

Capítulo 10

Condições de restrições

Consideramos aqui procedimentos para a imposição de restrições em modelos de elementos finitos, isto é, relações entre diferentes graus de liberdades do problema matricial. São os métodos diretos de imposição, métodos usando matrizes de transformação, e métodos baseados em multiplicadores de Lagrange e penalização. São procedimentos que podem ser usados em problemas na forma $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$, de ordem n , independentemente de que o modelo envolva elementos de barras, vigas, placas, sólidos, ou qualquer outro.

É interessante distinguir algumas notações. Uma **restrição** é um valor conhecido imposto a um grau de liberdade, ou uma relação imposta entre dois ou mais g.l. Um tipo particular de restrição são as **condições de contorno** de Dirichlet, em que o deslocamento (ou temperatura, ou outra grandeza primal do problema) é imposto num grau de liberdade de um certo nó. Uma situação como essa é ilustrada na Figura 10.1, em que a extremidade de uma viga é forçada a mover-se apenas ao longo do apoio inclinado. Isso impõe uma relação pré-definida entre os graus de liberdade do nó, embora os valores dessas componentes não sejam a priori conhecidas. As componente x e y do deslocamento não podem ser independentes, mas devem guardar a relação $u_y = c u_x$, onde $c = \tan \phi$.

Duas situações típicas são:

1. $u_i = \bar{u}_i$, onde \bar{u}_i é um valor conhecido. Esse é o caso de deslocamento prescrito num grau de liberdade j . Um caso particular bastante comum é $u_i = 0$.
2. $u_i = c_0 + c_j u_j + c_k u_k + c_l u_l + \dots + c_p u_p$, isto é, u_i é uma combinação linear de diversas outras componentes nodais.

Entretanto, os tipos de restrições são muito mais abrangentes. Podem, por exemplo, serem aplicadas em regiões internas do domínio global. Um caso típico é a região de contato entre dois corpos em contato, em que se necessita impor continuidade de algumas componentes de deslocamentos.

10.1 Método direto

No método direto, a expressão da restrição é imposta através de manipulação direta nas linhas e colunas da matriz e do vetor força. A imposição do caso $u_i = \hat{u}_i$ foi detalhada na seção 6.4. Consideramos aqui a imposição direta da condição

$$u_i = c_j u_j + c_k u_k \quad (10.1)$$

O processo para a imposição desse tipo de condição pode ser melhor entendido através da visualização do caso mais simples $u_1 = c_4 u_4$, como:

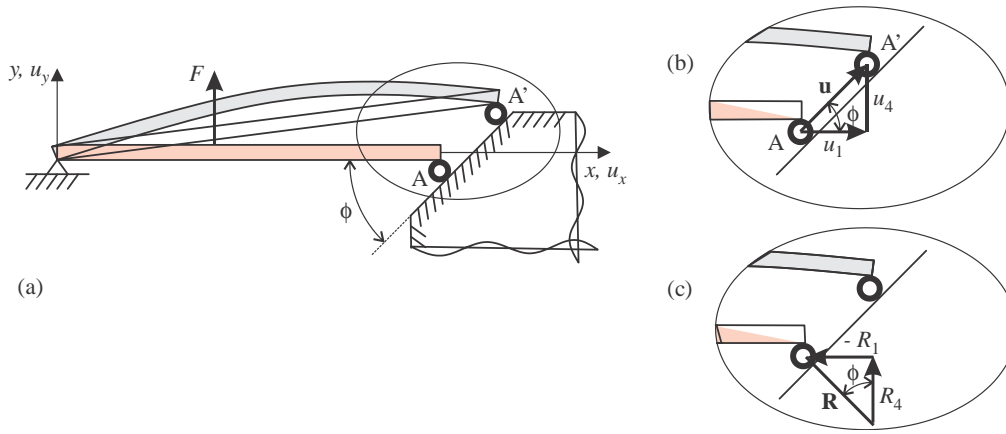


Figura 10.1: Condição de restrição entre graus de liberdade de um nó.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = c_4 u_4 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + R_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 + R_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (10.2)$$

Etapa 1 - Tanto a coluna 1 quanto a 4 multiplicam u_4 . Nesse caso, o termo $c_4 u_4$ multiplica a coluna 1 e o resultado é somado à coluna 4, de forma que a matriz fica:

$$\begin{bmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} & c_4 k_{11} + k_{14} & k_{15} \\ 0 & k_{22} & k_{23} & c_4 k_{21} + k_{24} & k_{25} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & c_4 k_{31} + k_{34} & k_{35} \\ 0 & k_{42} & k_{43} & c_4 k_{41} + k_{44} & k_{45} \\ 0 & k_{52} & k_{53} & c_4 k_{51} + k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + R_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 + R_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (10.3)$$

Etapa 2 - O mesmo procedimento pode ser usado entre as **linhas** 1 e 4. Em seguida a linha/coluna i é zerada no sistema, que fica na forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & c_4 k_{21} + k_{24} & k_{25} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & c_4 k_{31} + k_{34} & k_{35} \\ 0 & [c_4 k_{12} & [c_4 k_{13} & [c_4 (c_4 k_{11} + k_{14}) & [c_4 k_{15} \\ & + k_{42}] & + k_{43}] & + (c_4 k_{41} + k_{44})] & + k_{45}] \\ 0 & k_{52} & k_{53} & c_4 k_{51} + k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ [c_4 (F_1 + R_1) \\ + (F_4 + R_4)] \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (10.4)$$

Etapa 3 - Nesse ponto incorpora-se a equação $u_1 - c_4 u_4 = 0$ na linha 1, e, para manter a simetria, incorpora-se $-(c_4 u_1 - c_4^2 u_4) = 0$ na linha 4. Entretanto, para manter a mesma ordem de grandeza dos termos originais da matriz e evitar possível mal condicionamento, essas equações incorporadas podem ser modificadas para $(u_1 - c_4 u_4) f = 0$ na linha 1, e, para manter a simetria, incorpora-se $-(c_4 u_1 - c_4^2 u_4) f = 0$ na linha 4, onde f pode ser, por exemplo,

$$f = \sqrt{k_{11} k_{44}}. \quad (10.5)$$

Com o que o sistema fica

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & c_j & & c_k \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{U}}} \quad (10.11)$$

Nesse caso, tem-se que, nominalmente, $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}}$. Substituindo no sistema original, $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$, tem-se $\mathbf{KT}\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{F}$. Pré-multiplicando por \mathbf{T}^T o sistema fica

$$\underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}}_{\hat{\mathbf{K}}} \hat{\mathbf{U}} = \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{F}}_{\hat{\mathbf{F}}}, \quad \text{isto é, } \boxed{\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}}, \quad \text{onde } \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^T \mathbf{F} \quad (10.12)$$

A etapa final consiste em inserir a equação $u_i = c_j u_j + c_k u_k$ na linha i do sistema.

Observações:

1. Uma **variação do procedimento** consiste em definir \mathbf{T} como uma matriz retangular, sem a coluna i , isto é, com dimensões $N \times (N - 1)$. Com isso o vetor $\bar{\mathbf{U}}$ não contém o termo u_i , isto é, contém apenas os graus de liberdade independentes. Então o sistema final $\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}$ fica com ordem $(N - 1)$.
2. Na prática, não é eficiente gerar a matriz \mathbf{T} e realizar os produtos com a rigidez e a força. O mais eficiente é realizar as operações de linha/coluna diretamente no sistema.
3. Outra prática consiste em aplicar, ao nível do elemento, as transformações que envolvam apenas nós daquele elemento.
4. Condições de restrição que envolvem diferentes nós modificam o perfil da matriz global. A altura de certas colunas será aumentada, modificando a largura de banda, o perfil *skyline* e o armazenamento esparsa (ver seção 12.1).

O **cálculo das reações** é feito após a determinação dos deslocamentos $\bar{\mathbf{U}}$:

Etapa 1 - $\mathbf{U} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{U}}$. Isso necessita ser feito apenas se \mathbf{T} foi definido de forma retangular.

Etapa 2 - Do sistema original, $\mathbf{KU} = \mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R}$, obtém-se as reações por

$$\mathbf{R} = \mathbf{KU} - \mathbf{F}^a \quad (10.13)$$

onde \mathbf{F}^a é o vetor de forças aplicadas conhecidas. Ele será não nulo apenas nos graus de liberdade prescritos.

10.2 Multiplicadores de Lagrange e penalização

Apresentamos descrições formais de três métodos, o de penalização, dos multiplicadores de Lagrange e o Lagrangiano aumentado. O mais antigo é o dos multiplicadores de Lagrange, descrito pelo italiano Joseph Louis Lagrange numa publicação de 1788 (*Méchanique Analytique*). O método de penalidade foi proposto por Courant em 1943 [27]. Já o método Lagrangiano Aumentado é o mais recente, tendo sido proposto em 1969, por Hestenes [46] e Powell [85]. De fato, cada um desses três métodos compreende hoje famílias de métodos, com variações e aperfeiçoamentos. Uma última família de métodos de imposição de condições de restrição, que não comentaremos nesse texto, é o método de Nitsche.

10.2.1 Método dos multiplicadores de Lagrange

Antes de se introduzir a formalização do método de multiplicadores de Lagrange para impor condições de restrição num sistema algébrico, é interessante obter um entendimento físico do significado dos multiplicadores de Lagrange e do processo envolvido. Isso pode ser conseguido com a ajuda de um problema tradicionalmente usado nessas situações. Uma dedução detalhada do método para restrições de igualdade é mostrada na seção 14.8.

Consideremos o problema de uma malha de três elementos finitos de barra, como na Figura 10.2a, submetido a um carregamento nodal qualquer. No presente caso indicamos apenas uma força F atuando no nó 4, mas isso é indiferente quanto às observações que serão apontadas. Desejamos a solução dos deslocamentos nodais com a barra sujeita a uma condição de restrição, por exemplo, $u_3 = u_2$. Em vez de buscar a solução direta do problema, consideramos que temos duas forças, $\pm\lambda$, atuando nos nós 2 e 3, como indicado na figura. Seus valores são, a priori, desconhecidos. Fisicamente, são as forças necessárias para impor a condição $u_3 = u_2$: sem essas forças, o elemento 2 se deformaria normalmente sob a ação do carregamento externo. Esse par de forças faz o papel de uma barra de rigidez infinita unindo os nós 2 e 3, em paralelo ao elemento 2. De fato, é como um quarto elemento em paralelo ao 2, como na Figura 10.2b.

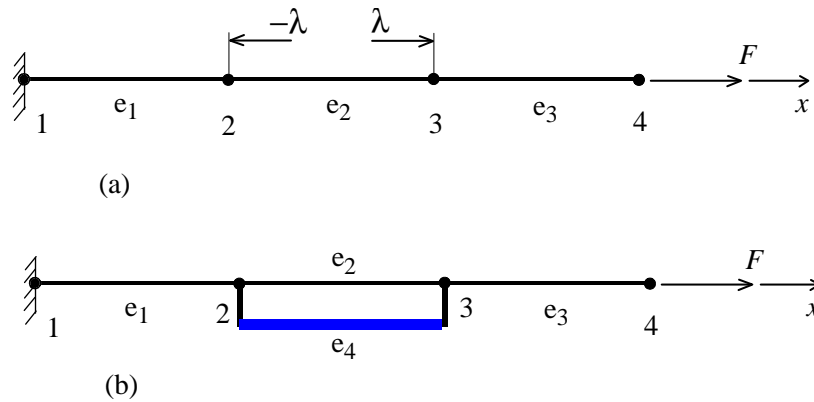


Figura 10.2: Exemplo tradicional de interpretação física de multiplicador de Lagrange.

As equações de equilíbrio do problema da Figura 10.2(a) tem a forma

$$\begin{bmatrix} k & -k & & \\ -k & 2k & -k & \\ & -k & 2k & -k \\ & & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 - \lambda \\ F_3 + \lambda \\ F \end{Bmatrix} \quad (10.14)$$

onde $k = EA/L$, sendo L o comprimento de cada elemento, e F_1 , F_2 e F_3 são forças nodais eventualmente aplicadas. Uma vez que as forças internas $\pm\lambda$ são incógnitas, é adequado passá-las para o lado esquerdo da igualdade, o que gera um sistema na forma

$$\begin{bmatrix} k & -k & & & \\ -k & 2k & -k & & 1 \\ & -k & 2k & -k & -1 \\ & & -k & k & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F \end{Bmatrix} \quad (10.15)$$

Agora a matriz é retangular, e o sistema tem mais incógnitas que equações. Entretanto, a própria equação da restrição, $u_3 = u_2$, é uma relação independente, e pode ser ajuntada ao sistema, que toma a forma final

Para o caso particular (10.21), isso se torna

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial U_m} &= 0,, \quad \text{para } m = 1, \dots, N, \\
&= \frac{1}{2}\delta_{im}K_{ij}U_j + \frac{1}{2}U_iK_{ij}\delta_{jm} - F_m + \lambda\delta_{mp} = 0, \\
&= \frac{1}{2}K_{mj}U_j + \frac{1}{2}U_iK_{im} - F_m + \lambda\delta_{mp} = 0, \\
&= K_{mj}U_j - F_m + \lambda\delta_{mp} = 0
\end{aligned} \tag{10.23}$$

onde δ_{mp} é o operador delta de Kronecker. Foi também usada a condição de simetria da matriz para fazer $U_iK_{im} = K_{mi}U_i$. A segunda condição gera

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \longrightarrow \quad U_p - \bar{U}_p = 0,$$

Tem-se então um sistema algébrico de $N + 1$ equações e incógnitas, cuja forma matricial é

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F} + \lambda\mathbf{1}_p &= \mathbf{0}, \\
U_p - \bar{U}_p &= 0,
\end{aligned} \tag{10.24}$$

onde $\mathbf{1}_p$ é o vetor de dimensão N , nulo, com valor 1 na posição p . Pode-se construir um sistema algébrico único que tem a seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{U} \\ \lambda \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \bar{U}_p \end{matrix} \right\}. \tag{10.25}$$

Conjunto de r graus de liberdade restritos

Consideramos a coleção dos números dos graus de liberdade restringidos $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_r\}$. O sistema (10.24) se torna

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F} + \lambda_1\mathbf{1}_{q_1} + \lambda_2\mathbf{1}_{q_2} + \dots + \lambda_r\mathbf{1}_{q_r} &= \mathbf{0}, \\
r \text{ condições: } \left\{ \begin{array}{l} U_{q_1} - \bar{U}_{q_1} = 0, \\ U_{q_2} - \bar{U}_{q_2} = 0, \\ \vdots \\ U_{q_r} - \bar{U}_{q_r} = 0, \end{array} \right. & \tag{10.26}
\end{aligned}$$

Esse sistema pode ser colocado em forma matricial particionada

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K} & \mathbf{I}_c \\ \mathbf{I}_c^T & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{C} \end{matrix} \right\} \tag{10.27}$$

onde

1. \mathbf{I}_c é uma matriz de dimensões $N \times r$, em que a coluna j é nula exceto pela posição q_j , cujo valor é 1.
2. $\boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ é o arranjo dos r multiplicadores de Lagrange.
3. $\mathbf{C} = \{\bar{U}_{q_1}, \bar{U}_{q_2}, \dots, \bar{U}_{q_r}\}$ é o arranjo dos r valores prescritos.

2. A solução obtida pelo método é exata (exceto pelos erros computacionais de arredondamento), isto é, a restrição é exatamente imposta. Isso é diferente de um método como o de penalização, em que a restrição é sempre imposta de forma aproximada.
3. Uma vantagem do método é que ele permite que a matriz \mathbf{K} seja triangularizada e armazenada, de forma que o sistema (10.27) possa ser resolvido para diferentes conjuntos de restrição e de carregamento, bastando realizar a fatoração das colunas \mathbf{R} a cada novo conjunto de restrições.
4. Uma desvantagem do método é que ele aumenta o número de incógnitas do problema, com os r valores dos multiplicadores. Esse aspecto pesa pouco no caso de uma quantidade relativamente pequena de restrições impostas. Por outro lado, duas vantagens do método, em relação ao método de penalização visto a seguir, é que não é necessário o usuário arbitrar nenhuma constante, e que o procedimento não afeta o número de condição da matriz.
5. Uma desvantagem é que se uma restrição for imposta mais de uma vez (devido a gerações independentes de dados, por exemplo) a matriz \mathbf{R} passa a ter linhas iguais, o que, claramente, implica na singularidade da matriz de rigidez expandida. Esse problema também se estende às situações de restrições quase iguais, o que geraria matriz mal condicionada.
6. Outra característica do método que pode ser um problema é que a matriz expandida não mais é positiva-definida. Se condições de restrição adequadas forem impostas, ela deixa de ser singular, porém apresenta autovalores positivos e negativos. Isso restringe a escolha do método de solução para aqueles que não dependem da positividade da matriz, impossibilitando métodos como o de fatoração de Choleski e o Gradientes conjugados pré-condicionado.
7. Observando (10.33), nota-se que os multiplicadores λ_j em $\mathbf{\Lambda}$ possuem dimensões de força. Isso ocorre sempre que a restrição for entre componentes de deslocamento. O método pode ser usado para impor relações de força, em outros tipos de situação, de forma que o significado físico dos multiplicadores passa a ser deslocamento, de forma a manter a coerência com as unidades do funcional Lagrangiano, que é energia.

10.2.2 Método de penalização

Um outro procedimento para a imposição de condições de restrição consiste no uso de **penalização**. Considera-se o sistema original, $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$, onde se deseja impor a restrição $u_i = \bar{u}_i$. Para isso, soma-se a igualdade

$$pu_i = p\bar{u}_i \quad (10.35)$$

na i -ésima equação do sistema. Então a matriz fica modificada por: $K_{ii} \leftarrow K_{ii} + p$ e $\mathbf{F}_i \leftarrow \mathbf{F}_i + p\bar{u}_i$, onde p é um número real arbitrário. Por exemplo, para $i = 2$, o sistema fica

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & & & & \\ K_{21} & (K_{22} + p) & K_{23} & K_{24} & & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & & \\ & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & & \\ & & K_{53} & K_{54} & K_{55} & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ (F_2 + p\bar{u}_2) \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}. \quad (10.36)$$

Deve ser usado um valor grande de p , tal que $p \gg K_{ii}$, de forma que todos os termos da equação i que não contém p tornam-se desprezíveis em relação àqueles que não contém. No exemplo, $K_{21}u_1$, $K_{22}u_2$, etc., tornam-se pequenos em relação a pu_2 , e F_2 torna-se pequeno em relação a $p\bar{u}_2$. Da mesma forma, $\mathbf{F}_i \ll p\bar{u}_i$. Assim, a segunda equação modificada aproxima-se da relação $pu_2 = p\bar{u}_2$, isto é, $u_2 = \bar{u}_2$. Os valores dos demais graus de liberdade tem pouca influência no resultado obtido para u_2 .

Consideremos um outro tipo de restrição, na forma $u_i = cu_j$. Consideremos o problema da Figura 10.2, de uma barra modelada por três elementos, sob a ação de uma força F , onde queremos impor a restrição $u_2 = u_3$. Consideremos que tentamos aproximar essa restrição adicionando um

Observações:

1. O método de penalização não aumenta o tamanho do sistema como no método dos multiplicadores de Lagrange. Entretanto, torna-se necessário arbitrar valores para os fatores de penalidade. Essa tarefa dificulta a construção de programas realmente automáticos, obrigando o usuário a escolher o parâmetro, num procedimento que pode envolver muitas tentativas e tempo de busca.
2. Enquanto o método dos multiplicadores de Lagrange produzem a solução exata, o de penalidade sempre produz uma solução aproximada, definida pelo valor da penalidade escolhido.
3. Conforme se aumenta os valores de penalização, o erro na imposição das restrições se reduz. Entretanto, conforme a penalização aumenta, o número de condição da matriz também aumenta, de forma que a partir de certo ponto os erros decorrentes tornam inútil a solução.
4. O procedimento de escolha da penalidade pode ser, até certo ponto, automatizada. Nota-se que o valor adequado fica limitado entre dois pontos. Por um lado, p deve ser o maior possível do maior acima do coeficiente de rigidez, para reduzir o erro na imposição da restrição. Por outro lado, p próximo do maior número da máquina aumenta o erro na solução do sistema. Uma estratégia consiste em definir p que divida em partes aproximadamente iguais os dois tipos de erro. É a chamada **regra da raiz quadrada**, que é estabelecida tomando

$$p \simeq 10^{k+s/2} \quad (10.44)$$

onde k é tal que o maior termo da diagonal da matriz \mathbf{K} antes da penalização é da ordem de 10^k , isto é, $\max K_{jj} \simeq 10^k$. O expoente s é o número de algarismos significativos da máquina, por exemplo, $s = 16$. De toda forma, deve-se verificar que $10^{k+s/2}$ não gere *overflow*.

5. A matriz de penalidade, $\mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R}$, é quadrada e simétrica, de ordem N . Entretanto, se consideramos que nem todos os graus de liberdade estejam restringidos, \mathbf{R} tem dimensões $r \times N$, isto é, tem mais colunas que linhas. Se essas linhas forem independentes, o posto de \mathbf{R} é igual a r . Também, \mathbf{P} tem posto r uma vez que todos os seus valores forem não nulos. Assim, $\mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R}$ tem posto r , que é menor que N . Isso significa que $\mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R}$ é uma matriz singular.
6. A singularidade da matriz de penalidade é um requisito para a solução. Isso pode ser verificado tomando o caso simples em (10.43) com $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Conforme p cresce, o sistema tende a

$$(\mathbf{R}^T \mathbf{R}) \mathbf{U} = \frac{1}{p} \mathbf{F}. \quad (10.45)$$

Se $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ for não singular, a solução tenderia a $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. Caso $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ singular se pode ter \mathbf{U} com $N - r$ termos não nulos.

7. Essa situação de matriz de penalidade não singular não é esperada quando o método é usado para a imposição de condições de restrições aos modelos de elementos finitos. Entretanto, formulações de elementos finitos podem apresentar penalidades implícitas na formulação, que geram os diversos efeitos de locking.

10.2.3 Método Lagrangiano aumentado

O método Lagrangiano aumentado pode ser visto como uma conexão entre o Lagrangiano e de penalidade. Observando a esparsidade da matriz expandida no método Lagrangiano, (10.34), a sub matriz nula impede que a solução de $\mathbf{\Lambda}$ e \mathbf{U} possa ser calculada separadamente. Entretanto, considere o truque de criar uma matriz $e\mathbf{S}^{-1}$, onde e seja um escalar real “pequeno” e \mathbf{S} uma matriz diagonal arbitrária de ordem r . Adiciona-se à segunda equação (10.34) a igualdade $e\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Lambda} = e\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Lambda}$, de forma que o sistema fica

a resposta com as iterações.

5. A matriz $\bar{\mathbf{K}}$ à esquerda da igualdade em (10.51) é simétrica e positiva-definida, dependendo de \mathbf{K} , se \mathbf{R} tiver todas as linhas independentes (nenhuma restrição repetida ou combinação linear). Isso permite uma ampla gama de solvers para serem usados na solução.
6. Valores adequados de e , podem ser escolhidos tais que

$$1/e = 10^3 \text{ a } 10^4 \text{ vezes } \max K_{qq} \quad (10.52)$$

A prática mostra que duas iterações são suficientes para uma aproximação adequada [41]. Em geral a precisão para um dado número de iterações cresce com o crescimento de $1/e$. Entretanto, esse valor não pode ser tão grandes que tornem os termos de \mathbf{K} irrelevantes na soma em $\bar{\mathbf{K}}$.

7. Em problemas lineares, $\bar{\mathbf{K}}$ pode ser triangularizado apenas uma vez e armazenado, de forma que o custo de fazer mais de duas iterações não é acentuado, nem muito maior que o procedimento básico do método de penalidade.

10.3 Exemplos

Consideremos uma sequência de exemplos baseados no modelo de elementos finitos de barra mostrado na Figura 10.2, com três elementos idênticos.

Exemplo 1 - Aplicar a condição $u_2 = \bar{u}_2$, com $F = 0$, usando o método direto

Para simplificar, aplicamos previamente a condição de engaste, $u_1 = 0$ removendo a linha/coluna 1 do sistema algébrico mostrado em (10.14):

$$\begin{bmatrix} 2k & -k & & \\ -k & 2k & -k & \\ & -k & k & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}. \quad (10.53)$$

Claramente, a condição de engaste também pode ser imposta via penalidade ou outro dos métodos descritos. Aqui fizemos sua eliminação previa para simplificar a descrição usando apenas uma condição de restrição.

Multiplicando a primeira linha por \bar{u}_2 , transferindo para a direita, e eliminando a primeira coluna temos o sistema reduzido:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \bar{u}_2 \begin{Bmatrix} k \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (10.54)$$

cuja solução é facilmente obtida, gerando a solução completa

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \bar{u}_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (10.55)$$

Exemplo 2 - Aplicar a condição $u_2 = u_4$, usando o método direto

Tomamos, por simplificação, o sistema já com a condição de engaste imposta:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}. \quad (10.56)$$

Tabela 10.1: Resultados para as duas primeiras iterações no método Lagrangiano aumentado do Exemplo 5.

$1/e$	Iteração j	u_4 [mm]	$-\lambda$ [N]
10^3	0	0,0149	9,90
	1	0,0148	19,7
	2	0,0147	19,4
10^4	0	0,0141	90,9
	1	0,0133	173,6
	2	0,0125	248,7
10^5	0	0,010	500
	1	0,0075	750
	2	0,00625	875
10^6	0	0,0059	909,1
	1	0,00508	991,7
	2	0,005008	999,2
10^7	0	0,005099	990,1
	1	0,0050005	999,9
	2	$0,005 + 10^{-5}$	$1000 - 10^{-4}$
10^8	0	0,00500999	999,001
	1	$0,005 + 10^{-5}$	999,999002
	2	$0,005 + 10^{-8}$	$1000 - 10^{-6}$

ainda de outra forma, através do cálculo padrão de reações. Partimos da matriz de rigidez original, antes de ser reduzida pela condição de engaste. O sistema de equilíbrio é similar a (10.14): $\mathbf{K}^o \mathbf{U} = \mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R}$. As reações são obtidas por $\mathbf{R} = \mathbf{K}^o \mathbf{U} - \mathbf{F}^a$, onde \mathbf{F}^a são as forças externas aplicadas, conhecidas. Assim,

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & & & \\ -k & 2k & -k & & \\ & -k & 2k & -k & \\ & & -k & k & \end{bmatrix} F \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/k \\ 1/k \\ 1/k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}. \quad (10.66)$$

Nota-se a presença de reações nos nós 2 e 4, isto é, $R_2 = F$ e $R_4 = -F$. Apesar de não haver apoios nesses nós, a introdução da restrição implica na aplicação de forças originárias do exterior do sistema, como aquelas dos apoios. Fisicamente pode-se ver que não há como manter a restrição que não seja pela aplicação de forças adicionais.

Exemplo 5 - Aplicar a condição $u_2 = u_4$, usando o Lagrangiano aumentado

Consideramos as equações iterativas (10.49) com as matrizes de restrição \mathbf{R} e \mathbf{C} mostradas em (10.63). Usamos os valores numéricos do Exemplo 3, de forma que $k = EA/L = 2 \cdot 10^5$ N/mm, O valor inicial $\mathbf{\Lambda}_0$ é arbitrado como $\{0\}$. Arbitramos o fator e como $e = 10^{-3}$ a 10^{-8} . \mathbf{S} foi arbitrado como $\mathbf{S} = [1]$. Notamos que o maior termo na diagonal da rigidez é $\max K_{qq} = 4 \cdot 10^5$ N/mm. Então podemos escolher, por exemplo, $1/e = 10^5 10^3 = 10^8$.

Os resultados exatos são: $u_2 = u_4 = 0,005$ mm e $\lambda = -F = -1000$ N. Em todos os resultados aproximativos se encontra $u_2 = 0,005$ mm. Os demais valores são vistos na Tabela 10.1. Nota-se que a estimativa inicial (método puro de penalidade) e a taxa de convergência são bastante ruins para baixos valores de $1/e$. Para $1/e$ maiores que o $\max K_{qq}$, os valores obtidos rapidamente se tornam adequados. Sem dúvida que o comportamento depende da ordem do sistema e do seu condicionamento.

10.4 Exercícios

- 10.1 O que significa $p = 0$ na solução do Exemplo 3? E numa situação geral? (Dica: Use as eqs. (10.62) e (10.43), e complemente o gráfico da Figura 10.3 para pequenos valores de p .)
- 10.2 Refaça os Exemplos 1 a 5 aplicando a restrição $3u_2 - u_4 = F/2k$. Use os valores numéricos mostrados no Exemplo 2: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $A = 100$ mm², $L = 100$ mm, $F = 10^5$ N e $k = EA/L$.

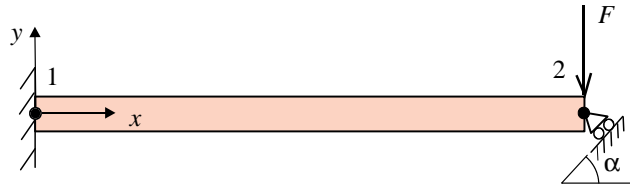


Figura 10.4: Modelo de um elemento de viga com apoio de rolete deslizando inclinado.

- 10.3 Considere o problema ilustrado na Figura 10.4, que consiste em uma viga engastada no nó 1 e apoiada no nó 2 por um rolete que permite a rotação e a translação ao longo de um plano que faz ângulo de $\alpha = 60^\circ$ com o eixo x . Os dados da viga são: comprimento L , módulo de elasticidade E , área e momento de inércia da seção A , I e força F . Resolva analiticamente os itens abaixo. Para compactar a notação, podem ser usados os números adimensionais $\delta = F/EA$ e $\gamma = I/AL^2$.
- Identifique a condição de restrição para o apoio no nó 2, envolvendo os graus de liberdade de viga u_2 , v_2 e θ_2 .
 - Estabeleça a equação matricial de equilíbrio e imponha o engaste no nó 1 através de redução da matriz, gerando um sistema com 3 graus de liberdade.
 - Aplice a restrição no nó 2 ao sistema algébrico usando o método direto. Obtenha a solução analítica usando o Mathematica. Em seguida identifique as reações.
 - Aplice as restrições do item (a) usando o método de penalidade e determine a solução simbólica. Em seguida obtenha a solução numérica, arbitrando valores para os dados. Tente identificar o significado físico da penalidade.
 - Repita o item (d) para o método de multiplicadores de Lagrange. Tente identificar o significado físico do multiplicador.
 - Repita o item (d) para o método Lagrangiano aumentado.

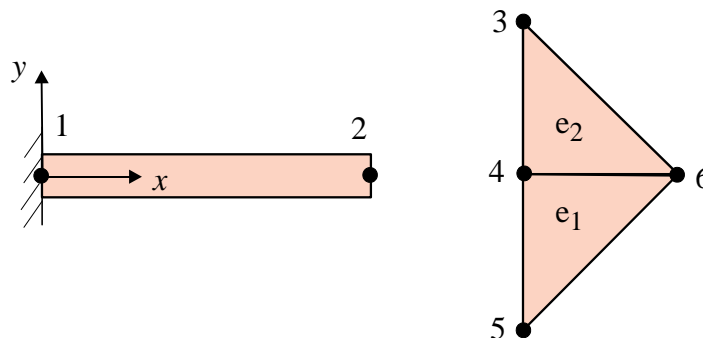


Figura 10.5: Problema do Exercício 4, para a conexão do nó 2 da viga com o modelo de estado plano de tensões à direita.