

## Capítulo 8

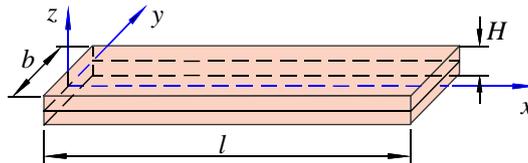
# Projeto e análise de vigas laminadas

Um dos elementos estruturais mais importantes, assim como as placas e cascas, são as vigas. O comportamento de vigas isotrópicas homogêneas em flexão foi abordado no Capítulo 5, enquanto o Capítulo 7 tratou brevemente do comportamento de vigas compostas por lâminas isotrópicas sob efeito de dilatação térmica, usando a teoria de Euler-Bernoulli.

Neste capítulo pretende-se dar um tratamento mais abrangente ao tema. Primeiramente, apresentaremos o comportamento mecânico de uma viga delgada (também chamada viga longa) quando a viga tem a forma de uma placa estreita. Neste caso utilizaremos diretamente os resultados obtidos para placas laminadas, vistos no Capítulo 6.

### 8.1 Análise de vigas laminadas longas de seção plana

Consideramos aqui vigas que são formadas como placas degeneradas, isto é, vigas que têm a forma de uma placa de dimensões  $l \times b \times H$ , onde  $l$  e  $H$  são comprimento e altura e a largura  $b$  é considerada *pequena*, isto é, não da mesma ordem de grandeza de  $l$ . Entretanto, a teoria descrita aqui vai requerer que  $b$  seja algumas vezes maior que a espessura  $H$ , como ilustrado na Figura 8.1.



**Figura 8.1:** Viga laminada plana.

Observa-se que, apesar da semelhança, a resposta obtida por um modelo de viga, isto é, uma placa com  $b$  *pequeno*, é diferente da resposta de uma placa real onde  $b$  é semelhante a  $l$ . Também semelhantes, embora distintas, são as respostas da viga e da placa semi-infinita, onde  $b \rightarrow \infty$ , sob flexão cilíndrica. Essa diferença é análoga à diferença entre os estados planos de deformação e plano de tensão da teoria clássica da elasticidade.

Partimos das relações constitutivas da teoria clássica de laminação para placas delgadas laminadas, eqs.(6.21):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}. \quad (8.1)$$

$\mathbf{N}$  e  $\mathbf{M}$  são os vetores com os esforços normais e de momento, por unidade de comprimento, e  $\boldsymbol{\varepsilon}^o$  e  $\boldsymbol{\kappa}$  são as deformações e curvaturas da superfície de referência da placa. Primeiramente, para simplificar o desenvolvimento, restringe-se a viga a um laminado onde  $\mathbf{B}$  seja nula como nos laminados simétricos, ou quase nula. Para esse tipo de laminado, os efeitos de extensão e de flexão estão desacoplados e podem ser considerados separadamente.

Substituímos as componentes coplanares  $\sigma_x^k$  e  $\tau_{xy}^k$  de (8.17) na primeira das equações diferenciais de equilíbrio (5.10). Integrando em  $z$  obtemos uma estimativa para a componente de tensão cisalhante transversal:

$$\tau_{xz}^k = - \int_{z=-H/2}^{z_k} \left( f_1^k \frac{1}{b} \frac{\partial N_v}{\partial x} + f_4^k \frac{z}{b} \frac{\partial M_v}{\partial x} \right) dz. \quad (8.20)$$

Lembrando a equação de equilíbrio,  $M_{v,x} = Q_v$ , e verificando que apenas  $f_1^k$  e  $f_4^k$  são dependentes de  $z$ , temos

$$\tau_{xz}^k = - \frac{1}{b} \frac{\partial N_v}{\partial x} \int_{z=-H/2}^{z_k} f_1^k dz - \frac{Q_v}{b} \int_{-H/2}^{z_k} f_4^k z dz \quad (8.21)$$

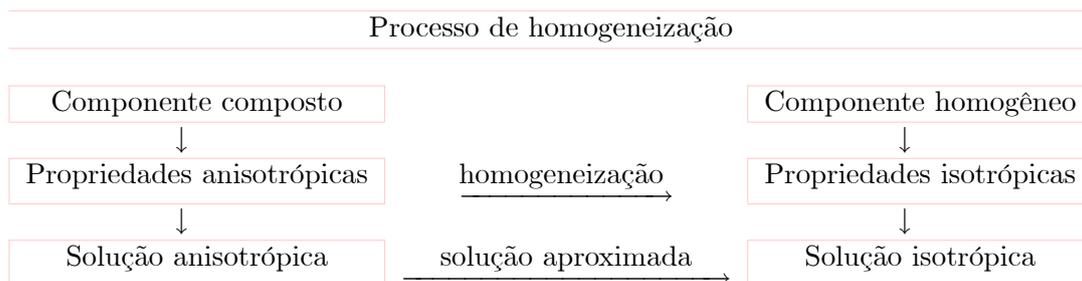
onde  $Q_v$  é o esforço cortante na seção da viga, em unidades de força, diferentemente do esforço de placa  $Q_x$ , que é dado por unidade de comprimento. Lembramos que essa expressão estima a tensão transversal para uma viga laminada simétrica. Para uma **viga isotrópica** submetida apenas à flexão, essa relação pode ser obtida em forma fechada. Obtemos  $f_4 = 12/H^3$  e

$$\tau_{xz}(z) = \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{H} \right)^2 \right] \frac{H^2 Q_v}{8I} \quad (8.22)$$

que é a relação parabólica em  $z$  obtida da teoria de resistência dos materiais para vigas isotrópicas de seção retangular sob flexão.

## 8.2 Módulos de elasticidade equivalente – Homogeneização

É frequentemente útil poder estimar propriedades elásticas que uma viga ou placa ortotrópica ou mesmo isotrópica deveria possuir de tal forma que ela apresentasse um comportamento o mais semelhante possível a uma viga ou placa anisotrópica dada. Buscaremos, por exemplo, os valores de  $E$  e  $\nu$  que uma viga isotrópica deveria ter, tal que sua resposta fosse idêntica à de uma viga laminada dada quando submetida a uma tração  $N_v$ . Estes valores serão referidos como  $E_{xN}$  e  $\nu_{xN}$ . Com este processo de equivalência, também chamado de **homogeneização de propriedades**, tentamos ser capazes de estimar certo tipo de comportamento de um componente composto, usando o equacionamento disponível para o caso de um material homogêneo-isotrópico. Isto porque as teorias e equações para o último caso são sempre mais simples que para o caso composto. Do ponto de vista de cálculos preliminares de projeto, esta é uma promessa tentadora, uma vez que, principalmente nesta etapa, é fundamental a disponibilidade de equacionamento simples, de uso rápido, embora não necessariamente muito preciso. O uso das **propriedades equivalentes homogêneo-isotrópicas** pode ser visualizado no seguinte esquema:



De fato, nem sempre a equivalência é buscada para um material isotrópico: pode também ser útil identificar o material ortotrópico mais similar possível ao original. Lembremos que um laminado genérico apresenta todos os tipos de acoplamento representados por uma matriz de rigidez  $\mathbf{C}$  cheia como em (6.18). Desejamos obter uma relação com algum tipo de equivalência com uma placa con-

stituída por uma única lâmina ortotrópica de espessura  $H$  idêntica à do laminado. A rigidez de um laminado monolâmina deste tipo foi anteriormente discutida, e pode ser vista na equação (6.25), isto é, possui  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  e os termos 16 e 26 nas demais submatrizes são nulos. Caso o laminado genérico possua a matriz cheia, torna-se inviável obter uma boa equivalência com uma lâmina ortotrópica, uma vez que esta não poderá simular os acoplamentos. Assim, qualquer processo de equivalência gera um resultado apenas aproximativo.

O processo que descrevemos a seguir é um dos mais antigos, embora em geral não seja o melhor, de forma que em seguida apresentaremos variações.

### 8.2.1 Método da rigidez do material

O primeiro processo consiste em, inicialmente, ignorar todos os acoplamentos que o laminado eventualmente possua. Em seguida, concentrar-se em obter constantes de engenharia que melhor representem as propriedades **extensionais** ou **flexurais** da placa. Para obtermos propriedades extensionais da placa, por exemplo, igualamos as respectivas matrizes  $\mathbf{A}$  do laminado e da placa equivalente ortotrópica, isto é, da equação (6.25), página 131,

$$\mathbf{A}_{orto} = \mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Q}_{orto} H = \mathbf{A},$$

isto é,

$$H \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & & \\ Q_{12} & Q_{22} & & \\ & & Q_{66} & \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}. \quad (8.23)$$

Tomando as constantes de (4.30), página 79, temos

$$\frac{HE_x^2}{E_x - \nu_{xy}^2 E_y} = A_{11}, \quad \frac{HE_x E_y}{E_x - \nu_{xy}^2 E_y} = A_{22}, \quad \frac{H\nu_{xy} E_x E_y}{E_x - \nu_{xy}^2 E_y} = A_{12}, \quad HG_{xy} = A_{66}. \quad (8.24)$$

Isto representa quatro equações e quatro incógnitas, já que os  $A_{ij}$  do laminado são conhecidos. Resolvendo, temos as **propriedades equivalentes para extensão**:

$$\boxed{E_{xN} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{HA_{22}}, \quad E_{yN} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{HA_{11}}, \quad G_{xyN} = \frac{A_{66}}{H}, \quad \nu_{xyN} = \frac{A_{12}}{A_{22}}} \quad (8.25)$$

Incluimos o subscrito  $N$  para lembrar que estas propriedades foram obtidas de forma a representar melhor a matriz de rigidez extensional  $\mathbf{A}$  do laminado, mas não a rigidez flexural. Para a **flexão** do laminado, em geral, as constantes serão diferentes. Elas podem ser obtidas de forma semelhante a (8.23), mas fazendo

$$\mathbf{D}_{orto} = \mathbf{D} \quad \longrightarrow \quad \frac{H^3}{12} \mathbf{Q}_{orto} = \mathbf{D}. \quad (8.26)$$

Tomando  $\mathbf{D}_{orto}$  de (6.25), página 131, e usando  $\mathbf{Q}_{orto}$  de (4.30), página 79, temos:

$$\boxed{E_{xF} = \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{H^3 D_{22}/12}, \quad E_{yF} = \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{H^3 D_{11}/12}, \quad G_{xyF} = \frac{12D_{66}}{H^3}, \quad \nu_{xyF} = \frac{D_{12}}{D_{22}}} \quad (8.27)$$

Observe que, neste método, todo o acoplamento do laminado é ignorado, ou seja, laminados não-simétricos ou não-ortotrópicos serão pobremente representados por essas constantes. O processo seguinte considera parcialmente estas influências.

um laminado plano tem comportamento representado por muito mais que quatro constantes: são os 18 termos independentes das matrizes **A**, **B** e **D**, ou ainda cinco vezes o número de lâminas do laminado, correspondentes a  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  e  $\theta$  além das informações sobre a sequência de empilhamento das lâminas.

A Tabela 3.1, na página 50, apresenta uma amostra das principais normas da ASTM para determinação experimental de resistências e módulos de elasticidade de laminados, vigas e fibras, úteis na determinação experimental dos módulos homogeneizados de vigas laminadas.

**Observação:** os valores estimados para os módulos de elasticidade obtidos pela rigidez e pela flexibilidade são distintos. Prova-se que esses valores são limites superior e inferior dos valores exatos, isto é, sempre o valor obtido pela matriz de rigidez é maior que o valor correto, e aquele obtido pela matriz de flexibilidade é menor. Em geral, utiliza-se simplesmente a média como valor representativo da propriedade buscada. Isso pode ser visto no exemplo a seguir.

### Exemplo 1a – Estimativas de módulos de elasticidade

Considere o laminado anisotrópico de duas lâminas do Exemplo 2, página 136, com as propriedades mostradas em (6.39) e espessura  $H = 8$  mm. Determine as estimativas de módulo de elasticidade equivalentes para os comportamentos de extensão e de flexão,  $E_{xN}$  e  $E_{xF}$ , obtidas pelos métodos de rigidez e flexibilidade.

*Solução:*

As matrizes de rigidez e de flexibilidade do laminado estão calculadas em (6.40) e (6.41). Assim, para o comportamento extensional, as eqs. (8.25) e (8.31) produzem os resultados pelo método de rigidez:

$$\begin{aligned} \text{Rigidez:} \quad E_{xNr} &= \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{HA_{22}} = \frac{(370 \times 183 - 59,8^2) 10^6}{8 \times 183 \cdot 10^3} = 43.818 \text{ MPa,} \\ \text{Flexibilidade:} \quad E_{xNr} &= \frac{1}{HA'_{11}} = \frac{1}{8 \times 3,23 \cdot 10^{-6}} = 38.700 \text{ MPa,} \\ \text{Média:} \quad E_{xN} &= \frac{E_{xNr} + E_{xNr}}{2} = 41.259 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

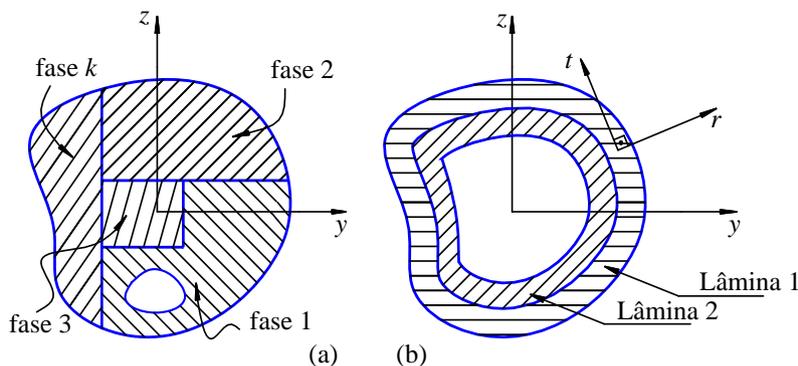
De forma similar, para o comportamento flexural, as eqs. (8.27) e (8.32) produzem os resultados pelo método de flexibilidade:

$$\begin{aligned} \text{Rigidez:} \quad E_{xFf} &= \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{H^3D_{22}/12} = \frac{(1.843 \times 1.034 - 356^2) 10^6}{8^3 \times 1.034 \cdot 10^3/12} = 40323 \text{ MPa,} \\ \text{Flexibilidade:} \quad E_{xFf} &= \frac{H^3D'_{11}}{12} = \frac{12}{8^3 \times 0.664 \cdot 10^{-6}} = 35.297 \text{ MPa,} \\ \text{Média:} \quad E_{xF} &= \frac{E_{xNf} + E_{xNf}}{2} = 37.810 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

Nota-se que a faixa de variação para as estimativas para o comportamento extensional é  $\pm 6,2\%$  em relação à média, e para o comportamento flexural a faixa é  $\pm 6,6\%$ , isto é, faixas similares. Ambas as médias,  $E_{xN}$  e  $E_{xF}$  são distintas porém similares, com diferença de  $\pm 4,4\%$  em relação à média entre eles,  $(E_{xN} + E_{xF})/2 = 39.534$  MPa.

### 8.2.3 Laminados simétricos ortotrópicos

Mostraremos a seguir que as formulações de rigidez e de flexibilidade são equivalentes no comportamento de extensão apenas numa certa classe de laminados, a que possui os acoplamentos  $A_{16} = A_{26} = B_{ij} = 0$ . Esse tipo de laminado ocorre, por exemplo, nos casos de lâminas idênticas angulares na forma  $[+\alpha/-\alpha/-\alpha/+\alpha]$ . Observe que neste caso não se tem necessariamente  $D_{16}$  e  $D_{26}$  nulos.



**Figura 8.2:** Seção sólida com fases não laminadas em (a), e seção tubular fechada laminada em (b).

A Figura 8.2 ilustra dois casos distintos de seções de vigas compostas. No primeiro, a seção é composta por blocos de diferentes materiais numa composição sólida. No segundo caso, a seção é tubular, com paredes delgadas, formada por camadas. Essas camadas podem ser isotrópico-homôneas ou lâminas ortotrópicas angulares. Neste caso, tanto quanto na Figura 8.1, existem  $N$  lâminas, agora denominadas também **camadas**, cada uma com espessura  $h_k$ , com suas próprias propriedades elásticas e orientação  $\theta_k$  em relação ao eixo longitudinal  $x$ . Consideramos um par de eixos  $r$ - $t$ , respectivamente nas direções normal e tangencial a cada ponto do laminado, paralelos ao plano  $y$ - $z$  da seção transversal da viga.

Consideremos que, dadas as propriedades elásticas no sistema principal de coordenadas de cada lâmina, temos calculados os valores destas propriedades no sistema  $x$ - $r$ - $t$ , usando as eqs.(4.67). Em particular devemos previamente ter calculado o módulo de elasticidade  $E_x^k$  de cada lâmina.

#### 8.4.1 Tração simples de barras de seção não-plana

Consideramos primeiramente a viga submetida a um carregamento axial de tal forma que  $N_v \neq 0$  e  $M_v = 0$ . Neste caso a deformação normal é uniforme sobre todas as camadas, isto é,  $\varepsilon_x^k = \text{const.} = \varepsilon_x$ . Ignora-se todo tipo de acoplamento e usa-se a Lei de Hooke uniaxial:  $\sigma_x^k = E_x^k \varepsilon_x$ . Então, o esforço na seção é

$$N_v = \int_A \sigma_x dA = \sum_{k=1}^N \int_{A^k} \sigma_x^k dA = \varepsilon_x \sum_{k=1}^N E_x^k A^k. \quad (8.44)$$

Assim, conhecidos os módulos  $E_x^k$  de cada camada, suas áreas  $A^k$  e o esforço  $N_v$  desenvolvido na seção, a deformação  $\varepsilon_x$  pode ser obtida. Além disso, pode-se obter um valor de módulo de elasticidade equivalente  $E_{xN}$  para a viga que satisfaça a relação usada para uma viga isotrópica, isto é:

$$N_v = \varepsilon_x E_{xN} A_v, \quad (8.45)$$

onde  $A_v$  é a área total da seção. Fazendo a equivalência entre essas duas equações, temos o **módulo de elasticidade equivalente** de seção laminada sob carga axial:

$$E_{xN} = \frac{1}{A_v} \sum_{k=1}^N E_x^k A^k \quad (8.46)$$

A tensão normal em cada lâmina é obtida por:

$$\sigma_x^k = E_x^k \frac{N_v}{E_{xN} A_v} \quad (8.47)$$

Estas duas fórmulas, apesar de terem sido obtidas de forma aparentemente consistente, apresentam, em alguns casos, sérias limitações que são detalhadas ao longo do texto. Entretanto, é importante

$$\begin{aligned}
 H E_{xN} &= \sum_{k=1}^N \frac{E_x^{k2} h_k}{\Delta_k} - \nu_{xy}^2 \sum_{k=1}^N \frac{E_x^k E_y^k h_k}{\Delta_k} \\
 &= \frac{(E_x^1)^2 h_1}{\Delta_1} + \frac{(E_x^2)^2 h_2}{\Delta_2} + \dots - \nu_{xy}^2 \left[ \frac{E_x^1 E_y^1 h_1}{\Delta_1} + \frac{E_x^2 E_y^2 h_2}{\Delta_2} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Simplificando os termos

$$E_{xN} = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^N E_x^k h_k. \tag{8.51}$$

Se considerarmos que o perímetro médio de todas as camadas na Figura 8.2 é aproximadamente o mesmo, podemos multiplicar esse perímetro no numerador e no denominador de (8.51), o que produzirá a equação (8.46).

Obtivemos então a equivalência entre as definições (8.36) e (8.46). A conclusão é que (8.46) fornece um módulo equivalente razoavelmente preciso apenas nos casos de lâminas isotrópicas, lâminas ortotrópicas  $[0^\circ/90^\circ]$  ou angulares com  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  e  $A_{16} = A_{26} = 0$ , isto é, ela ignora qualquer tipo de acoplamento. Em outros tipos de laminados, é necessário usar a forma (8.34), proveniente da flexibilidade. A restrição usada na dedução acima, de coeficientes de Poisson idênticos em todas as lâminas, não é tão restritiva. A faixa teórica para os coeficientes em materiais elásticos é de 0 a 0,5, mas uma grande parte dos materiais apresenta valores numa faixa mais estreita, de 0,25 a 0,35.

Note que a fórmula (8.46) é bastante difundida, aparecendo em qualquer livro de resistência dos materiais ou de materiais compostos, o que torna importante o conhecimento de suas limitações.

### Exemplo 1 – Barra de seção retangular ortotrópica sob tração

Considere uma barra de seção retangular com três camadas como na Figura 8.3, submetida a uma força de tração de  $N_v = 100$  kN. O comprimento da barra é de 1 m. A seção transversal é retangular tubular de dimensões médias  $b \times a$ . O composto é formado por três lâminas idênticas de espessuras  $h = 1,0$  mm, orientadas a  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com propriedades:  $E_1 = 126$  GPa,  $E_2 = 12,2$  GPa,  $G_{12} = 7,6$  GPa,  $\nu_{12} = 0,3$ . Estime a variação de comprimento de barra e as tensões nas lâminas.

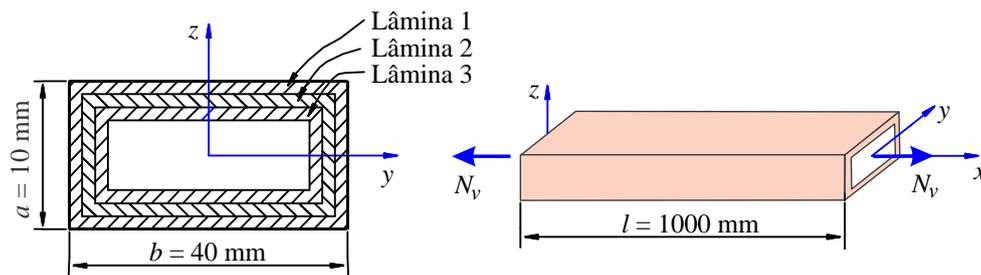


Figura 8.3: Barra laminada de seção retangular fechada sob tração.

Solução:

Como o laminado é simétrico em relação à superfície média da parede, e possui uma matriz de rigidez  $\mathbf{A}$  ortotrópica, podemos usar a forma (8.46). Como a parede é fina, as áreas  $A_k$  de cada camada são aproximadas pelo produto de seu perímetro médio pela espessura  $h_k$ :

$$A_1 = 128 \text{ mm}^2, \quad A_2 = 120 \text{ mm}^2, \quad A_3 = 112 \text{ mm}^2,$$

$$\begin{aligned}
 E_x^{l_1} &= \left[ \frac{\cos^4 45^\circ}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 45^\circ \cos^2 45^\circ + \frac{\sin^2 45^\circ}{E_2} \right]^{-1}, \\
 &= \left[ \frac{\cos^4 45^\circ}{126} + \left( \frac{1}{7,6} - 2 \frac{0,3}{126} \right) \sin^2 45^\circ \cos^2 45^\circ + \frac{\sin^4 45^\circ}{12,2} \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

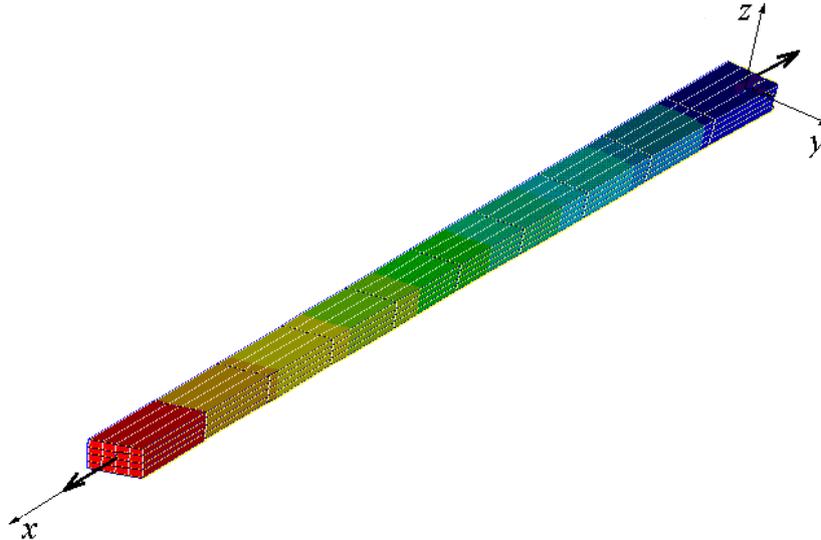
Repetindo para a lâmina 2, obteríamos

$$E_x^{l_1} = E_x^{l_2} = 18.460 \text{ MPa.}$$

De (8.46) o módulo da barra seria estimado por:

$$E_{xN} = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^3 E_x^k A_k = \frac{1}{360} 18.460 (128 + 120 + 112) = 18.460 \text{ MPa.}$$

Neste caso particular, em que o ângulo das lâminas é  $\pm 45^\circ$ , os módulos são todos idênticos. Agora compare com a estimativa do módulo em (8.55), de 24.840 MPa. De fato este último valor é o confiável e o anterior apresenta erro da ordem de 25%.



**Figura 8.4:** Configuração deformada da barra de seção tubular retangular tracionada do Exemplo 2, composta por lâminas a  $[45^\circ / -45^\circ / 45^\circ]$ . Pode-se visualizar a torção proveniente da anisotropia do material.

Para confirmar os resultados, modelamos o problema por elementos finitos da mesma forma seguida no Exemplo 1. Os resultados obtidos para a variação de comprimento foram  $\Delta l = 11,1 \text{ mm}$ , e para as tensões,

$$\begin{aligned}
 \{\sigma^{xl_1}\} &= \begin{Bmatrix} 258,3 \\ -19,5 \\ 82,3 \end{Bmatrix} \text{ MPa,} & \{\sigma^{xl_2}\} &= \begin{Bmatrix} 323,1 \\ 46,0 \\ -156,7 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \quad \text{e} \\
 \{\sigma^{xl_3}\} &= \begin{Bmatrix} 252,9 \\ -23,9 \\ 75,9 \end{Bmatrix} \text{ MPa.}
 \end{aligned}$$

Note a similaridade com os resultados (8.55)–(8.57), o que confirma o uso da TCL através das eqs.(8.14)–(8.17). A análise por elementos finitos, entretanto, mostra um efeito secundário ainda não identificado até este ponto, e não considerado no equacionamento usado. Quando a barra é tracionada, ela responde não apenas com

uma extensão  $\Delta l$  mas também com uma torção. Isto pode ser visualizado na Figura ?? e é consequência da anisotropia da parede do tubo. Enquanto duas camadas estão orientadas a  $+45^\circ$ , apenas uma está orientada a  $-45^\circ$ . A lâmina desbalanceada a  $+45^\circ$  produz então uma torção resultante. O ângulo de torção observado foi de  $\varphi = 3,39^\circ$  entre as duas extremidades do tubo.

## 8.5 Flexão em seção não-plana – Fases isotrópicas ou ortotrópicas

Consideremos agora vigas com quaisquer das seções mostradas na Figura 8.2, página 203, submetidas a um momento fletor na direção  $y$ ,  $M_{vy}$ . Dois casos de material são admitidos aqui:

- **seção sólida**, como na Figura 8.2a, com fases homogêneo-isotrópicas;
- **seção tubular** como na Figura 8.2b, com camadas homogêneo-isotrópicas ou ortotrópicas orientadas a  $0^\circ$  ou  $90^\circ$  do eixo axial  $x$ .<sup>2</sup>

Mesmo numa seção com diferentes fases, a análise de flexão da viga parte da mesma hipótese fundamental de vigas, que supõe a linearidade da deformação ao longo de  $z$ , representada por:

$$\varepsilon_x(x, z) = -z w_{,xx}(x) = z \kappa_x(x). \quad (8.58)$$

O equilíbrio dos momentos na direção  $y$  requer que

$$M_{vy}(x) = \int_A dM_{vy} = \int_A z \sigma_x^k dA = \sum_{k=1}^N \int_{A^k} z^2 E_x^k \kappa_x(x) dA, \quad \implies \quad M(x) = \kappa_x(x) \sum_{k=1}^N E_x^k I_{yy}^k. \quad (8.59)$$

Esta expressão permite obter a curvatura, se forem conhecidos o momento fletor, as propriedades elásticas em cada camada e o momento de inércia  $I_{yy}^k$  de cada camada  $k$  em relação ao eixo  $y$ . Esse momento de inércia é definido por

$$I_{yy}^k = \int_{A^k} z^2 dA. \quad (8.60)$$

Lembre-se de que, para uma viga isotrópica, (8.59) tem a forma

$$M_{vy}(x) = \kappa_x(x) E I_{yy}. \quad (8.61)$$

Isto permite obter um **módulo de elasticidade equivalente** para a viga não-homogênea, para uso na flexão. Igualando termos em (8.59) e (8.61), obtemos

$$E_{xF} = \frac{1}{I_{yy}} \sum_{k=1}^N E_x^k I_{yy}^k, \quad \text{isto é,} \quad D_v = \sum_{k=1}^N E_x^k I_{yy}^k \quad (8.62)$$

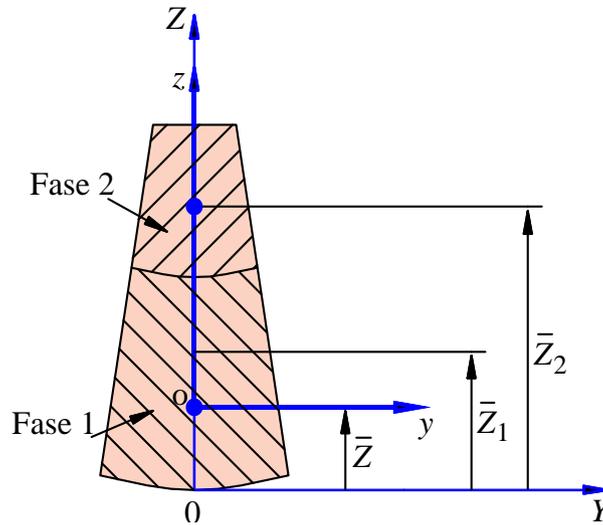
A deformação normal pode ser obtida substituindo a curvatura de (8.59) em (8.58) e usando a Lei de Hooke unidimensional:

$$\varepsilon_x(x) = z \kappa_x(x) = z \frac{M_{vy}(x)}{E_{xF} I_{yy}}, \quad (8.63)$$

enquanto a tensão normal em cada fase  $k$  é

$$\sigma_x^k(x, z) = z \frac{M_{vy}(x) E_x^k}{E_{xF} I_{yy}} \quad (8.64)$$

<sup>2</sup>O caso de tubo com camadas ortotrópicas angulares será tratado de forma diferente na próxima seção.



**Figura 8.5:** Seção com simetria de geometria e material apenas em relação a um plano.

### 8.5.1 Casos particulares de flexão – Fases homogêneo-isotrópicas ou ortotrópicas

Para uma seção de geometria genérica não é simples o processo de localizar os eixos  $y$  e  $z$  que satisfaçam as condições (8.67) e (8.68) na flexão. Consideramos aqui uma situação mais simples em que existe um plano de simetria de propriedades geométricas e de material tal que um eixo  $Y$  passando por esse plano tem a característica de que os momentos estáticos de todas as camadas são nulos, isto é:

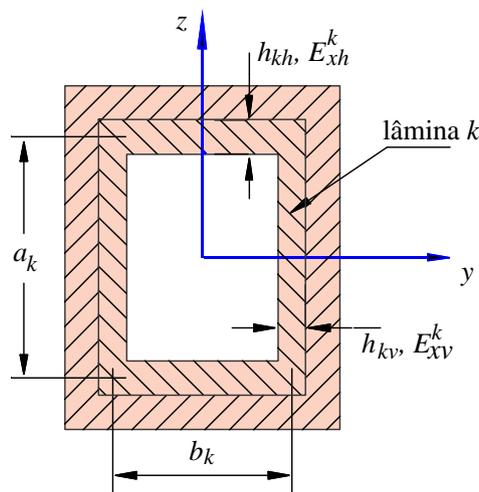
$$Q_Y^1 = Q_Y^2 = \dots = Q_Y^k = \dots = Q_Y^N = 0. \quad (8.71)$$

A condição (8.67) é então satisfeita, o eixo  $y$  tem o mesmo suporte que  $Y$ . Se a seção tiver um outro eixo de simetria, perpendicular a  $y$  tal que  $I_{yz}^k = 0$  para qualquer camada  $k$ , então (8.68) é automaticamente satisfeita.

Consideremos a seguir algumas seções regulares bastante usadas.

#### Flexão de uma seção retangular fechada

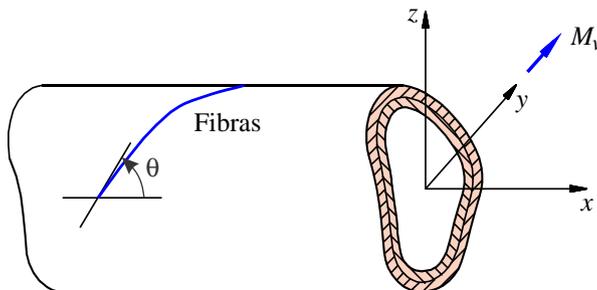
O caso ilustrado na Figura 8.6 tem cada camada horizontal com espessura  $h_{kh}$ , largura  $b_k$  e propriedade  $E_{xh}^k$ , enquanto as camadas verticais têm  $h_{kv}$ ,  $a_k$  e  $E_{xv}^k$ . Caso as espessuras sejam pequenas, a equação (8.62) pode ser aproximada por



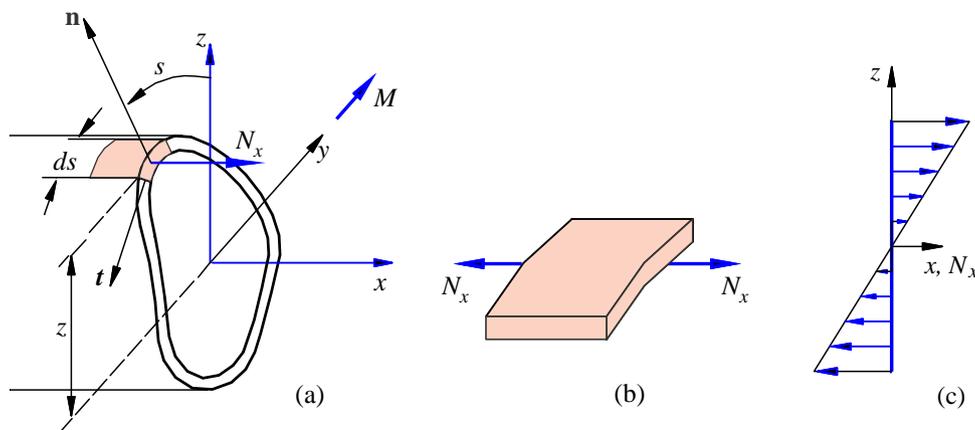
**Figura 8.6:** Elementos de uma viga laminada de seção retangular fechada.

### 8.5.2 Flexão de viga de seção tubular anisotrópica

Consideramos aqui a flexão de vigas com seção tubular fechada com paredes finas constituídas por lâminas ortotrópicas orientadas angularmente ao eixo axial  $x$ , como ilustrado na Figura 8.8.



**Figura 8.8:** Modelo de viga tubular sob flexão com lâminas angulares.



**Figura 8.9:** Esforço normal  $N_x$  num elemento diferencial de área da superfície média do tubo e distribuição linear de  $N_x$  ao longo de  $z$  na seção.

Consideramos um elemento diferencial de área na superfície média do tubo, como na Figura 8.9. Consideramos o sistema local de coordenadas  $x, n, t$ , definido pelos vetor normal e tangente,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{t}$ . Este elemento é suposto estar sujeito apenas a esforços  $N_x$ , como na Figura 8.9b. Uma hipótese adicional é a de que  $N_x$  varia linearmente ao longo de  $z$  para o caso de o momento estar na direção  $y$ . Esta hipótese está de fato associada à hipótese de que a seção transversal da viga permanece plana como na figura Figura 8.9c.

Uma vez que a parede do tubo trabalha principalmente como uma membrana, podemos inicialmente determinar um módulo de elasticidade homogêneo para o material usando (8.34), isto é,

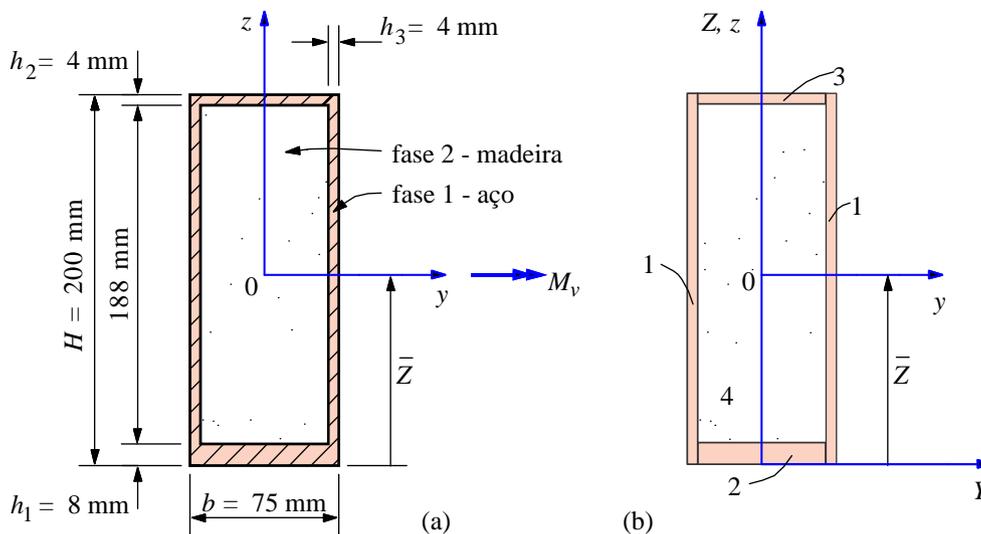
$$E_{xN} = \frac{1}{H A'_{11}}, \quad (8.79)$$

onde  $H$  é a espessura da parede e  $A'_{11}$  é o termo 11 da partição  $[A']$  da matriz de flexibilidade  $[C]^{-1}$  do laminado.

Como visto na Figura 8.9a, o esforço de momento fletor  $M_v(x)$  na seção é relacionado aos esforços normais na parede por

$$M_v(x) = \int_{s=0}^S N_x(x, z) z ds, \quad (8.80)$$

onde  $S$  é o comprimento do perímetro médio da seção e  $s$  uma coordenada tangencial com origem num ponto arbitrário do perímetro da seção. A hipótese das seções planas pode ser representada por



**Figura 8.10:** Seção transversal de viga sob flexão, composta por duas fases homogêneas.

Substituindo os valores, obtém-se  $\bar{Z} = 92,21\text{mm}$ . A próxima etapa consiste na determinação dos momentos de inércia das regiões da seção, em relação ao eixo  $y$ . Esses momentos são os seguintes:

$$\begin{aligned} I_1 &= 1,13 \cdot 10^7 \text{mm}^4, & I_4 &= 3,83 \cdot 10^7 \text{mm}^4, \\ I_2 &= 4,17 \cdot 10^6 \text{mm}^4, & I_{\text{aço}} &= 1,85 \cdot 10^7 \text{mm}^4, \\ I_3 &= 3,00 \cdot 10^6 \text{mm}^4, & I_{yy} &= 5,68 \cdot 10^7 \text{mm}^4 \text{ para a seção total.} \end{aligned}$$

Em seguida, estimamos o módulo de elasticidade homogêneo  $E_{xF}$  para a flexão, a partir de (8.62):

$$\begin{aligned} E_{xF} I_y &= E_{\text{aço}} I_{\text{aço}} + E_{\text{madeira}} I_4, \\ E_{xF} \times 5,68 \cdot 10^7 &= 210 \times 1,85 \times 10^7 + 11 \times 3,83 \cdot 10^7. \end{aligned}$$

Logo,  $E_{xF} = 75,82\text{GPa}$ . Finalmente, podemos obter as tensões máximas em cada fase a partir de (8.64):

$$\begin{aligned} \text{aço} \longrightarrow \sigma_x(z) &= \frac{M_v E_{\text{aço}} z}{E_{xF} I_{yy}} = \frac{10^7 \times 210}{75,82 \times 5,68 \cdot 10^7} z = 0,488 z, \\ \sigma_{\max} &= \sigma_x(z = 117,8) = 57,4 \text{MPa}, \\ \sigma_{\min} &= \sigma_x(z = -92,21) = -44,9 \text{MPa}. \\ \text{madeira} \longrightarrow \sigma_x(z) &= \frac{M_v E_{\text{madeira}} z}{E_{xF} I_{yy}} = \frac{10^7 \times 11}{75,82 \times 5,68 \cdot 10^7} z = 0,0255 z, \\ \sigma_{\max} &= \sigma_x(z = 103,8) = 2,65 \text{MPa}, \\ \sigma_{\min} &= \sigma_x(z = -84,21) = -2,15 \text{MPa}. \end{aligned}$$

A distribuição de tensões obtida é aquela mostrada na Figura 8.11.

### Exemplo 4 – Viga de seção tubular retangular anisotrópica sob flexão

Considere a barra do Exemplo 1, com seção tubular retangular de três camadas como na Figura 8.3, página 205, submetida a um momento fletor  $M_v = 100\text{kNmm}$  na direção  $z$ . A parede do tubo é de um material composto por três lâminas ortotrópicas idênticas de espessuras  $h = 1\text{mm}$  e propriedades dadas naquele exemplo. As orientações são  $[45^\circ / -45^\circ / 45^\circ]$  em relação ao eixo longitudinal  $x$ . Determine as tensões máximas de flexão em cada camada.

*Solução:*

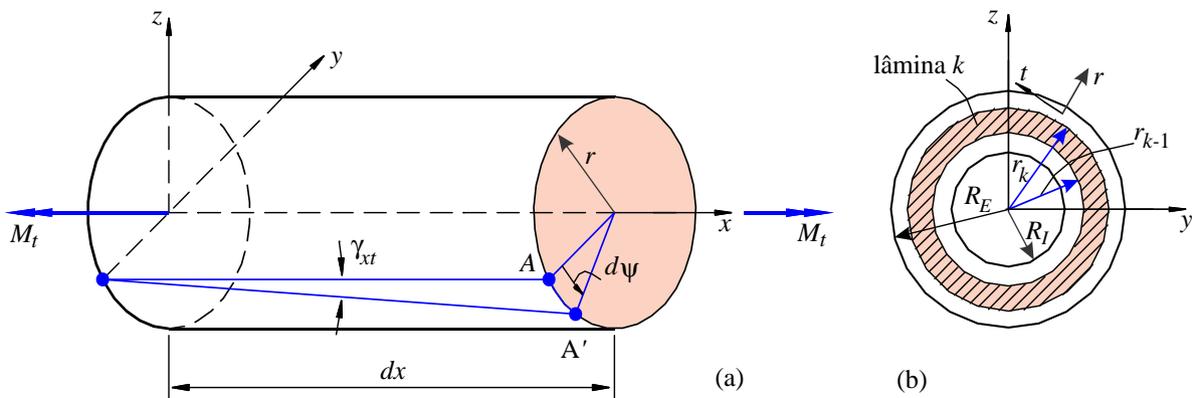
Uma vez que existem lâminas ortotrópicas oblíquas, o processo de cálculo deve ser aquele visto na Seção 8.5.2.

$$\text{Lâmina 2} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{l_2} = \begin{bmatrix} 4,43 & 2,91 & -2,87 \\ 2,91 & 4,43 & -2,87 \\ -2,87 & -2,87 & 3,30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 13,42 \\ -8,51 \\ -1,42 \end{Bmatrix} 74,4 \cdot 10^{-2} = \begin{Bmatrix} 28,8 \\ 4,04 \\ -14,0 \end{Bmatrix} \text{MPa.}$$

Note que os índices usados nas tensões foram  $x$ - $z$ , que correspondem ao plano de aplicação das tensões na face  $y = +20$  mm da barra. As componentes  $\sigma_x$  nas lâminas 1 e 2 são esboçadas na Figura 8.12. As tensões na lâmina 3 são supostas idênticas às da lâmina 1 em virtude da pequena espessura da parede, condição necessária à formulação apresentada.

## 8.6 Torção de eixos

Consideramos aqui diversas aproximações a serem utilizadas dependendo do tipo de eixo. Para seções circulares axi-simétricas, podem-se usar as premissas simples da resistência dos materiais, uma vez que as deformações podem ser consideradas como variando linearmente ao longo do raio, como nos eixos isotrópico-homogêneos de seção circular. Eixos com seções tubulares fechadas de paredes finas de formato arbitrário podem ser simulados usando algumas hipóteses simplificativas inspiradas nas teorias lineares de torção de eixos isotrópicos. Outros casos, como eixos de seções fechadas de parede espessa, eixos de seções abertas, perfis como I ou T e vigas laminadas de seção retangular plana, parecem não admitir simulação por fórmulas simples, a menos que se usem fatores de correção.



**Figura 8.13:** Elementos de um eixo composto sob torção.  $R_1$  e  $R_e$  são os raios interno e externo da seção;  $r_{k-1}$  e  $r_k$ , os raios interno e externo da lâmina genérica  $k$ .

### 8.6.1 Torção de barras de seção circular

Consideramos aqui a seção circular com camadas uniformes de espessura, propriedades e orientações constantes. **Uma restrição fundamental na formulação desenvolvida nesta seção é a de que as camadas devem ser concêntricas, como na Figura 8.13b e de materiais isotrópicos ou ortotrópicos com as direções principais alinhadas nas direções axiais  $x$  e tangencial  $t$  da barra.** Cada camada é modelada apenas pelo seu módulo de elasticidade individual  $G_{xt}^k$ , sem levar em conta nenhum efeito de acoplamento. Aparentemente, a formulação poderia ser usada para lâminas angulares, através do uso de  $G_{xt}^k$  obtido a partir das fórmulas (4.67), página 87. Entretanto, os resultados obtidos neste caso podem apresentar erros que atingem até 400%. **Entretanto, a presente formulação permite a modelagem adequada de eixos de paredes espessas ou mesmo barras maciças.** A formulação é uma extensão da teoria clássica de torção de barras de seção circular homogêneo-isotrópica da resistência dos materiais. Considera-se que as deformações e tensões variam linearmente ao longo do raio da seção. (O próximo tópico apresenta o tratamento para o caso de camadas ortotrópicas não alinhadas em relação ao eixo  $x$ , através de uma formulação

$$\begin{aligned}
 \text{lâminas 1 e 3} \longrightarrow & E_1 = 126 \text{ GPa}, & \text{lâmina 2} \longrightarrow & E_1 = 63 \text{ GPa}, \\
 & E_2 = 12,2 \text{ GPa}, & & E_2 = 6,1 \text{ GPa}, \\
 & G_{12} = 7,6 \text{ GPa}, & & G_{12} = 3,8 \text{ GPa}, \\
 & \nu_{12} = 0,3, & & \nu_{12} = 0,3.
 \end{aligned} \tag{8.100}$$

*Solução:*

Primeiramente, obtemos o módulo homogêneo  $G_{xt}$  de (8.94). Os momentos de inércia são:

$$\begin{aligned}
 \text{lâmina 1} & \triangleright J_1 = \frac{\pi}{32} (59^4 - 57^4) = 153.286 \text{ mm}^4, \\
 \text{lâmina 2} & \triangleright J_2 = \frac{\pi}{32} (61^4 - 59^4) = 169.693 \text{ mm}^4, \\
 \text{lâmina 3} & \triangleright J_3 = \frac{\pi}{32} (63^4 - 61^4) = 187.231 \text{ mm}^4, \\
 \text{Total} & \triangleright J = \frac{\pi}{32} (63^4 - 57^4) = 510.210 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{8.101}$$

Então, de (8.94) o módulo equivalente à torção é:

$$G_{xt} = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^3 G_{xt}^k J_k = \frac{1}{510.210} [7,6 \times 153 + 3,8 \times 170 + 7,6 \times 187] 10^3 \longrightarrow \boxed{G_{xt} = 6.333 \text{ MPa}} \tag{8.102}$$

O ângulo de torção vem de (8.95) como:

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{G_{xt} J} = \frac{60.000 \times 10^3}{6.333 \times 510.210} = 0,0186 \text{ rad} \longrightarrow \boxed{\Delta\varphi = 1,06^\circ} \tag{8.103}$$

As tensões em cada lâmina variam linearmente com o raio e são dadas por (8.97):

$$\begin{aligned}
 \tau_{xt}^{l_1} = \tau_{xt}^{l_3} &= \frac{M_t G_{xt}^{l_1}}{G_{xt} J} r = \frac{60.000 \times 7,6}{6,3 \times 510.000} r = 0,142 r, \\
 \tau_{xt}^{l_2} &= \frac{M_t G_{xt}^{l_2}}{G_{xt} J} r = \frac{60.000 \times 3,8}{6,3 \times 510.000} r = 0,0707 r.
 \end{aligned}$$

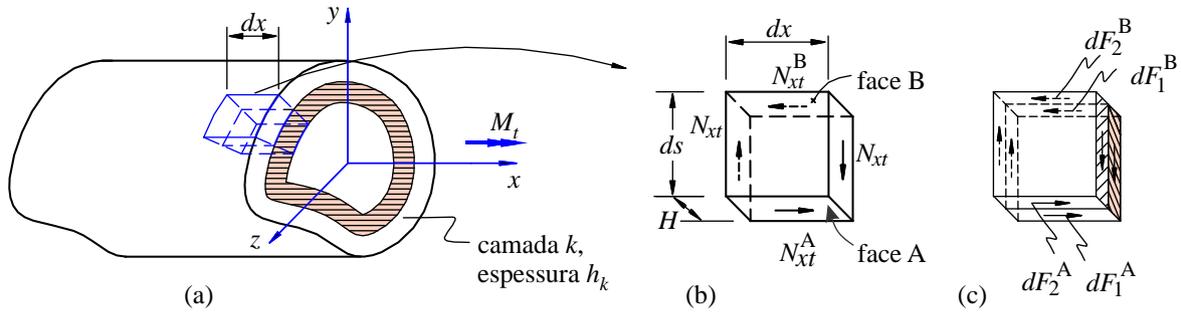
As tensões nas superfícies médias de cada camada são obtidas para os respectivos raios médios  $\bar{r}_1 = 29 \text{ mm}$ ,  $\bar{r}_2 = 30 \text{ mm}$  e  $\bar{r}_3 = 31 \text{ mm}$ , o que resulta

$$\tau_{xt}^{l_1} = 4,12 \text{ MPa}, \quad \tau_{xt}^{l_2} = 2,12 \text{ MPa} \quad \text{e} \quad \tau_{xt}^{l_3} = 4,40 \text{ MPa}.$$

### 8.6.2 Torção de tubos de seção fechada de paredes finas

A seção da viga considerada é aquela esboçada na Figura 8.14a. É uma parede formada por uma curva fechada simples com espessura constante ao longo da direção tangencial  $t$ . A parede é formada por camadas de espessura constante  $h_k$  e propriedades elásticas também constantes ao longo da direção tangencial  $t$ .

**Uma restrição fundamental nesta formulação é a de que as camadas sejam ou isotrópicas ou ortotrópicas, com as direções principais alinhadas nas direções axial  $x$  e tangencial  $t$  do eixo.** Todo tipo de acoplamento de propriedades de material e interação entre as camadas é ignorado. (Tubos com camadas ortotrópicas angulares são tratados na próxima seção, numa formulação que tem esta como caso particular. Entretanto, a presente formulação permite uma computação mais simples dos resultados.)



**Figura 8.14:** Torção em tubos de seção transversal fechada de parede fina.

Consideremos inicialmente o elemento volumétrico de dimensões diferenciais cortado como na Figura 8.14b, com dimensões  $dx \times ds \times H$ . Os esforços provenientes da torção podem ser considerados como sendo apenas os esforços coplanares de cisalhamento  $N_{xt}$  indicados na Figura 8.14b. Observe que, se a espessura é uniforme, o equilíbrio de forças na direção  $x$  implica que as forças tangenciais nas faces A e B, indicadas na Figura 8.14b, devem ser idênticas, isto é,  $N_{xt}$  **não varia ao longo da direção tangencial da seção**. Observe que essa condição é a mesma hipótese usada para torção de tubos fechados de paredes finas de material homogêneo-isotrópico, vista por exemplo em Timoshenko [196]. Naquele caso essa hipótese era suficiente para produzir uma solução aproximativa do problema. Já no caso atual de tubos laminados, precisamos estender um pouco mais a aproximação.

Considere novamente o equilíbrio de forças na direção  $x$  do elemento diferencial, mas agora aplicando a seguinte hipótese.

- **Hipótese 1:** o estado de tensões em cada lâmina consiste apenas em cisalhamento, isto é, as componentes de tensão normal  $\sigma_x$  e  $\sigma_t$  são nulas nas lâminas. Note que, se alguma das lâminas ortotrópicas estivesse orientada angularmente em relação a  $x$ , o estado de tensões não seria o cisalhamento puro, tornando incorreta esta hipótese.

Com esta hipótese o equilíbrio de forças em  $x$  pode ser descrito apenas levando em conta as forças cisalhantes nas faces A e B de cada camada:

$$\sum F_x \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^N dF_k^A = \sum_{k=1}^N dF_k^B.$$

Considerando que a **espessura de cada camada seja constante ao longo da direção tangencial  $t$** , pode-se fazer as seguintes hipóteses adicionais.

- **Hipótese 2:** o fluxo de forças em cada camada é uniforme ao longo da direção tangencial  $t$  da seção, isto é, em cada camada  $k$  temos

$$dF_k^A = dF_k^B. \tag{8.104}$$

- **Hipótese 3:** a tensão cisalhante numa lâmina é uniforme ao longo de sua espessura. Como consequência, a eq.(8.104) torna-se então

$$\tau_k h_k ds \approx cte. \text{ ao longo de } s \quad \implies \quad \tau_{xt}^k \approx cte. \text{ ao longo de } s \text{ na camada } k,$$

isto é, a tensão cisalhante na camada  $k$  não varia ao longo da seção.

Podemos calcular o **momento torçor resultante** das tensões cisalhantes. Com o auxílio da Figura 8.15 o momento provocado pela força  $dF_k$  numa lâmina genérica é

$$dM_k = \tau_k h_k ds \rho,$$

*Solução:*

Primeiramente, obtemos o módulo homogêneo  $G_t$  da barra a partir da eq.(8.114). Note que, como as lâminas são do mesmo material e estão orientadas em  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , os módulos  $G_{xt}^k$  obtidos de (4.67) são idênticos nas três lâminas, o que faz com que o módulo total da seção seja  $G_t = 7,6$  GPa.

O ângulo de torção vem de (8.115). A área da seção circunscrita pelo perímetro médio foi calculada no Exemplo 1 como  $A = 360 \text{ mm}^2$ . Então

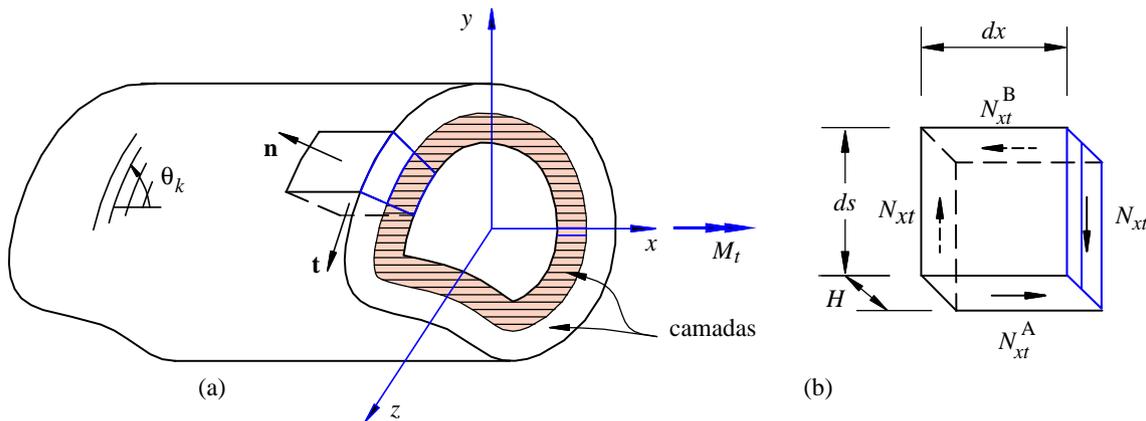
$$\Delta\varphi = \frac{M_t S l}{4A^2 G_t H} = \frac{6.000 \times 120 \times 10^3}{4 \times 360^2 \times 3} = 0,0609 \text{ rad} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi = 3,5^\circ}$$

As tensões em cada lâmina vêm de (8.113) como:

$$\tau_{xt}^{l_1} = \tau_{xt}^{l_2} = \tau_{xt}^{l_3} = \frac{G_{xt}^{l_1} M_t}{2AG_t H} = \frac{7.600 \times 6.000}{2 \times 360 \times 7.600 \times 3} = 2,78 \text{ MPa.}$$

**8.6.3 Torção de tubos de camadas ortotrópicas angulares**

Consideramos uma situação semelhante àquela da seção anterior, da torção de uma barra tubular de seção fechada, simplesmente conexa (um só furo), com paredes delgadas e espessura e propriedades uniformes ao longo da direção tangencial  $t$ , como ilustrado na Figura 8.16a. Entretanto, **admitimos aqui a presença de camadas ortotrópicas orientadas angularmente em relação à direção axial  $x$ .**



**Figura 8.16:** Elemento diferencial de corpo livre da parede do tubo, com os esforços cisalhantes devidos à torção.

Consideremos um elemento diferencial da parede do tubo como na Figura 8.16. Consideremos também que os esforços nas direções  $x$ - $n$ - $t$  sejam todos nulos, exceto pelo esforço cisalhante no plano tangente à parede,  $N_{xt}$ , que atua como indicado. Observe que isto não significa que as diversas componentes de tensão em cada lâmina, particularmente  $\sigma_t$  e  $\sigma_x$ , sejam nulas. De fato, em presença de lâminas angulares elas não o são.

A estratégia de solução neste caso consiste em considerar o elemento diferencial na Figura 8.16b como um elemento de placa laminada e usar a TCL sobre ele, considerando os esforços:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_t \\ N_{xt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{xt} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (8.116)$$

Primeiramente, obtemos um módulo de elasticidade cisalhante homogeneizado  $G_t$ . Para isso, simplesmente tomamos de (8.31):

onde  $S$  é o perímetro médio da seção e  $A$ , a área circunscrita. Note que esta é a mesma expressão obtida para o tubo isotrópico, com o uso do módulo equivalente  $G_t$ . Note que a espessura  $H$  pode variar ao longo do perímetro. Também,  $A'_{66}$  é função de  $x$  e  $s$ , isto é,  $A'_{66} = A'_{66}(x, s)$ . Logo,  $G_t = G_t(x, s)$ . Da mesma forma,  $M_t = M_t(x)$  e  $A = A(x)$ . Neste caso, o valor de  $G_t$  a ser usado nessa equação para obter  $\varphi'$  deve ser um valor médio ao longo do perímetro, de forma a se ter  $G_t = G_t(x)$ , e o lado direito de (8.122) ser função apenas de  $x$ .

O cálculo das tensões é feito da forma normal para laminados usando a TCL, como descrito na Seção 6.3. Cada ponto da parede é analisado usando os esforços dados em (8.116), isto é,

$$\sigma^{xl_k} = \overline{\mathbf{Q}}^k \mathbf{A}' \mathbf{N}, \quad \text{e} \quad \sigma^{ll_k} = \mathbf{T}^k \sigma^{xl_k}, \quad (8.123)$$

de forma a permitir a aplicação de um critério de falhas.

### Exemplo 7 – Torção de eixo tubular anisotrópico de seção retangular

Considere a barra tubular de seção retangular do Exemplo 1, ilustrada na Figura 8.3, página 205. A parede é formada por três lâminas ortotrópicas idênticas de espessura  $h_k = 1$  mm cada, com as propriedades mostradas naquele exemplo e orientadas a  $[45^\circ / -45^\circ / 45^\circ]$  em relação ao eixo  $x$ . Estime o ângulo de torção e as tensões nas lâminas para um torque aplicado de  $M_t = 40$  kNmm. (Note que este problema é idêntico ao Exemplo 4, página 215, exceto quanto ao carregamento e às orientações das lâminas.)

*Solução:*

Primeiramente, buscamos o módulo equivalente  $G_t$  para o laminado usando (8.117). A matriz de flexibilidade  $[A']$  do laminado na parede do tubo foi obtida no Exemplo 2, eq.(8.54). Isto permite calcular

$$G_t = \frac{1}{A'_{66}H} = \frac{1}{10,92 \cdot 10^{-6} \times 3} = \boxed{30.525 \text{ MPa} = G_t} \quad (8.124)$$

O ângulo de torção vem de (8.122):

$$\Delta\varphi = \frac{M_t S l}{4A^2 G_t H} = \frac{40.000 \times 120 \times 10^3}{4 \times 800^2 \times 30.525 \times 3} = 0,0205 \text{ rad} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi = 1,17^\circ} \quad (8.125)$$

Os esforços  $N_x$  e  $N_y$  são nulos na parede. O esforço cisalhante  $N_{xt}$  é dado por (8.118):  $N_{xt} = M_t/2A = 40.000/(2 \times 800) = 25$  N/mm. Com estes esforços a TCL produz as tensões em cada camada usando (8.123), com as matrizes dadas no Exemplo 2. Os valores de tensão obtidos são:

TCL (MPa)					
	lâmina 1	lâmina 2		lâmina 1	lâmina 2
$\sigma_x$	5,23	-10,5	$\sigma_1$	12,2	-21,5
$\sigma_y$	5,23	-10,5	$\sigma_2$	-1,75	0,607
$\tau_{xy}$	6,97	11,1	$\tau_{12}$	0	0

O mesmo problema foi modelado por elementos finitos de casca laminada de forma a qualificar esta solução. Primeiramente, a hipótese fundamental sobre a uniformidade de  $N_{xt}$  em toda a parede do tubo e a nulidade dos demais esforços são confirmadas no teste numérico. No nó central da face mais larga, os resultados obtidos numericamente são:  $N_{xt} = 24,7$  N/mm, ângulo de torção  $\Delta\varphi = 2,08 \cdot 10^{-2}$  rad ( $1,19^\circ$ ), e as tensões são dadas na seguinte tabela:

Elementos Finitos de Casca (MPa)						
	lâmina 1		lâmina 2		lâmina 3	
superfície	inferior	superior	inferior	superior	inferior	superior
$\sigma_x$	3,67	4,65	-9,61	-11,0	5,65	6,64
$\sigma_y$	3,82	4,71	-9,55	-11,1	7,47	6,50
$\tau_{xy}$	5,11	6,29	10,1	11,7	5,61	8,65

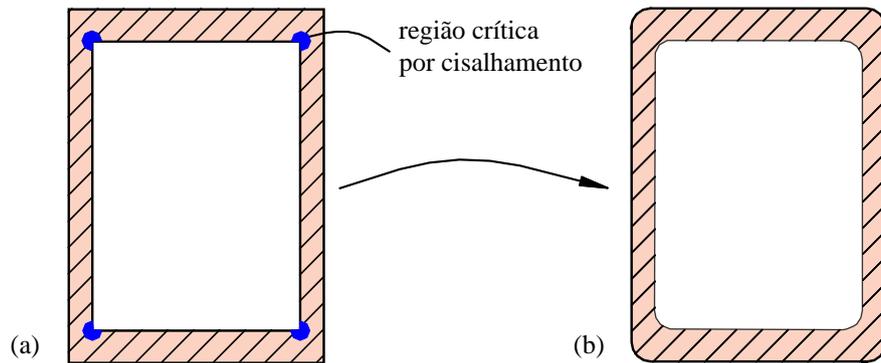
$$M_t = \frac{\gamma_{xt} G_t J}{\bar{r}} \quad \longrightarrow \quad M_t = \frac{A'_{16} N G_t J}{2\pi \bar{r}^2} \quad (8.128)$$

$G_t$  é dado em (8.117) como  $G_t = 1/HA'_{66}$ ,  $J$  é o momento polar de inércia da seção e  $\bar{r}$  o raio médio do anel. As expressões (8.126) a (8.128) são válidas mesmo que o tubo seja composto por mais que uma lâmina, desde que forme um laminado simétrico em relação à superfície média do tubo e que a espessura total seja “pequena” em relação ao raio médio.

Observamos que, caso  $\theta_k$  fosse  $0^\circ$  ou  $90^\circ$  em todas as lâminas, teríamos  $A'_{16} = A'_{26} = 0$ . O acoplamento extensão-cisalhamento teria desaparecido então, e o comportamento da viga teria sido descrito apenas pelas eqs.(8.44) a (8.47). Hoff [98] e Pagano [147] mostraram que vigas de seção plana retangular aberta como na Figura 8.1, simétrica, com lâminas orientadas em  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , podem ser analisadas quanto à flexão usando o módulo de elasticidade equivalente mostrado na fórmula (8.62). Podemos considerar também que as outras fórmulas de equivalência mostradas atingirão melhor nível de precisão quando tivermos as seções com dois eixos de simetria, como as seções retangulares fechadas e a circular, com as camadas orientadas em  $0^\circ$  e  $90^\circ$  em relação ao eixo  $x$ .

### 8.7.1 Concentração de tensões

Deve-se notar que as fórmulas desenvolvidas aplicam-se apenas às regiões de curvatura suave das seções, principalmente no caso de torção. Nas regiões próximas aos vértices da seção ocorrem concentrações de tensões. Tubos em seções retangulares formados por resinas reforçadas são particularmente suscetíveis de ruptura em flexão ou torção nessas regiões. Como indicação geral de projeto, a recomendação é a mesma dos componentes homogêneos: evitar cantos vivos e usar, tanto quanto possível, contornos suaves como ilustrado na Figura 8.19.



**Figura 8.19:** Projeto com concentração de tensões em (a) e projeto recomendado em (b) para suportar flexão e torção.

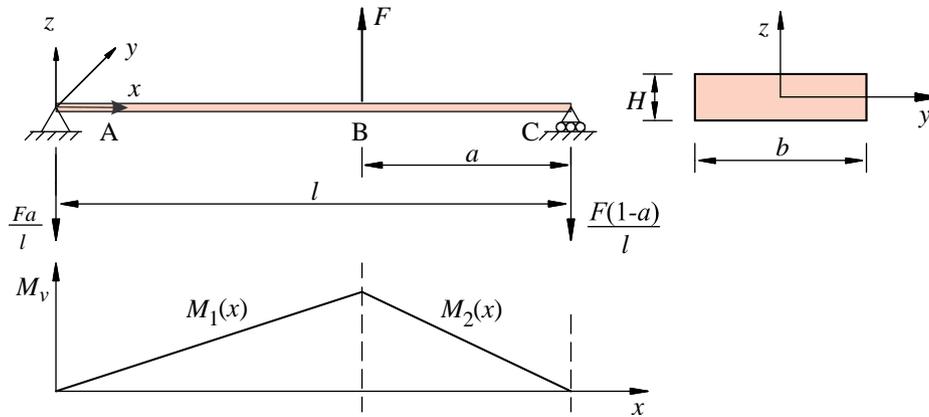
## 8.8 Deflexão de vigas planas de Timoshenko

Na Seção 8.2 determinamos módulos de elasticidade equivalentes para o uso de flexão de vigas laminadas. Agora usaremos esses módulos na determinação da solução elástica do problema, isto é, na determinação da curva de deflexão  $w(x)$  para alguns tipos de carregamento e condições de contorno. Aqui consideramos as chamadas **vigas de Timoshenko**, isto é, aquelas em que se considera a deformação cisalhante transversal. Como será visto, em geral o efeito do cisalhamento é o de aumentar as deflexões em relação à solução de Bernoulli. Enquanto nas chamadas *vigas longas* o efeito pode ser desprezado, nos casos de vigas curtas a correção pode se tornar necessária. Isto é verdade principalmente no caso de vigas e painéis sanduiche, vistos no Capítulo 9. A maneira como o cisalhamento é considerado na teoria de Timoshenko é tal que a distribuição de tensões normais de flexão é idêntica à da teoria de Bernoulli.

$$\begin{aligned}
 w(x) &= - \int \int \frac{p(x)}{kG_{xz}FA} dx + \int \int \int \frac{p(x)}{E_{xF}I} dx - \frac{D_1 kG_{xz}FA}{6E_{xF}I} x^3 + \frac{D_2}{2} x^2 + D_3 x + D_4, \\
 \psi(x) &= - \int \int \frac{p(x)}{E_{xF}I} dx + D_1 \frac{G_{xz}FA}{2E_{xF}I} x^2 - D_2 x - D_3 + D_1.
 \end{aligned}
 \tag{8.149}$$

### 8.8.1 Solução para diversos casos práticos

Apresentaremos aqui os detalhes do processo de solução para o caso ilustrado na Figura 8.20. Soluções para diversos outros casos úteis em projeto são tabelados na Seção 5.2. Na Figura 8.20 temos as expressões para o momento fletor em cada um dos trechos da viga. Usamos então (8.144) e (8.145) em cada um desses trechos.



**Figura 8.20:** Viga laminada biapoiada sob carga concentrada e diagrama de momentos fletores.

No **trecho 1**, isto é, para  $x \in [0; l - a]$ , temos que  $M_1(x) = Fax/l$ , e (8.144)-(8.145) resultam em

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \frac{Fax^2}{2E_{xF}Il} + C_3, \\ w_1(x) = \frac{Fax}{kG_{xz}FA l} - \frac{Fax^3}{6E_{xF}Il} - C_3 x + C_4. \end{cases}
 \tag{8.150}$$

No **trecho 2**, para  $x \in [l - a; l]$ , temos  $M_2(x) = F(l - a)(l - x)/l$ , o que resulta em

$$\begin{cases} \psi_2(x) = \frac{F(l - a)}{E_{xF}Il} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + D_3, \\ w_2(x) = \frac{F(l - a)(l - x)}{kG_{xz}FA l} - \frac{F(l - a)}{E_{xF}Il} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - D_3 x + D_4. \end{cases}
 \tag{8.151}$$

Temos então quatro constantes de integração,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $D_3$  e  $D_4$ , a serem determinadas de forma que as duas condições de contorno e as duas condições de compatibilidade geométrica sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned}
 w_1(0) &= 0, & w_1(l - a) &= w_2(l - a), \\
 w_2(l) &= 0, & \psi_1(l - a) &= \psi_2(l - a),
 \end{aligned}
 \tag{8.152}$$

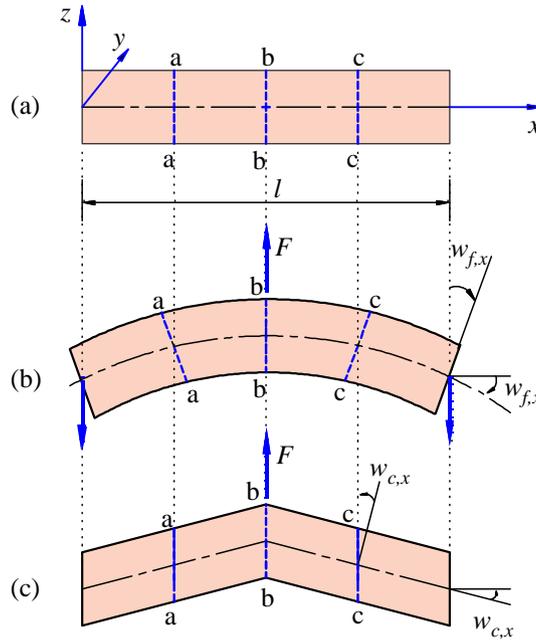
isto é, deslocamentos nulos nos apoios e continuidade do deslocamento e da rotação da normal no ponto de aplicação da carga. Essas quatro condições produzem um sistema algébrico de equações cuja solução é:

podem ser separados em duas funções na forma

$$w(x) = w_f(x) + w_c(x), \quad (8.158)$$

como ilustrado na solução do problema da Seção 8.8.1, eq.(8.157). A função  $w_f(x)$  é a solução obtida pela teoria de Euler-Bernoulli, usando apenas um momento fletor puro, isto é, ignorando o efeito do esforço cortante, e  $w_c$  é a parcela proveniente do esforço cortante. Ocorre que tabelas de soluções de viga pela teoria de Bernoulli para diversas combinações de apoios e carregamentos são bastante comuns em diversas publicações. O que mostramos a seguir é um processo de separação das variáveis e das equações de forma a permitir um cálculo rápido apenas da solução de cisalhamento  $w_c(x)$ .

Consideremos, por exemplo, o problema da viga biapoiada como na Figura 8.20, mas com a carga centrada, e sua solução na eq.(8.157). A Figura 8.21 ilustra as configurações da viga associadas à flexão pura,  $w_f(x)$ , e ao cisalhamento,  $w_c(x)$ .



**Figura 8.21:** Decomposição da deflexão de uma viga biapoiada em parcela de flexão pura  $w_f(x)$ , em (b), e deflexão devida ao esforço cortante,  $w_c(x)$  em (c).

Por definição,  $w_f$  é a parcela de solução tal que a rotação da normal é igual à rotação da superfície de referência, como indicado na Figura 8.21b, isto é, o cisalhamento é ignorado. Da definição do cisalhamento em (8.135),  $w_f(x)$  é tal que

$$\psi(x) = -\frac{dw_f}{dx}. \quad (8.159)$$

Mas, da relação constitutiva (8.140), com  $\kappa = \psi'$ ,

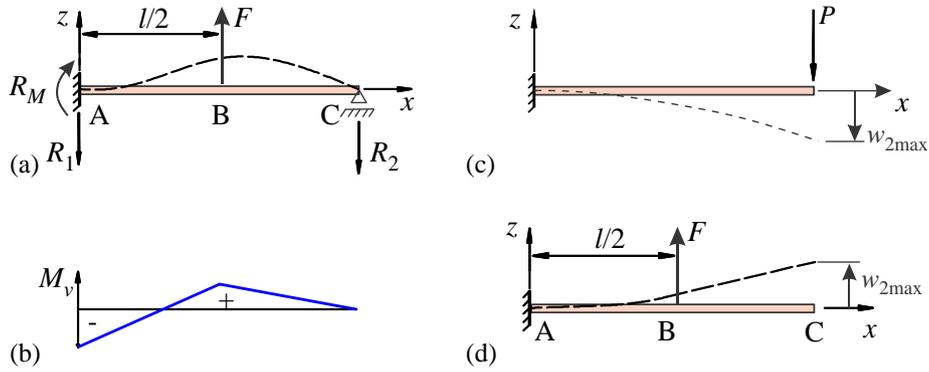
$$M_v = -E_x f I \frac{d^2 w_f}{dx^2}. \quad (8.160)$$

Esta é a relação normalmente usada para achar a curva elástica de Euler-Bernoulli quando for conhecida a distribuição dos momentos.

Entretanto, levando (8.158) e (8.159) a (8.141) obtemos:

$$w' = \frac{M'_v}{kG_{xz}FA} - \psi \quad \implies \quad w'_c = \frac{M'_v}{kG_{xz}FA}. \quad (8.161)$$

Logo, conhecida a distribuição de momentos, a parcela  $w_c$  de deflexão pode ser obtida de forma simples e independente de  $w_f$  integrando essa equação, o que resulta em:



**Figura 8.22:** (a) problema de viga hiperestática; (b) esboço do diagrama de momentos fletores; (c) e (d) decomposição do problema em dois casos isostáticos.

A maneira mais confortável de resolver o problema é usar o princípio de sobreposição dos efeitos e decompor o problema em dois outros, isostáticos, os casos 1 e 2 da Seção 5.2, que são ilustrados nas Figuras 8.22 (c) e (d).

A deflexão máxima para os casos 1 e 2 é, respectivamente,

$$w_{1\max} = \frac{5Fl^3}{48E_{xf}I} + \frac{Fl}{2kG_{xzf}A} \quad \text{e} \quad w_{2\max} = -\frac{Pl^3}{3E_{xz}I} - \frac{Pl}{kG_{xzf}A}. \quad (8.166)$$

Buscamos o valor de  $P$  que faz com que o deslocamento na extremidade seja nulo, isto é,  $w(l) = w_{1\max} + w_{2\max} = 0$ . Este é o valor da reação  $R_2$  no apoio  $C$ , dada por:

$$P = \frac{F \left[ \frac{1}{2\alpha_c} + \frac{5l^2}{48E_{xz}I} \right]}{\left[ \frac{1}{\alpha_c} + \frac{l^2}{3E_{xz}I} \right]} \quad (8.167)$$

onde  $\alpha_c = kG_{xzf}A$ . Esta expressão pode ser posta de forma compacta como  $R_2 = P = FC_2/C_1$ , onde as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são definidas como as expressões entre colchetes no denominador e numerador de (8.167), respectivamente. Conhecido  $R_2$ , por equilíbrio temos as demais reações:

$$R_1 = \frac{F}{C_1}(C_1 - C_2) \quad \text{e} \quad R_m = \frac{Fl}{2C_1}(2C_2 - C). \quad (8.168)$$

As distribuições de momento fletor em cada trecho podem ser obtidas como

$$M_{AB}(x) = \frac{Fl}{2C_1}(2C_2 - C_1) + \frac{Fx}{C_1}(C_1 - C_2), \quad M_{BC}(x) = \frac{FC_2}{C_1}(l - x). \quad (8.169)$$

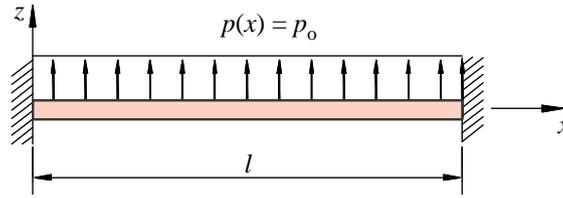
Também, tomando o valor de  $P$  em (8.167) em termos de  $F$ , podemos sobrepor as soluções dos casos 1 e 2 e obter a solução em cada trecho como

$$\left\{ \begin{aligned} w_{AB}(x) &= \frac{Fx^2}{12E_{xf}I} (3l - 2x) - \frac{FC_2}{6E_{xf}IC_1} x^2 (3l - x) + \frac{Fx(C_1 - C_2)}{kG_{xzf}AC}, \\ w_{BC}(x) &= \frac{Fl^2}{48E_{xf}I} (6x - l) - \frac{C_2Fx^2}{6E_{xf}I} (3l - x) + \frac{F(lC_1 - 2C_2x)}{2kG_{xzf}AC_1} \end{aligned} \right. \quad (8.170)$$

Os dois primeiros termos de cada expressão simplificam-se para as expressões de  $w_f(x)$  obtidas pela teoria de Bernoulli, no limite  $kG_{xzf}A \rightarrow \infty$ . Também as reações e esforços em (8.167) e (8.169) simplificam-se para os valores obtidos pela teoria de Bernoulli. Observe que este é um caso em que não é evidente a separação da deflexão em parcelas de flexão e cisalhamento distintos, como em (8.158).

**Exemplo 9 – Viga laminada biengastada sob carga uniforme**

Consideramos aqui o caso 15 da Seção 5.2, página 119, a viga biengastada sob carga uniforme como na Figura 8.23.



**Figura 8.23:** Viga biengastada sob carga uniforme  $p_0$ .

*Solução:*

Este tipo de problema, composto por um único vão, é mais facilmente resolvido pelo método de integração direta das equações diferenciais. Tomamos inicialmente as equações de equilíbrio na forma  $M_v'' = -p(x) = -p_0$ . Integrando, temos

$$M_v(x) = -\frac{p_0 x^2}{2} + C_1 x + C_2. \tag{8.171}$$

Substituímos esta expressão em (8.140) e integramos, obtendo

$$EI\psi(x) = -\frac{p_0 x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3. \tag{8.172}$$

Observe que as condições de contorno são  $w(0) = w(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$ . A condição  $\psi(0) = 0$  implica  $C_3 = 0$ . Levando (8.171) e (8.172) a (8.145), obtemos

$$w(x) = -\frac{P x^2}{2\alpha_c} + \frac{C_1 x}{\alpha_c} + \frac{p_0 x^4}{24EI} - \frac{C_1 x^3}{6EI} - \frac{C_2 x^2}{2EI} + C_4 + \frac{C_2}{\alpha_c}, \tag{8.173}$$

com  $\alpha_c = kG_{xz}fA$ . Aplicando  $w(0) = 0$ , obtemos  $C_4 = -C_2/\alpha_c$ . Em seguida, aplicamos as condições restantes  $w(l) = \psi(l) = 0$ , o que produz

$$C_1 = \frac{p_0 l}{2}, \quad C_2 = -\frac{p_0 l^2}{12}, \quad C_4 = \frac{p_0 l^2}{12\alpha_c}. \tag{8.174}$$

Assim, a solução é:

$w(x) = \frac{p_0 x(l-x)}{2\alpha_c} + \frac{p_0 x^2}{24E_x f I} (x-l)^2 = w_c(x) + w_f(x), \quad \psi(x) = -\frac{p_0 x^2}{12E_x f I} (2x^2 - 3lx + l^2)$
$M_v(x) = \frac{p_0}{12} (6lx - 6x^2 - l^2), \quad Q_v(x) = M_v'(x) = \frac{p_0}{2} (l - 2x).$

(8.175)

As reações  $M_1$  e  $R_1$  no apoio da esquerda são obtidas pelo método das seções como  $M_1 = -M_v(0)$  e  $R_1 = -Q_v(0) = -p_0 l/2$ . Observe que neste problema os deslocamentos são claramente separáveis em uma parcela de cisalhamento e uma de flexão pura.

## 8.9 Exercícios

8.1 Deduza as expressões para os deslocamentos coplanares de uma barra laminada sob tração, eqs.(8.12)–(8.14).

8.2 Obtenha as funções  $f^k$  em (8.17).

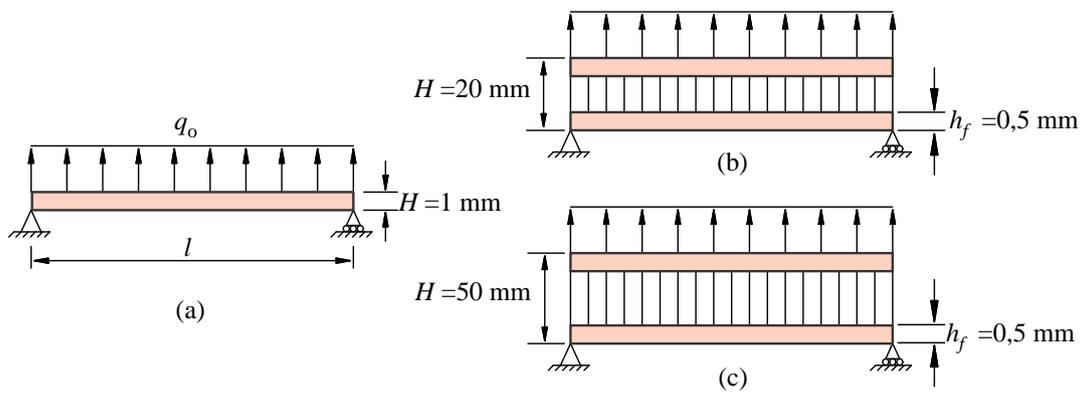


Figura 8.24: Vigas laminadas do Exercício 13.

- 8.15 Considere um laminado com quatro lâminas de grafite-epóxi AS/3501 orientadas a  $[+45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / +45^\circ]$  com espessuras de 0,25 mm. ( $E_1 = 138$  GPa,  $E_2 = 9$  GPa,  $G_{12} = 6,9$  GPa,  $\nu_{12} = 0,3$ .) Determine os módulos de elasticidade equivalentes  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $G_{xy}$  e  $\nu_{xy}$  para carregamentos de membrana. (Solução:  $A_{11} = 45,22$  GPa mm,  $A_{12} = 31,42$  GPa mm,  $A_{66} = 35,66$  GPa mm,  $E_x = 23,4$  GPa,  $G_{xy} = 35,6$  GPa,  $\nu_{xy} = 0,694$ .)
- 8.16 Considere uma viga composta por duas barras retangulares como na Figura 8.7, com seção total de 150 mm de largura e 265 mm de altura. A barra inferior é de aço, de seção 150 mm x 15 mm, com módulo  $E_{aco} = 200$  GPa. A barra superior é de **madeira**, com seção de 150 mm x 250 mm, e módulo  $E_{mad} = 10$  GPa. A seção suporta um momento fletor de 28.000 Nm em relação ao eixo horizontal. Quais as tensões de flexão máximas no aço e na madeira? (Solução:  $\bar{Z} = 67,73$  mm medido a partir da borda inferior,  $I_{yy} = 5,553 \cdot 10^8$  mm<sup>4</sup>,  $\sigma_{mad} = 9,95$  MPa,  $\sigma_{aco} = 68,28$  MPa.)

