

Para o laminado **delgado, isotrópico, homogêneo**, submetido apenas a **cargas transversais**, a energia de flexão é

$$U_f = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} d\Omega. \quad (11.136)$$

11.6.2 Energia cinética de uma placa

A energia cinética de uma placa é obtida adicionando a energia cinética de cada um dos seus pontos materiais, donde resulta:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{z=-H/2}^{H/2} \rho(x, y, z) \left[\left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial t} \right)^2 \right] dz d\Omega. \quad (11.137)$$

Para uma placa laminada, a densidade de cada lâmina pode ser considerada uniforme ao longo de sua espessura, isto é, $\rho^k = \rho^k(x, y)$. Além disso, para placas semi-espessas os deslocamentos são dados em (11.41). Substituindo em (11.137) e efetuando as integrais ao longo da espessura, temos

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho_o(x, y) \left((\dot{u}^o)^2 + (\dot{v}^o)^2 + \dot{w}^2 \right) + 2\rho_1(x, y) (\dot{u}^o \psi_x + \dot{v}^o \psi_y) + \rho_2(x, y) (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2) \right] d\Omega} \quad (11.138)$$

ρ_o , ρ_1 e ρ_2 são densidades generalizadas definidas (11.44), (11.45) e (11.50), respectivamente.

11.6.3 Energia potencial das cargas externas

A energia potencial proveniente das cargas transversais e coplanares é

$$W = - \int_{\Omega} q(x, y, t) w(x, y, t) d\Omega - \int_{\Gamma_f} \left[\bar{X} u^o + \bar{Y} v^o + \bar{Q}_n^* w + \bar{X}_m \psi_x + \bar{Y}_m \psi_y \right] d\Gamma, \quad (11.139)$$

onde \bar{X} , \bar{Y} etc. são as componentes de força e momento nas direções x e y , respectivamente, aplicadas nos pontos da parte Γ_f do contorno, definidas nas eqs.(11.69), (11.70) e (11.74).

A energia potencial U_G das componentes dos esforços normais atuando sobre o deslocamento transversal w , associado ao comportamento não-linear da placa, é mostrada em (16.19), página 413.

11.6.4 Princípio da energia potencial mínima

A energia potencial de um corpo elástico é

$$\Pi = U + U_G + W, \quad (11.140)$$

onde U é a energia de deformação elástica, U_G a energia de deformação das forças coplanares sobre os deslocamentos transversais w e W a energia potencial das cargas externas. Para um problema estático linear, usa-se apenas $U + W$ e para flambagem, $U + U_G$. Note que a energia elástica U foi definida em (11.134) incluindo apenas os termos lineares, enquanto U_G contém os termos não-lineares.

O teorema da energia potencial mínima estabelece que:

“De todos os deslocamentos que satisfazem as equações de compatibilidade e condições de contorno de deslocamentos, aqueles que satisfazem as equações de equilíbrio minimizam a energia potencial.”

Para problemas dinâmicos, é definida a **energia Lagrangeana** como $L = \Pi - T$. O **princípio de Hamilton** estabelece que, dadas as configurações nos instantes t_1 e t_2 , a trajetória realmente percorrida entre esses instantes é tal que torna $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ estacionário, ou seja,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (11.141)$$

11.6.5 Método de Ritz

A principal utilização das formas integrais em engenharia, tanto da forma fraca quanto da energia potencial, consiste na determinação de soluções aproximadas aos problemas, em vez de soluções exatas. Métodos consagrados como o de elementos finitos são frequentemente derivados desses princípios. Como exemplo, apresentamos aqui um dos métodos clássicos de determinação de soluções aproximadas, o chamado método de Ritz. Em capítulo próprio apresentaremos o método de elementos finitos.

O método de Ritz consiste em considerar a solução em série infinita, como uma combinação linear de elementos de uma base completa de funções. No caso da teoria de placa semi-espessa usada, o processo de separação de variáveis permite que se separem as variáveis em espaço e tempo na forma

$$\begin{cases} u^o(x, y, t) = u^o(x, y) e^{i\omega t}, \\ v^o(x, y, t) = v^o(x, y) e^{i\omega t}, \\ w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_x(x, y, t) = \psi_x(x, y) e^{i\omega t}, \\ \psi_y(x, y, t) = \psi_y(x, y) e^{i\omega t}, \end{cases} \quad (11.142)$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Substituindo em (11.140) obtemos as expressões das diversas parcelas nas mesmas formas de (16.19), (11.135), (11.138) e (11.139) para U , U_G , T e W , mas agora envolvendo apenas (x, y) e não mais t , que é eliminado quando do cancelamento dos termos $e^{i\omega t}$ de todos os termos de (11.140). Π então é a energia potencial num dado instante t .

- 11.7 Integre (11.84) por partes e chegue a (11.83).
- 11.8 A nulidade de (11.83) implica a satisfação de quais condições de contorno? E a nulidade de (11.84)? Por quê?
- 11.9 Integre (11.93) por partes e obtenha (11.92).
- 11.10 Obtenha (11.97) a partir de (11.95), (11.96) e (11.76).
- 11.11 Mostre que $X\hat{u} + Y\hat{v}$ é igual a $X_n\hat{u}_n + X_t\hat{u}_t$ como indicado logo após a eq.(11.103).
- 11.12 Para a teoria de Kirchhoff, o operador \mathbf{L} em (11.110) é 3×3 e $\mathbf{u} = \{u^o, v^o, w\}^T$. Escreva o operador diferencial a partir de (11.87).
- 11.13 Escreva os termos do operador \mathbf{B} no contorno que representa as condições (11.53). Obtenha \mathbf{g} . Identifique \mathbf{B}_f e \mathbf{B}_u de (11.114).
- 11.14 Aplique variação a $U + W$ em (11.134) e (11.139) e obtenha os termos correspondentes ao caso do laminado simétrico estático linear da forma fraca (11.102).