

Capítulo 3

Análise de deformações - equações cinemáticas

3.1 Deslocamentos e deformações

Este capítulo apresenta as equações que permitem descrever a cinemática de corpos deformáveis no espaço, isto é, a apresentação das entidades matemáticas necessárias para qualificar e quantificar o movimento dos corpos quando sujeitos a ações externas.

Para isso, começamos considerando um intervalo de tempo de observação do movimento, $I = [0, T]$. No instante $t = 0$, isto é, no início da observação, o corpo ocupa no espaço a chamada **configuração de referência**, ou **configuração material** Ω . Ao se movimentar durante a deformação, o corpo ocupa diferentes regiões, ou **configurações espaciais** Ω_t . Assim, a partícula p que na configuração Ω situa-se na posição dada pelo vetor \mathbf{X} , no instante t ocupa uma nova posição, dada pelo vetor \mathbf{x} (Figura 3.1). Para formalizar a descrição do movimento, admite-se que esta nova posição é uma função contínua e diferenciável da posição original \mathbf{X} da partícula p e do instante de tempo t , isto é,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (3.1)$$

Em forma estendida, a equação acima pode ser escrita em componentes cartesianas como:¹

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(X_1, X_2, X_3, t), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2(X_1, X_2, X_3, t), \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3(X_1, X_2, X_3, t).$$

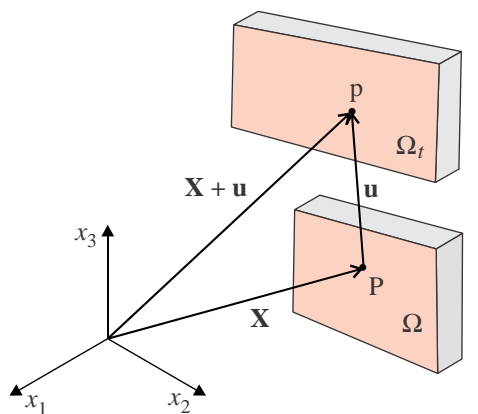


Figura 3.1: Movimentação de partículas de um corpo.

Quando o processo mecânico precisa apenas da informação a respeito da posição que o corpo ocupa, desconsiderando a velocidade com que este chega lá, tem-se um processo *independente do*

¹Deve-se observar que em (3.1) há uma escolha de notação simplificada: tanto o vetor posição (à esquerda da igualdade), quanto a função que determina seu valor (direita da igualdade), são denotadas com o mesmo símbolo \mathbf{x} .

tempo. Neste caso, a variável t deixa de ser necessária², restando apenas a posição atual \mathbf{x} da partícula, que depende de sua posição inicial \mathbf{X} . Nesse caso é usual denotar que cada partícula inicialmente em \mathbf{X} é *mapeada* para uma nova posição, definindo assim a **função de mapeamento do movimento** (Figura 3.1)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}). \quad (3.2)$$

Vamos admitir que a deformação seja uma função **bijetiva**, ou seja, existe uma relação um-a-um entre a posição inicial e final que a partícula ocupa. Esta hipótese exclui as possibilidades de fratura (um ponto se separando em dois) e a interpenetração entre partes do corpo (duas partículas ocupando a mesma posição).

Definimos **deslocamento** como a diferença entre a posição final e a inicial da partícula:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X} \quad \text{isto é,} \quad \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{l} x_1(X_1, X_2, X_3) \\ x_2(X_1, X_2, X_3) \\ x_3(X_1, X_2, X_3) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} u_1(X_1, X_2, X_3) \\ u_2(X_1, X_2, X_3) \\ u_3(X_1, X_2, X_3) \end{array} \right\}. \quad (3.4)$$

Desta forma podemos identificar a posição final de uma partícula a partir da sua posição inicial e do vetor deslocamento. (Observe que, a relação acima não implica que a partícula segue necessariamente um trajeto retilíneo.)

Um dos pontos mais relevantes na mecânica dos corpos deformáveis diz respeito à definição de **medidas de deformação**. O que acontece com as partículas vizinhas de \mathbf{X} ? Estas se afastam ou se aproximam (e quanto) durante o movimento? Afortunadamente esta informação está contida na própria função de mapeamento, eq. (3.2) ou (3.4). Conhecendo a nova posição cada partícula do corpo no instante t , é possível determinar o que acontece numa vizinhança deste usando cálculo diferencial. Considere um segmento material de comprimento diferencial, definido pelas partículas P e Q , como na Figura 3.2. Com a deformação do corpo, a partícula P na coordenada \mathbf{X} move-se para a posição \mathbf{x} , e a partícula Q inicialmente na coordenada $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ move-se para a posição $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$. As componentes do segmento deformado (vetor $d\mathbf{x}$) são dadas pela derivada total através da **regra da cadeia** para funções implícitas:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3, \\ dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3, \\ dx_3 &= \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Em forma matricial,

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{array} \right\}. \quad (3.6)$$

A matriz da equação acima forma as componentes cartesianas do tensor **gradiente da deformação**, definido por $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}$. Então, de forma compacta, a equação acima fica:

$$\boxed{d\mathbf{x} = \nabla \mathbf{x} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}} \quad (3.7)$$

Esta equação expressa que um segmento diferencial indeformado $d\mathbf{X}$, passando pelo ponto \mathbf{X} , com

²Existe o chamado problema **quasi-estático**, onde a carga varia no tempo, porém de forma tão lenta que não se desenvolvem forças de inércia apreciáveis. Então o tempo pode ainda ser usado apenas para demarcar a ordem de uma seqüência de carregamentos e deformações.

componentes cartesianas arbitrárias $\{dX_1, dX_2, dX_3\}$, é transformada pelo operador \mathbf{F} aplicado no segmento deformado $d\mathbf{x}$ de componentes (dx_1, dx_2, dx_3) . Com esta informação é possível quantificar valores representativos, como a variação de comprimento dos segmentos diferenciais ou variação de ângulo entre dois segmentos diferenciais inicialmente perpendiculares.

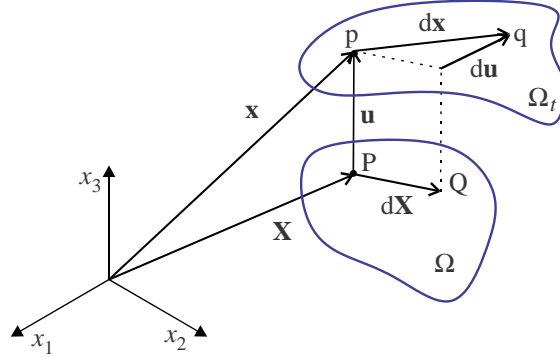


Figura 3.2: Variação de comprimento de uma fibra pq que passa pelo ponto \mathbf{X} .

Usando a definição de deslocamento, eq. (3.4) e a definição do gradiente \mathbf{F} em (3.6), é possível verificar que $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}$, onde $\mathbf{1}$ é o tensor identidade de segunda ordem, cujas componentes cartesianas formam a matriz identidade, de componentes δ_{ij} . Assim, o vetor $d\mathbf{x}$ fica

$$\boxed{d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} = (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X} = d\mathbf{X} + d\mathbf{u}}, \quad (3.8)$$

e, em componentes cartesianas,

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}}_{\nabla \mathbf{u}} \right) \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde $\nabla \mathbf{u}$ é o tensor **gradiente do deslocamento**.

3.1.1 Deformação específica longitudinal

Conhecendo a função deformação e seu gradiente, podemos calcular o comprimento de um segmento diferencial arbitrário após a deformação:

$$\begin{aligned} \|d\mathbf{x}\|^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, && \text{(definição de norma de vetor)} \\ &= \mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X}, && \text{(usada a eq. (3.7))} \\ &= (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X}, && \text{(usada a eq. (3.8))} \\ &= (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}, \\ &= (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Observe que acima foi utilizada a igualdade álgebra: $\mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot [\mathbf{F}^T \mathbf{F}] d\mathbf{X}$. A diferença entre os quadrados dos comprimentos é calculada por:

$$\begin{aligned}
\|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{X}\|^2 &= dx \cdot dx - dX \cdot dX, \\
&= dx \cdot dx - [1d\mathbf{X}] \cdot d\mathbf{X}, \\
&= d\mathbf{X} \cdot \underbrace{[\nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T \nabla\mathbf{u}]}_{2\mathbf{E}} d\mathbf{X}, \\
&= 2\mathbf{E} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Na expressão acima foi definido o **tensor de deformação finita de Green-St.Venant** como:

$$\boxed{\mathbf{E} \equiv \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T \nabla\mathbf{u}]} \tag{3.12}$$

Tomando a expressão aberta do gradiente de deformação de (3.9) e explicitando algumas componentes de \mathbf{E} , obtém-se, por exemplo

$$\begin{aligned}
E_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right], \\
E_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right].
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Os demais termos seguem o mesmo padrão.

Normalizando (3.11) em relação ao quadrado do comprimento original do segmento, $\|d\mathbf{X}\|^2$, temos

$$\frac{\|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{X}\|^2}{\|d\mathbf{X}\|^2} = 2\mathbf{E} \frac{d\mathbf{x}}{\|d\mathbf{X}\|} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{\|d\mathbf{X}\|}. \tag{3.14}$$

Define-se o vetor unitário $\mathbf{n} = d\mathbf{X}/\|d\mathbf{X}\|$ na direção do segmento $d\mathbf{X}$. Assim, a expressão acima fica

$$\boxed{\frac{\|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{X}\|^2}{\|d\mathbf{X}\|^2} = 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}} \tag{3.15}$$

Esta expressão indica que, para cada ponto \mathbf{X} , o tensor deformação de Green-St.Venant $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ operando sobre um vetor unitário \mathbf{n} fornece uma medida da variação relativa do comprimento do segmento $d\mathbf{X}$ originalmente na direção \mathbf{n} . Esta medida, porém, apresenta dificuldades de interpretação por envolver comprimentos elevados ao quadrado. Uma medida mais usual é a **deformação específica longitudinal**, ou **extensão longitudinal**, definida como

$$\boxed{E_n \equiv \frac{\|d\mathbf{x}\| - \|d\mathbf{X}\|}{\|d\mathbf{X}\|}} \tag{3.16}$$

Note que esta expressão representa o conceito usual de deformação de engenharia. Operando com (3.15) e (3.16), obtemos que

$$E_n = \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|} - 1 = \sqrt{(2\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}) + 1} - 1, \tag{3.17}$$

de onde é possível deduzir que

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} = \frac{1}{2} (E_n + 1)^2 - 1 = \frac{1}{2} E_n^2 + E_n} \tag{3.18}$$

Note que o lado direito não se trata de uma expansão em série infinita truncada, mas de uma soma completa, com apenas os dois termos, sem envolver nenhum truncamento ou hipótese simplifica-

tiva. Avaliando o vetor \mathbf{n} nas direções cartesianas \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , chega-se a uma interpretação física das componentes da diagonal principal do tensor de Green-St.Venant: elas medem a variação de comprimento dos segmentos diferenciais inicialmente orientados nas direções cartesianas, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}\mathbf{e}_1 &= E_{11} = E_1 + \frac{1}{2}E_1^2, \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}\mathbf{e}_2 &= E_{22} = E_2 + \frac{1}{2}E_2^2, \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}\mathbf{e}_3 &= E_{33} = E_3 + \frac{1}{2}E_3^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Os termos situados fora da diagonal principal possuem um outro significado analisado a seguir.

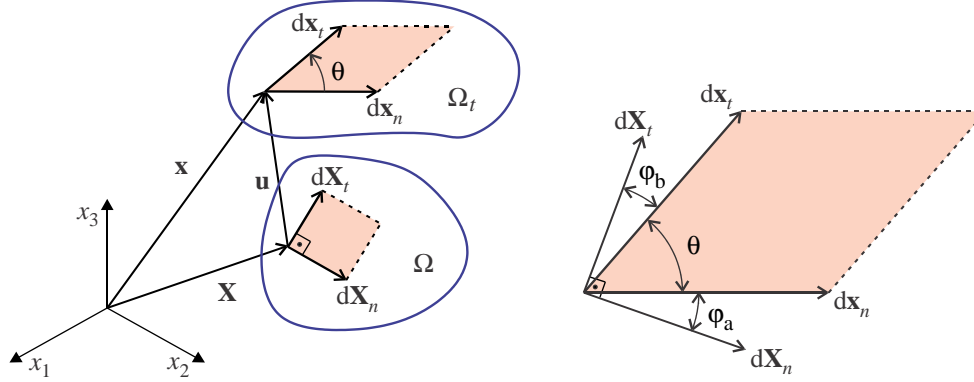


Figura 3.3: Distorção de fibras inicialmente ortogonais.

3.1.2 Deformação angular ou cisalhante

Consideremos um ponto arbitrário \mathbf{X} e dois segmentos diferenciais de material partindo de \mathbf{X} , perpendiculares entre si, orientadas nas direções \mathbf{n} e \mathbf{t} . Os segmentos orientados nestas direções, $d\mathbf{X}_n$ e $d\mathbf{X}_t$, são deformadas para $d\mathbf{x}_n$ e $d\mathbf{x}_t$, como indicados na Figura 3.3. O produto interno entre estes dois vetores diferenciais é

$$\begin{aligned} \|d\mathbf{x}_t\| \|d\mathbf{x}_n\| \cos \theta &= d\mathbf{x}_n \cdot d\mathbf{x}_t, \\ &= \mathbf{F} d\mathbf{X}_n \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X}_t, \\ &= (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X}_n \cdot (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X}_t, \\ &= (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X}_n \cdot d\mathbf{X}_t, \\ &= (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X}_n \cdot d\mathbf{X}_t, \\ &= (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) d\mathbf{X}_n \cdot d\mathbf{X}_t. \end{aligned} \quad (3.20a)$$

Dividindo a expressão por $\|d\mathbf{x}_t\| \|d\mathbf{x}_n\|$ e usando a definição de deformação específica longitudinal (3.17) para eliminar $\|d\mathbf{x}_n\|$ e $\|d\mathbf{x}_t\|$, tem-se

$$\begin{aligned} \cos \theta &= (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) \frac{d\mathbf{X}_n}{\|d\mathbf{x}_n\|} \cdot \frac{d\mathbf{X}_t}{\|d\mathbf{x}_t\|}, \\ &= \frac{(\mathbf{1} + 2\mathbf{E})}{(E_n + 1)(E_t + 1)} \frac{d\mathbf{X}_n}{\|d\mathbf{X}_n\|} \cdot \frac{d\mathbf{X}_t}{\|d\mathbf{X}_t\|}, \\ &= \frac{(\mathbf{1} + 2\mathbf{E})}{(E_n + 1)(E_t + 1)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Adicionalmente, devemos considerar que os segmentos são inicialmente ortogonais e, portanto, $\mathbf{1n} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}}{\underbrace{(E_n + 1)(E_t + 1)}_0} + \frac{2\mathbf{E}}{(E_n + 1)(E_t + 1)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}, \\ &= \frac{2\mathbf{E}}{(E_n + 1)(E_t + 1)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \sin(\pi/2 - \theta) = \sin \gamma,\end{aligned}\quad (3.21)$$

onde $\gamma \equiv \pi/2 - \theta$ é a medida em que os dois segmentos se afastam da perpendicularidade quando se deformam, conforme ilustrado na Figura 3.3, onde $\gamma = \varphi_a + \varphi_a$. Então

$$\boxed{\mathbf{E}\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{2}(E_n + 1)(E_t + 1)\sin \varphi.} \quad (3.22)$$

No caso em que as direções \mathbf{n} e \mathbf{t} coincidem com as direções cartesianas $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= E_{12} = E_{21} = \frac{1}{2}(E_1 + 1)(E_2 + 1)\sin \gamma_{12}, \\ \mathbf{E}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= E_{23} = E_{32} = \frac{1}{2}(E_2 + 1)(E_3 + 1)\sin \gamma_{23}, \\ \mathbf{E}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 &= E_{13} = E_{31} = \frac{1}{2}(E_1 + 1)(E_3 + 1)\sin \gamma_{13}.\end{aligned}$$

Observamos então que as componentes fora da diagonal principal de \mathbf{E} são uma medida da distorção angular de pares de segmentos diferenciais inicialmente orientados segundo as direções cartesianas. O valor é proporcional à metade do seno da variação de ângulo entre os segmentos originalmente ortogonais. Finalmente, o tensor de deformação completo pode ser escrito como segue:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2E_1 + E_1^2 & (E_1 + 1)(E_2 + 1)\sin \gamma_{12} & (E_1 + 1)(E_3 + 1)\sin \gamma_{13} \\ (E_1 + 1)(E_2 + 1)\sin \gamma_{12} & 2E_2 + E_2^2 & (E_2 + 1)(E_3 + 1)\sin \gamma_{23} \\ (E_1 + 1)(E_3 + 1)\sin \gamma_{13} & (E_2 + 1)(E_3 + 1)\sin \gamma_{23} & 2E_3 + E_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Resumindo, o tensor de deformação de Green-St.Venant $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ oferece uma medida das deformações que ocorrem na vizinhança do ponto material \mathbf{X} . Estas deformações são avaliadas em termos de variação de comprimento dos segmentos, medidas pelas **deformações longitudinais ou normais**, e em termos de variação de ângulo entre segmentos diferenciais, conhecidas como **deformações angulares ou cisalhantes**. As operações (3.18) e (3.22) calculam estes valores para direções arbitrárias \mathbf{n} e \mathbf{t} . As componentes da diagonal principal medem as deformações longitudinais dos segmentos inicialmente nas direções cartesianas, enquanto as componentes externas à diagonal quantificam as deformações cisalhantes entre estas direções.

Uma dificuldade que esta medida incorpora é a relação não-linear entre a deformação e a função deslocamento. A próxima seção discute os casos onde esta relação pode ser linearizada, simplificando os cálculos.

3.2 Pequenas deformações e deslocamentos

3.2.1 Pequenas deformações

Em um grande número de casos da engenharia, as deformações a que estão submetidos os corpos são consideradas pequenas. O que significa isto em termos quantitativos? A resposta se encontra na definição do tensor de deformações. Usualmente considera-se que as deformações são pequenas quando a deformação específica longitudinal é significativamente menor que a unidade, $E_i \ll 1$. Em termos práticos, é frequentemente arbitrada a faixa de deformações $E_i \lesssim 1 \times 10^{-2}$ (cerca de 1%) e $\varphi \lesssim 0,09$ ($\simeq 5^\circ$) para caracterizar a hipótese de pequenas deformações. (Para se ter uma noção prática, isto significa um aumento (ou diminuição) de 1 mm numa barra de 100 mm de comprimento.) Para essas faixas de valores temos que $E_i^2 \ll E_i$ e $\sin \gamma \simeq \tan \gamma \simeq \gamma$ (lembrar de

operar em radianos). Substituindo esta hipótese em (3.23) os valores das componentes ficam:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= E_1 + \frac{1}{2}E_1^2 \approx E_1, \\
 E_{22} &= E_2 + \frac{1}{2}E_2^2 \approx E_2, \\
 E_{33} &= E_3 + \frac{1}{2}E_3^2 \approx E_3, \\
 E_{12} &= E_{21} = \frac{1}{2}(E_1 + 1)(E_2 + 1) \operatorname{sen} \gamma_{12} \approx \frac{1}{2} \operatorname{sen} \gamma_{12} \approx \frac{1}{2} \gamma_{12}, \\
 E_{23} &= E_{32} = \frac{1}{2}(E_2 + 1)(E_3 + 1) \operatorname{sen} \gamma_{23} \approx \frac{1}{2} \operatorname{sen} \gamma_{23} \approx \frac{1}{2} \gamma_{23}, \\
 E_{13} &= E_{31} = \frac{1}{2}(E_1 + 1)(E_3 + 1) \operatorname{sen} \gamma_{13} \approx \frac{1}{2} \operatorname{sen} \gamma_{13} \approx \frac{1}{2} \gamma_{13}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Portanto, quando as deformações são pequenas, o tensor de deformação tem como componentes da diagonal principal as deformações específicas longitudinais e, como componentes fora da diagonal, a metade do ângulo de distorção (em radianos) sofrido pelos segmentos orientados nas direções cartesianas:

$$\mathbf{E} \simeq \begin{bmatrix} E_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & E_2 & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & E_3 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

3.2.2 Pequenos deslocamentos

Uma outra hipótese, diferente da anterior, corresponde aos casos em que os deslocamentos são pequenos. Um corpo pode sofrer deformações longitudinais pequenas e, não obstante, apresentar deslocamentos significativos. Esta é a situação, por exemplo, de uma viga bastante longa em balanço que, submetida a um esforço transversal, se flexiona sem produzir grandes deformações em cada ponto mas, devido a sua esbeltez, sofre deslocamentos e rotações apreciáveis. Se, pelo contrário, tanto os deslocamentos quanto as deformações forem pequenos, pode-se mostrar que

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1, \quad \text{e, portanto,} \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \ll \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Esta propriedade permite simplificar a forma de cálculo de \mathbf{E} ao eliminar os termos não lineares em \mathbf{u} em (3.12):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \underbrace{\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}}_{\simeq \mathbf{0}} \right) \approx \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}. \\
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \right), \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

que resulta no tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$, denominado **tensor de deformação infinitesimal de Green**:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

A notação $\nabla \mathbf{u}^s$ em (3.26) indica a parte simétrica do tensor $\nabla \mathbf{u}$.

É muito comum encontrar-se na bibliografia a seguinte notação, equivalente à anterior:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(X, Y, Z) \\ v(X, Y, Z) \\ w(X, Y, Z) \end{Bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \right) & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

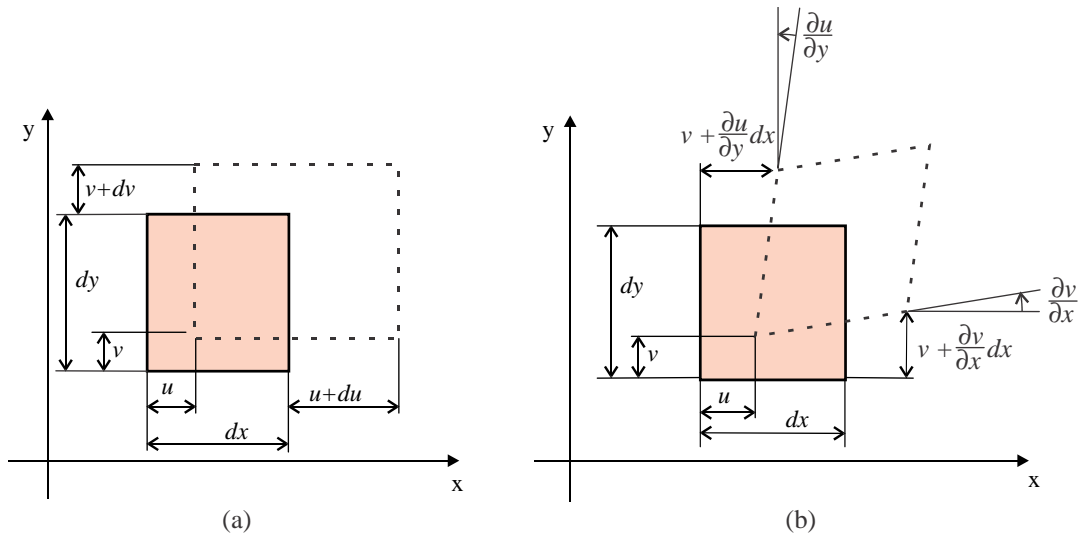


Figura 3.4: Interpretação gráfica da deformação infinitesimal.

Observações:

1. Devemos ressaltar que as hipóteses realizadas nesta seção são bastante restritivas se observarmos as deformações em geral. De fato, estas **excluem** diversos tipos de fenômenos, como conformação de metais, flambagem, deslocamentos visíveis em estruturas delgadas, etc. Afortunadamente, uma grande quantidade de componentes mecânicos sofre deformações às quais as hipóteses formuladas se adaptam bem. Componentes mecânicos (eixos, engrenamentos, mecanismos, etc.) em operação nas condições previstas em projeto sofrem, na grande maioria dos casos, deformações mensuráveis apenas com instrumentos, mantendo praticamente sua geometria e configuração original. Como exemplo simples basta observar o comportamento de uma lata de refrigerantes. Cheia, ela está submetida a uma pressão interna que a deforma. Porém, esta deformação dificilmente é perceptível a olho nu. Assim, em operação normal, este pequeno vaso de pressão se ajusta às hipóteses admitidas. Porém, uma vez vazia

e submetida a esforços externos de compressão, sua deformação será visível, mudando por completo a configuração original. Este último caso representa um problema de modelagem complexo, envolvendo grandes deformações, grandes deslocamentos, contato entre superfícies, deformações permanentes, instabilidade, fratura, etc.

2. Uma consequência prática da teoria de pequenas deformações e deslocamentos é que as configurações Ω e Ω_t são praticamente iguais. Nesse caso, tomar derivadas em relação às componentes X_i ou x_i resultam aproximadamente nos mesmos valores. Assim, as teorias baseadas em pequenas deformações utilizam as coordenadas materiais (X_1, X_2, X_3) . Todo o restante desse livro será restrito apenas à situação de pequenas deformações e deslocamentos, sendo deixados casos não lineares para outro texto. Assim, para melhor clareza da notação, no restante do texto utilizaremos (x_1, x_2, x_3) , ou (x, y, z) em lugar de (X_1, X_2, X_3) , ou (X, Y, Z) .

3.2.3 Interpretação gráfica do tensor de deformação infinitesimal

As componentes cartesianas do tensor de deformação infinitesimal $\varepsilon(\mathbf{x})$ podem ser interpretadas graficamente com facilidade. Por comodidade trabalhamos com uma representação bidimensional, no plano $x-y$, sendo que as observações são facilmente estendidas aos demais planos cartesianos. A Figura 3.4a apresenta um elemento diferencial retangular localizado num ponto qualquer do corpo em estudo. O elemento tem inicialmente dimensões diferenciais $dx \times dy$. A deformação específica longitudinal na direção cartesiana x é, por definição, a variação de comprimento por unidade de comprimento original de um elemento diferencial:

$$\varepsilon_x = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Analogamente, nas direções y e z ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{(dy + dv) - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{(dz + dw) - dz}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Seguindo argumento similar, se as deformações e a rotação do corpo naquele ponto forem pequenas, o ângulo de cisalhamento entre as direções cartesianas no plano $x-y$ pode ser quantificado graficamente, em radianos, mediante a seguinte operação:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Em forma análoga, para segmentos no plano $x-z$ e $y-z$,

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = 2\varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{xz} = 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

Aqui é definida as **deformações cisalhantes de engenharia**, γ_{ij} , como o ângulo total de distorção, isto é, $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. O uso de ε_{ij} na definição do tensor deformação, em vez de γ_{ij} , deve-se à necessidade de preservação das propriedades de transformação das componentes de ε quando de uma mudança de sistemas de coordenadas.

Destes resultados, o tensor de deformação infinitesimal se escreve

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix},$$

expressão esta idêntica à (3.29).

3.3 Propriedades do tensor deformação

3.3.1 Deformações principais

O tensor $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ goza de todas as propriedades matemáticas comuns aos tensores de segunda ordem em geral. Dado um segmento material inicialmente na posição \mathbf{x} e orientado na direção de um vetor unitário \mathbf{n} , a aplicação do tensor $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ sobre \mathbf{n} fornece um novo vetor $\boldsymbol{\varepsilon}_n(\mathbf{x})$ que pode ser decomposto em uma componente paralela a \mathbf{n} e outra ortogonal a esta. Se consideramos um plano passando por \mathbf{x} , perpendicular a \mathbf{n} , temos a situação ilustrada na Figura 3.5, com uma componente normal e outra tangente à superfície. Estas projeções têm um significado físico já discutido, pois são as deformações longitudinal e cisalhante sofridos pelos dois segmentos materiais ortogonais em \mathbf{x} dadas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n \cdot \mathbf{n} = E_n, \\ \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{t}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n \cdot \mathbf{t} = E_{nt}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

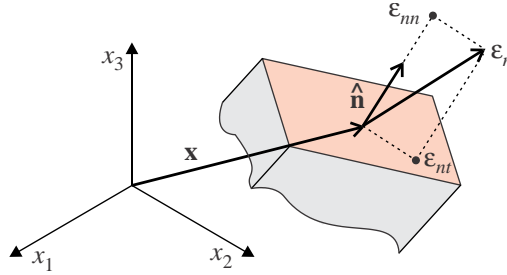


Figura 3.5: Deformação normal E_n (longitudinal) e cisalhante E_{nt} .

Cabe agora a mesma pergunta formulada para o tensor de tensões: é possível identificar direções para as quais os segmentos mudam apenas de comprimento mas não de direção?, isto é, existem direções \mathbf{n} tal que $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$ para algum escalar λ ? Matematicamente esta pergunta é representada por um problema de autovalores e autovetores. Devido às características do tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ (simétrico e de componentes reais), ele possui três direções mutuamente ortogonais para as quais o fenômeno citado acontece. Pares de segmentos inicialmente orientados numa destas direções (direções principais ou autovetores) apresentam apenas deformações longitudinais; sua rotação é nula pois a deformação cisalhante é nula. Resolver este problema equivale a determinar os autopares $(\lambda_1, \mathbf{n}^1)$, $(\lambda_2, \mathbf{n}^2)$ e $(\lambda_3, \mathbf{n}^3)$ que satisfazem as equações:

$$\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{n}^i = \lambda_i\mathbf{n}^i, \quad \text{isto é,} \quad (\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda_i\mathbf{1})\mathbf{n}^i = \mathbf{0}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (3.31)$$

A técnica para resolver este problema é idêntica àquela já apresentada para o caso de tensões e sua descrição não será repetida aqui. Pré-multiplicando (3.31) por \mathbf{n}^i e considerando que $\mathbf{n}^i \cdot \mathbf{n}^i = 1$, tem-se

$$\lambda_i = \mathbf{n}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}^i. \quad (3.32)$$

De (3.18), $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} = \frac{1}{2} E_n^2 + E_n$, e levando em conta pequenas deformações, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} = E_n$, de forma que

$$\lambda_i = E_i. \quad (3.33)$$

Logo, os autovalores λ_i correspondem ao valor da deformação principal, isto é, a deformação longitudinal sofrida pelo segmento orientado inicialmente em cada direção principal.

Um caso particular é aquele em que os três autovalores são idênticos. Isto corresponde à situação física de uma esfera infinitesimal imersa a grande profundidade de líquido, sob a ação da pressão hidrostática. Sua deformação consiste apenas de uma mudança de raio; todas as direções são direções principais e não há distorção de forma no processo. Quando o tensor possui dois autovalores iguais e um diferente, a esfera deforma-se em um elipsoide com um eixo de simetria, de forma que todos os segmentos perpendiculares ao eixo de simetria não apresentam distorção angular. Se todos os autovalores são diferentes, existem somente três direções associadas a cisalhamento nulo; a esfera deforma-se em um elipsoide achatado em três direções ortogonais.

O caso em que um dos autovalores é nulo corresponde a um **estado plano de deformações**, e quando dois dos autovalores são nulos se tem um **estado uniaxial de deformações**.

3.3.2 Deformação volumétrica

Identificadas as direções principais, podemos visualizar facilmente a mudança de volume resultante de uma deformação infinitesimal. Um paralelepípedo infinitesimal orientado nas direções principais (ortogonais) e com dimensões iniciais $dx_1 \mathbf{n}^1 \times dx_2 \mathbf{n}^2 \times dx_3 \mathbf{n}^3$ terá, após a deformação, dimensões

$$(E_1 + 1)dx_1 \times (E_2 + 1)dx_2 \times (E_3 + 1)dx_3.$$

Assim, a variação de volume específica, para pequenas deformações, é

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{(E_1 + 1)(E_2 + 1)(E_3 + 1) |dx_1| |dx_2| |dx_3| - |dx_1| |dx_2| |dx_3|}{|dx_1| |dx_2| |dx_3|}, \\ &= (E_1 + 1)(E_2 + 1)(E_3 + 1) - 1. \end{aligned} \quad (3.34)$$

A hipótese de pequenos deslocamentos e deformações significa $E_i \ll 1$, de forma que $E_i^2 \ll E_i$ e $E_i^3 \ll E_i^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta &= (E_1 + 1)(E_2 + 1)(E_3 + 1) - 1, \\ &= E_1 + E_2 + E_3 + E_1 E_2 + E_1 E_3 + \dots + E_1 E_2 E_3, \\ &\Rightarrow \boxed{\Delta \approx E_1 + E_2 + E_3 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = I_1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Isto significa que o traço do tensor deformação infinitesimal define a variação específica de volume. Observe que o traço, (soma dos termos da diagonal principal de um tensor), é um escalar cujo valor não muda de um sistema de coordenadas a outro (é um invariante do tensor). Adicionalmente ele é, neste caso, equivalente ao divergente do deslocamento:

$$\Delta = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{div} \mathbf{u}. \quad (3.36)$$

3.3.3 Deformações esféricas e deviatóricas

Nesta seção realizaremos também uma decomposição similar àquela feita com as tensões. O tensor deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ é separado em duas componentes: **tensor deformação esférica** ou **hidrostática** e **tensor deformação desviadora** (ou **deviatórica**). Matematicamente,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_m) & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & (\varepsilon_{22} - \varepsilon_m) & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & (\varepsilon_{33} - \varepsilon_m) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^d. \quad (3.37)$$

A **deformação média** é $\varepsilon_m = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3 = I_1/3$. O tensor esférico $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ possui os três autovalores iguais representando uma expansão ou contração uniforme. O seu traço é idêntico ao do tensor deformação. Isto significa que o tensor de deformação esférico contém a parcela de variação de volume da deformação, excluindo as distorções. Ao contrário, o tensor desviador apresenta traço nulo, isto é, sem variação de volumétrica, apresentando apenas variação de forma através de deformações cisalhantes. Esta separação em uma parcela que quantifica variação de volume e outra de forma, tem sua utilidade na criação das relações constitutivas que vinculam grandezas de deformação e tensão, assunto do próximo capítulo.

3.4 Exercícios

- 3.1 Dado o campo de deslocamento abaixo, calcular o tensor de deformação infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})/2$ e o tensor de Green-St.Venant $\mathbf{E}(\mathbf{X})$. Compare e comente os resultados.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} 0, 2X_1 + 0, 8X_2 \\ 0 \\ 0, 6X_3 \end{Bmatrix}.$$

Solução: Usando (3.29) e (3.13) obtém-se

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0,22 & 0,48 & 0 \\ 0,48 & 0,32 & 0 \\ 0 & 0 & 0,78 \end{bmatrix}$$

- 3.2 Para o deslocamento do Exercício 1, determine o vetor das coordenadas deformadas \mathbf{x} . *Solução:* $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$, isto é:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1, 2X_1 + 0, 8X_2 \\ X_2 \\ 1, 6X_3 \end{Bmatrix}.$$

- 3.3 Num problema de torção de uma barra de seção circular, as seções transversais giram como um corpo rígido, com seus pontos permanecendo no plano da seção. O ângulo de torção de uma seção é proporcional ao comprimento da barra. Por exemplo, a barra de Figura 3.6 está engastada num extremo e suporta um momento torsor no outro. Possui 10 mm de diâmetro e 100 mm de comprimento. O campo de deslocamento (infinitesimal) de qualquer ponto da barra obedece à seguinte equação:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{Bmatrix} \frac{T}{GJ} x,$$

onde T é o torque aplicado no extremo, G é o módulo de cisalhamento e J o momento polar de inércia da seção transversal. Calcular o tensor de deformação do ponto A , de coordenadas, (100; 10; 0) mm. Calcular o tensor de deformação infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ e o tensor de Green-St.Venant $\mathbf{E}(\mathbf{x})$.

- 3.4 O deslocamento \mathbf{u} de qualquer ponto $P(x, y, z)$ de uma placa fina (Figura 3.7) pode ser descrito a partir do conhecimento do deslocamento transversal $w(x, y)$ da superfície media da placa, e

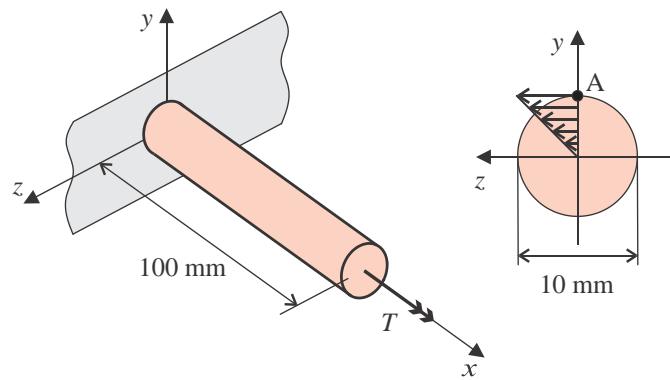


Figura 3.6: Dados do Exercício 3.

da distancia z que separa o ponto P da superfície média. No caso em análise, temos uma placa quadrada como na figura, simplesmente apoiada nas bordas com carregamento de pressão na superfície inferior, produzindo um deslocamento dado por:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{dw(x, y)}{dx} z \\ -\frac{dw(x, y)}{dy} z \\ w(x, y) \end{Bmatrix},$$

onde a origem do sistemas de coordenadas é no centro da placa. Considere $w(x, y) = (1 - (x/a)^2)(1 - (y/b)^2)$. Calcule o tensor de deformação infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ e o de Green $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. Avaliar para os pontos $P_1 = (0; 0; 0, 5)$ mm e $P_2 = (a/2; b/2; 0, 5)$ mm, usando os dados: $a = 100$ mm, $b = 200$ mm, espessura $H = 1$ mm. Esboce a configuração deformada da placa.

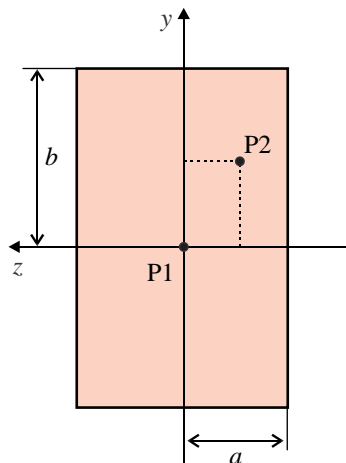


Figura 3.7: Dados do Exercício 4.

3.5 No Exercício 4, calcular as deformações principais e direções principais das deformações obtidas nos dois pontos.

3.6 Considere a placa do Exercício 4, com o campo de deslocamento transversal $w(x, y) = -(rx^2 + sy^2 + txy)$. Calcular o tensor de deformação infinitesimal. Esboce a configuração deformada da placa para $r = s = 1$, nos casos $t = 0$ e $t \neq 0$. *Solução:* Do Exercício 5, o campo de

deslocamentos e de deformação é

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \left\{ \begin{array}{l} (2rx + ty)z \\ (2sy + tx)z \\ -(rx^2 + sy^2 + txy) \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2rz & tz & 0 \\ tz & 2sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 3.7 Resolva o problema da placa do Exercício 6, com o campo de deslocamento transversal $w(x, y) = rx(a - x)$. Identifique as condições de contorno de deslocamento, e mostre que esse é um caso de flexão cilíndrica.