

Capítulo 21

Piezoelasticidade e estruturas inteligentes

A eletroelasticidade trata dos fenômenos associados com a interação entre os comportamentos mecânicos e elétricos em certos materiais. O fenômeno piezoelétrico é um destes fenômenos, que é relacionado ao efeito da carga elétrica na deformação mecânica e vice-versa. Uma estrutura laminada que possui alguma lâmina de material piezoelétrico apresenta, por exemplo, deformações e/ou tensões, quando suas lâminas piezoelétricas são submetidas a um campo elétrico. Conversamente, uma lâmina emite um sinal elétrico quando submetida a uma deformação via força mecânica. Esse sinal elétrico pode, por exemplo, ser usado para estimar a deformação sofrida pelo laminado, através de um processamento adequado.

O termo piezeletricidade possui o prefixo *piezo*, do grego antigo *piezein*, que significa *pressionar*, aludindo à eletricidade gerada por uma pressão. De forma mais atual, piezeletricidade consiste na capacidade de alguns materiais, denominados piezoelétricos, converterem energia mecânica em energia elétrica e vice-versa.

Um material com alta capacidade de ser polarizado sob um campo elétrico é chamado **material dielétrico**. Macroscopicamente, um material pode ser constituído por moléculas polarizadas orientadas aleatoriamente, de forma a manter o material em estado neutralizado. Em uma estrutura molecular polar, o fenômeno de polarização consiste no alinhamento dos dipolos de suas moléculas, e numa estrutura apolar consiste na criação e no subsequente alinhamento dos dipolos. Dentre as formas possíveis de se obter a polarização, a que se aplica aos materiais piezoelétricos industriais é o mecanismo de *reorientação dos dipolos*, quando um campo elétrico aplicado causa uma reorientação das moléculas do dielétrico, induzindo uma polarização global.

O primeiro material piezoelétrico sintético foi obtido em 1940, com a polarização do *titanato de bário* (BaTiO_3) pela aplicação de um campo elétrico. Este fato conduziu à descoberta, na década de 1950, do cerâmico *titanato zirconato de chumbo* ($\text{Pb}(\text{Zr},\text{Ti})\text{O}_3$), também chamado (**PZT**), que apresenta módulos de elasticidade com valores muito semelhantes aos do alumínio e coeficientes piezoelétricos relativamente altos, capaz de desenvolver deformações elásticas da ordem de 0,1 %, e trabalhar em uma larga faixa de frequências. Atualmente, os cerâmicos PZT em um dos tipos de materiais piezoelétricos mais facilmente encontrados no mercado. Outros materiais piezoelétricos são o sal Rochelle e o cristal de quartzo, usado por muito tempo como agulhas em toca-discos de vinil.

Além dos materiais piezoelétricos cerâmicos, os **polímeros piezoelétricos** como o *polifluoreto de vinilideno* (**PVDF**) são amplamente empregados. A natureza piezoelétrica do PVDF foi descoberta em 1969 pelo físico japonês Heiji Kawai. Atualmente os polímeros piezoelétricos são disponíveis na forma de filmes finos.

Os materiais **cerâmicos piezoelétricos** são frágeis e rígidos, enquanto os materiais poliméricos são mais dúcteis e flexíveis. Os cerâmicos são mais utilizados como **atuador** devido à sua rigidez mecânica relativamente alta. Por outro lado, os poliméricos são mais flexíveis, e apesar de possuírem propriedades piezoelétricas mais fracas, são mais sensíveis que os cerâmicos, fazendo com que sejam indicados para aplicações como **sensores**.

Os piezopolímeros PVDF e as piezocerâmicas PZT comportam-se como materiais ortotrópicos

e transversalmente isotrópicos, respectivamente, apesar deste último se comportar como isotrópico quando em seu estado original, sem apresentar uma orientação espontânea da polarização em nível macroscópico.

Para campos elétricos baixos, até cerca de 100 V/mm, os materiais piezoelétricos apresentam comportamento linear entre campo elétrico e deformação. Para campos mais intensos eles apresentam comportamento **não linear, laço de histerese e envelhecimento dielétrico**. O envelhecimento tem como consequência, uma falta de reprodutibilidade de deformações para um dado campo elétrico de excitação. Um dispositivo baseado neste tipo de material, sob carga cíclica, apresentaria uma modificação contínua do nível de deformação zero detectado.

21.1 Estruturas inteligentes

Os *sistemas estruturais inteligentes* englobam estruturas de uma grande variedade de materiais ativos e passivos. O protótipo deste tipo de estrutura consiste num componente estrutural (viga, placa, casca) de material composto laminado por lâminas inertes (polímero/fibras, por exemplo) com camadas de piezoelétricos aderidos nas faces ou entre as camadas, como ilustrado na Figura 21.1. Essa configuração é referida também como **laminado híbrido**. As camadas piezoelétricas podem ser contínuas sobre grandes extensões ou apenas em regiões localizadas. Então, a **estrutura inteligente é geralmente considerada aquela que possui sensores e atuadores que tem capacidade de sentir e realizar ações corretivas**. A eletrônica de conectar os componentes de sensoriamento e de atuação são externos ao sistema estrutural inteligente. Este tipo de estrutura é usado frequentemente em asas de aviões, rotores de helicópteros, pás de turbinas eólicas, etc.

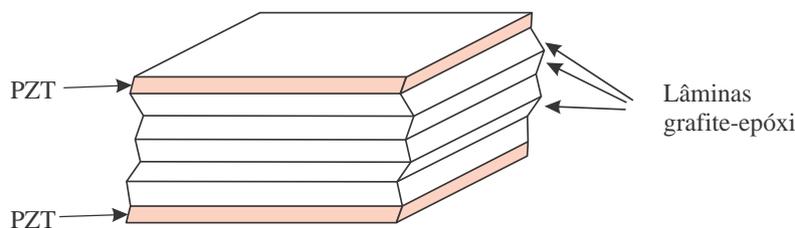


Figura 21.1: Visualização da configuração típica de um laminado híbrido com camadas piezoelétricas.

Além dos materiais piezoelétricos, diversos outros são utilizados em estruturas inteligentes, como: **materiais eletrorestritivos**, materiais magneto restritivos, ligas de material com memória (**shape memory alloys, SMA**) e fluidos eletro-reológicos. Os magneto restritivos respondem com uma deformação em presença de um campo magnético. Os SMA apresentam mudança de fase em uma certa faixa estreita de temperatura ou tensão. A mudança de fase tem o efeito macroscópico de uma grande deformação, que, em certas situações, é quase completamente reversível. Eletro-restritividade é um efeito observado em todos os dielétricos, em que um campo elétrico induz uma deformação numa relação quadrática. Um tipo atualmente em uso é o Niobato magnésio de chumbo ($\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3$). Uma característica destes materiais é exibir quase nenhuma histerese e apresentar excelente reprodutibilidade sob campo elétrico cíclico.[39][141] Uma limitação, é que as deformações induzidas pela eletrorestrição são limitadas, e apenas em altos campos elétricos conseguem atingir os níveis obtidos normalmente pelos piezoelétricos.

Uma estrutura inteligente possui dois conjuntos de partes: a parte passiva e a ativa. A **parte de passivo** é aquela que suporta o carregamento, mecânico, e a **parte de material ativo** é aquela que faz o sensoriamento e a atuação. A parte ativa também pode suportar parte do carregamento, dependendo de suas dimensões e propriedades mecânicas. Isso pode ser visualizado considerando uma casca delgada sob vibração. Esta amplitude pode ser reduzida, ou em certos casos eliminada, usando filmes piezoelétricos colados nas superfícies. Conforme a casca se deflete sob a ação das forças externas, o sensor piezoelétrico também se deforma, gerando uma carga elétrica de superfície proporcional à deformação. A carga pode ser captada e amplificada por um sistema de controle, o

qual aplica uma voltagem ao filme piezoelétrico atuador que, por sua vez, induz uma deformação na estrutura da casca, de forma a reduzir a amplitude de deflexão detectada.

21.1.1 Conceitos básicos de sistemas de controle

Uma das partes fundamentais na operação de estruturas inteligentes é a existência de um sistema de controle. Um sistema de controle se caracteriza por gerar um sinal de saída cujos valores podem ser (a) pré-definidos, fixos, ou (b) calculados a partir de valores de entrada do sistema. Associados a essas duas possibilidades, existem duas formas básicas: **sistemas de malha aberta, e de malha fechada**, também chamada de retro alimentada. Define-se o **valor de saída** do sistema como o valor da grandeza física do componente sendo controlado. Por exemplo, no problema de controlar o deslocamento transversal de uma placa, o *valor de saída* é o valor o deslocamento efetuado pela placa num dado instante, como resultado dos carregamentos e da excitação aplicada sobre o atuador. No sistema de malha aberta, o valor de saída não exerce nenhuma influência sobre o valor de excitação sobre o elemento ativo (o atuador piezoelétrico, por exemplo). Em controles com malha aberta, o valor da excitação é escolhido com base na experiência, de tal forma que o sistema controlado apresente um comportamento aproximado àquele desejado, após um dado intervalo de tempo. Por exemplo, se se deseja que um certo forno elétrico atinga 300 °C em 10 minutos de aquecimento, alguém com experiência pode fazer um ajuste em num dado valor da resistência elétrica, e esperar que ao final de 10 minutos a temperatura esteja próxima do valor desejado. Claramente, o resultado vai depender de diversos fatores, como a temperatura ambiente, por exemplo.

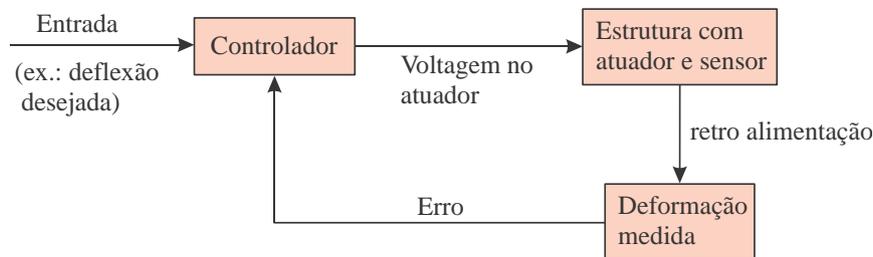


Figura 21.2: Esquema simplificado de um sistema de controle de malha fechada.

No controle com malha fechada, ou controle com retro alimentação de dados, o valor de saída instantâneo é utilizado para calcular um erro em relação ao valor desejado. O sinal de excitação é modificado de forma a reduzir esse erro a zero ou a um valor adequado. A Figura 21.2 ilustra um sistema de controle de malha fechada, tomando um componente estrutural com atuadores e sensores piezoelétricos como exemplo. O controlador recebe um valor de referência, que no caso é o deslocamento desejado num certo ponto da estrutura. Ele emite uma voltagem que é aplicada no atuador montado na estrutura. Esta se deforma sob a ação das forças mecânicas e do atuador. O sensor detecta a variação de deformação e emite um sinal elétrico proporcional, que é retro alimentado ao controlador. Este sinal é comparado com o valor de referência e um valor de erro é calculado. Em seguida o erro é utilizado para o cálculo de uma voltagem de excitação que possa reduzir o erro no deslocamento em relação ao valor desejado.

21.2 Equações governantes de Piezoelasticidade linear 3D

Consideramos um corpo sólido piezoelétrico ocupando um domínio aberto $V \subset R^3$, com contorno ∂V . As equações gerais que governam seu comportamento mecânico e elétrico são mostradas a seguir. As componentes mostradas são em coordenadas cartesianas. Utiliza-se a notação de Voigt para tensores de segunda e quarta ordem. Uma bibliografia clássica para o equacionamento geral de materiais piezoelétricos é o trabalho de Tiersten [191], de 1969. Mais modernamente, podem-se citar [71][222]. O conjunto geral de equações governantes é o seguinte.

1. **Relação deformação-deslocamento** linear

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^m \mathbf{u}, \text{ onde } \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}\}^T, \text{ e } \mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^T. \quad (21.1)$$

\mathbf{D}^m é uma matriz de operadores diferenciais:

$$\mathbf{D}^m = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \quad (21.2)$$

e u_1 , u_2 e u_3 são as componentes de deslocamento. Em alguns pontos do texto, substituiremos a notação por u , v e w .

2. Equações locais do movimento no domínio (**equilíbrio mecânico**):

$$\mathbf{D}^{mT} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } V, \text{ onde } \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12}\}^T. \quad (21.3)$$

3. **Equilíbrio mecânico no contorno** (condições de contorno de Neumann):

$$\mathbf{n}^m \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \partial V_f, \text{ onde } \mathbf{n}^m = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (21.4)$$

∂V_f é a região do contorno sob vetor tensão $\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{n}^m = \mathbf{n}^m(\mathbf{x})$ é a matriz com os cossenos diretores do vetor normal no ponto do contorno.

4. **Condições de contorno essenciais mecânicas** (de Dirichlet):

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \partial V_u, \quad (21.5)$$

onde $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ é o vetor de deslocamentos prescritos em ∂V_u .

5. **Relação entre a função escalar potencial eletrostático ϕ e campo elétrico \mathbf{E}**

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad \text{onde } \mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\}^T. \quad (21.6)$$

$\phi = \phi(\mathbf{x})$, e \mathbf{E} é o vetor campo elétrico, em V/m ou N/C, onde C é Coulomb e V é Volt. ϕ é dado em V.

6. **Relação constitutiva eletromecânica:**

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \mathbf{k}^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^E} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix}, \quad \text{onde } \mathbf{D} = \{D_1, D_2, D_3\}^T. \quad (21.7)$$

\mathbf{D} é o deslocamento elétrico [C/m²]. \mathbf{C} é a matriz de elasticidade linear do material piezoeletrico, em N/m², obtido em campo elétrico constante. \mathbf{e} é matriz de rigidez piezoeletrica [N/Vm] ou, equivalentemente, em [C/m²]. \mathbf{k}^e é a matriz de constantes dielétricas obtidas para deformação mecânica constante, em [F/m]. Note-se que $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $-\mathbf{E}$ são os conjugados energéticos de $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{D} , respectivamente. Qualitativamente, isso significa que \mathbf{D} pode ser entendido como uma “força específica”, no mesmo sentido que a tensão mecânica $\boldsymbol{\sigma}$. O campo \mathbf{E} é análogo à deformação mecânica $\boldsymbol{\varepsilon}$: enquanto $\boldsymbol{\varepsilon}$ é definido como a parte simétrica do gradiente de deslocamentos como em (21.1), \mathbf{E} é definido como o gradiente do potencial elastostático ϕ . As matrizes \mathbf{C} e \mathbf{k}^e são

positivo definidas, de forma que o sistema (21.7) pode ser invertido:¹

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}^D & \mathbf{g}^T \\ -\mathbf{g} & \mathbf{f}^\sigma \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}^E} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix}, \text{ onde } \begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}, & \mathbf{k}^\sigma = \mathbf{k}^e + \mathbf{e}\mathbf{S}\mathbf{e}^T, \\ \mathbf{f}^\sigma = (\mathbf{k}^\sigma)^{-1} \\ \mathbf{g} = \mathbf{f}^\sigma \mathbf{e}\mathbf{S}, & \mathbf{S}^D = \mathbf{S} - \mathbf{g}^T \mathbf{e}\mathbf{S}, \end{cases} \quad (21.8)$$

Nota-se que o material piezoelectricamente inerte é tal que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Então, de (21.7), os efeitos mecânicos e elétricos, $\boldsymbol{\sigma}$ e a \mathbf{D} , tornam-se desacoplados, sendo que \mathbf{D} resulta apenas do efeito dielétrico sob a ação de um eventual campo elétrico \mathbf{E} , que qualquer material possui. Em (21.8), se $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, tem-se que $\mathbf{f}^\sigma = (\mathbf{k}^e)^{-1}$ e $\mathbf{S}^D = \mathbf{C}^{-1}$.

7. Em geral, as lâminas piezoeletricas são usadas nos chamados modo extensional e modo cisalhante. No **modo extensional**, o campo elétrico é aplicado na mesma direção da polarização do material, e a deformação é extensional, perpendicular à direção de polarização. No **modo cisalhante**, o campo elétrico é aplicado perpendicular à direção de polarização, gerando uma deformação cisalhante nesse plano. As matrizes de constantes piezoeletricas para ambos os casos são as seguintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ para o modo extensional, e} \\ \mathbf{e} &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix} \text{ para o modo cisalhante.} \end{aligned} \quad (21.9)$$

No presente texto faremos o detalhamento usando apenas o modo extensional.

8. A forma geral do sistema algébrico (21.7) para um **material piezoeletrico ortotrópico**, em **modo extensional**, é

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & k_{11}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & k_{22}^e & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}. \quad (21.10)$$

A esparsidade da matriz inversa \mathbf{S}^E é a mesma de \mathbf{C}^E . Em geral as lâminas piezoeletricas são considerados **transversalmente isotrópicas**, e com direção de polarização ao longo do eixo principal 3, aquele de isotropia transversal. Se o campo elétrico é paralelo à direção de polarização, a matriz constitutiva apresenta as seguintes simplificações:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22}, & C_{13} &= C_{23}, & C_{44} &= C_{55}, & 2C_{66} &= C_{11} - C_{12}, \\ e_{32} &= e_{31}, & e_{24} &= e_{15}, & k_{22}^e &= k_{11}^e. \end{aligned} \quad (21.11)$$

As quatro primeiras relações são aquelas usuais de isotropia transversal mecânicas, mostradas em (4.23). No total, são 5 constantes elásticas independentes, 3 de permissividade dielétrica \mathbf{e} e 2 de constantes dielétricas \mathbf{k}^e , resultando **10 constantes de material no total**. Pode-se interpretar que um valor e_{31} de permissividade dielétrica corresponde à tensão mecânica σ_1

¹F indica Farad, a unidade de capacitância elétrica de um meio. É uma unidade derivada, i.e., é definida a partir de unidades fundamentais. Por exemplo, $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ Nm/V}^2 = 1 \text{ Ws/V}^2$.

desenvolvida na direção 1, devido a um campo elétrico E_3 unitário aplicado na direção 3, se as deformações mecânicas forem restritas de forma a que $\varepsilon = \mathbf{0}$.

9. A relação constitutiva (21.7) frequentemente é expressa em outro formato, mais adequado às funções atuador ou sensor. Como \mathbf{C} e \mathbf{k}^e são matrizes positivo definidas, as seguintes operações podem ser feitas. Primeiro, se pode decompor (21.7) em duas equações:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{k}^e \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (21.12)$$

Da primeira equação se pode exprimir $\boldsymbol{\varepsilon}$, que substituída na segunda, produz a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{d}^T \\ \mathbf{d} & \mathbf{k}^\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix}, \text{ onde } \begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}, \\ \mathbf{d} = \mathbf{e}\mathbf{S}, \\ \mathbf{k}^\sigma = \mathbf{d}\mathbf{e}^T + \mathbf{k}^e. \end{cases}\quad (21.13)$$

\mathbf{S} é a matriz elástica de flexibilidade do material, em $[\text{m}^2/\text{N}]$ obtido em campo elétrico nulo. \mathbf{d} é a matriz de constantes dielétricas em $[\text{m}/\text{V}]$, e \mathbf{k}^σ é a matriz de permissividade absoluta do material para tensões mecânicas nulas, em $[\text{F}/\text{m}]$. \mathbf{k}^σ também é conhecida por permissividade absoluta do material. No caso do **material piezomecânico ortotrópico transversamente isotrópico em relação ao eixo 3** se tem:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & k_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & k_{11}^\sigma & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}. \quad (21.14)$$

Deve-se observar que, frequentemente, as propriedades piezoelétricas fornecidas pelos fabricantes são em termos de \mathbf{d} e de \mathbf{C}^σ , a chamada matriz dielétrica relativa (ou simplesmente constante dielétrica) para tensão constante, definida por

$$\mathbf{C}^\sigma \equiv \frac{1}{k_o} \mathbf{k}^\sigma, \quad (21.15)$$

onde k_o é permissividade do vácuo, $k_o = 8,854.187.817.6 \cdot 10^{-12}$ F/m. A esparsidade da matriz de material em (21.13) é a mesma de (21.10).

10. Equações de **conservação de carga elétrica**:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (21.16)$$

Essa é a equação de Maxwell que governa o vetor deslocamento elétrico.

11. **Condição de contorno elétrica natural**:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \bar{\omega} \quad \text{em } \Gamma_D, \text{ onde } \mathbf{n} = \{ n_1 \quad n_2 \quad n_3 \}^T. \quad (21.17)$$

∂V_D é a região do contorno cuja componente normal do deslocamento elétrico é prescrito $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\mathbf{x})$.

12. **Condição de contorno essencial do potencial eletrostático**:

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{em } \partial V_\phi, \quad (21.18)$$

onde $\bar{\phi} = \bar{\phi}(\mathbf{x})$ é a função escalar potencial elétrico prescrito em ∂V_ϕ .

Nota-se que o contorno ∂V é particionado de acordo com as condições de contorno em ∂V_u , ∂V_f , ∂V_ϕ e ∂V_D , tal que

$$\partial V = \partial V_u \cup \partial V_f \quad \text{e} \quad \partial V_u \cap \partial V_f = \emptyset, \quad \text{e} \quad \partial V = \partial V_\phi \cup \partial V_D \quad \text{e} \quad \partial V_\phi \cap \partial V_D = \emptyset. \quad (21.19)$$

21.2.1 Equações diferenciais governantes do tipo Navier

As equações locais de equilíbrio mecânico e elétrico, (21.3) e (21.16), podem ser expressas em termos das variáveis primais do problema, os deslocamentos mecânicos \mathbf{u} e o potencial elastostático ϕ , de forma similar ao que é feito para gerar as equações do movimento de Navier (em termos dos deslocamentos). Isso é feito substituindo as relações cinemáticas de deformação e campo elétrico, eqs. (21.1)-(21.6), na relação constitutiva (21.7), e levando o resultado nas equações de equilíbrio (21.3) e (21.16). O resultado é mostrado a seguir para o caso sem forças de corpo, para as direções principais de ortotropia do material, com a matriz constitutiva na forma (21.10). Essas são as equações base utilizadas em [94] no desenvolvimento de soluções exatas 3D, cujos resultados são sumarizados na seção 21.6.1 do presente capítulo:

$$\begin{aligned} C_{11}u_{,xx} + C_{12}v_{,xy} + C_{13}w_{,xz} + C_{66}(u_{,yy} + v_{,xy}) + C_{55}(u_{,zz} + w_{,xz}) + (e_{31} + e_{15})\phi_{,xz} &= 0, \\ C_{12}u_{,xy} + C_{22}v_{,yy} + C_{23}w_{,yz} + C_{66}(u_{,xy} + v_{,xx}) + C_{44}(v_{,zz} + w_{,yz}) + (e_{32} + e_{24})\phi_{,yz} &= 0, \\ C_{13}u_{,xz} + 2C_{23}v_{,yz} + C_{33}w_{,zz} + C_{55}(u_{,xz} + w_{,xx}) + C_{44}(w_{,yy} + v_{,yz}) + e_{33}\phi_{,zz} + e_{24}\phi_{,yy} &= 0, \\ -k_{11}^e\phi_{,xx} - k_{22}^e\phi_{,yy} - k_{33}^e\phi_{,zz} + e_{31}u_{,xz} + 2e_{32}v_{,yz} + e_{33}w_{,zz} + & \\ e_{24}(w_{,yy} + v_{,yz}) - e_{15}(u_{,xy} + w_{,xx}) &= 0. \end{aligned} \quad (21.20)$$

Aqui, para simplificar a notação, usamos as componentes do deslocamento como u , v e w , e usamos a notação $(\cdot)_{,x}$ para indicar $\partial(\cdot)/\partial x$, por exemplo.

21.2.2 Rotação da relação constitutiva 3D em torno do eixo 3

A relação constitutiva eletromecânica (21.7) apresenta uma matriz de material não simétrica. Pode ser interessante, no procedimento computacional, obter uma expressão equivalente com matriz simétrica. Considerando que \mathbf{C} e \mathbf{k}^e sejam simétricas, o procedimento é simples, bastando multiplicar o campo elétrico por -1 , e as submatrizes correspondentes também. Adicionalmente, utilizaremos os sobrescritos 1 e x para indicar o sistema de coordenadas a que cada grandeza se refere. Assim, nas direções principais, (21.7) toma a forma

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^1 \\ \mathbf{D}^1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}^1 & \mathbf{e}^{1T} \\ \mathbf{e}^1 & -\mathbf{k}^{e1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^{E1}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^1 \\ -\mathbf{E}^1 \end{Bmatrix} \quad (21.21)$$

onde \mathbf{C}^{E1} é a matriz constitutiva eletromecânica. As rotações de $\boldsymbol{\sigma}^1$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ em torno do eixo 3 são dadas por (4.72), página 88 e as rotações dos vetores \mathbf{D}^1 e \mathbf{E}^1 são dadas por T_r , definido em (4.70). Assim,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^1 &= \mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}^x, & \mathbf{D}^1 &= \mathbf{T}_r^T\mathbf{D}^x, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^1 &= \mathbf{T}^{-T}\boldsymbol{\varepsilon}^x, & \mathbf{E}^1 &= \mathbf{T}_r^T\mathbf{E}^x. \end{aligned} \quad (21.22)$$

O sistema particionado (21.21) pode ser transformado, substituindo (21.21) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_r^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^x \\ \mathbf{D}^x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^1 & \mathbf{e}^{1T} \\ \mathbf{e}^1 & -\mathbf{k}^{e1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_r^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^x \\ -\mathbf{E}^x \end{Bmatrix} \quad (21.23)$$

Isto gera a relação constitutiva eletromecânica no sistema $Oxyz$ definido por uma rotação anti-horária de ângulo θ em torno do eixo 3 do sistema cartesiano $O123$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\sigma}^x \\ \mathbf{D}^x \end{array} \right\} = \mathbf{C}^{Ex} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}^x \\ -\mathbf{E}^x \end{array} \right\}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{C}^{Ex} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{C}^1\mathbf{T}^{-T} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{e}^{1T}\mathbf{T}_r^T \\ \mathbf{T}_r\mathbf{e}^1\mathbf{T}^{-T} & -\mathbf{T}_r\mathbf{k}^{e1}\mathbf{T}_r^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^x & \mathbf{e}^{xT} \\ \mathbf{e}^x & -\mathbf{k}^{ex} \end{bmatrix} \quad (21.24)$$

Caso o material seja ortotrópico, as expressões da matriz elástica rotacionada \mathbf{C}^x são as mesmas mostradas em (4.77)-(4.79). Os termos não nulos das demais matrizes são os seguintes:

$$\begin{aligned} e_{31}^x &= e_{31}^1 c^2 + e_{32}^1 s^2, & e_{14}^x &= (e_{15}^1 - e_{24}^1) s^2 c, & e_{36}^x &= (e_{31}^1 - e_{32}^1) s c, & k_{22}^{ex} &= k_{22}^{e1} c^2 + k_{11}^{e1} s^2, \\ e_{32}^x &= e_{32}^1 c^2 + e_{31}^1 s^2, & e_{15}^x &= e_{15}^1 c^2 + e_{24}^1 s^2, & e_{25}^x &= e_{14}^x, & k_{33}^{ex} &= k_{33}^{e1}, \quad k_{21}^{ex} = k_{12}^{e1}, \\ e_{33}^x &= e_{33}^1, & e_{24}^x &= e_{24}^1 c^2 + e_{15}^1 s^2, & k_{11}^{ex} &= k_{11}^{e1} c^2 + k_{22}^{e1} s^2, & k_{12}^{ex} &= (k_{11}^{e1} - k_{22}^{e1}) s c, \end{aligned} \quad (21.25)$$

onde $s = \sin \theta$ e $c = \cos \theta$. A forma geral do sistema algébrico para o material ortotrópico rotacionado em torno do eixo 3 é

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} C_{11}^x & C_{12}^x & C_{13}^x & 0 & 0 & C_{16}^x & 0 & 0 & -e_{31}^x \\ C_{12}^x & C_{22}^x & C_{23}^x & 0 & 0 & C_{26}^x & 0 & 0 & -e_{32}^x \\ C_{13}^x & C_{23}^x & C_{33}^x & 0 & 0 & C_{36}^x & 0 & 0 & -e_{33}^x \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^x & C_{45}^x & 0 & -e_{14}^x & -e_{24}^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45}^x & C_{55}^x & 0 & -e_{15}^x & -e_{25}^x & 0 \\ C_{16}^x & C_{26}^x & C_{36}^x & 0 & 0 & C_{66}^x & 0 & 0 & -e_{36}^x \\ 0 & 0 & 0 & e_{14}^x & e_{15}^x & 0 & -k_{11}^{ex} & -k_{12}^{ex} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24}^x & e_{25}^x & 0 & -k_{12}^{ex} & -k_{22}^{ex} & 0 \\ e_{31}^x & e_{32}^x & e_{33}^x & 0 & 0 & e_{36}^x & 0 & 0 & -k_{33}^{ex} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \\ -E_x \\ -E_y \\ -E_z \end{array} \right\}. \quad (21.26)$$

21.2.3 Relações constitutivas em estado plano

Os laminados frequentemente são delgados o suficiente para que a componente transversal de tensão normal seja muito menor que as demais componentes, de forma que possa ser desprezada em certos tipos mais rotineiros de análise. Torna-se então necessário impor a restrição $\sigma_3 = 0$ na relação constitutiva. O procedimento é similar àquele usado no caso puramente elástico, visto no Capítulo 4. Tomamos a relação 3D mostrada em (21.8), adaptada para uma **lâmina ortotrópico** k , em sua forma aberta:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} S_{11}^D & S_{12}^D & S_{13}^D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{31} \\ S_{12}^D & S_{22}^D & S_{23}^D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{32} \\ S_{13}^D & S_{23}^D & S_{33}^D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{33} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^D & 0 & 0 & 0 & g_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55}^D & 0 & g_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}^D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_{15} & 0 & f_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{24} & 0 & 0 & 0 & f_{22}^\sigma & 0 \\ -g_{31} & -g_{32} & -g_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{33}^\sigma \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array} \right\} \quad (21.27)$$

A condição $\sigma_3 = 0$ permite a remoção da terceira coluna da matriz, e o sistema pode ser separado em três partes:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11}^D & S_{12}^D & 0 \\ S_{12}^D & S_{22}^D & 0 \\ 0 & 0 & S_{66}^D \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}^D} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{31} \\ 0 & 0 & g_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}^\sigma} \underbrace{\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D}}, \\
 \underbrace{\begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\gamma}^1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} S_{44}^D & 0 \\ 0 & S_{55}^D \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_c} \underbrace{\begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & g_{24} & 0 \\ g_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_c} \underbrace{\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D}}, \\
 \underbrace{\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{E}^1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -g_{31} & -g_{32} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -g_{15} \\ -g_{24} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}^1} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} f_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & f_{22}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & f_{33}^\sigma \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D}}.
 \end{aligned} \tag{21.28}$$

Multiplicando as duas primeiras equações pela inversa da primeira matriz à direita de cada igualdade, e multiplicando a terceira equação pela inversa da última matriz, se obtém as relações constitutivas inversas para estado plano de tensões nas direções principais de ortotropia:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & h_{31} \\ 0 & 0 & h_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}} \underbrace{\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{E}^1}, \\
 \underbrace{\begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}^1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_c} \underbrace{\begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\gamma}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & h_{24} & 0 \\ h_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_c} \underbrace{\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{E}^1}, \\
 \underbrace{\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -h_{31} & -h_{32} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -h_{15} \\ -h_{24} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}^1} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{E}^1}.
 \end{aligned} \tag{21.29}$$

De forma similar ao material não piezoeletrico, ensaios mecânicos realizados sob campo elétrico nulo poderão determinar as constantes de elasticidade de engenharia, como em (4.30):

$$\begin{aligned}
 Q_{11}^k &= \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, & Q_{12}^k &= \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, & Q_{22}^k &= \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \\
 Q_{66}^k &= G_{12}^k, & Q_{44}^k &= G_{23}, & Q_{55}^k &= G_{31}.
 \end{aligned} \tag{21.30}$$

As três equações (21.29) podem ser postas em forma compacta como:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}^1 &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}^1 + \mathbf{h} \mathbf{E}^1, \\
 \boldsymbol{\tau}^1 &= \mathbf{C}_c \boldsymbol{\gamma}^1 + \mathbf{H} \mathbf{E}^1, \\
 \mathbf{D}^1 &= -\mathbf{h}^T \boldsymbol{\varepsilon}^1 - \mathbf{H}^T \boldsymbol{\gamma}^1 + \mathbf{F} \mathbf{E}^1.
 \end{aligned} \tag{21.31}$$

onde

$$\mathbf{h} = (\mathbf{S}^D)^{-1} \mathbf{g}^\sigma, \quad \mathbf{H} = \mathbf{S}_c^{-1} \mathbf{g}_c, \quad \mathbf{C}_c = \mathbf{S}_c^{-1}. \quad (21.32)$$

Note que em problemas planos, a partir deste ponto, usamos a notação $\boldsymbol{\sigma}^1$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ para designar apenas as componentes planas de tensão e de deformação, como indicado em (21.28), em vez das seis componentes do caso triaxial de tensões.

As rotações de $\boldsymbol{\sigma}^1$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ em torno do eixo 3 são dadas em (4.37) e (4.52), com a matriz de rotação \mathbf{T} dada em (4.38), isto é, $\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}^x$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \mathbf{T}^{-T}\boldsymbol{\varepsilon}^x$. As rotações de \mathbf{D}^1 e \mathbf{E}^1 são $\mathbf{D}^1 = \mathbf{T}_r^T \mathbf{D}^x$ e $\mathbf{E}^1 = \mathbf{T}_r^T \mathbf{E}^x$, dadas em (21.22), com a matriz de rotação \mathbf{T}_r dada em (4.70). Note que $\mathbf{T}_r^{-1} = \mathbf{T}_r^T$. As rotações de $\boldsymbol{\tau}^1$ e $\boldsymbol{\gamma}^1$ são dadas em (4.72):

$$\begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \text{i.e., } \boldsymbol{\tau}^1 = \mathbf{T}_s \boldsymbol{\tau}^x. \quad (21.33)$$

Para as deformações cisalhantes transversais, a rotação é feita pela mesma matriz: $\boldsymbol{\gamma}^1 = \mathbf{T}_s \boldsymbol{\gamma}^x$. Com isso, cada uma das três equações (21.31) pode ser rotacionada:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^1 &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}^1 + \mathbf{h} \mathbf{E}^1, & \boldsymbol{\tau}^1 &= \mathbf{C}_c \boldsymbol{\gamma}^1 + \mathbf{H} \mathbf{E}^1, \\ \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}^x &= \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-T} \boldsymbol{\varepsilon}^x + \mathbf{h} \mathbf{T}_r^T \mathbf{E}^x, & \mathbf{T}_s \boldsymbol{\tau}^x &= \mathbf{C}_c \mathbf{T}_s \boldsymbol{\gamma}^x + \mathbf{H} \mathbf{T}_r^T \mathbf{E}^x, \\ \boldsymbol{\sigma}^x &= \underbrace{(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-T})}_{\bar{\mathbf{Q}}} \boldsymbol{\varepsilon}^x + \underbrace{(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{h} \mathbf{T}_r^T)}_{\bar{\mathbf{h}}^T} \mathbf{E}^x, & \boldsymbol{\tau}^x &= \underbrace{(\mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{C}_c \mathbf{T}_s)}_{\bar{\mathbf{C}}_c} \boldsymbol{\gamma}^x + \underbrace{(\mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{H} \mathbf{T}_r^T)}_{\bar{\mathbf{H}}^T} \mathbf{E}^x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^1 &= -\mathbf{h}^T \boldsymbol{\varepsilon}^1 - \mathbf{H}^T \boldsymbol{\gamma}^1 + \mathbf{F} \mathbf{E}^1, \\ \mathbf{T}_r^T \mathbf{D}^x &= -\mathbf{h}^T \mathbf{T}^{-T} \boldsymbol{\varepsilon}^x - \mathbf{H}^T \mathbf{T}_s \boldsymbol{\gamma}^x + \mathbf{F} \mathbf{T}_r^T \mathbf{E}^x, \\ \mathbf{D}^x &= -\underbrace{(\mathbf{T}_r \mathbf{h}^T \mathbf{T}^{-T})}_{\bar{\mathbf{h}}} \boldsymbol{\varepsilon}^x - \underbrace{(\mathbf{T}_r \mathbf{H}^T \mathbf{T}_s)}_{\bar{\mathbf{H}}} \boldsymbol{\gamma}^x + \underbrace{(\mathbf{T}_r \mathbf{F} \mathbf{T}_r^T)}_{\bar{\mathbf{F}}} \mathbf{E}^x. \end{aligned} \quad (21.34)$$

As três relações podem ser postas em forma compacta como:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^x \\ \boldsymbol{\tau}^x \\ \mathbf{D}^x \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{h}} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_c & -\bar{\mathbf{H}} \\ -\bar{\mathbf{h}}^T & -\bar{\mathbf{H}}^T & -\bar{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^x \\ \boldsymbol{\gamma}^x \\ -\mathbf{E}^x \end{Bmatrix}^k. \quad (21.35)$$

As expressões de $\bar{\mathbf{C}}_c$ são as mesmas dadas em (4.51) para o caso puramente mecânico. As três partes da relação constitutiva para estado plano de tensões tem a seguinte forma aberta são:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{h}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{h}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{h}_{36} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^k, \\ \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^k &= \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} \bar{H}_{14} & \bar{H}_{24} & 0 \\ \bar{H}_{15} & \bar{H}_{25} & 0 \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^k, \\ \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}^k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\bar{h}_{31} & -\bar{h}_{32} & -\bar{h}_{36} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} -\bar{H}_{14} & -\bar{H}_{15} \\ -\bar{H}_{24} & -\bar{H}_{25} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^k \\ &+ \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & 0 \\ \bar{F}_{12} & \bar{F}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F}_{33} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^k. \end{aligned} \quad (21.36)$$

As expressões para os termos não nulos de $\bar{\mathbf{C}}_c$, $\bar{\mathbf{h}}$, $\bar{\mathbf{H}}$ e $\bar{\mathbf{F}}$ são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_{31} &= h_{31} c^2 + h_{32} s^2, & \bar{h}_{15} &= h_{15} c^2 + h_{24} s^2, & \bar{h}_{24} &= h_{24} c^2 + h_{15} s^2, & \bar{h}_{25} &= \bar{h}_{14}, \\
 \bar{h}_{32} &= h_{32} c^2 + h_{31} s^2, & \bar{F}_{11} &= F_{11} c^2 + F_{22} s^2, & \bar{C}_{44} &= Q_{44} c^2 + Q_{55} s^2, & F_{33} &= \bar{F}_{33}, \\
 \bar{h}_{36} &= (h_{31} - h_{32}) sc, & \bar{F}_{22} &= F_{22} c^2 + F_{11} s^2, & \bar{C}_{55} &= Q_{55} c^2 + Q_{44} s^2, \\
 \bar{h}_{14} &= (h_{15} - h_{24}) sc, & \bar{F}_{12} &= (F_{11} - F_{22}) sc, & \bar{C}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) sc,
 \end{aligned} \tag{21.37}$$

Caso a lâmina piezoelétrica atue em modo extensional, com a direção de polarização e de campo elétrico na direção transversal, a única componente não nula do campo elétrico é E_z , com $E_x = E_y = 0$. Observando-se o último termo de (21.36) nota-se que, então, se essa lâmina for ortotrópica, sob estado plano de tensões, de (21.36)₂, nota-se que a tensão cisalhante transversal se torna completamente desacoplado do fenômeno elétrico. Entretanto, da terceira equação, o cisalhamento transversal afeta o deslocamento elétrico \mathbf{D} .

21.3 Forma fraca e princípio de mínimo

As nove equações governantes locais do problema piezoelétrico, em suas formas diferenciais e algébricas no contorno e no domínio, mostradas em (21.1), (21.3)-(21.7) e (21.16)-(21.18), podem ser tomadas em resíduo. Cada resíduo é em seguida ponderado por uma função peso arbitrária. Os resultados são integrados no volume $V \subset R^3$ do corpo, e em seu contorno ∂V , e finalmente somados, resultando na seguinte forma forte integral (note que usaremos uma notação mista, com termos em notação tensorial e outros em notação matricial):[187]

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \int_V \rho \hat{\mathbf{u}}^T \ddot{\mathbf{u}} dV + \\
 &\int_V \left[- \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ -\hat{\mathbf{E}} \end{Bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & -\mathbf{k}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\mathbf{D}} \end{Bmatrix}^T \left(\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{D}^m \mathbf{u} \\ \nabla \phi \end{Bmatrix} \right) \right. \\
 &+ \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\phi} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{D}^m \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} \end{Bmatrix} \Big] dV - \int_{\partial V_f} \hat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{n}^m \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{t}}) d\partial V_t - \int_{\partial V_D} \hat{\phi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} - \bar{\omega}) d\partial V_\omega \\
 &+ \int_{\partial V_u} (\mathbf{n}^m \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\partial V_u + \int_{\partial V_\phi} (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{D}}) (\phi - \bar{\phi}) d\partial V_\phi = 0.
 \end{aligned} \tag{21.38}$$

Note que as funções peso possuem apenas requisitos de suavidade. Neste ponto, não há restrições sobre seus valores no contorno. Os termos sob chapéu, $(\hat{\cdot})$, são funções peso arbitrárias. O primeiro termo é de inércia, onde ρ , \mathbf{u} e $\ddot{\mathbf{u}}$ são a densidade do material, a velocidade e a aceleração do ponto. O procedimento de ponderação pode ser visto em mais detalhes em [136]. A Forma Variacional estabelece que a solução $\{\mathbf{u}, \phi, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}\}$ do sistema de equações do problema local satisfaz

$$V_1 = 0, \quad \forall \left\{ \hat{\mathbf{u}}, \hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\mathbf{E}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{D}} \right\} \in L^2(V). \tag{21.39}$$

Note que o funcional V_1 é completamente geral. Um método de obter soluções aproximadas baseado nele não exige que os campos incógnitos $\{\mathbf{u}, \phi, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}\}$ satisfaçam a priori qualquer das condições de contorno. Essas condições são satisfeitas de forma aproximadas (de forma fraca), devido aos termos de contorno incorporados no próprio funcional (as quatro últimas integrais). Da mesma forma, os campos incógnitos não precisam satisfazer exatamente, a priori, as relações constitutivas ou cinemáticas, que são incorporadas explicitamente nas duas primeiras integrais de (21.43). De fato, todas as nove equações locais são satisfeitas de forma fraca num método aproximado baseado em V_1 .

É possível provar que a parte estática da Forma Variacional (21.39) possui um Princípio de Mínimo dado por

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \int_V \frac{1}{2} \left[\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & -\mathbf{k}^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{array} \right\}^T \left(\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{D}^m \mathbf{u} \\ \nabla \phi \end{array} \right\} \right) - \mathbf{b}^T \mathbf{u} \right] dV \\ & - \int_{\partial V_f} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u} \, d\partial V_t - \int_{\partial V_D} \bar{\omega} \phi \, d\partial V_\omega - \int_{\partial V_u} (\mathbf{n}^m \boldsymbol{\sigma})^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, d\partial V_u - \int_{\partial V_\phi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) (\phi - \bar{\phi}) \, d\partial V_\phi. \end{aligned} \quad (21.40)$$

O primeiro integrando é conhecido como **entalpia elétrica**:

$$H(\boldsymbol{\varepsilon}, -\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & -\mathbf{k}^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{array} \right\}. \quad (21.41)$$

Essa é uma grandeza análoga à densidade de energia de deformação elástica de um sólido, $\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} / 2$.

É possível provar que, dentro de certas condições de suavidade das funções, o mínimo de Π_G ocorre no ponto $\{\mathbf{u}, \phi, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}\}$ que satisfaz a condição (21.39) no caso estático. Isso é feito, por exemplo, fazendo a primeira variação de Π_G (ver Mendonça e Fancello, [136]) nas variáveis $\{\mathbf{u}, \phi, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}\}$. Essa operação é feita com o auxílio do teorema do divergente aplicado na terceira integral de (21.40) (o termo que contém $\boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{D}^m \mathbf{u})$ e $\mathbf{D}^T \nabla \phi$):

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{u} (\mathbf{D}^m \boldsymbol{\sigma})^T dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{D}^m \mathbf{u}) dV &= \int_{\partial V} (\mathbf{n}^m \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} \, d\partial V, \\ \int_V \phi (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV + \int_V \mathbf{D}^T \nabla \phi dV &= \int_{\partial V} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \phi \, d\partial V. \end{aligned} \quad (21.42)$$

Ambos os funcionais, Π_G e V_1 , se constituem em pontos de partida para diversos dos chamados Métodos de Elementos Finitos Híbridos, que contam com extensa literatura. (Ver, por exemplo, a lista de referência em [187]). O MEF mais usual é aquele baseado em formulação de deslocamento, em que os campos incógnitos são apenas aqueles primais, que no presente problema são os campos de deslocamento e do potencial elétrico, $\{\mathbf{u}, \phi\}$. As base de funções de aproximação são requeridas satisfazer, a priori, as condições de contorno essenciais e as relações constitutivas e cinemáticas, de forma que restam no funcional apenas o equilíbrio (mecânico e elétrico), no domínio e no contorno, para serem aproximados. Dessa forma, os funcional do Princípio de Mínimo torna-se simplificado para o seguinte:

$$\Pi_{G1} = \int_V \frac{1}{2} \left[\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & -\mathbf{k}^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{array} \right\} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} \right] dV - \int_{\partial V_f} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u} \, d\partial V_t - \int_{\partial V_D} \bar{\omega} \phi \, d\partial V_\omega. \quad (21.43)$$

Quanto a V_1 , impomos em (21.38) a condição que $\{\mathbf{u}, \phi\}$ **satisfazem, a priori, as condições de contorno essenciais e as relações constitutivas e cinemáticas**, de forma que o funcional fica reduzido a:

$$\begin{aligned} V_2 = & \int_V \left[\rho \hat{\mathbf{u}}^T \ddot{\mathbf{u}} - \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\phi} \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{D}^m \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} \end{array} \right\} \right] dV \\ & - \int_{\partial V_f} \hat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{n}^m \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{t}}) \, d\partial V_t - \int_{\partial V_D} \hat{\phi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} - \bar{\omega}) \, d\partial V_\omega = 0. \end{aligned} \quad (21.44)$$

Em seguida o teorema do divergente na forma (21.42) é usado na segunda integral de volume, resultando na seguinte forma fraca:

$$V_3 = \int_V \left[\rho \hat{\mathbf{u}}^T \ddot{\mathbf{u}} - \left\{ \begin{array}{c} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ -\hat{\mathbf{E}} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & -\mathbf{k}^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{array} \right\} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} \right] dV + \int_{\partial V_f} \hat{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\partial V_t + \int_{\partial V_D} \hat{\phi} \bar{\omega} \, d\partial V_\omega = 0, \quad (21.45)$$

Deve-se ter $V_3 = 0 \forall \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e $\forall \hat{\mathbf{E}}$ admissíveis. $\boldsymbol{\varepsilon}$ e \mathbf{E} devem se relacionar ao campo de deslocamento \mathbf{u} e ao potencial elétrico ϕ através das relações (21.1) e (21.6). Por sua vez, $\{\mathbf{u}, \phi\}$ devem satisfazer as condições de contorno essenciais (21.5) e (21.18), e possuírem a regularidade necessária, que pode ser resumida por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{D}^m \mathbf{u}, & \text{onde } u_j \in \mathbb{U}(V), j = 1, 3 \text{ e} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\phi) = -\nabla \phi, & \text{onde } \phi \in \mathbb{U}_\phi(V). \end{aligned} \quad (21.46)$$

Os conjuntos vetoriais de funções $\mathbb{U}(V)$ e $\mathbb{U}_\phi(V)$ são definidos por

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(V) &\equiv \{f \in H^1(V) \text{ e } f(\mathbf{x}) = \bar{f} \quad \forall (\mathbf{x}) \in \partial V_u\}, \\ \mathbb{U}_\phi(V) &\equiv \{f \in H^1(V) \text{ e } f(\mathbf{x}) = \bar{f} \quad \forall (\mathbf{x}) \in \partial V_\phi\}. \end{aligned} \quad (21.47)$$

onde $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ é a coordenada do ponto. \bar{f} é um valor prescrito. $H^1(V)$ é o espaço vetorial de funções de Hilbert, definido por

$$H^1(V) = \left\{ g \mid \int_{\Omega} [g^2 + g_{,x}^2 + g_{,y}^2 + g_{,z}^2] dV < \infty \right\}. \quad (21.48)$$

A admissibilidade de $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e $\hat{\mathbf{E}}$ pode ser resumida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{D}^m \hat{\mathbf{u}}, & \text{onde } \hat{u}_j \in \mathbb{V}(V), j = 1, 3 \text{ e} \\ \hat{\mathbf{E}} &= \hat{\mathbf{E}}(\hat{\phi}) = -\nabla \hat{\phi}, & \text{onde } \hat{\phi} \in \mathbb{V}_\phi(V). \end{aligned} \quad (21.49)$$

21.3.1 Forma variacional para estado plano de tensões

É interessante notar que é possível representar o funcional V_3 em termos de tensões em vez de deformações:

$$V_4 = \int_V \left[\rho \hat{\mathbf{u}}^T \ddot{\mathbf{u}} - \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ -\hat{\mathbf{E}} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} + \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} \right] dV + \int_{\partial V_f} \hat{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{t}} d\partial V_t + \int_{\partial V_D} \hat{\phi} \bar{\omega} d\partial V_\omega = 0. \quad (21.50)$$

Essa forma variacional é adequada a relações constitutivas arbitrárias, em vez de apenas linear, como em V_3 . **Para um estado plano de tensões**, a componente normal transversal de tensão é tomada como $\sigma_z = 0$. A componente correspondente de deformação, ε_z , não é nula, mas a densidade de energia de deformação associada a ela é nula, $\sigma_z \varepsilon_z / 2 = 0$, de forma que a entalpia (21.41) pode ser representada em termos de apenas as componentes restantes de tensão:

$$V_4 = \int_V \left[\rho \hat{\mathbf{u}}^T \ddot{\mathbf{u}} - \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^x \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}^x \\ -\hat{\mathbf{E}}^x \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^x \\ \boldsymbol{\tau}^x \\ \mathbf{D}^x \end{Bmatrix} + \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} \right] dV + \int_{\partial V_f} \hat{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{t}} d\partial V_t + \int_{\partial V_D} \hat{\phi} \bar{\omega} d\partial V_\omega = 0, \quad (21.51)$$

onde as componentes de estado plano de tensões são:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^x &= \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T, & \boldsymbol{\tau}^x &= \{\tau_{yz}, \tau_{xz}\}^T, & \mathbf{D}^x &= \{D_x, D_y, D_z\}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^x &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T, & \boldsymbol{\gamma}^x &= \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^T, & \mathbf{E}^x &= \{E_x, E_y, E_z\}^T. \end{aligned} \quad (21.52)$$

21.4 Tipos de modelagem de placas laminadas híbridas

As formas integrais mostradas na seção anterior são adequadas principalmente a um corpo de forma arbitrária, 3D. Para uma placa laminada constituída por lâminas puramente estruturais e lâminas piezoelétricas, i.e., um laminado híbrido, a modelagem pode ser feita usando um ou um conjunto

de modelos de placa. Quando se observa o conjunto da formulação mostrada nas seções anteriores, verifica-se que existem dois tipos de comportamentos físicos distintos, que se desenvolvem de forma acoplada: o comportamento mecânico e o piezoelétrico, representados pelas funções de estado \mathbf{u} e o potencial elétrico ϕ . Tem-se duas grandes formas de solução:

1. Solução desacoplada. Consiste em, primeiramente, arbitrar o potencial elétrico de uma ou mais laminas piezoelétricas que são montadas como atuadores. Este potencial é convertido, pelo equacionamento, em forças, que são incluídas na formulação mecânica, que em seguida é resolvida para determinar os campos de deslocamento e de tensões, de uma maneira bastante similar à análise termoelástica desacoplada, quando o campo de temperatura é prescrito. Neste tipo de análise desacoplada, uma camada piezoelétrica que funciona como sensor, uma vez deformada sob a ação de forças mecânicas, gera uma diferença de potencial elétrico que é lido por um sistema externo de aquisição de dados e, com o uso do equacionamento, se obtém uma estimativa da deformação local. Esta é a modelagem feita, por exemplo, em [166].
2. Solução acoplada. Neste caso, a formulação incorpora ambos os campos \mathbf{u} e ϕ como variáveis, que são resolvidas simultaneamente, levando em conta as interações mútuas entre eles. No texto que segue detalharemos essa estratégia. A forma desacoplada pode ser facilmente obtida por simplificações na forma geral.

Num laminado, as formas de modelar \mathbf{u} e ϕ podem ser escolhidas de maneira independentes, usando as mesmas famílias de modelos usados em laminados puramente mecânicos, isto é, modelos de camada equivalente única (Kirchhoff, Reissner-Mindlin, ordem superior de diversos tipos), e modelos de camada discreta. As combinações de modelos computacionalmente mais eficientes para o uso comum em engenharia são aquelas que combinam camada equivalente única para \mathbf{u} e de camada discreta para ϕ . Para um máximo de precisão nos resultados o uso de modelagem por camada discreta para ambos os campos é a única forma adequada, embora associada a um maior custo computacional.

21.4.1 Forma variacional para modelos de Reissner-Mindlin/camada discreta

Consideramos nessa seção, a combinação de modelo de camada equivalente única (no caso o modelo de Mindlin) para o comportamento mecânico, e o modelo de camada discreta para o potencial elétrico.

O ponto de partida é a adaptação da forma variacional (21.51). Primeiramente, considera-se o volume do laminado decomposto na forma $V = \Omega \times I_z$, onde $\Omega \in R^2$ é o conjunto de pontos na superfície de referência da placa, geralmente a superfície média, e $I_z = (-H/2; H/2)$ é o intervalo na direção transversal z . Assim, um ponto $(x, y, z) \in V$ é tal que $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$ e $z \in I_z$. O contorno de V é decomposto em $\partial V = \Gamma \times I_z$, sendo Γ o contorno de Ω .

As integrais em (21.51) são decompostas da seguinte forma

$$V_4 = \int_{\Omega} \int_{I_z} \left[\rho \hat{\mathbf{u}}^T \ddot{\mathbf{u}} - \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^x \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}^x \\ -\hat{\mathbf{E}}^x \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^x \\ \boldsymbol{\tau}^x \\ \mathbf{D}^x \end{Bmatrix} + \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} \right] dz d\Omega + \int_{\Gamma_f} \int_{I_z} \hat{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{t}} dz d\Gamma + \int_{\partial V_D} \hat{\phi} \bar{\omega} d\partial V_{\omega} = 0. \quad (21.53)$$

A condição de contorno elétrica essencial, na última integral geralmente é aplicada nem uma ou mais superfícies de lâmina piezoelétrica, que são paralelas a Ω .

Até este ponto, todos os campos dependem de (x, y, z) , e a aplicação dos modelos é usada para fazer a separação das variáveis em Ω e I_z . Para \mathbf{u} , tomando o modelo de primeira ordem, se tem as decomposições (11.41) e (11.42), página 301. Em lugar da decomposição de deslocamentos (11.41), pode-se facilmente utilizar um modelo cinemático de ordem superior, como aquelas listadas na seção 19.1, página 467. Aplicações para modelos de ordem superior em problema piezoelétricos são detalhadas em [58][166], por exemplo. Uma listagem bastante abrangente de bibliografia pode ser vista em Torres e Mendonça, [197][198][200].

A representação do potencial elétrico ϕ usando um modelo de camada discreta segue alguma das estratégias descritas no Capítulo 20. Particularmente, utilizamos a decomposição baseada em funções

contínuas, lineares por partes, ao longo da espessura, descrito, por exemplo, em [181][50][174]. O potencial elétrico em qualquer ponto do laminado é representado da seguinte forma:

$$\phi(x, y, z) = \sum_{k=0}^N \bar{\psi}^k(z) \phi^k(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega \text{ e } z \in I_z. \quad (21.54)$$

k indica a interface entre lâminas ou as faces do laminado: $k = 1, N$ indica a superfície superior da lâmina k , e $k = 0$ indica a superfície inferior do laminado. $\phi^k(x, y)$ é o potencial na superfície de interface k . $\bar{\psi}^k(z)$ são funções de forma globais associadas à superfície superior da lâmina k . Para a variação linear ao longo da espessura de cada lâmina se tem, para $k = 1, N$:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^k(z) &= \frac{z - z_{k-1}}{h_k} & z \in I_k, \\ &= \frac{z_{k+1} - z}{h_{k+1}} & z \in I_{k+1}. \end{aligned} \quad (21.55)$$

Também, $\bar{\psi}^0(z) = (z_1 - z)/h_1$, para $z \leq z_1$. Os intervalos de z são definidos por $I_k = \{z, \text{ tal que } z_{k-1} \leq z \leq z_k\}$. Estas funções são nulas fora do intervalo indicado. Então, podem-se identificar funções elementares para cada lâmina k , associadas a dois pontos locais ao longo da espessura da lâmina, situados nas interfaces. Então, para uma dada lâmina, o potencial é descrito por locais $\psi^j(z)$:

$$\phi(x, y, z) = \sum_{j=k-1}^k \psi^j(z) \phi^j(x, y) = \psi^{k-1}(z) \phi^{k-1}(x, y) + \psi^k(z) \phi^k(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega \text{ e } z \in I_k. \quad (21.56)$$

$\psi^j(z)$ são dois polinômios elementares lineares Lagrangeanos da lâmina k , dados por

$$\psi^{k-1}(z) = \frac{z_k - z}{h_k} \quad \text{e} \quad \psi^k(z) = \frac{z - z_{k-1}}{h_k}, \quad \forall z \in I_k. \quad (21.57)$$

A relação entre o campo elétrico e o potencial na lâmina é dada por (21.6): $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Então, aplicando o gradiente na decomposição (21.56) do potencial numa lâmina, se tem

$$\mathbf{E}(x, y, z) = - \sum_{j=k-1}^k \underbrace{\begin{bmatrix} \psi^j(z) & & \\ & \psi^j(z) & \\ & & \frac{d\psi^j(z)}{dz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{kj}(z)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi^j}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi^j}{\partial y} \\ \phi^j \end{Bmatrix}}_{\Xi^{kj}(x,y)}, \quad z \in I_k. \quad (21.58)$$

O vetor $\Xi^{kj}(x, y)$ varia apenas ao longo da superfície da lâmina k .² É um vetor análogo às deformações generalizadas $\varepsilon^o(x, y)$ e $\kappa(x, y)$. A matriz $\mathbf{J}^{kj}(z)$ leva em conta a variação do campo elétrico na espessura da lâmina k . A relação acima pode ser colocada em forma direta **para a lâmina k** :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = - \underbrace{\begin{bmatrix} \psi^{k-1}(z) & & \psi^k(z) \\ & \psi^{k-1}(z) & \\ & & \psi^k(z) \\ \frac{d\psi^{k-1}(z)}{dz} & & \frac{d\psi^k(z)}{dz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}^k(z)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \partial \phi^{k-1} / \partial x \\ \partial \phi^{k-1} / \partial y \\ \phi^{k-1} \\ \partial \phi^k / \partial x \\ \partial \phi^k / \partial y \\ \phi^k \end{Bmatrix}}_{\Xi^k(x,y)}, \quad z \in I_k. \quad (21.59)$$

²Note que, caso a polarização aplicada seja apenas na direção transversal z , o campo elétrico e Ξ^{kj} possuem apenas componente z não nula. Então, a formulação que segue pode ser modificada para eliminar a priori as componentes coplanares de \mathbf{E} , melhorando a eficiência da implementação de EF.

Decomposição do funcional em termos de deformações e forças generalizadas

Consideramos o segundo termo na integral da forma variacional em (21.53), associado à energia de deformação generalizada. Substituímos as tensões pelas deformações, usando a relação constitutiva linear de estado plano de tensões, eq.(21.35).

$$\begin{aligned} V_a &= \int_{\Omega} \int_{I_z} \left\{ \begin{array}{c} \hat{\varepsilon}^x \\ \hat{\gamma}^x \\ -\hat{\mathbf{E}}^x \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{h}} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_c & -\bar{\mathbf{H}} \\ -\bar{\mathbf{h}}^T & -\bar{\mathbf{H}}^T & -\bar{\mathbf{F}} \end{array} \right]^k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^x \\ \gamma^x \\ -\mathbf{E}^x \end{array} \right\}^k dz d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \int_{I_k} \left\{ \begin{array}{c} \hat{\varepsilon}^x \\ \hat{\gamma}^x \\ -\hat{\mathbf{E}}^x \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{h}} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_c & -\bar{\mathbf{H}} \\ -\bar{\mathbf{h}}^T & -\bar{\mathbf{H}}^T & -\bar{\mathbf{F}} \end{array} \right]^k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^x \\ \gamma^x \\ -\mathbf{E}^x \end{array} \right\}^k dz d\Omega \end{aligned} \quad (21.60)$$

Em seguida, tomemos as discretizações ao longo da espessura,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= -\mathbf{H}^k(z) \boldsymbol{\Xi}^k(x, y), & \forall z \in I_k, \\ \varepsilon^x(x, y, z) &= \varepsilon^o(x, y, z) + z\boldsymbol{\kappa}(x, y, z), & \forall z \in I_z, \text{ e} \\ \gamma^x(x, y, z) &= \gamma_c(x, y), & \forall z \in I_z \end{aligned} \quad (21.61)$$

são aplicadas. Com isso V_a é desmembrado em diversos produtos matriciais, como por exemplo

$$\begin{aligned} V_{a1} &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \int_{I_k} \hat{\varepsilon}^{xT} \bar{\mathbf{Q}}^k \varepsilon^x dz d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \int_{I_k} (\hat{\varepsilon}^o + z\hat{\boldsymbol{\kappa}})^T \bar{\mathbf{Q}}^k (\varepsilon^o + z\boldsymbol{\kappa}) dz d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \left[\underbrace{\hat{\varepsilon}^{oT} \left(\int_{I_k} \bar{\mathbf{Q}}^k dz \right)}_{\mathbf{A}^k} \varepsilon^o + \underbrace{\hat{\varepsilon}^{oT} \left(\int_{I_k} z \bar{\mathbf{Q}}^k dz \right)}_{\mathbf{B}^k} \boldsymbol{\kappa} + \hat{\boldsymbol{\kappa}}^T \mathbf{B}^k \varepsilon^o + \underbrace{\hat{\boldsymbol{\kappa}}^T \left(\int_{I_k} z^2 \bar{\mathbf{Q}}^k dz \right)}_{\mathbf{D}^k} \boldsymbol{\kappa} \right] d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \left[\hat{\varepsilon}^{oT} \mathbf{A}^k \varepsilon^o + \hat{\varepsilon}^{oT} \mathbf{B}^k \boldsymbol{\kappa} + \hat{\boldsymbol{\kappa}}^T \mathbf{B}^k \varepsilon^o + \hat{\boldsymbol{\kappa}}^T \mathbf{D}^k \boldsymbol{\kappa} \right] d\Omega, \end{aligned} \quad (21.62)$$

Repetindo um procedimento similar com os demais produtos em V_a , se tem

$$V_a = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \hat{\varepsilon}^o \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}} \\ \hat{\gamma}_c \\ \hat{\boldsymbol{\Xi}}^k \end{array} \right\}^T}_{\hat{\mathbf{W}}} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{A}^k & \mathbf{B}^k & \mathbf{0}^k & -\mathbf{O}^k \\ \mathbf{B}^k & \mathbf{D}^k & \mathbf{0}^k & -\mathbf{G}^k \\ \mathbf{0}^k & \mathbf{0}^k & \mathbf{E}^k & -\mathbf{L}^k \\ -\mathbf{O}^{kT} & -\mathbf{G}^{kT} & -\mathbf{L}^k & \mathbf{P}^k \end{array} \right]}_{\mathbf{C}^k} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^o \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \gamma_c \\ \boldsymbol{\Xi}^k \end{array} \right\}}_{\mathbf{W}^k} d\Omega. \quad (21.63)$$

As submatrizes são as contribuições da lâmina para a rigidez do laminado. São definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{O}^k &= \int_{I_k} \bar{\mathbf{h}}^k \mathbf{J}^k dz, & \mathbf{G}^k &= \int_{I_k} z \bar{\mathbf{h}}^k \mathbf{J}^k dz, & \mathbf{L}^k &= \int_{I_k} \bar{\mathbf{H}}^k \mathbf{J}^k dz, \\ \mathbf{E}^k &= k_c \int_{I_k} \bar{\mathbf{C}}_c^k dz, & \mathbf{P}^k &= \int_{I_k} \mathbf{J}^{kT} \bar{\mathbf{F}}^k \mathbf{J}^k dz. \end{aligned} \quad (21.64)$$

k_c é o fator de correção ao cisalhamento. \mathbf{A}^k , \mathbf{B}^k , \mathbf{D}^k (de dimensões 3×3) e \mathbf{E}^k (de dimensões 2×2) são as contribuições da rigidez usuais de uma lâmina em um laminado piezoelectricamente inerte. As matrizes \mathbf{O}^k , \mathbf{G}^k (de dimensões 3×6) e \mathbf{L}^k (de dimensões 2×6) representam o acoplamento entre o campo elétrico e esforços mecânicos. \mathbf{P}^k (de dimensões 6×6) gera uma relação puramente elétrica.

$\mathbf{0}^k$ são matrizes nulas de dimensões 3×2 . A eq. (21.63) permite definir **esforços generalizados** no ponto $(x, y) \in \Omega$, conjugados das deformações generalizadas:

$$\mathbb{F}^k = \mathbb{C}^k \mathbf{W}^k, \quad (21.65)$$

onde \mathbb{F}^k é definido por

$$\mathbb{F}^k = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N}^k \\ \mathbf{M}^k \\ \mathbf{Q}^k \\ \mathbf{V}^k \end{array} \right\} = \int_{I_k} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\sigma} \\ z\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\tau}_c \\ \mathbf{E} \end{array} \right\} dz. \quad (21.66)$$

\mathbf{N}^k , \mathbf{M}^k e \mathbf{Q}^k são as parcelas dos esforços normal, de momentos e cortantes provenientes da lâmina k . \mathbf{V}^k é um análogo ao demais esforços. \mathbb{C}^k é a matriz completa, de dimensões 14×14 , definidas em (21.63). Uma vez somadas as contribuições de todas as lâminas, se tem

$$\mathbb{F} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{V} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^N \mathbb{F}^k = \sum_{k=1}^N \mathbb{C}^k \mathbf{W}^k. \quad (21.67)$$

$\mathbb{F} = \mathbb{F}(x, y)$, e \mathbf{N} , \mathbf{M} e \mathbf{Q} são os esforços usuais do modelo de Reissner-Mindlin. Esta é a relação constitutiva do laminado híbrido mecânico-piezoelétrico. É possível representar esta relação de forma direta, incluindo os gradientes do potencial elétrico em todas as interfaces:

$$\mathbb{F} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{V} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & -\mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & -\mathbf{L} \\ -\mathbf{O}^T & -\mathbf{G}^T & -\mathbf{L} & \mathbf{P} \end{array} \right]}_{\mathbb{C}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^o \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma}_c \\ \boldsymbol{\Xi} \end{array} \right\}}_{\mathbf{W}}. \quad (21.68)$$

onde as matrizes são organizadas de forma a se adequarem ao vetor de gradientes de potencial de todas as $N + 1$ superfícies laminares:

$$\boldsymbol{\Xi} = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \frac{\partial \phi^0}{\partial x} & \frac{\partial \phi^0}{\partial y} & \phi^0 & \frac{\partial \phi^1}{\partial x} & \frac{\partial \phi^1}{\partial y} & \phi^1 & \dots & \frac{\partial \phi^N}{\partial x} & \frac{\partial \phi^N}{\partial y} & \phi^N \end{array} \right\}^T. \quad (21.69)$$

A geração de \mathbf{P} em termos dos \mathbf{P}^k pode ser feita usando o mesmo procedimento usual do MEF para a sobreposição de matrizes elementares em matriz global. Da mesma forma são sobrepostas as matrizes \mathbf{O}^k , \mathbf{G}^k e \mathbf{L}^k . Assim, \mathbb{C} possui dimensão $8 + 3(N + 1)$. \mathbf{P} tem ordem $3(N + 1)$, \mathbf{O} , \mathbf{G} tem dimensões $3 \times 3(N + 1)$ e \mathbf{L} é de $2 \times 3(N + 1)$.

Consideramos agora o quarto termo na integral da forma variacional em (21.53), associado às **forças de contorno**. Restringimos esse termo apenas as forças distribuídas por unidade de comprimento, aplicadas no contorno da superfície de referência Γ_f , i.e.

$$V_b = \int_{\Gamma_f} \int_{I_z} \hat{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{t}} dz d\Gamma. \quad (21.70)$$

Para o estado plano de tensões, o vetor tensão é

$$\mathbf{t} = \left\{ \begin{array}{c} t_x \\ t_y \\ t_z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} n_x & & & \\ & n_y & & \\ & & n_x & \\ & & & n_y \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{array} \right\}, \quad (21.71)$$

n_x , etc., são as componentes do vetor normal ao contorno. Em Γ_f , tem-se que $n_z = 0$, e a relação

acima pode ser decomposta em parcelas coplanar e transversal:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_p &= \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\Gamma \boldsymbol{\sigma}^x, \quad e \\ t_z &= [n_y \quad n_x] \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_z \boldsymbol{\tau}^x, \end{aligned} \quad (21.72)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^x$ e $\boldsymbol{\tau}^x$ são os vetores de componentes coplanar e transversal de tensões. O vetor deslocamento também pode ser decomposto na parcela coplanar, $\mathbf{u}_p = \{u, v\}^T$, e w , de forma que o integrando em V_{a2} fica $\hat{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{u}}_p^T \mathbf{N}_\Gamma \boldsymbol{\sigma} + \hat{w} \mathbf{N}_z \boldsymbol{\tau}_c$. Em seguida, toma-se a relação constitutiva (21.35) para as tensões, e a separação de variáveis de deslocamento do modelo de Reissner-Mindlin, $\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p^o + z\boldsymbol{\psi}$, e $w(x, y, z) = w(x, y)$, onde \mathbf{u}_p^o e $\boldsymbol{\psi}$ são funções dependentes apenas de (x, y) . Fazendo as substituições em V_b , e realizando as integrações ao longo da espessura de cada lâmina, obtém-se

$$\begin{aligned} V_b &= \int_{\Gamma_f} \int_{I_z} \hat{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{t}} \, dz d\Gamma, \\ &= \int_{\Gamma_f} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_p^o \\ \hat{w} \\ \hat{\boldsymbol{\psi}} \end{Bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_\Gamma & & \\ & \mathbf{N}_z & \\ & & \mathbf{N}_\Gamma \end{bmatrix}}_{=\{\bar{\mathbf{N}}_n, \bar{\mathbf{M}}_n, \bar{\mathbf{Q}}_n\}^T} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} dz d\Gamma. \end{aligned} \quad (21.73)$$

$\bar{\mathbf{N}}_n$, $\bar{\mathbf{M}}_n$ e $\bar{\mathbf{Q}}_n$ são as componentes cartesianas dos esforços normais, de momento e de cortante, prescritos num ponto de Γ_f cuja normal é \mathbf{n} . Nota-se que esta relação produz as definições consistentes de esforços num ponto qualquer de Ω , num elemento diferencial comprimento cuja normal é \mathbf{n} :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_n \\ \mathbf{M}_n \\ \mathbf{Q}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\Gamma & & \\ & \mathbf{N}_z & \\ & & \mathbf{N}_\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix}. \quad (21.74)$$

21.5 Modelo de elementos finitos

Tomando as equações (21.63) e (21.73) e levando-as à forma variacional (21.53), temos para o problema estático

$$V_4 = \int_{I_z} \int_{\Omega} \rho \hat{\mathbf{u}}^T \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega dz - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{W}}^T \mathbb{C}^k \mathbf{W}^k \, d\Omega + \int_{\Omega} \hat{w} q_z \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_p^o \\ \hat{w} \\ \hat{\boldsymbol{\psi}} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_n \\ \bar{\mathbf{M}}_n \\ \bar{\mathbf{Q}}_n \end{Bmatrix} d\Gamma = 0, \quad (21.75)$$

$\forall \hat{\mathbf{W}}$ admissível. Na presente seção não faremos o detalhamento da discretização do termo de inércia, pois ele independe do campo elétrico, e sua discretização já se encontra detalhada no Capítulo 18, página 454. Por outro lado, incluímos explicitamente no funcional o efeito do carregamento transversal distribuído na superfície de referência, q_z . As deformações generalizadas na lâmina, \mathbf{W}^k , são relacionadas aos deslocamentos generalizados da seguinte forma

$$\mathbf{W}^k = \mathbb{D}^k \mathbf{u}^k = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma}_c \\ \boldsymbol{\Xi}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_p & & & \\ & \mathbb{D}_p & & \\ & & \mathbb{D}_c & \\ & & & \mathbb{D}_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_p^o \\ w \\ \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\phi}^k \end{Bmatrix}, \quad \text{onde} \quad (21.76)$$

de forma que os valores nodais \mathbf{U}^m e Φ^k são funções do tempo.

Com isso, a discretização das deformações generalizadas em (21.80) torna-se

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^k &= \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{W}_m \\ \Xi^k \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_m & \\ & \mathbb{D}_\phi \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N}^{em}(x, y) \mathbf{U}^m \\ \mathbf{N}^{e\phi}(x, y) \Phi^k \end{array} \right\}, \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{B}_m & \\ & \mathbb{B}_\phi \end{bmatrix}_{14 \times 7nne} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{U}^m \\ \Phi^k \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (21.84)$$

$\mathbb{B}_m = \mathbb{D}_m \mathbf{N}^{em}(x, y)$ é a matriz de deformação mecânica, de dimensões $8 \times 5nne$, incorporando as deformações de membrana, cisalhamento e as curvaturas. Analogamente, $\mathbb{B}_\phi = \mathbb{D}_\phi \mathbf{N}^{e\phi}(x, y)$ tem dimensões $6 \times 2nne$. A Figura 21.3 apresenta uma visão tridimensional de um elemento finito e , indicando uma lâmina arbitrária k e os valores nodais do potencial em suas superfícies inferior e superior.

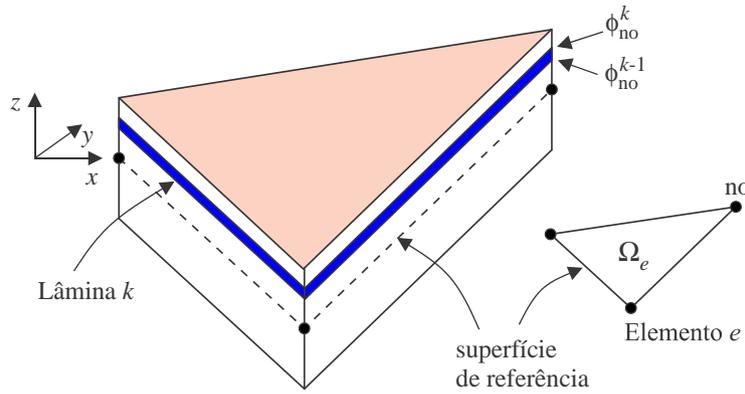


Figura 21.3: Visão 3D do elemento finito e , com uma lâmina arbitrária k e os valores nodais do potencial em suas superfícies inferior e superior.

Tomamos a relação constitutiva do laminado híbrido, (21.68), e fazemos o particionamento entre as partes mecânica e elétrica. Adicionalmente, tomamos apenas a contribuição das forças na lâmina k , como em (21.67):

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{W} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mm}^k & \mathbf{C}_{m\phi}^k \\ \mathbf{C}_{m\phi}^{kT} & \mathbf{C}_{\phi\phi}^k \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{W}_m \\ \Xi^k \end{array} \right\}. \quad (21.85)$$

onde $\mathbf{C}_{\phi\phi}^k = \mathbf{P}^k$. Aplicando esse particionamento e as discretizações do deslocamentos e das deformações generalizadas, (21.81)-(21.84), à forma variacional (21.75), se tem a contribuição para um elemento e :

$$\begin{aligned} V_4^e &= - \sum_{k=1}^N \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{U}}^m \\ \hat{\Phi}^k \end{array} \right\}^T \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbb{B}_m & \\ & \mathbb{B}_\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mm}^k & \mathbf{C}_{m\phi}^k \\ \mathbf{C}_{m\phi}^{kT} & \mathbf{C}_{\phi\phi}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{B}_m & \\ & \mathbb{B}_\phi \end{bmatrix} d\Omega \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{U}^m \\ \Phi^k \end{array} \right\} + \\ &\int_{I_z} \int_{\Omega} \rho \hat{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} d\Omega dz + \int_{\Omega_e} \hat{w} q_z d\Omega + \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_f} \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}}_p^o \\ \hat{w} \\ \hat{\psi} \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{N}}_n \\ \bar{\mathbf{M}}_n \\ \bar{\mathbf{Q}}_n \end{array} \right\} d\Gamma. \end{aligned} \quad (21.86)$$

$\partial\Omega_e \cap \Gamma_f$ é a parte do contorno do elemento e contida em Γ_f . Os termos devidos aos carregamentos mecânicos podem ser discretizados da forma usual em laminados piezoelectricamente inertes. A função peso \hat{w} é discretizada por $\hat{w}(x, y) = \mathbf{N}_w^e(x, y) \hat{\mathbf{U}}^m$, como em (18.18), página 445, e o termo devido à carga transversal distribuída é descrito como \mathbf{F}^e em em (18.19). Para o carregamento aplicado no contorno, tomamos de (21.81), $\hat{\mathbf{u}}_m(x, y) = \mathbf{N}^{em}(x, y) \hat{\mathbf{U}}^m$. Então, V_4^e pode ser reordenada para a forma

$$\begin{aligned}
 V_4^e = & - \sum_{k=1}^N \left(\hat{\mathbf{U}}^{mT} \left\{ \mathbf{K}_{mm}^{ke} \mathbf{U}^m + \mathbf{K}_{m\phi}^{ke} \Phi^k \right\} + \hat{\Phi}^{kT} \left\{ \mathbf{K}_{m\phi}^{keT} \mathbf{U}^m + \mathbf{K}_{\phi\phi}^{ke} \Phi^k \right\} \right) + \\
 & \int_{I_z} \int_{\Omega} \rho \hat{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega dz + \hat{\mathbf{U}}^{mT} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_w^{eT} q_z \, d\Omega + \hat{\mathbf{U}}^{mT} \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_f} \mathbf{N}^{emT} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_n \\ \bar{\mathbf{M}}_n \\ \bar{\mathbf{Q}}_n \end{Bmatrix} d\Gamma,
 \end{aligned} \quad (21.87)$$

onde

$$\mathbf{K}_{mm}^{ke} = \int_{\Omega_e} \mathbb{B}_m^T \mathbb{C}_{mm}^k \mathbb{B}_m \, d\Omega, \quad \mathbf{K}_{m\phi}^{ke} = \int_{\Omega_e} \mathbb{B}_m^T \mathbb{C}_{m\phi}^k \mathbb{B}_\phi \, d\Omega, \quad \mathbf{K}_{\phi\phi}^{ke} = \int_{\Omega_e} \mathbb{B}_\phi^T \mathbb{C}_{\phi\phi}^k \mathbb{B}_\phi \, d\Omega \quad (21.88)$$

são as matrizes elementares de rigidez mecânica, piezoeétrica e de acoplamento. Realizando a discretização do termo de inércia se tem o seguinte sistema algébrico de equilíbrio do elemento

$$\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm}^{ke} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}^m \\ \ddot{\Phi}^k \end{Bmatrix}^e + \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm}^{ke} & \mathbf{K}_{m\phi}^{ke} \\ \mathbf{K}_{m\phi}^{keT} & \mathbf{K}_{\phi\phi}^{ke} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^m \\ \Phi^k \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^m \\ \mathbf{F}_\phi^k \end{Bmatrix}^e, \quad (21.89)$$

onde \mathbf{M}_{mm}^{ke} é a contribuição da lâmina k na inércia do elemento, dada por

$$\mathbf{M}_{mm}^{ke} = \int_{I_k} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{emT} \rho \mathbf{N}^{em} \, d\Omega. \quad (21.90)$$

Uma vez que as contribuições de todas as lâminas tenham sido incluídas, (21.89) toma a forma padrão para o elemento

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}^m(t) \\ \ddot{\Phi}(t) \end{Bmatrix}^e + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm}^e & \mathbf{K}_{m\phi}^e \\ \mathbf{K}_{m\phi}^{eT} & \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^m(t) \\ \Phi(t) \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^m(t) \\ \mathbf{F}_\phi(t) \end{Bmatrix}^e, \quad (21.91)$$

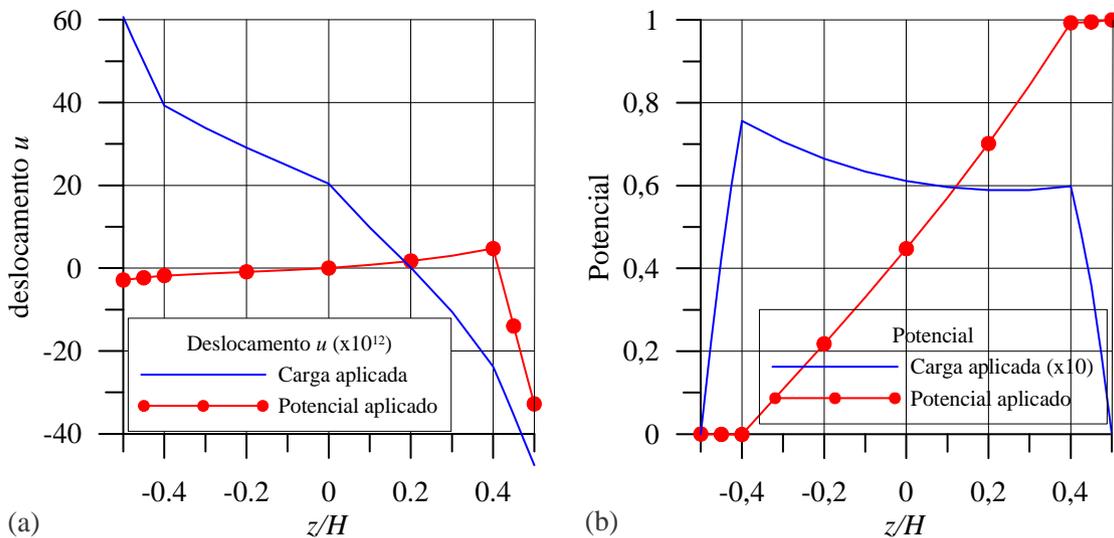


Figura 21.4: Solução analítica de Heyliger [92] para distribuição na espessura do deslocamento coplanar u em [m] e do potencial, em [V] para carga e potencial prescritos na superfície superior da placa.

A matriz de inércia do elemento é vista como \mathbf{M}^e em (18.61), página 455. O vetor de forças mecânicas no elemento é

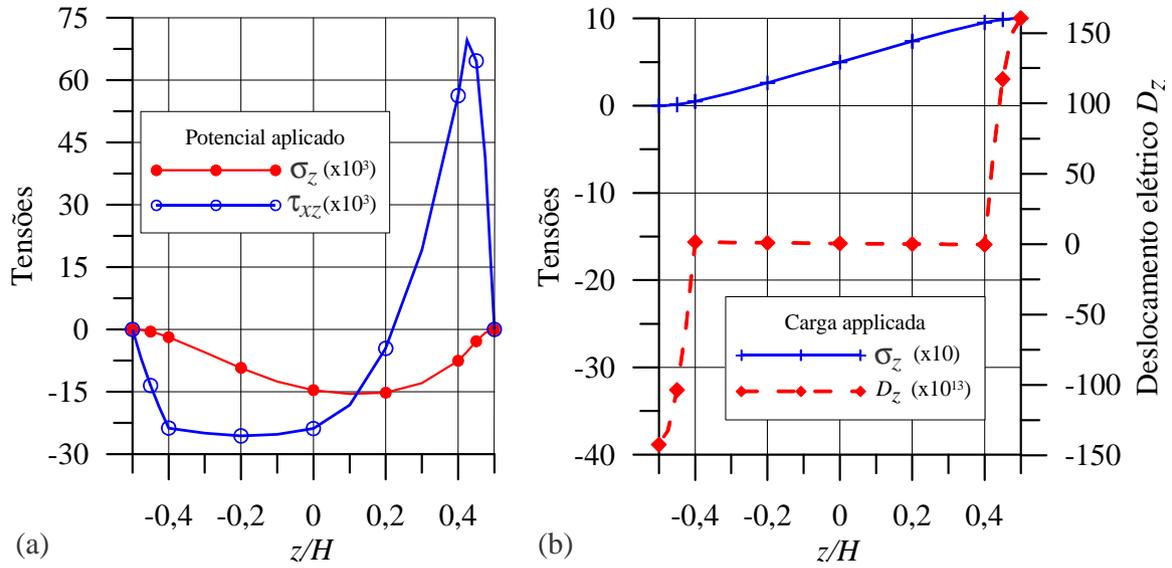


Figura 21.5: Solução analítica de Heyliger [92] para tensões transversais σ_z , τ_{xz} [Pa] e deslocamento elétrico D_z [C/m²], para carga e potencial prescritos na superfície superior da placa.

$$\mathbf{F}^m = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_w^{eT} q(x, y, t) dx dy + \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_f} \mathbf{N}^{emT} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_n \\ \bar{\mathbf{M}}_n \\ \bar{\mathbf{Q}}_n \end{Bmatrix} d\Gamma. \quad (21.92)$$

Nota-se que a formulação pode facilmente ser adaptada para **carregamentos de origem térmica**, bastando para isso adicionar o termo de forças térmicas \mathbf{F}^{eT} mostrado em (18.45), e realizar o pós-processamento adequado para separar as parcelas de deformação e tensão de origem térmica e mecânica. Em (21.91), Φ^e incorpora todos os valores nodais de potencial no elemento em todas as interfaces interlaminares:

$$\begin{aligned} \Phi^e &= \{\Phi_1^e, \Phi_2^e, \dots, \Phi_{no}^e, \dots, \Phi_{nne}^e\}^T, \text{ onde} \\ \Phi_{no}^e &= \{\phi_{no}^0, \phi_{no}^1, \phi_{no}^2, \dots, \phi_{no}^k, \dots, \phi_{no}^N\}^{eT}. \end{aligned} \quad (21.93)$$

Φ_{no}^e é o conjunto de potenciais em cada interface interlaminar do nó no do elemento. As dimensões das matrizes são as seguintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mm}^e, \mathbf{K}_{mm}^e, \mathbf{U}^m \text{ e } \mathbf{F}^m &\rightarrow \text{ordem } 5nne, \\ \mathbf{K}_{\phi\phi}^e, \Phi, \mathbf{F}_\phi &\rightarrow \text{ordem } nne(N+1), \\ \mathbf{K}_{m\phi}^e &\rightarrow \text{ordem } 5nne \times nne(N+1). \end{aligned} \quad (21.94)$$

Uma vez que removemos do funcional a aplicação de deslocamento elétrico, i.e., tomamos $\bar{\omega} = 0$, o vetor força $\mathbf{F}_\phi = \mathbf{0}$. Sem dúvida, esse termo pode ser facilmente incorporado à formulação discreta. No problema dinâmico semidiscretizados, os valores nodais \mathbf{U}^m e Φ^k são funções do tempo. O problema (21.91) deve ser resolvido junto a condições iniciais de deslocamento e velocidade iniciais prescritas. Adicionalmente, as condições de contorno mecânicas essenciais devem ser impostas em \mathbf{U}^m . Procedimentos de solução aproximada do problema (21.91) podem ser vistos em detalhes em Mendonça/Fancello, 2019 [136]. Normalmente, excitações elétricas são impostas prescrevendo valores de potencial elétrico em algumas interfaces de lâminas piezoelétricas.

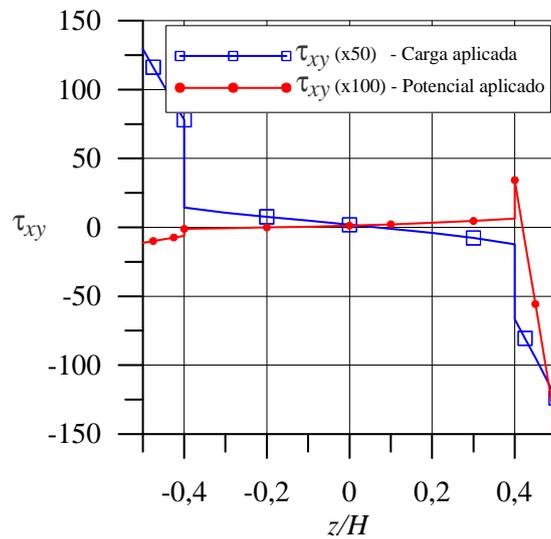


Figura 21.6: Solução analítica de Heyliger [92] para tensão τ_{xy} , em Pa, para carga e potencial prescritos na superfície superior da placa.

21.6 Resultados numéricos

21.6.1 Solução analítica

O trabalho de Tiersten [191], de 1969, incorpora muito do desenvolvimento teórico para o comportamento estático e dinâmico de uma placa monolâmina piezoeétrica. Nos anos seguintes diversos trabalhos se dedicaram a obter resultados exatos para formulações simplificações obtidas por hipóteses ou modelos cinemáticos. Por exemplo, Lee et al, [120][121] adaptaram o modelo de Kirchhoff para placas piezoeétricas. Possivelmente a primeira tentativa de solução de um laminado híbrido tenha sido feita por Ray et al [162] em 1993, considerando um laminado de duas lâminas, uma elástica inerte e uma piezoeétrica. Essa solução incluiu uma hipótese sobre o coeficiente piezoeétrico: $e_{33} = 0$. Uma solução completa, 3D, para laminados ortotrópicos com sequência de camadas (inertes e piezoeétricas) arbitrárias, parece ter sido desenvolvida pela primeira vez por Heyliger e coautores: em [94] apresentou a solução exata para flexão cilíndrica, e em [92][93] obtiveram resultados exatos para a resposta de um laminado retangular ortotrópico híbrido, simplesmente apoiado, submetido tanto a carga distribuída transversal numa das faces, quanto a um potencial eletrostático prescrito em uma das faces. A solução é obtida de forma similar àquela de Pagano [148] para o comportamento mecânico, que detalhamos na seção 15.3, página 394.

Os resultados exatos de [92] foram obtidos a partir das equações diferenciais (21.20), e são plotados a seguir, considerando uma placa híbrida quadrada, simplesmente apoiada, com espessura total $H = 1,0$ m, **com núcleo inerte** constituído por duas lâminas estruturais elásticas, de espessura $h = 0,4$ m cada, e com duas camadas piezoeétricas coladas uma em cada face, com espessuras de $0,1$ m cada. O laminado é cruzado $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$. As propriedades das lâminas inertes são:

$$\begin{aligned} E_1 = 132,38 \text{ GPa}, & \quad E_2 = E_3 = 10,756 \text{ GPa}, & \quad G_{12} = G_{31} = 5,654 \text{ GPa}, \\ G_{23} = 3,606 \text{ GPa}, & \quad \nu_{12} = \nu_{13} = 0,24, & \quad \nu_{23} = 0,49, \\ k_{11}/k_o = 3,5, & \quad k_{22}/k_o = k_{33}/k_o = 3, & \quad k_o = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}, \end{aligned} \quad (21.95)$$

e as propriedades das laminas piezoeétricas são as do PZT-4:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = 81,3 \text{ GPa}, & \quad E_3 = 64,5 \text{ GPa}, & \quad k_{11}/k_o = k_{22}/k_o = 1.475, & \quad e_{31} = e_{32} = -5,25 \text{ C/m}^2, \\ G_{23} = G_{31} = 25,6 \text{ GPa}, & \quad \nu_{12} = 0,329, & \quad k_{33}/k_o = 1.300, & \quad e_{33} = 15,8 \text{ C/m}^2, \\ G_{12} = 30,6 \text{ GPa}, & \quad \nu_{23} = \nu_{13} = 0,432, & & \quad e_{24} = e_{15} = 12,72 \text{ C/m}^2. \end{aligned} \quad (21.96)$$

Foram considerados dois casos de carregamento: (1) carga distribuída transversal senoidal como

em (15.71), aplicada na superfície superior da placa, com harmônicos $m = n = 1$, com máximo $q_{11} = q = 1,0$ Pa; (2) potencial também variando senoidalmente, com máximo $\phi = 1,0$ V aplicado na lâmina piezoelétrica superior, mantendo a lâmina inferior aterrada, com potencial nulo. Para o caso de carga aplicada, o potencial é feito nulo em ambas as faces do laminado, e para o caso de potencial aplicado, os vetores tensão são nulos nessas faces. Os resultados são mostrados nos gráficos das Figuras 21.4-21.6 ao longo da espessura do laminado. O deslocamento coplanar u apresentado é no meio da borda, e os valores estão multiplicados por 10^{12} . Nota-se que a variação para carga aplicada é vagamente linear, porém a resposta ao potencial imposto é bastante irregular, principalmente na lâmina piezoelétrica superior, onde o potencial é aplicado. Esse comportamento sugere que modelos cinemáticos de primeira ordem não são adequados à modelagem de laminados híbridos tão espessos. Esta inadequação é ainda mais acentuada que no caso de laminados eletricamente inerte de mesma espessura. As Figuras 21.7 e 21.8 mostram, junto a resultados de EF, os valores exatos para a tensão normal σ_x no centro do laminado. Ali o caráter irregular dessas tensões pode também ser observado.

A componente normal transversal σ_z na Figuras 21.5, obtida para o caso de carregamento aplicado, apresenta o comportamento quase linear simples, entre zero na superfície inferior e o valor $q = 1$ Pa na superfície superior, mesmo sob a influência do potencial induzido pelas deformações. Quando a excitação na placa é o potencial, a variação é bastante suave, quase parabólica, entre as duas faces.

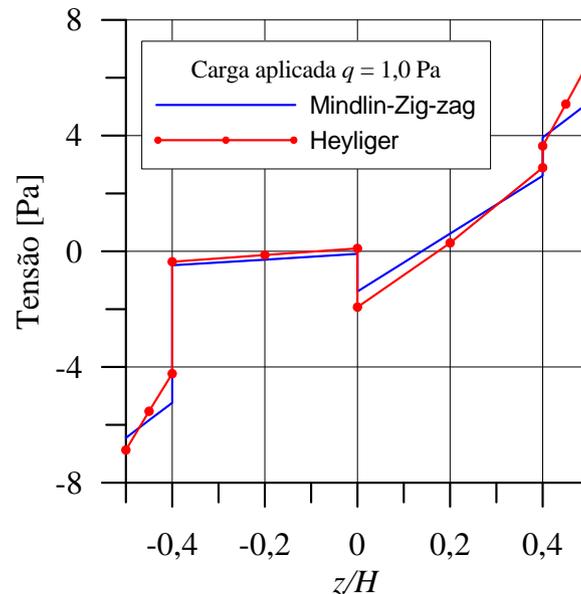


Figura 21.7: Variação da tensão σ_x no centro da placa híbrida espessa, $a/H = 4$, para carga transversal aplicada.

21.7 Resultados de EF para os modelos Mindlin-camada discreta

Consideramos alguns resultados obtidos pelo modelo descrito na seção anterior, em que o comportamento mecânico do laminado híbrido é descrito pelo modelo de Reissner-Mindlin, e o potencial elétrico segue o modelo de camada discreta, variando de forma linear ao longo de cada camada. Os valores numéricos são tomados de Sheikh et al. [181], que usa a mesma combinação de modelos descrita na seção anterior e são comparados com os resultados exatos de Heyliger [92].

O modelo de teste consiste em uma placa híbrida quadrada, simplesmente apoiada, com espessura total $H = 1,0$ m, **com núcleo inerte** constituído por duas lâminas estruturais elásticas, de espessura $h = 0,4$ m cada, e com duas camadas piezoelétricas coladas uma em cada face, com espessuras de $0,1$ m cada. O laminado é cruzado $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$. As propriedades são as mesmas usadas na solução analítica de Heyliger, eqs. (21.95)-(21.96), para os mesmos dois casos de carregamento. No modelo de EF, os valores de potencial são impostos como condições de contorno essenciais nos valores nodais.

Sheikh et al. [181] testaram a formulação de EF em uma formulação de elemento quadrangular com funções Lagrangeanas quadráticas de 9 nós em todos os campos de deslocamentos generalizados e de potencial nas interfaces. Cada lâmina do núcleo foi dividida em quatro sublâminas e as piezoelectricas em duas. As condições de contorno essenciais foram impostas usando fatores de penalidade (de valor não informado) na matriz de rigidez. A malha utilizada foi regular, de 4×4 elementos em um quarto de placa.

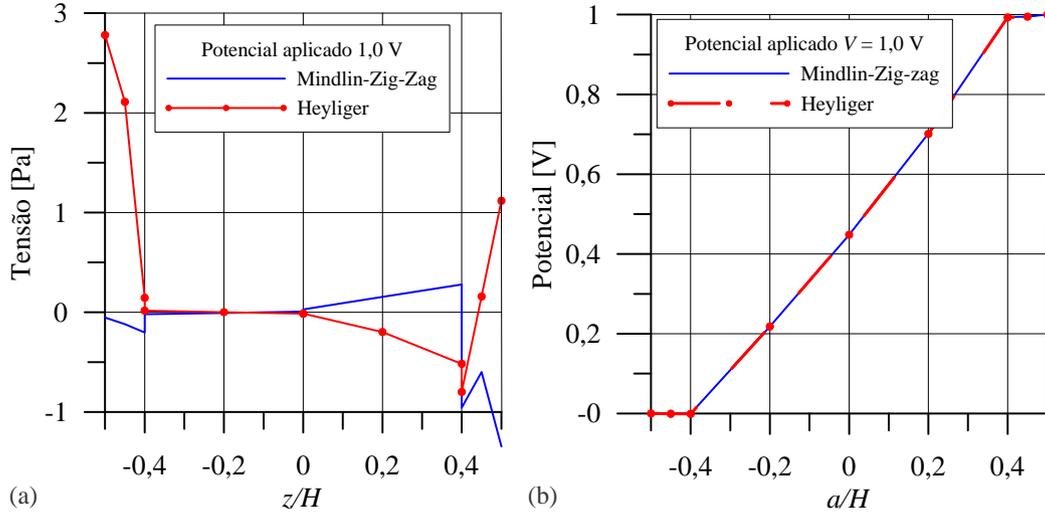


Figura 21.8: Variação da tensão σ_x e do potencial ϕ no centro da placa híbrida espessa, $a/H = 4$, para potencial aplicado.

As Figuras 21.7 e 21.8 mostram comparações do modelo de EF com a solução exata de Heyliger. Estes gráficos mostram a variação da tensão σ_x no centro da placa, para o caso de placa espessa, com $a/H = 4$, para ambos os casos de solitação: carga transversal distribuída e potencial aplicados. Nota-se na Figura 21.8a que os resultados de tensão obtidos pelo MEF para potencial aplicado são bastante ruins. A Figura 21.8b mostra a os valores prescritos de potencial nas lâminas externas, e os valores obtidos no núcleo inerte. Os resultados ruins para tensão não são surpreendentes, considerando-se a grande espessura da placa.

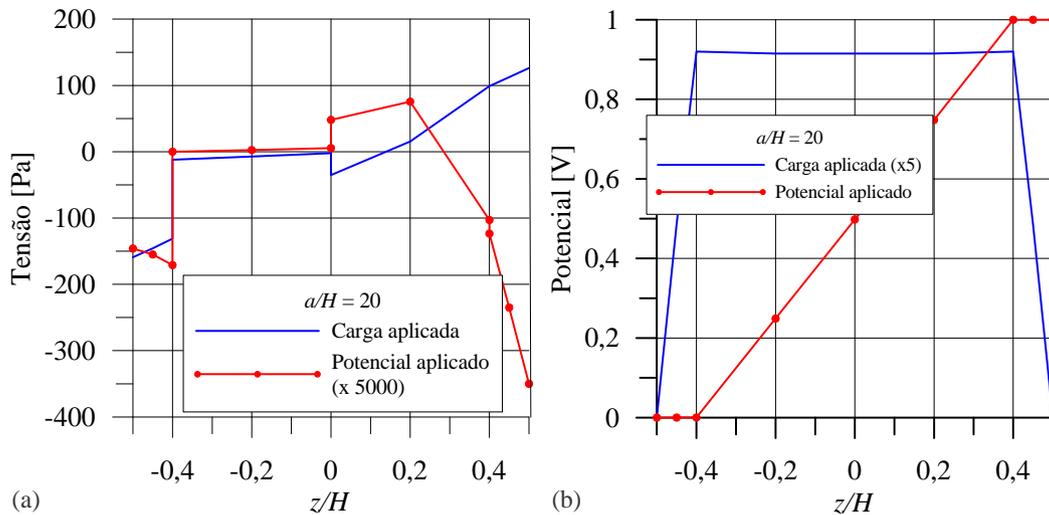


Figura 21.9: Variação da tensão σ_x e do potencial no centro da placa híbrida moderadamente espessa, $a/H = 20$, para carga distribuída e potencial aplicados.

As Figuras 21.9 e 21.10 mostram resultados apenas do MEF, para placas mais delgadas, de aspectos $a/H = 20$ e 100 , respectivamente. Por exemplo, na Figura 21.9, as tensões mostradas na curva da

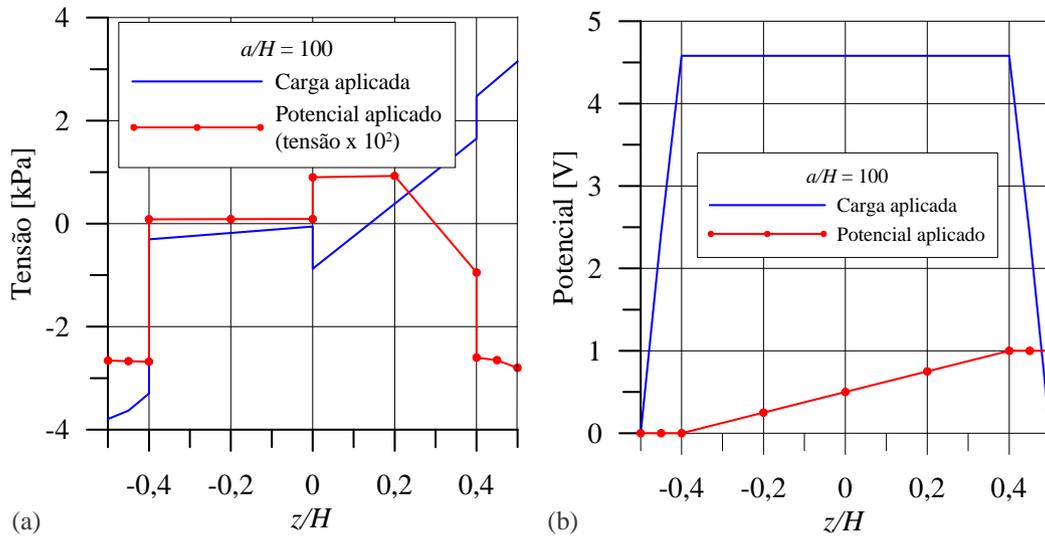


Figura 21.10: Variação da tensão σ_x e do potencial no centro da placa híbrida delgada, $a/H = 100$, para carga distribuída e potencial aplicados.

figura (a) para potencial aplicado, é obtida pela curva de potencial aplicado mostrado na figura (b). Reversamente, a curva de tensão mostrada em (a) para carga aplicada, gera a curva de potencial devido à carga aplicada mostrada na figura (b). Nota-se em ambas as espessuras, em ambas as figuras (a), que aplicando apenas carga distribuída, o perfil de tensões se torna irregular, devido ao acoplamento com o campo elétrico desenvolvido pela deformação. Nos casos em que apenas o potencial é aplicado, a distribuição de tensões se torna ainda mais irregular quando comparada àquela dos laminados inertes. Observa-se de ambos os gráficos (a) que a tendência da variação da tensão ao longo da espessura é fortemente modificada pela excitação do potencial aplicado na lâmina superior. Como esperado, a influência é maior no laminado mais delgado.

21.8 Exercícios

1. Deduza as equações de equilíbrio (21.20) de um material piezoelétrico em termos das variáveis primais.
2. Com o auxílio de um manipulador simbólico de equações, deduza as expressões das submatrizes em \mathbf{C}^{Ex} , em (21.24), para a relação constitutiva 3D de um material ortotrópico, rotacionada em torno do eixo principal 3.
3. Deduza as relações das submatrizes de rigidez de estado plano de tensões, nas direções principais, dadas em (21.31), em termos das propriedades de flexibilidade originais 3D, dadas em (21.27).
4. Com o auxílio de um manipulador simbólico de equações, deduza as expressões das submatrizes $\bar{\mathbf{C}}_c$, $\bar{\mathbf{h}}$, $\bar{\mathbf{H}}$ e $\bar{\mathbf{F}}$ em (21.34), para rotação da rigidez em estado plano de tensões, em torno do eixo 3.
5. Obtenha (21.63) fazendo o detalhamento de todas as integrais em V_a , como foi feito para V_{a1} em (21.62).
6. Faça o detalhamento para obter (21.68) pela sobreposição das contribuições das lâminas, usando a seqüência de graus de liberdade nodais (21.69).
7. Faça o detalhamento para obter (21.73) a partir de (21.70).